La Homotecia, Un Tema Casi Olvidado en la Enseñanza de la Educación Matemática en Buenaventura: Una Propuesta desde el Punto de Vista Algebraico

Jorge Armando Ortiz A, hermilaaragon@hotmail.com
Jhon Jair Angulo V. ,licenmate@hotmail.com)
Universidad del Valle sede Pacifico

1. Presentación

Este trabajo nace de la preocupación que se nos generó con respecto a la forma como no está siendo tomada en cuenta la geometría transformacional en los colegios de Buenaventura[137]. Teniendo como referencia lo anterior, nos dedicamos a buscar en nuestro curso de geometría 2, la manera como hacer que los conceptos de geometría transformacional fueran un poco más cercanos para las personas que están interesadas enseñar y profundizar en estos temas.

En una clase de geometría se nos generó la duda que si era posible realizar una transformación geométrica sin la necesidad de utilizar regla y compás, encontrando que se podía a través ecuaciones lograr realizar transformaciones geométricas de una manera más rápida y segura, teniendo como punto de partida la figura ubicada en el plano cartesiano, pues es necesario tener datos precisos de la ubicación de la figura para de esta manera utilizar las características que nos brinda utilizar las propiedades del plano, la figura y la transformación geométrica a trabajar.

En este trabajo se hablara del proceso que hubo para llegar a la fórmula de homotecia ($X´=KX - KXr + Xr$; $Y´ = KY - KYr + Yr$)[138], así como también es de vital importancia mostrar una generalización de la misma para mostrar cómo puedo realizar varias homotecias al mismo tiempo usando el mismo punto de origen. Es importante mencionar que para lograr realizar la fórmula de la homotecias es necesario reconocer el semigiro

137

 Trabajo de investigación realizado en la Institución Educativa Liceo del Pacifico en el municipio de Buenaventura (2009)

138

Esta fórmula calcula puntos en X y en Y, donde k= coeficiente de similaridad, (X,Y) = puntos a aplicarle la homotecia, (Xr,Yr) =puntos del centro de homotecia (O) y (X´, Y´) =puntos que se obtiene al realizar la transformación.

como la base teórica que permitió avanzar en el desarrollo de la construcción de la fórmula, pues antes de pensar en la fórmula de la homotecia es importante describir muy brevemente que proceso rodea la construcción de la formula de semigiro (X´= 2Xr – X; Y`= 2Yr – Y)[139], para de esta manera lograr explicar de una manera clara y precisa las homotecias.

2. Referentes teórico

MEN (1998, p. 37), plantea que;"El estudio de la geometría intuitiva en los currículos de las matemáticas escolares se había abandonado como una consecuencia de la adopción de

139 Esta fórmula calcula puntos en X , Y, donde (Xr, Yr) centro del semigiro, (X, Y)= coordenada a la que se le quiere realizar el semigiro y (X´, Y´)= punto que se obtienen al realizar la transformación.

la “matemática moderna”. Desde un punto de vista didáctico, científico e histórico, actualmente se considera una necesidad ineludible volver a recuperar el sentido espacial intuitivo en toda la matemática, no sólo en lo que se refiere a la geometría.”

Por otro lado, en “En Geometría Analítica, el estudio de las propiedades de las curvas se realiza sobre el estudio de las propiedades algebraicas de las ecuaciones correspondientes, permitiendo la interpretación de los problemas geométricos a través del álgebra” (Descartes, Libro III)

Moriana (2000) cita a (Jahn, p. 48 – 49) el cual afirma que “El programa Erlangen libera el pensamiento geométrico de toda intuición, enriquece la geometría abstracta. Considerar al espacio como objeto de estudio geométrico es el otro punto importante que se desprende del análisis del programa de Erlangen” (Jahn, p. 49).

De todo lo anterior se puede concluir, que en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas no hay saberes estáticos que día a día se ciñan a un modelo o patrón determinado, sino que más bien la variabilidad de técnicas para la resolución de un problema en particular contribuye al enriquecimiento y apropiación del conocimiento.

3. Descripción general de la experiencia en el aula (grado séptimo)

Los colegios de Buenaventura en estos últimos años se han preocupado por movilizar y hacer mucho más dinámico el conocimiento matemático en las aulas de clases, haciendo así que los estudiantes logren potencializar sus conocimientos en esta área que moviliza un saber. Pero ha sido notorio en los planteles educativos, que la geometría transformacional ha sido dejada de lado hasta casi ya no enseñarse, esto puede ser debido a la manera como es planteada en estos días (manejo de regla y compas). En el caso específico de la homotecia, esta ha sido dejada casi de lado debido a la manera como es presentada en la actualidad en los libros de texto. Consientes y preocupados por esta situación se pretende con este trabajo proponer una nueva manera con la cual el profesor pueda enseñar las homotecias, haciendo de estas un conocimiento mucho más asequible a los estudiantes y de esta manera se pueda hacer que las homotecias sean más tenidas en cuenta en un aula de clase.

Ahora bien, frente al desarrollo las actividades realizadas en el salón de clases, encontramos que los estudiantes no tenían ni idea de que era una homotecia, ni mucho menos reconocían un plano cartesiano, lo cual nos llevo a diseñar una serie de actividades las cuales se dieron en varios momentos.

- Reconocimiento del plano cartesiano.
- Grafica de puntos y figuras en el plano
- Presentación de una serie de figuras a las cuales ya se les había aplicado una homotecia, con el objetivo de que el estudiante pudiera reconocer la semejanza entre las figuras y las propiedades de la transformación.
- Presentación formal de la teoría homotética y planteamiento de algunos ejercicios teniendo en cuenta el origen de coordenadas.
- Presentación a los estudiantes de algunos ejercicios de homotecias cuyo centro no era el origen de coordenadas, donde se espera observar la reacción de estos para la solución de los ejercicios.
- Finalmente, se presento la expresión general, se resolvieron algunos ejercicios y se escucharon algunas conclusiones por parte de los estudiantes.

La actividad se llevo a cabo en un periodo de 8 horas desarrolladas en cuatro sesiones. Al finalizar nuestra presentación, los estudiantes se mostraron muy satisfechos con los conocimientos que ellos habían adquirido, los cuales manifestaban que habían aprendido demasiado en poco tiempo de algo que no tenían ni idea que existía.

4. Logros y dificultades que se pudieron evidenciar en la Institución Educativa Liceo del Pacifico.

Logros. A través de nuestra interacción con los estudiantes y de la relación que sostuvimos con los docentes, consideramos se obtuvieron los siguientes logros.

- Captar la atención de un grupo de jóvenes que ponían resistencia al desarrollo del trabajo.
- Despertar el interés de los estudiantes, para el estudio de algunos temas relacionados con la geometría transformacional.
- Que los estudiantes reconocieran propiedades entre figuras semejantes, obtenidas a través de una transformación geométrica.

- Reforzar la geometría que se estaba enseñando en la Institución Educativa Liceo del Pacifico, mostrando una nueva forma de ver las transformaciones geométricas, en este caso homotecias.
- Dialogar con algunos docentes de matemáticas pertenecientes a la Institución Educativa Liceo del Pacifico, en procura de diseñar situaciones de aprendizaje que posibiliten a los profesores mirar la importancia de cambiar la forma como se está enseñando la geometría transformacional, en especial la homotecia.

Dificultades. En el proceso de interacción con los estudiantes, encontramos ciertas dificultades, las cuales se evidenciaron con el desconocimiento del tema a tratar (grafica de puntos en el plano, homotecia), estas dificultades eran generales, porque al parecer a ellos nunca antes se les haba mencionado que era un plano cartesiano. Dando lugar así a las dificultades ya mencionadas. Por otro lado estos estudiantes no sabían establecer una diferencia entre un numero negativo y uno positivo, dado que al parecer el único conjunto numérico que conocen es el de los números naturales, el cual consideramos que lo manejan por el uso diario, es decir por la experiencia, así que para ellos tener la coordenada (-3, -2) era igual a tener (3,2).

Específicamente las dificultades halladas fueron las siguientes:

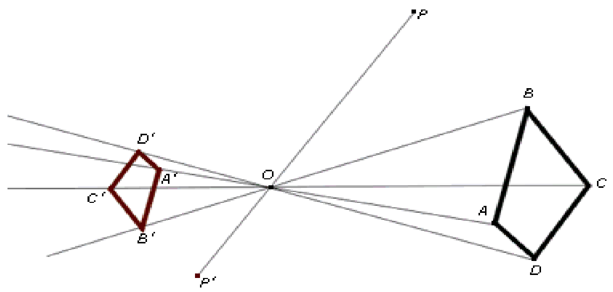
- A los estudiantes aun no se les había enseñado el conjunto numérico de los enteros. Dado que, aun no reconocían las cantidades negativas.
- Los estudiantes no sabían que era un plano cartesiano.
- Muchos estudiantes manifestaban un desacuerdo para el estudio de las matemáticas.
- Los estudiantes no tenían ni idea que era homotecia.
- El colegio no contaba con materiales visuales como video beam para la proyección de la actividad.

5. Estandar (grado 6º a 7º)

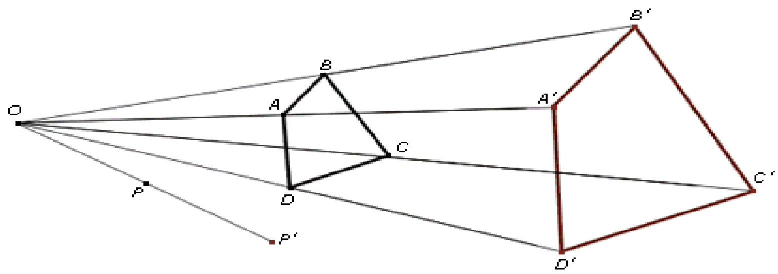
Pensamiento espacial y sistemas geométricos. Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliación y reducción) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.

6. Homotecia

Se llama homotecia de centro O y razón k (distinto de cero) a la transformación que hace corresponder a un punto A otro A´, alineado con A y O, tal que: OA´=k·OA. Si k>0 se llama homotecia directa y si k<0 se llama homotecia inversa.



Homotecia de razón $k = -1/2$



Homotecia de razón $k=2$

7. Homotecias con centro en el origen de coordenadas y fuera de él.

En una homotecia de origen el centro de coordenadas se puede ver con facilidad la relación que existe entre las coordenadas de puntos homotéticos. Si se considera A(x,y) y su homotético A´(x´,y´) la relación que hay entre ellos es la siguiente: x´=kx y´=ky

Cuando el centro homotético se encuentra en un lugar distinto del origen, la relación que existe entre las coordenadas es la siguiente: X´= kx - kxr +xr; Y´ = ky - kyr +yr

Propiedades

La homotecia es una trasformación lineal y por consiguiente conserva:

1. el alineamiento: las imágenes de puntos alineados son alineados: (A,B,C) y (A', B', C') en la figura
2. el paralelismo: dos rectas paralelas tienen imágenes paralelas. En la figura (B*E*) // (C*D*) porque (BE) //(CD).

Además la homotecia conserva:

1. el cociente de longitudes: A'C'/B'E' = AC/BE en la figura

Más aún:

1. La imagen de una recta es otra recta paralela.
2. Todas las longitudes son multiplicadas por |k|, el valor absoluto de la razón.
3. Si $k \neq 1$, el centro de la homotecia es el único punto fijo ($k = 1$ corresponde a la identidad de E: todos los puntos son fijos)
4. Al componer dos homotecias del mismo centro se obtiene otra homotecia con este centro, cuya razón es el producto de las razones de las homotecias iniciales: $h_{o\ k}$ o $h_{ok'} = ho_{k \cdot k'}$.

Al componer homotecias de centros distintos, de razones k y k', se obtiene una homotecia de razón k·k' cuando $k \cdot k' \neq 1$, y una traslación sino. Se dice que el conjunto de las homotecias y las translaciones forman un grupo.

$k = -1$ corresponde a la simetría de centro O, o una rotación alrededor de O de ángulo π radianes (180·)

$|k| > 1$ implica una ampliación de la figura.

$|k| < 1$ implica una reducción.

$k < 0$ se puede interpretar como la composición de una simetría de centro O con una homotecia sin inversión.

Ejemplos.

a. Dado el siguiente triangulo, cuyas coordenadas se pueden ver en la fig 1. Aplicar una homotecia cuyo centro de similaridad K = 2 y centro de similaridad (-1,-1).

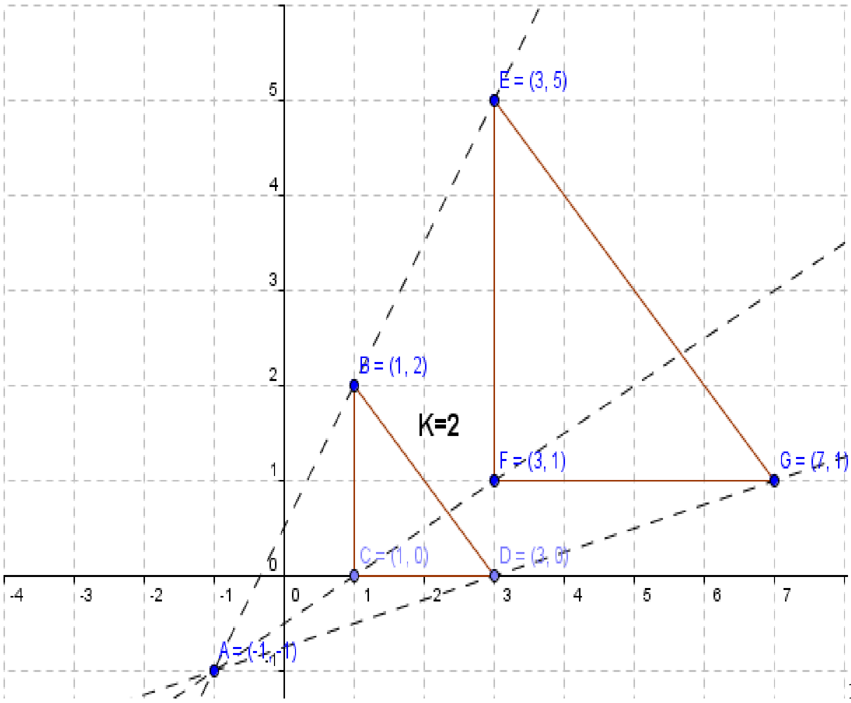


fig 1

Como se observar las coordenadas de los puntos F, E y G, que respectivamente pueden ser C´, B´ y D´, se obtienen después de utilizar la formula X´= Kx - Kxr + xr, Y´= Ky – Kyr + yr [140]. Miremos, tomemos como ejemplo un punto cualquiera (B), y utilicemos la expresión.

X´= 2(1) – 2(-1) + (-1)	Y´= 2(2) – 2(-1) + (-1)
X´= 2 + 2 -1	Y´= 4 + 2 – 1
X´= 3	Y´= 5

De esta manera se puede observar que las coordenadas B´o E son igual a (3,5). Análogamente se realiza el mismo proceso para los demás puntos

b. Dada una circunferencia, un centro de similaridad y una figura resultante después de habérsele aplicado una homotecia (ver fig 2). Hallar el factor de

140

 No haremos la demostración de estas formulas, pues consideramos no son la razón de ser de nuestra presentación, mas sin embargo si alguien desea saber como la hallamos, nos pueden escribir que nosotros les responderemos.

similaridad K que lleva a la figura de menor radio hasta la figura de mayor radio

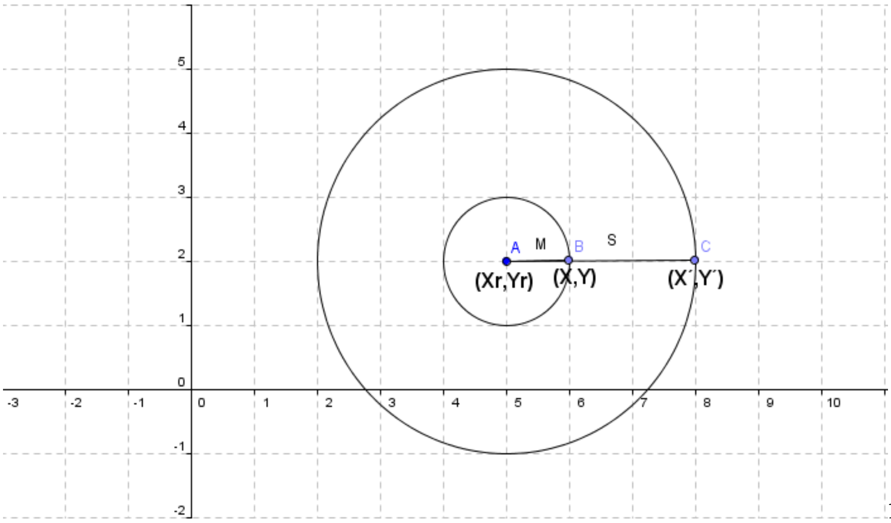


fig 2

Como ya sabemos nuestra expresión general es X´= Kx - Kxr + xr, Y´= Ky – Kyr + yr, de las cuales al despejar de ambas (K), obtenemos:

K= (X´- Xr)/(X- Xr) o´ K= (Y´- Yr)/(Y – Yr)

c. Dado un coeficiente de similaridad K, un cuadrado y el que se obtuvo después de haber aplicado una homotecia. Hallar el centro de similaridad (Xr , Yr) que lleva el cuadrado más pequeños hasta el cuadrado más grande ver fig 3.

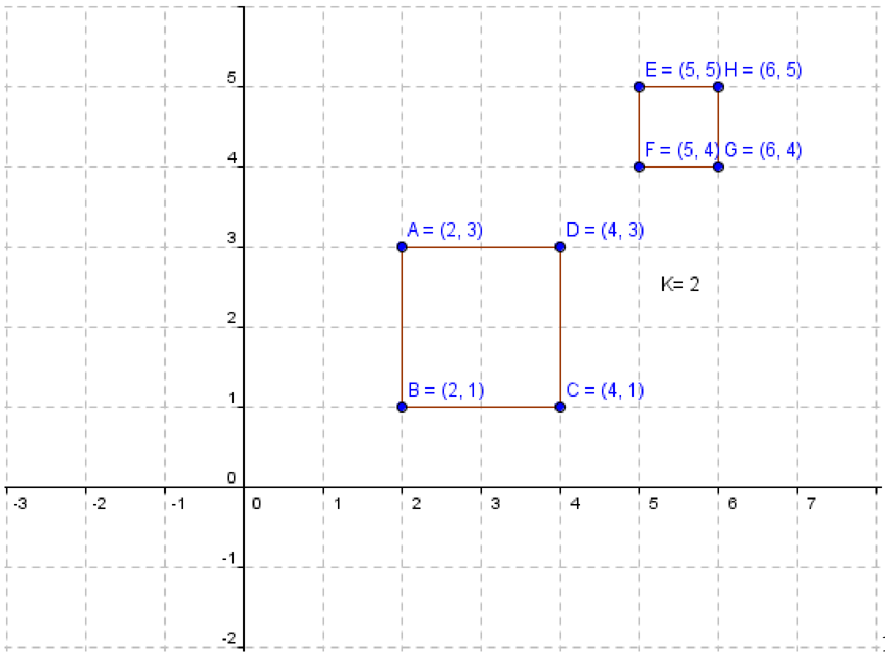
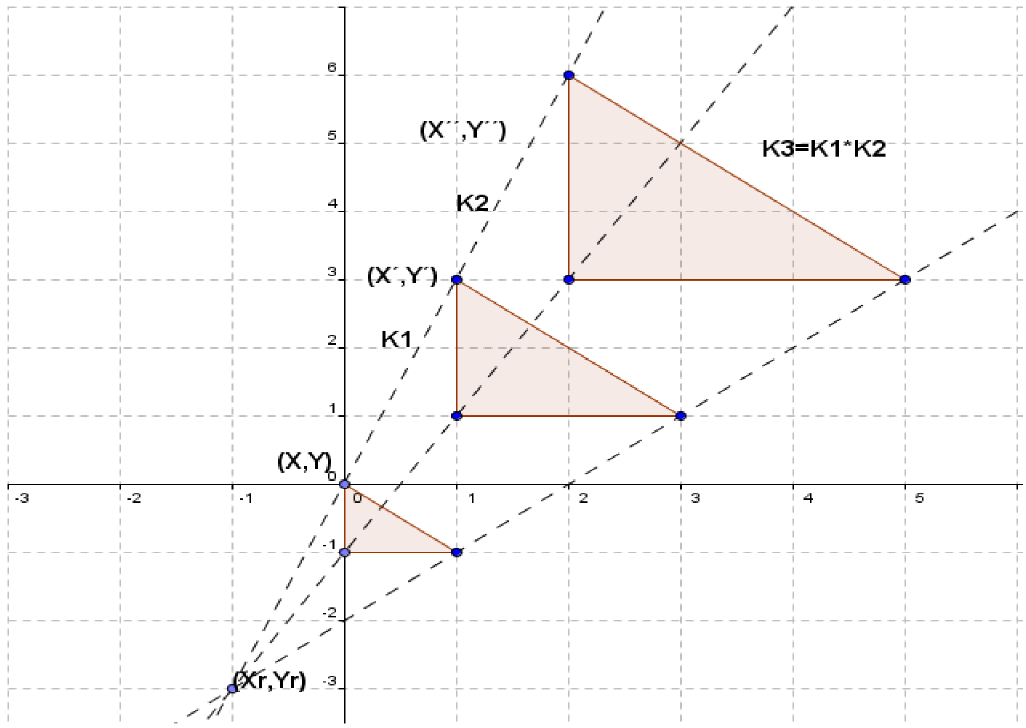


fig 3

Análogamente al caso anterior podemos obtener una expresión de forma general quede cuenta para cualquier caso como este.

$Xr = (X' - Kx)/(1 - K)$ y $Yr = (Y' - Ky)/(1 - K)$

d. Si una figura ha sufrido varias transformaciones (Homotecia), la primera aplicándole un K_1 y la segunda un K_2, y teniendo como centro de homotecia O (Xr, Yr) para ambas. Hallar una fórmula que haga posible llevar de la figura inicial al resultado de la segunda transformación sin hacer manifiesta la primera transformación.



La solución en este caso es X´´ = K3X – K3Xr + Xr, Y´´= K3Y – K3Yr + Yr

De todos modos nuestro uno de nuestros objetivos es que el lector demuestre esta expresión.

9. Reflexión final

Como futuros docentes tenemos la inmensa preocupación, sobre el gran déficit frente al desempeño de los estudiantes, profesores, colegios e instituciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría transformacional, es el motivo por el cual queremos compartir una nueva manera como puede ser vista la geometría transformacional (homotecias) y como esta ayudaría a enriquecer enseñanza de la misma.

En relación al campo de estudio de la Geometría Transformacional, es importante precisar que el propósito fundamental que se pretende lograr con este trabajo es generar la preocupación en la enseñanza y aprendizaje de la geometría transformacional teniendo como referencia el plano cartesiano y el algebra, lo que permitirá que todos los estudiantes de los colegios y escuelas e instituciones, vean en la geometría transformacional una vía práctica y útil para la adquisición de conocimientos.

Finalmente, consideramos que se debe posibilitar el diseño de situaciones que permitan seguir difundiendo esta nueva forma de ver la geometría transformacional [141] en salón de clase.

Bibliografía

Homotecia. (s.f). Recuperado el 7 de Mayo del 2010, de http://es.wikipedia.org/wiki/Homotecia

Moreina, S. (2000). Reseña histórica y aplicaciones de las transformaciones geométricas del plano. Tesis de Maestría no publicada, Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad Nacional del Litoral.

Montesinos, J. (1992 - 1993). Descartes: El Algebra y la geometría. Trabajo presentado en el seminario Orotova de Historia de la Ciencia.

Ministerio de Educación Nacional, (1998). Matemáticas: Lineamientos curriculares (Publicación ISBN/ISSN/DL N 958-691-067-9). Colombia: El ministerio.

Ministerio de Educación Nacional, (2003). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Colombia: El ministerio.

141

 Relacionar la geometría con el algebra, dado que, en nuestro proceso de formación como licenciados en educación básica con énfasis en matemáticas, en las interacciones que tuvimos con algunos textos escolares nunca encontramos una expresión algebraica que diera cuenta de una transformación en el plano, teniendo como centro un lugar distinto del origen.