

Unidad didáctica para aplicación de clases sobre teselaciones para estudiantes de grado quinto
del Colegio Abraham Lincoln

Cesar Camilo Gonzalez Cuchivaguen

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de ciencia y tecnología

Licenciatura en matemáticas

Bogotá D.C.

2018

INDICE

INTRODUCCIÓN	6
1. Análisis del contexto del aula	7
➤ Ubicación del concepto en el currículo de matemáticas:	7
➤ Contexto académico del colegio	8
FUNDADORES	9
SÍMBOLOS DEL COLEGIO	9
Enfoque pedagógico del colegio Abraham Lincoln	9
MISIÓN	10
VISIÓN	11
➤ Contexto del curso asignado:	11
Sesión 1 (febrero 6 de 2018):	11
Sesión 2 (13 de febrero de 2018):	14
Sesión 3 (27 de febrero de 2018):	16
Sesión 4 (6 de marzo de 2018):	19
Sesión 5 (13 de marzo de 2018):	21
Sesión 6 (20 de marzo de 2018):	23
Sesión 7 (3 de abril de 2018):	26
Sesión 8 (10 de abril de 2018):	28
Sesión 9 (17 de abril de 2018):	30

Sesión 10 (24 de abril de 2018):	33
Sesión 11 (8 de mayo de 2018):	34
Sesión 12 (15 de mayo de 2018):	36
Sesión 13 (22 de mayo de 2018):	37
➤ Estudiantes y biografías del aprendizaje matemático escolar.....	38
○ <i>Salma Abu-Shihab:</i>	38
○ <i>Sofía Alejandra Gamboa</i>	42
2. Análisis de contenido:.....	46
➤ Aplicaciones del contenido en las matemáticas:.....	51
➤ Aplicaciones del contenido fuera de las matemáticas:	52
3. Análisis cognitivo:	52
➤ Objetivos de la Unidad Didáctica:.....	52
➤ Propuestas didácticas de enseñanza:	53
➤ Experiencias de aprendizaje	53
➤ Dificultades	54
➤ Errores.....	55
4. Análisis de instrucción:.....	55
➤ Actividad 1: “explorando el arte de Escher.....	55
➤ Actividad 2 “Teselas de identidad”:	64
➤ Actividad 3: “Teselas y pentominós”:	66

➤ Actividad 4 “Creando nuestras propias teselas”:	68
➤ Actividad 5: “teselaciones en computador”:	70
• Parte 1: “Tesela con triángulos”:	71
• Parte 2: “Tesela con cuadriláteros”:	72
• Parte 3: “Tesela con hexágonos regulares”:	74
• Parte 4 “otra forma de teselar”:	75
5. Análisis de actuación:	79
➤ Instrumentos de recolección de información:	79
Descripción y análisis de las sesiones	80
6. Balance de la experiencia	94
➤ Conclusiones	94
➤ Limitantes:	95
➤ Sugerencias	95
Referencias:	97

TABLA DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1: distribución espacial del salón.	12
Ilustración 2: nueva distribución espacial del salón.	18
Ilustración 3.1: actividad complementaria 1	57
Ilustración 4: “A 11” M.C. Escher (1938).	58
Ilustración 5: Systematic Study. M.C. Escher (1936).	58
Ilustración 6: Development I. M.C. Escher (1936).	59
Ilustración 7: Lizard. M.C. Escher (1936).	59
Ilustración 8: Bird fish. M.C. Escher (1936).	60
Ilustración 9: Two birds. M.C. Escher (1936).	60
Ilustración 10: cycle. M.C. Escher (1938).	61
Ilustración 11: SKY AND WATER I. M.C. Escher (1938).	62
Ilustración 12: Shells and Starfish. M.C. Escher (1941).	62
Ilustración 13: Symmetry watercolor 55 fish. M.C. Escher (1938).	63
Ilustración 14: plantilla de tesela	65
Ilustración 15: “las 12 fichas del pentominó”	67
Ilustración 15.1: rangoli	70
Ilustración 16: teselado del plano con triángulos en geogebra	72
Ilustración 17: Teselas de cuadriláteros en geogebra	73
Ilustración 18: Teselando el plano con cuadriláteros en geogebra.	73
Ilustración 19: Construcción de un hexágono regular en geogebra.	74
Ilustración 20: Teselando el plano con hexágonos regulares.	75
Ilustración 21: diseño de teselación para implementar en computador	75

Ilustración 22: ejemplo de creación de teselado en hojas de cálculo.....	76
Ilustración 23: ejemplo de creación de teselado en geogebra.....	77
Ilustración 24: teselas de los estudiantes en papel kraft	85
Ilustración 25: algunas propuestas de teselas decoradas.....	86
Ilustración 26: Localización final del trabajo de los estudiantes	87
Ilustración 27: detalle del producto final organizado	88
Ilustración 28: propuesta 1	89
Ilustración 29: propuesta 2.....	90
Ilustración 30: propuesta 3.....	90
Ilustración 31: propuesta 4.....	91
Ilustración 32: trabajo realizado con el profesor.....	91

INTRODUCCIÓN

Durante el primer semestre del año 2018 se trabajó con el grupo de estudiantes del curso 5-D del Colegio Abraham Lincoln en el marco de la asignatura “Proyecto de aula” de la licenciatura en matemáticas de la universidad pedagógica nacional.

Esta práctica fue abordada inicialmente a modo de observación, donde el maestro en formación fue interviniendo de forma paulatina, hasta llegar a implementar una unidad didáctica enfocada en la enseñanza de las teselaciones en el plano euclidiano.

En la primera sección del documento se podrá validar información sobre el Colegio, así como una breve reseña histórica del mismo. En esta sección también se encuentran las anotaciones del diario de campo, donde se relata lo vivido en cada una de las sesiones de clase. Se realizó también un seguimiento especial a dos de las estudiantes del curso, donde se ve reflejada la evolución académica que tuvieron, sobre todo en lo relacionado a lo aritmético-geométrico

En la sección dos, se expone el marco matemático que cobija a las teselaciones, allí se podrán encontrar algunos conceptos claves de las transformaciones isométricas, así como una serie de definiciones y teoremas esenciales para la comprensión de este concepto.

La sección tres genera un marco didáctico robusto, donde varios autores desde su punto de vista abordan situaciones de enseñanza y aprendizaje de forma óptima, lo que sirvió de base teórica para la elaboración de las actividades de la sección cuatro, donde se detallan estas mismas.

La sección cinco presenta la descripción y análisis de las actividades, donde se contrasta lo teórico y lo práctico, dando lugar así a la sección seis, donde se generan las conclusiones del documento, así como algunas recomendaciones para aquellas personas que deseen trabajar este tema en el aula.

1. Análisis del contexto del aula

➤ **Ubicación del concepto en el currículo de matemáticas:**

Los documentos curriculares y la normativa educativa del país mencionan los teselados y las teselaciones en los siguientes apartados:

El Ministerio de Educación Nacional (MEN) indica en los lineamientos curriculares de matemáticas (1998):

Los docentes debemos ser críticos con respecto a ellos, pues no parecen dirigidos a lo que parecen ser los logros más importantes del estudio de la geometría: la exploración del espacio, el desarrollo de la imaginación tridimensional, la formulación y discusión de conjeturas, jugar con los diseños y **teselaciones** del plano y sus grupos de transformaciones. (p. 39)

Esta información da indicios sobre el uso de las teselaciones para utilizarlos como alternativa frente a las clases “tradicionales” de geometría en las escuelas.

Es muy interesante la propuesta del plan piloto de mallas curriculares de aprendizaje para el grado 4° del MEN (2017), las cuales mencionan que:

Elaborar *teselados* es una situación que permite analizar diferentes aspectos geométricos. Con un pliego de cartulina y formas geométricas diferentes (de papel), proponga su construcción, considerando con cuáles figuras es posible realizarlo según las propiedades de las formas (...). Algunas conclusiones esperadas se relacionan con la identificación de *teselaciones regulares*, en las que la figura elegida cubre completamente el plano, y de

teselaciones semirregulares, en las que se emplean más de un tipo de figuras de polígonos. (p. 25)

El documento hace un llamado a que el **docente** “Valore las teselaciones de los estudiantes (...), el empleo adecuado de herramientas, la indagación por otras posibles teselaciones y los criterios empleados para elegir o descartar determinadas figuras a la hora de realizar la teselación.” (MEN, 2017, p. 25)

➤ **Contexto académico del colegio**

La información suministrada por la página web del colegio indica que:

El Colegio Abraham Lincoln, fue fundado en Julio de 1955. Durante los meses de julio y agosto ofreció un curso de vacaciones para estudiantes que deseaban ingresar al colegio en el primer año lectivo 1955-1956. En septiembre del año 1955, abrió sus puertas en una casa situada en la esquina sur-occidental de la calle 77 con carrera 7. En 1956 se trasladó a dos casas muy grandes sobre la carrera 7 donde desemboca la calle 78. Estas quintas se llamaban Montiel y Estambul, y tenían prados y salones muy amplios suficientes para acomodar la población creciente estudiantil.

Se pensó en un personaje de alcance internacional, excelente raigambre intelectual, con principios, valores vividos, predicados con evidentes logros, de persistencia y constancia a toda prueba, de honestidad y honorabilidad a todo temple.

FUNDADORES

Ellos fueron: la señora Eleanor France de Alum, siendo cofundadores, la Señora Charlotte Alum de Samper (su hija) y su esposo el Dr. Rafael Samper.

SÍMBOLOS DEL COLEGIO

- Himno del Colegio: Fue compuesto por la fundadora y primera directora Eleanor F. Alum quien adopto la melodía de una canción conocida en ese entonces.
- El Escudo: Lo diseño por concurso uno de los primeros estudiantes, Germán Varela.
- Los Colores: Fueron escogidos por la fundadora Sra. Charlotte A. de Samper. El amarillo simboliza riqueza académica, cultural y espiritual; el Gris la serenidad y profesionalismo de la institución.

Enfoque pedagógico del colegio Abraham Lincoln

Construyendo Conocimientos, Valores y Actitudes, un Aprendizaje con Significado.

La idea del ser humano como sujeto activo constructor de saberes mediante el lenguaje, implica una concepción de la educación y particularmente de los modos en los que se enseña y se aprende. En esta sección, se hará una presentación del enfoque pedagógico en el que el Colegio Abraham Lincoln fundamenta su diseño curricular y en general todo su quehacer pedagógico.

Al hablar de construcción de conocimientos, valores y actitudes, se quiere resaltar el hecho de que, en el proceso educativo, los individuos son los actores principales

responsables de su formación, son producto de su capacidad para adquirir conocimientos, de reflexionar sobre dichas capacidades, de actuar de manera racional sobre su entorno y por supuesto de construir sociedad y cultura.

El proyecto Educativo Institucional del Colegio Abraham Lincoln es el resultado de la interacción de experiencias significativas a nivel pedagógico y axiológico, que se han ido consolidando en el tiempo y que han hecho del colegio una de las mejores alternativas de educación del país nivel escolar. Su posicionamiento, por muchos años, en las pruebas de Estado (ICFES) en el nivel Muy Superior no ha sido otra cosa que el reconocimiento del trabajo que los estudiantes, junto con los profesores y las familias, realizan día a día con el único propósito de ser los mejores seres humanos, con todo lo que implica. Desde el año 2008 el Colegio Abraham Lincoln se encuentra certificado en sus procesos académicos y formativos con los sellos de calidad: ISO 901 versión 2008.

MISIÓN

El **Colegio Abraham Lincoln**, presta un servicio educativo bilingüe, de alta calidad en preescolar, básica primaria, básica secundaria y media vocacional con énfasis en Inglés y dominio básico del Francés, con autonomía financiera, responsabilidad social y recurso humano altamente calificado, enmarcado en una filosofía propia y un modelo pedagógico establecido para proporcionar una formación integral basada en el conocimiento, la investigación, los valores y principios de la corporación, contribuyendo con la sociedad en la formación de personas competentes, productivas y comprometidas con su entorno.

VISIÓN

Nos vemos entre los colegios de alta calidad académica y formativa, con habilidades sociales, científicas y lingüísticas, para lo cual al año 2020 los recursos se habrán orientado a:

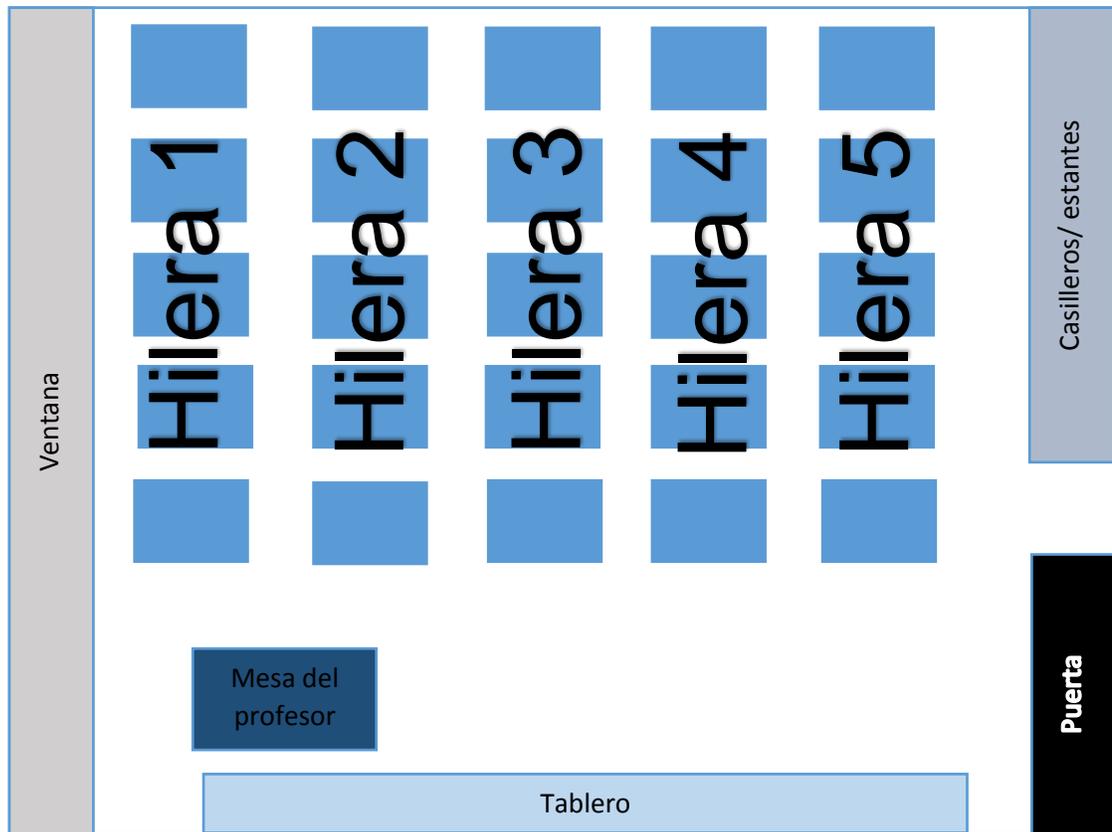
- Implementar y desarrollar el programa Diploma del Bachillerato Internacional (IB)
- Fortalecer la formación del carácter y la promoción de los valores por medio del programa Character Counts
- Implementar, desarrollar y certificar el sistema de gestión de seguridad y salud en el trabajo y actualizar el Sistema de gestión de calidad bajo los requisitos de la norma ISO 9001:2015.
- Ampliar la infraestructura de la institución a través de la adquisición de una nueva sede para preescolar y remodelar la sede de primaria.
- Mejorar continuamente la calidad académica representada en los resultados de las pruebas Saber e internacionales de idiomas (inglés- francés), uso eficiente TIC y el fomento de la investigación.

➤ **Contexto del curso asignado:**

Sesión 1 (febrero 6 de 2018): Conforme se acordó con el profesor Jorge Pinzón en la reunión de ayer, el maestro en formación estuvo a la puerta del salón 5° B a las 8.30 a.m. aunque se reunió con el profesor hacia las 8.45 a.m. en la sala de profesores. En ese instante el docente se encontraba cortando unas hojas, las cuales serían el material principal de la clase. En ellas se encontraban ciertas figuras (cuadrados, rectángulos,

paralelogramos y otras figuras creadas a partir de cuadrados y triángulos uniformes). El salón de clases tiene 25 pupitres, uno para cada estudiante, organizado en 5 hileras de 5 pupitres cada una:

Ilustración 1: distribución espacial del salón.



Cuando se ingresó al aula, había dos niñas entre las hileras 2 y 3 buscando algo en sus maletas; a los dos minutos empezaron a ingresar todos los estudiantes a lo cual el profesor inicia la clase (toda en inglés): Les solicita que se pongan de pie y empieza a realizar preguntas, si el estudiante responde correctamente se puede sentar; si no, otro compañero tendrá la posibilidad de responder y si lo hace bien se podrá sentar. Este ejercicio es realizado unas 5 veces y las preguntas tenían que ver con cómo hallar áreas y

perímetros de rectángulos y triángulos. Seguidamente el maestro en formación es presentado al curso y da las instrucciones de trabajo de la sesión: a todos los niños se les da una primera hoja con cuatro figuras hechas a partir de cuadrículas y dos paralelogramos, para un total de seis figuras, cuando el estudiante logra hallar las seis áreas se le dará una segunda hoja con seis paralelogramos, si halla correctamente estas áreas se les dará una tercera hoja donde hay seis triángulos y finalmente la cuarta hoja, la cual tiene seis hexágonos irregulares cóncavos con sus ángulos rectos.

Cada papel resuelto equivale a un 25 % de la nota de la sesión. Los estudiantes empiezan a hacer su actividad con el primer papel que el profesor y el maestro en formación les suministran en sus puestos. El profesor le solicita al maestro en formación que haga un solucionario de los ejercicios y da la instrucción al grupo que, si tienen dudas que también se dirijan a él, para que le pregunten y que si acaban con una hoja también se le acerquen ya que el maestro en formación les revisaría y, en caso de tener las respuestas correctas, les daría la siguiente hoja.

Un par de estudiantes preguntaron detalles al inicio de la clase, a lo cual otros estudiantes fueron acercándose al puesto del maestro en formación, cada vez con mayor confianza.

En las filas 4 y 5 se encuentran los estudiantes (hombres) más indisciplinados del salón, hablan demasiado, por lo que el profesor colocó el pupitre de uno de ellos junto al del maestro en formación (quien estaba sentado en la mesa del profesor). Conforme avanzaba el tiempo los estudiantes desarrollaban de forma más rápida y efectiva la actividad, aunque tenían problemas con las unidades cuadradas (multiplicaban los números, pero no las expresaban, o bien, las expresaban en unidades de longitud y no de área). Sólo un

estudiante logró realizar las 4 hojas de forma correcta, al faltar 10 minutos para que se acabe la clase, el profesor solicita que dejen los cuadernos sobre los pupitres para que se puedan ir a la otra clase (danzas), esto con el fin de hacer un control sobre el trabajo de los estudiantes en la clase, a lo cual el maestro en formación debió dejar su firma en los cuadernos justo en el lugar donde hubiesen realizado el último procedimiento.

Al finalizar la clase el maestro en formación se dirigió con el docente a la sala de profesores, donde le indica que, como los estudiantes de ese curso se encuentran en la etapa de adolescencia, el curso en ocasiones son de “difícil trato”, también solicita ayuda para un evento cultural que se realizará la semana entrante en el colegio y el tema que le correspondió al maestro en formación fue el de cifrado César y cifrado reflejado, a lo cual le colabora creando una tabla para descifrar el código César y se acuerda que el martes próximo se asistirá a la semana Lincolniana como apoyo para los salones que el profesor Jorge dirige.

Sesión 2 (13 de febrero de 2018): El maestro en formación se reúne con el profesor Jorge a las 7.00 a.m. en la sala de profesores, quien estaba acompañado por varios estudiantes de grado décimo, ya que él iba a tener a cargo dos salones, el de teselaciones y el de criptografías. Procedió a dar instrucciones a los estudiantes, junto con materiales necesarios para la elaboración de las actividades. El maestro en formación estuvo designado como observador en el salón de teselaciones, el profesor solicitó que se realizara documentación audiovisual del evento con fotos y videos de la misma. En el salón había 5 estudiantes de décimo (4 mujeres y 1 hombre) estuvieron a cargo de las explicaciones y guía de las actividades. Los estudiantes debían explicar el concepto a

varios grupos denominados “fraternidades” donde había chicos de todos los grados (quinto hasta once).

El profesor Jorge había descargado dos videos en los cuales se explicaba los teselados y en dónde se podrían encontrar en la naturaleza. Sorprende el hecho que este tema ya lo había trabajado con los estudiantes de quinto, pero todo parecía indicar que los estudiantes de décimo no lo conocían.

Una de las actividades consistía en que se mostraba un teselado y los asistentes debían responder si eran “regulares”, “semirregulares” o “de otro tipo” (irregulares), desafortunadamente se confundieron los términos: los estudiantes asumieron que los teselados formados por una misma figura eran regulares y lo que eran creados por más de dos figuras eran “semirregulares”. Este percance sirve de faro para validar un posible error a la hora de enseñar teselaciones.

A cada asistente se le brindó una hoja de papel milimetrado y una hoja con seis ejemplos de teselados, se les indicó que plasmaran algún teselado en estas hojas, tenían como herramientas de dibujo un lápiz y una escuadra. Sorprendentemente los niños de edades inferiores tuvieron menos problema con la generación de los teselados que los profesores que los acompañaban, sobre todo al generar teselados hexagonales, lo que parece indicar que la imaginación y creatividad de los niños pueden ser muy útiles para este tipo de temas. Luego de la tercera explicación a los grupos, las estudiantes cambiaron la actividad, a lo cual se formaban 4 grupos y por cada grupo había un representante, quien debía pasar al tablero y dibujar un teselado; el mejor ganaba premio.

La tendencia fue que los niños pequeños dibujaban teselados simples: cuadrados o triángulos equiláteros; los chicos de edad intermedia dibujaban teselaciones semirregulares, mezclando cuadrados y triángulos y, finalmente los chicos de edades avanzadas se inclinaban hacia las teselaciones que simulaban objetos en 3d, aunque sólo 1 de 4 grupos que optó por este camino logró recrear este efecto.

Quedan muchas experiencias para poder recrear teselaciones en el salón de 5° d; se propuso una teselación de pentominós al profesor, lo cual le parece una buena idea y manifiesta que “le de color a cada una de las 12 figuras de la teselación elaborada para que lo estético se resalte aún más”.

Finalizando la 5° explicación el maestro en formación se retira del colegio, hablando con el profesor y explicándole el formato de asistencia a la práctica, se llega al acuerdo que en el martes siguiente se retomará el trabajo con los niños del curso en el aula de clases, el docente no solicita ninguna ayuda con material ni investigación de tema.

La sesión 3 no se pudo efectuar en el día 20 de febrero ya que el maestro en formación fue seleccionado como jurado de votación para las próximas elecciones nacionales del congreso.

Sesión 3 (27 de febrero de 2018): La primera hora de la sesión no fue de matemáticas. Los estudiantes tuvieron una sesión de acompañamiento en orientación (llamado en el colegio “DOC”). El profesor habló con el maestro en formación respecto al tema de teselaciones, estuvo examinando los textos escolares que manejan en el colegio para poder generar así ideas variadas de las actividades para la implementación de la clase.

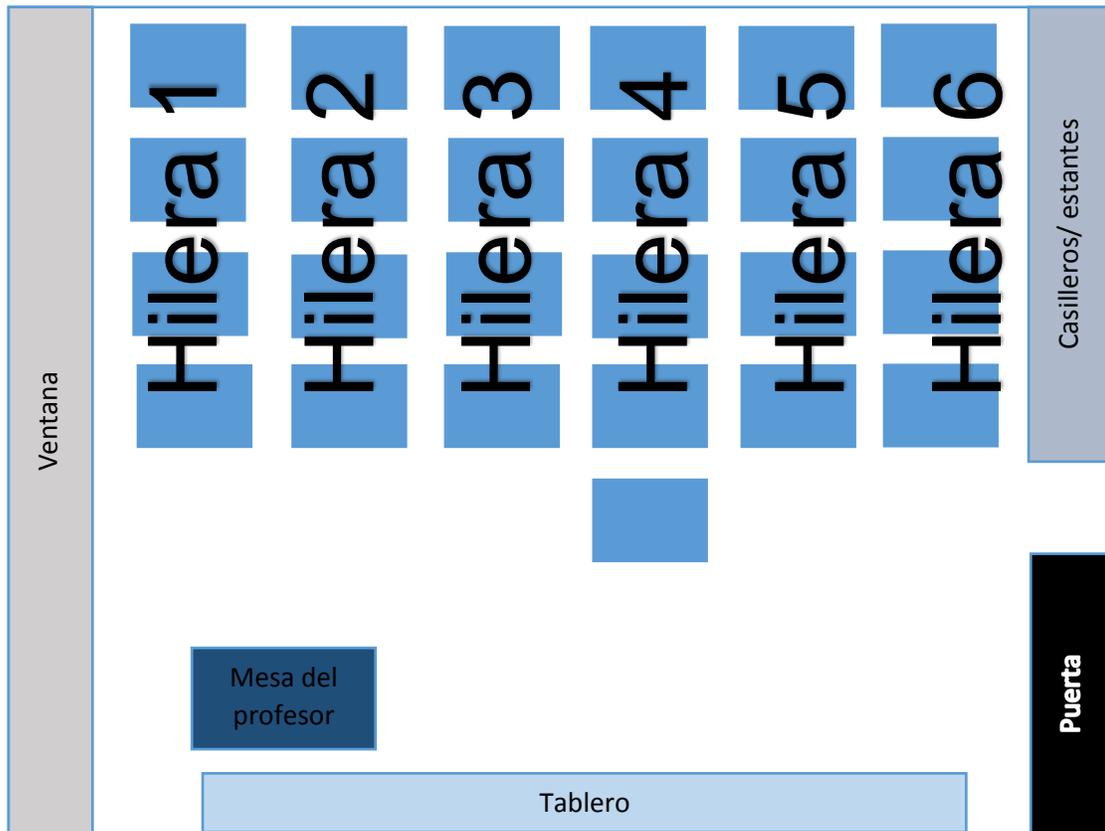
Antes de iniciar la segunda hora de la sesión, el profesor solicita que el maestro en formación realice el dibujo de un robot a partir de cuadrados y rectángulos, también que el robot sea simétrico ya que la simetría es una de las temáticas que se verán en cuarto periodo.

La dinámica de la clase fue la siguiente: los estudiantes realizaban un dibujo del robot en sus cuadernos, podían realizar modificaciones al robot (cabello, otras prendas de ropa, cambiar la forma de los ojos, entre otras), si estas modificaciones incluían paralelogramos y trapecios mucho mejor. Después de dibujar el robot, los estudiantes debían hallar área y perímetro de la figura y colorearla. Si acababan esta actividad, se realizaría una actividad en la cancha, la cual consistiría en medirla con el cuerpo para así hallar su área y perímetro.

Mientras los estudiantes realizaban su actividad, el profesor les informa que está buscando miembros para el club de matemáticas, quienes competirán en las olimpiadas que realiza la universidad Antonio Nariño, lo que hace que los estudiantes se motiven. Selecciona a la estudiante Sofía Gamboa, quien acepta. El profesor indica que quedan cuatro cupos más y que los estudiantes que queden seleccionados deben ser buenos en matemáticas, disciplinados y buenas personas. Después de esto, procede a compartir ejemplos de estudiantes que han sido parte del club y que han sido muy buenos en este.

La ubicación de puestos de los estudiantes cambió, al parecer porque éstos hablan mucho, se quitó una fila y se añadió una hilera, por lo que el salón quedó distribuido de la siguiente manera:

Ilustración 2: nueva distribución espacial del salón.



Desafortunadamente los estudiantes siguen hablando mucho, en la sesión de hoy estaban con muy poca disposición para realizar las actividades de clase, tal vez por la charla que tuvieron en la primera hora, muchos manifestaban “que habían quedado traumatados con lo que es habían dicho”. El maestro en formación tuvo que hacer un llamado de atención a dos estudiantes, porque no dejaban de hablar y no realizaban ningún ejercicio.

Finalizando la clase el profesor le muestra al maestro en formación unos videos que los estudiantes realizan bimestralmente dando la solución a un problema del calendario matemático del colegio. Hablan sobre la posibilidad de utilizar las aulas de sistemas y el auditorio para las actividades de maestro en formación, también manifiesta que le gustaría que se realizaran actividades en el software Cabri II plus los martes, a lo cual el

maestro en formación responde que hablará con el profesor de proyecto de Aula en la universidad para validar las posibilidades de esta opción. El maestro en formación toma fotografías del calendario matemático y acuerdan en que para la próxima sesión llevará las soluciones del mismo.

Sesión 4 (6 de marzo de 2018): Durante esta semana los estudiantes tendrán evaluación o “competencias”, como lo llaman en el colegio, por lo que todos los días habrá ‘hora cero’, es decir, al principio de cada jornada se realizarán las pruebas y, por lo tanto, todas las actividades se correrán 45 minutos.

Cuando el maestro en formación ingresó al aula con el profesor, hubo de sorprenderse porque los estudiantes se encontraban en mucho desorden dentro del salón: corrían, gritaban, saltaban, en fin, el profesor solicita calma, y hace que los estudiantes se pongan de pie junto a sus puestos, con los brazos cruzados, después de este ejercicio, los estudiantes recuperan la calma. Seguidamente el profesor indica las actividades que se realizarán (lo hace desde la última que se hará hasta la primera.):

- El profesor lleva los formatos de creación de empresa que los estudiantes habían realizado anteriormente. Indica que se seleccionarán los mejores y que, al final de la clase -si queda tiempo- va a hablar con los educandos para brindar asesoría de la creación de empresas.

Después, el profesor da la instrucción que sólo se deje un lápiz en el pupitre, reparte un test para hallar promedios y medianas de algunos números presentados, si los estudiantes completan esta parte, luego tendrán que hacer una plantilla de un prisma

rectangular, hallar las áreas de sus caras, recortarlo, decorarlo y formar el prisma en 3d. Este test será una preparación para las competencias de matemáticas (evaluaciones), que serán el día viernes de esa semana.

El maestro en formación tomo una prueba y la resolvió, a lo que el profesor Jorge da la instrucción que califique a los estudiantes. De 13 grupos de números (que podían ser de 2, 3 o 4 números), en promedio los estudiantes contestaron 10 bien, lo que indica que el concepto se asimiló correctamente, aunque hay que trabajar en el procedimiento algorítmico, ya que muchos estudiantes se equivocaban en la operación de división para hallar la media. En la mediana no hubo mayores inconvenientes, ya que los estudiantes organizaron los números de menor a mayor y, en caso de que en la mediana hubiesen quedado dos números, el profesor recordó que ‘se saca el average de esos dos números’.

Al estar todos los estudiantes en la parte geométrica, es interesante ver que el colorear, diseñar y recortar hace que entren en un estado de calma y reflexión, lo que permite que se concentren en sus propias actividades. También tienden a buscar a su grupo de amigos, o mejor, en muchos casos los estudiantes buscan a su “mejor amigo”, con quienes van hablando, pero sin dejar de lado la actividad, salvo por tres o cuatro alumnos que hablan demasiado. Otra tendencia marcada fue la de no trabajar en su pupitre. Los estudiantes buscaban el piso y el apoyarse en un cuaderno, al principio parecía que estaban retando la autoridad del profesor, pero cuando se habla con ellos preguntando por que hacen eso, responden que sencillamente se sienten más cómodos así y, evidentemente realizan su trabajo sin ninguna molestia.

Antes de finalizar la clase uno de los estudiantes indisciplinados hace un grito estruendoso, lo que genera que el profesor le ordene ir a buscar a la coordinadora académica para hacer una observación. Se siente la tensión en el curso, los demás estudiantes siguen haciendo su trabajo para evitar agrandar el inconveniente, mientras murmullan entre ellos lo sucedido. El profesor y el estudiante mantienen un dialogo previo de ‘muestras de autoridad en el aula’, a lo que finalmente el estudiante se da cuenta que el profesor no está jugando. Se acaba la clase, el profesor y el alumno se dirigen a la sala de profesores para firmar el formato con respecto al inconveniente del salón, el profesor le pide el favor al maestro en formación que le lleve los implementos a su puesto en la sala de profesores. Después que termina de hablar con el estudiante, el profesor habla con el maestro en formación, le indica que próximamente serán las olimpiadas en la universidad Antonio Nariño. Se acaba la sesión y no se acuerda nada en especial para la próxima clase.

Sesión 5 (13 de marzo de 2018): El profesor inicia la clase en el tablero, escribiendo tres secciones con numerales de uno al doce cada una, en ella escribirá las respuestas al examen de competencias, da una explicación sencilla de cómo debería haberse resuelto cada punto. Después de realizar esta explicación, indica que va a entregar las notas conforme los estudiantes trabajen y lo hagan en silencio, este trabajo estaría a cargo del maestro en formación. El profesor entrega todas las evaluaciones de probabilidad (que son con formato pruebas saber) a excepción de la prueba de una estudiante. El profesor manifiesta que está contento porque en general los resultados fueron muy buenos, aunque algunos estudiantes siguen omitiendo el colocar las unidades al cuadrado (m^2 , ft, in, square units).

El profesor inicia el tema de figuras en tercera dimensión, para lo cual indica que cada estudiante dibuje las iniciales del colegio (las letras CAL) de acuerdo a la cuadrícula de sus cuadernos, en este momento comienza a entregar ciertas pruebas de competencias a los estudiantes que están en silencio. Cuando todos los estudiantes tienen las iniciales del colegio, algunos solicitan ayuda al profesor, otros al maestro en formación, ciertos estudiantes piden ayuda a sus compañeros y unos pocos realizan el ejercicio de forma autónoma. El maestro en formación da la siguiente instrucción a los estudiantes que solicitan su ayuda:

“Debes realizar una diagonal desde las esquinas de la letra, todas las diagonales deben tener el mismo tamaño y debe ir hacia la misma dirección porque o si no, no nos va a quedar bien la forma 3d ¿de acuerdo? Ahora, mira que en unas esquinas la diagonal queda por fuera (se señalan tres casos donde suceda esto), pero mira que en otras esquinas (se señalan dos casos específicos) no sucede eso, sino que la diagonal queda por dentro de la letra, entonces en esos casos no hacemos la diagonal. Ahora, unes las diagonales y te quedan las letras en 3-d. si tienes alguna duda me dices y miramos que sucede, ¿vale?”

Muchos estudiantes, por no decir todos, asimilaban rápidamente la construcción 3d en un plano, aunque unos pocos estudiantes cambiaban la dirección de la diagonal en las esquinas de abajo, formando trapecios en vez de paralelogramos. Seguidamente, tenían que colorear las letras con tres colores, uno por cada vista de las caras (frontal, superior y lateral). Después, realizaban sus dos iniciales (del nombre) y hacían el mismo procedimiento anterior. En este paso algunos estudiantes no sabían cómo hacer letras

con diagonales en ellas (como la m, n, v, w, g, r, entre otras), a lo que se les da la instrucción de que ‘realicen primero las líneas de la letra, luego lo conviertan a 2d y luego a 3 d’, el profesor realiza algunos ejemplos en el tablero y los estudiantes lo asimilan bien. Después deben hacer el robot de la clase pasada en formato 3d, luego una casa y luego un carro. Los estudiantes tienen mucha más confianza con el maestro en formación, inclusive, los estudiantes más indisciplinados se ven más dispuestos a trabajar en el aula de clase, solicitan ayuda y realizan los procedimientos, por lo que se ve una mejora significativa. Se especula que las notas recibidas los motivaron y los hicieron sentir bien, lo que hace que trabajen mejor.

Veinte minutos antes de finalizar la clase, el profesor solicita al maestro en formación que se dirija a los otros tres quintos y les informe a ciertos estudiantes (los del club de matemáticas) que se dirijan al salón de quinto B para realizar la primera prueba de olimpiadas matemáticas.

Agradan dos factores en este suceso, en primer lugar, hay más niñas que niños representando al grado quinto del colegio y, en segundo lugar, seis de los veinte estudiantes pertenecientes al equipo de olimpiadas son del curso quinto D. Dos de los estudiantes indisciplinados del salón hacen parte de este equipo, uno de ellos es el primero que contesta y sólo tuvo un error en uno de los cinco puntos que debía entregar. En promedio los estudiantes contestaron bien 4 de 5 preguntas, lo que augura buenos resultados para ellos en la competencia.

Sesión 6 (20 de marzo de 2018): El profesor introdujo en la clase el concepto de plano cartesiano. El profesor realiza un plano en un pliego de papel kraft, el cual pega en el

tablero, les pregunta a los estudiantes que si han visto ese elemento en algún otro sitio, los estudiantes le responden que sí, por ejemplo en los juegos de video como warcraft y en los aviones, a lo cual se genera una discusión muy interesante, el profesor indica que antes para esconder tesoros (p. e.) se miraban referencias como palmeras, piedras, rocas, entre otras, pero que a veces esas referencias eran cambiadas de sitio o se olvidaban, por lo que los tesoros se perdían.

Hace una breve reseña sobre Renato Cartesius, donde solo indica que él fue el inventor del método de coordenadas perpendiculares. Luego vuelven a hablar sobre los aviones y los radares, que, aunque manejan coordenadas polares, también sirven como sistema de representación espacial (esto no se dijo explícitamente en la clase, solo es una apreciación del maestro en formación).

El profesor toma pedazos de plastilina para explicar la forma en que se nombran las coordenadas cartesianas de un punto, luego entrega una guía de actividades, la cual soluciona el maestro en formación para luego calificar los trabajos de los estudiantes.

La guía consistía en tres puntos, en el primero debían hallar las coordenadas de ciertos puntos dados en un plano cartesiano. Para el segundo punto se requería lo contrario, buscar puntos dadas sus coordenadas. En el tercer punto debían hacer un plano cartesiano en una hoja y, realizar segmentos dados dos puntos, los cuales formarían una figura.

Muchos estudiantes ubican intuitivamente los puntos y generan sus respectivas coordenadas, pero se evidencian específicamente cuatro inconvenientes en el desarrollo de la actividad:

Primero, los estudiantes confunden el orden de las coordenadas, tomando muchas veces como primera componente el valor en y , después el valor en x .

El segundo error cometido consistía en agregar o quitar una unidad de la requerida, colocando el punto o más arriba, o más abajo de donde se debía colocar.

Tercero, algunos estudiantes no tomaban como referencia el eje x , sino que tomaban de referencia la última línea del plano cartesiano.

Cuarto, cuando un punto se encontraba o bien sobre el eje x o bien sobre el eje y , los estudiantes no asimilaban esta situación con una componente de valor cero, sino como una componente de valor uno.

A pesar de esto, los estudiantes asimilan bien la noción de plano cartesiano, por lo que muchos estudiantes logran finalizar la actividad e incluso empiezan a desarrollar otras actividades:

Después de la guía, los estudiantes realizarían el dibujo de una casa, hallaban sus puntos y luego hallaban sus coordenadas.

Mientras transcurría la clase, el profesor iba dando las notas del tercer período a los estudiantes, muchos de ellos pasaron todos los logros, aunque se evidencian dos casos

de pérdida de logros en estudiantes, el profesor realizará las respectivas recuperaciones para el o los casos pertinentes.

Se acaba la clase, el maestro en formación y el profesor se dirigen a la sala de profesores, se revisan las actividades que el maestro en formación realizará en su intervención, la cual tendría fecha tentativa para la semana después del receso de semana santa. El profesor le indica al maestro en formación que sería prudente tener más actividades “para que los estudiantes vayan desarrollando, vayan haciendo a medida que transcurre la clase”, además solicita el esquema de clases, en el cual vayan programadas las actividades que se vayan realizando, esto con el fin de “evitar improvisaciones que afecten la primera intervención del maestro con el grupo”, se acuerda en enviar dicho esquema, con lo que, se determinará la fecha para la implementación de la unidad didáctica. El profesor y el maestro en formación se remiten a la coordinación académica para apartar la sala de audiovisuales (necesaria para la primera sesión de clases), pero no hay nadie en ese momento. Dados los anteriores acuerdos, se finaliza la sesión. Se retomarán clases después de semana santa, pero se tendrá contacto vía e-mail con el profesor y con el tutor de la práctica.

Sesión 7 (3 de abril de 2018): En esta sesión se implementó la actividad 1 del maestro en formación, quien había acordado con el profesor dar la actividad en la mitad de la clase. Como la actividad requería el uso de proyector, se realizó en una de las dos salas de proyección del colegio. Mientras que el maestro en formación organizaba los equipos necesarios para realizar la presentación en el auditorio, el profesor realizó una actividad

en el salón con los estudiantes para validar si habían asimilado el concepto visto la clase anterior.

La actividad del profesor consistía en descubrir una figura, la cual se encontraba uniendo determinados puntos que el profesor indicaba; estos puntos se encontraban en los cuatro cuadrantes de un plano cartesiano.

Cuando el maestro en formación comprueba que la presentación se encuentra lista y que los equipos funcionan correctamente, se dirige al salón y le indica al profesor mediante una seña que todo está listo para realizar la actividad; mientras la actividad del profesor concluye, el maestro en formación le colabora revisando los trabajos de los estudiantes. En ese instante el profesor manifiesta que “el grupo trabajó mucho mejor que los otros quintos”, lo que motiva mucho a los estudiantes. La figura que debían encontrar era una hoja de arce, muy similar a la de la bandera canadiense. Esta figura no es simétrica con respecto al origen, lo que es una forma muy audaz de validar que los puntos que se vallan representando sean precisamente los correctos, quitando de esta forma posibles ambigüedades que hagan que los estudiantes no grafiquen bien y, aún así logren tener la figura.

Después de que el profesor dictara todos los puntos, coloca las coordenadas (que estaban en una hoja) en el tablero, los estudiantes que tuvieron inconvenientes rectifican las coordenadas. Después que tienen el boceto

bien en su cuaderno, deben proponer un diseño y luego, pasarlo a papel milimetrado.

En general, los estudiantes asimilaron muy bien la representación de un punto en el plano cartesiano, hubo unos 6 que tuvieron errores en alguno de los puntos y, solamente unos 3 tuvieron problemas en la representación. (véase sección 6)

En la siguiente sesión se retomarán las actividades del maestro en formación, se seguirá trabajando la sesión por mitades, por lo que el profesor le solicita al maestro en formación que esté la clase siguiente antes, para que adecúe la sala de sistemas, ya que se trabajarán cuerpos en 3d por software de geometría dinámica, luego el maestro en formación realizará sus actividades. Se acuerda también con el profesor que el maestro en formación debe realizar un taller-guía como producto de su pasantía en el colegio, el cual debe presentar a final de su pasantía, le recomienda el tema de volúmenes.

Sesión 8 (10 de abril de 2018): El maestro en formación y el profesor se encuentran antes de la hora de inicio de la clase, se dirigen a la sala de computo, donde se inician los computadores y se abre el programa cabri 3d v2, hay unos equipos donde se requiere contraseña de inicio, por lo que el profesor le solicita a dos estudiantes que pasaban por allí que desbloqueen los computadores faltantes, que fueron unos 10.

El profesor da la indicación que vayan ingresando grupos de a cuatro estudiantes y, que se les explique cómo realizar cubos, lo cual se realiza seleccionando la herramienta homónima, dando clic en el plano en el que se

desea tener el cubo, otro clic en el centro de la cara que quedará en dicho plano y, por último, un clic que determinará las dimensiones del tetraedro. También se les indica que si se mantiene la herramienta cubo activada y se coloca el cursor en una de las caras del cubo realizado, el programa añadirá otro cubo de igual dimensión si se da clic en esa cara.

La indicación de la actividad es la siguiente: los estudiantes reciben un paquete de fichas para cubo soma, deben hacer la réplica de las nueve figuras en el computador. Los estudiantes solicitan específicamente cuatro ayudas con respecto al uso del software:

En primer lugar, los estudiantes deseaban saber cómo se deshace una acción, a lo cual se les responde que con el comando `ctrl + z`.

La segunda duda que más se manifestó se relaciona con cómo usar el efecto “bola de cristal” del programa, con el cual se ven las construcciones desde distintas perspectivas. Se les indica que se realiza manteniendo presionado el clic secundario y moviendo el mouse.

En tercer lugar, hubo ciertos estudiantes que querían agregar color a los cubos realizados, a lo que se les indica que seleccionen la herramienta de cursor en el programa y que luego den clic secundario en el cubo que desean colorear y que den la opción “Surface color”, donde aparecerá una paleta de colores en donde pueden seleccionar el color que más les llame la atención.

Por último, hubo unos 6 estudiantes que oprimían muchas veces el comando ctrl+z ó le daban supr a las figuras, por lo que borraban el trabajo, se procedió a usar el comando ctrl+y, para rehacer las últimas acciones realizadas.

El maestro en formación se queda durante unos 30 minutos junto con el profesor en la sala de sistemas para colaborarle con los estudiantes y las dudas que pudiesen tener, como los estudiantes van acabando las figuras en su computador, se les da la instrucción (uno a uno conforme va finalizando la actividad) que hagan la palabra CAL y sus propias iniciales en un nuevo archivo, conforme a las instrucciones del profesor.

Se habla con el profesor mientras se pegan las teselas realizadas en la segunda actividad del maestro en formación (véase sección 6); desafortunadamente hubo recortes de las teselas que quedaron irregulares, lo que hace que no cacen las colas de los camaleones perfectamente, lo que se disimula contorneando las figuras con marcador negro, el profesor señala que solo hay una observación con respecto a lo desarrollado en la clase, y es el no utilizar regla en los dibujos del tablero que representaban las fichas del pentominó, se piden excusas al profesor, quien indica ahora que el trabajo de teselas de la clase puede ir incluso a una cartelera de anuncios del colegio, indicando quien había dirigido la actividad y mostrando así los resultados, que fueron muy buenos, integrando matemáticas y arte. Se le dice al profesor que solo faltaría implementar las actividades virtuales, pero no se puede seguir hablando con el profesor debido al tiempo. Se organiza el salón y se finaliza la sesión.

Sesión 9 (17 de abril de 2018): El colegio tuvo hora cero, por lo que las actividades escolares se corrieron media hora. Cuando se encuentran el

Profesor y el maestro en formación, el primero le indica la segundo que se dirija a la sala de sistemas cinco minutos antes de que inicie la clase y prepare los computadores “tal como la vez anterior”, en ese momento el maestro en formación le dice al profesor si sería posible que se implemente la actividad virtual en la segunda hora de clase, a lo que finalmente acuerdan que dependiendo el transcurso de la clase se tomará esta decisión. Mientras tanto el maestro en formación se queda en la sala de profesores explorando el software cabri, para validar las posibles actividades de la guía que solicitó el profesor.

Llegada la hora, el maestro en formación se dirige a la sala de sistemas, pero en ese momento el profesor de tecnología se disponía a ingresar al aula con otro curso (al parecer uno de grado octavo). El maestro en formación se dirige a buscar al profesor para indicarle lo sucedido, quien toma la decisión de dirigirse al aula con los estudiantes. Se trabajará nuevamente sobre el cubo soma y, a partir de actividades propuestas por una cartilla en la cual deben trabajar vistas en 3d, proponiendo a su vez posibles construcciones para determinadas figuras representadas en las páginas de esta cartilla.

Como es de esperarse, este tipo de actividades requiere mucha paciencia, lo cual no es un rasgo característico de estas edades, pero hay que decir que muchos estudiantes -por no decir todos- trabajaron hasta el final de la sesión de manera autónoma.

El profesor les indica a los estudiantes que cosas les falta en cuanto a lo realizado por ellos en la cartilla, al parecer llevan trabajando con ésta por lo menos hace dos sesiones, también indica que ya han trabajado rotaciones, traslaciones y reflexiones, lo que le servirá mucho al maestro en formación cuando se trabajen las actividades virtuales.

En cuanto a los logros de los estudiantes en esta clase, hay que decir que la constancia y perseverancia que tuvieron debe resaltarse, desafortunadamente no muchos de ellos (sólo 7 pudieron dar con las construcciones que requerían 7 o más figuras del cubo soma). Todos los estudiantes lograron recrear figuras en 3d a partir del diagrama de puntos, los cuales se van uniendo para generar rombos, cuadrados, rectángulos, triángulos y hexágonos como formas básicas.

Uno de los estudiantes logró recrear cuatro figuras hechas con más de seis fichas, lo que demuestra un sentido espacial fuerte en su desarrollo mental. Varios estudiantes felicitaron al estudiante por sus logros, incluido el profesor, quien le dijo que tendría una bonificación por sus esfuerzos, aunque otros compañeros del estudiante sintieron frustración al ver que ellos mismos no habían podido recrear alguna figura, aunque no tomaron represalias contra el estudiante, sencillamente expresaron frustración en sus propios trabajos con pequeñas muestras de rabia, como el rayar los cuadernos, dar algún golpe a las fichas o alejar las cartillas con sus manos. Como se dijo al principio, este comportamiento es normal en su edad,

además ningún estudiante se salió de sus casillas, por lo que la actitud del profesor y del maestro en formación se enfocó en animarlos, diciéndoles que la matemática requiere paciencia y, que muchas veces no salen las cosas cuando uno las hace una sola vez, sino que hay que intentar, e intentar, y reintentar hasta que salga, sin que eso signifique que uno sea malo.

Cuando se acaba la sesión, el maestro en formación y el profesor se dirigen a la sala de profesores, donde el maestro en formación realizó un inventario de las fichas de 30 pentominós (durante la clase, realizó el inventario de los 25 juegos de cubo soma en el salón), mientras que acuerdan que para la siguiente sesión habrá una feria en el colegio referente al día del idioma y de la tierra, por lo que el maestro en formación asistirá como invitado a las actividades que se realicen por fraternidades, similar a la feria de la semana lincolniana que se realizó en la segunda sesión del maestro en formación. Acuerdan en que el maestro en formación llegue a las 7.00 a.m. del próximo martes.

Sesión 10 (24 de abril de 2018): de acuerdo con lo estipulado en la sesión anterior, el maestro en formación llega a las 7.00 a.m. a la institución, donde procede a buscar al profesor, quien se encontraba en el salón que queda debajo de la sala de profesores. En esta aula se encontraba la fraternidad “Theta”, que es dirigida por el profesor. El maestro en formación acompaña al profesor a las actividades culturales, mientras que hablan sobre las dos actividades que faltan por implementar en el aula, las

cuales el maestro en formación desearía que se hicieran en la sala de sistemas, a lo cual el profesor menciona que “el aula está disponible los martes así que no habría problema”, aunque también le pregunta al maestro en formación hasta que fecha se realizará la práctica, quien le dice que averiguará con el asesor de la universidad para saber con certeza esa fecha. Por el momento se acuerda con el profesor reanudar sesiones hasta el día 8 de mayo por dada la festividad del 1 de mayo, que conmemora el día del trabajador.

Sesión 11 (8 de mayo de 2018): La sesión inicia normalmente en el aula de clases. Previamente el maestro en formación se había reunido con el profesor, quien le había indicado que en la clase se trabajaría de nuevo con los cubos soma, pero esta vez enfocados a la construcción de vistas frontal, lateral y superior de figuras.

Los estudiantes trabajan en sus puestos, dibujando primero ocho de las nueve figuras en papel de puntos, que sirve para guiar a los estudiantes al dibujar prismas en 3d. posteriormente debería al lado de cada dibujo en 3d realizar las vistas 2d de las tres caras esenciales de la figura.

A modo general no hay muchos inconvenientes en el trabajo de los estudiantes, exceptuando aquellos que siempre hablan en clase, pero alcanzan a trabajar de forma normal en sus actividades.

El profesor habló con algunos grupos de estudiantes para validar como iba el desarrollo de la idea de negocio. Estos estudiantes (5) trabajan en la clase, pero la idea de negocio, no la actividad de geometría.

Hay algunos estudiantes que muestran propuestas de teselados al maestro en formación (ver sección 5). La mayoría había dejado sus trabajos en casa. Se les indica que por favor los lleven en la siguiente clase, es decir, el martes siguiente.

Cuando la clase finaliza, el profesor y el maestro en formación se dirigen a la sala de profesores con los cuadernos de los estudiantes. Proceden a calificar lo realizado por los estudiantes en la sesión. Los estudiantes obtuvieron notas en el intervalo de 78 a 100+. Cuando se finaliza de calificar estos cuadernos, el maestro en formación los deja de nuevo en el aula de clases y procede a mostrarle al profesor las guías que le había solicitado. El trabajo final de estas guías consta de cinco programas realizados con software de geometría dinámica; uno de ellos está hecho en el programa cabri 3d v2, dos de ellos a partir del programa cabri plus y dos de ellos hechos a partir de geogebra para usar deslizadores; estos últimos se encuentran también en la web, en la página de geogebra del maestro en formación. Cuando el profesor ve el resultado, le solicita al maestro en formación que le explique brevemente en que consiste cada guía, y después de ver los programas, le indica que guarde las guías y los programas en uno de los computadores de la sala de profesores para “luego traer a algún

estudiante para ver si están bien las propuestas o tal vez hay que bajarle la dificultad a alguna de ellas”. Se finaliza la sesión sin más eventualidades.

Sesión 12 (15 de mayo de 2018): En esta sesión se trabajó en la sala de sistemas durante la primera hora y en el aula de clases durante la segunda.

La actividad del computador consistía en generar figuras realizadas a partir de cubos, conforme a lo que indicaba la cartilla “prime c”. después de haber representado los sólidos, los estudiantes debían escribir en la cartilla cual era el volumen de cada figura en unidades cúbicas. Es decir, para hallar el volumen de la figura, se debía contar los cubos que la conformaban.

A modo general, se tomaron dos estrategias para solucionar la actividad: en primer lugar, los estudiantes realizaban la figura, y luego contaban los cubos uno a uno. La otra tendencia consistió en primero calcular el volumen de la figura y, luego comprobar este número a través de su representación 3d en el software de geometría dinámica.

Algunos estudiantes realizaron multiplicaciones de zonas donde la altura era la misma, lo que da indicios sobre la noción de medida de volumen de un sólido (ancho por alto por largo), otros hacían conteo cubo a cubo, lo cual generaba un mayor margen de error.

Cuando se acaba la primera hora, los estudiantes se dirigen hacia el salón. El maestro en formación se queda en el aula de sistemas con los estudiantes que salen de últimas, dejando la sala en orden y dirigiéndose al salón.

Después los estudiantes trabajaron en su libro de texto, completando las secciones faltantes de geometría, es decir, el cuarto periodo, los estudiantes trabajan de forma autónoma en sus puestos.

No hay muchas preguntas con respecto a la realización de las actividades, mas que todo, los estudiantes realizan preguntas de validación: “¿este punto me quedó bien? ¿así se hace?”. No se presentan eventualidades en la clase.

Al finalizar la clase, el maestro en formación y el profesor se dirigen al salón de profesores, donde el primero procede a calificar el trabajo de la primera hora de clase. La mayoría de estudiantes realizaron siete figuras con sus respectivos volúmenes, lo que evidencia que se trabajó correctamente en esta actividad.

Sesión 13 (22 de mayo de 2018):

En esta sesión los estudiantes tenían evaluación de competencias, por lo que el maestro en formación se encargó de calificar los puntos de bonificación de las competencias de los grados quinto del Colegio, conforme las instrucciones del profesor. Cuando el maestro en formación finaliza de calificar los exámenes de los cursos se dirige al salón, donde, va calificando los puntos de bono en los exámenes de los estudiantes que van finalizando. Cabe destacar que de los cuatro grados quinto que hay en el colegio, el curso quinto d fue el que realizó mejores teselaciones en sus exámenes, lo que genera satisfacción en el maestro en formación.

La semana entrante se ha convocado una reunión para los maestros en formación, por lo que esta es la última sesión de observación del semestre. El profesor le da instrucciones al maestro en formación para que realice una diapositiva en la cual comente cual fue su experiencia semestral en el Colegio, también acuerdan enviar la unidad didáctica al correo del profesor, entregar las guías en formato cd y reunirse la semana entrante para la reunión final de pasantes. Como el próximo lunes habrá una feria empresarial de grado quinto, el profesor invita al maestro en formación a que asista a dicha feria, por lo

que proceden a revisar detalles sobre las empresas de algunos estudiantes, junto con sus posters. Como la feria empresarial está a cargo de matemáticas, se pasan las notas de los estudiantes con respecto a este logro a la plataforma del colegio. El profesor también le indica al maestro en formación que la actividad que él realizó de teselas con el grupo se colocará en una cartelera durante la semana entrante, la cual estará visible ante toda la comunidad estudiantil.

Esta ha sido la última sesión de trabajo, hasta esta fecha se tomarán registros en el diario de campo. Se procede a entregar el documento al profesor por medio de correo electrónico.

➤ **Estudiantes y biografías del aprendizaje matemático escolar.**

- **Salma Abu-Shihab:** el profesor indica que es una de las estudiantes que tiene mayor inconveniente con las entregas de ejercicios, indica que “hay que ayudarlo para que logre hacer el trabajo”. En la primera sesión fue la estudiante que más se acercó al maestro en formación, quien manifiesta que bastó con un par de indicaciones para que comprendiera la forma de hacer el ejercicio. La estudiante mostraba al maestro en formación la solución de cada área hallada, una a una, lo que parece indicar que necesita una figura que refuerce su seguridad en cuanto a la correcta solución de los ejercicios.

En la tercera sesión se encuentra en los puestos de adelante, muy cerca del profesor, realiza su trabajo de forma más autónoma, es la única estudiante que no coloca las medidas encima de la figura, sino que crea una tabla adicional donde

nombra la parte del robot (cabeza, hombro, ojo, pie, pierna...) y la relaciona con su área y perímetro.

Durante el test de preparación, la estudiante indica al maestro en formación que le confunde como hallar la media, el profesor le indica que suma todos los números, y luego divide el resultado entre la cantidad de números que sumó, a lo cual la estudiante indica que comprendió.

Hubo un inconveniente con ella y otro estudiante del curso (Isaías), al parecer se tratan de una forma dura, colocándose sobrenombres, hay que recordar que la estudiante tiene ascendencia árabe, lo que hace que tenga rasgos faciales un poco más prominentes que el resto de sus compañeros, lo cual puede aumentar las probabilidades de bullying contra ella, el director de curso ingresa al aula para entregar unos trabajos y habla con Salma primeramente, quien le explica que Isaías le pone apodosos referente a sus orejas, el profesor habla con los dos y se va. Los dos estudiantes le dicen al maestro en formación lo que sucede: ambos se tratan muy fuerte. Al hacer un análisis de las edades y sus características emocionales sale a flote que este tipo de comportamiento indica que tal vez exista algún tipo de atracción o camaradería entre estos dos niños de distinto sexo, por lo que el tema de bullying mencionado anteriormente parece no tener tanta fuerza.

Cuando se debe decorar el prisma, Salma hace el cubo de nuevo porque no le gusta el diseño, e toma todo el tiempo necesario para dibujar y colorear su prisma.

Ella es la estudiante a quien no le entregaron la prueba de probabilidad. Fue la nota más baja (60 de 100). Se podía ver en su cara un estado de frustración, enojo y tristeza a medida que les entregaban las notas a los estudiantes y a ella no. Durante toda la clase estuvo seria y casi no hablaba, solo se levantaba de su puesto para preguntarle al profesor o para pedir algún color a sus compañeros. Continúa con la costumbre de ir al frente del profesor para solicitar su ayuda, como si estuviera solicitando su entera atención, se debe poner más atención al trabajo de la estudiante.

La estudiante realiza autónomamente una exploración del plano cartesiano, donde descubre varias características de las coordenadas, solicita ayuda en un par de cuestiones y sigue en su exploración.

Desafortunadamente la estudiante sigue tuvo un logro perdido, por lo que deberá realizar recuperaciones.

La estudiante presenta ciertas dificultades con la creación de la hoja de arce, pero las corrige rápidamente. En la actividad del maestro en formación no estuvo muy animada, aunque cabe resaltar que participó de buena forma, tal vez el haber estado en uno de los puestos más alejados del auditorio influyó en esto. Por otra parte, mientras escuchaba la exposición, iba adelantando la decoración de la hoja de arce en el papel milimetrado. El tema del plano cartesiano le ha llamado mucho la atención.

En las exploraciones con computador, la estudiante pide ayuda con los colores de los cubos, de resto realiza un trabajo autónomo y organizado. No tiene mayor inconveniente con el software, incluso, es la segunda estudiante que acaba su trabajo en menor tiempo.

Cuando se realizan las actividades de las teselaciones decoradas, ella realiza dos figuras, muestra mucho interés por las teselaciones, sus propuestas de decoración son muy parecidas a las psicodélicas del estilo hippie, es la única estudiante que realiza dos figuras, lo que sirvió mucho para subir el ánimo de ella con respecto a las matemáticas. La estudiante da indicios de tener un pensamiento geométrico predominante.

En la sesión de los cubos soma, la estudiante pide permiso al profesor para trabajar en el suelo, lo cual acepta el profesor. La estudiante fue muy perseverante en su trabajo, a lo cual el profesor la felicita públicamente. El maestro en formación se acerca varias veces al lugar de trabajo de la estudiante, donde miran posibles formas de solucionar las figuras propuestas, el maestro en formación intenta explicarle intuitivamente que debe ver que cantidad de cubos tiene la figura que hay que realizar, para después mirar cuántas figuras debería tomar para lograr ese número exacto de cubos. La estudiante no asimiló el puente entre la aritmética y la geometría que el maestro en formación proponía.

A pesar de no haber solucionado ninguna figura, la estudiante tuvo aproximaciones muy buenas, faltando sólo un cubo de su construcción,

contrastando con los dos o tres que la mayoría de sus compañeros tenían al final de sus propuestas.

En la sesión 10 es la primera estudiante que finaliza con su trabajo. Además, lo finaliza en tiempo récord, en casi la mitad del tiempo que les tomó a sus compañeros. La calificación de la estudiante fue de 100. Ha demostrado grandes avances en su trabajo, demostrando que posee un buen nivel de pensamiento geométrico.

En la actividad de volúmenes en computador, la estudiante trabaja de buena forma, sin mayores dificultades a la hora de encontrar volumen y recrear as figuras.

La teselaciones de la estudiante en la evaluación de competencias se generan de forma excelente y ordenada, añade colores de forma pulcra, lo que hace que estéticamente mejore el resultado.

La estudiante participará en la feria empresarial.

- **Sofía Alejandra Gamboa**: es una de las estudiantes con mayores habilidades matemáticas del curso, fue seleccionada para hacer parte del club de olimpiadas matemáticas en representación del colegio. En la primera sesión trabajó de forma autónoma, llegando fácilmente a la solución de sus ejercicios.

En la tercera sesión utilizó trapecios para modificar su robot, lo crea de aspecto más femenino (usó el trapecio isósceles como una falda.) ayuda a su compañera

de al frente y en ocasiones se le puede observar sumida en sus pensamientos, analizando las áreas de las figuras, o tal vez haciendo operaciones mentalmente.

En el test de preparación la estudiante fue una de las últimas en finalizar la prueba, tenía un inconveniente en tres de las operaciones que debía hacer, las rectificaba, se le vuelve a calificar y mantiene el error en uno de los puntos.

El error consistía en que había dos números, los sumaba, pero dividía entre tres; este rasgo indica que la estudiante estaba analizando el algoritmo, primeramente, pero al ver que sus compañeros estaban acabando, tal vez no se quiso sentir relegada y procedió a hacer las operaciones rápidamente, sin comprobar la veracidad en el procedimiento. Cuando se le explica que debe dividir entre dos y no entre tres, ya que este ejercicio tenía menos elementos que los otros (que en su mayoría eran de tres elementos), a lo cual cae en cuenta de su error rápidamente y lo corrige de forma eficaz.

Este rasgo en la estudiante pone a flote que el pensamiento de Sofía es de tipo ‘acelerado’, que al momento de tener un patrón que se repite constantemente es capaz de extraer sus pasos claves y replicarlo en otros escenarios, hay que trabajar con ella en el análisis del contexto, ya que tal vez por el afán de hacer las operaciones rápido, opera bien, pero puede que haga procesos que no son necesarios.

Sofía continúa con su trabajo autónomo, sigue colaborándole a sus compañeros de fila, y sorprende que la decoración de su prisma lo hizo a partir de degradados de colores, es una de los 6 estudiantes que finaliza el test completamente.

La estudiante tuvo nota perfecta en sus evaluaciones, cuando el profesor inicia la actividad de construcciones 3d, ella manifiesta lo siguiente: “y los que ya sabemos hacer las letras en 3d que hacemos”, por lo que, después el maestro en formación se acerca a ella para revisar su trabajo le pregunta porque ya sabía el procedimiento, a lo que ella le responde que su papa le enseñó, ‘eso y muchas cosas más’, el padre de la estudiante estudió ingeniería civil e industrial y dicta clases de ingeniería, por lo que se evidencia que hay una buena comunicación entre ellos dos y, que él refuerza el conocimiento de su hija en extraclase.

La estudiante tuvo calificación excelente en sus logros, es la primera estudiante que recibe sus notas, ya pasó la materia.

La participación de Sofía en la exposición del maestro en formación fue pertinente y enriquecedora, indicaba correctamente las teselas, también es una de las estudiantes que da la idea de la teselación en un túnel, lo que es una noción de la teselación en geometría hiperbólica.

La estudiante pide ayuda en el aula de sistemas con los tres primeros ítems señalados en la sesión 8, realiza su trabajo de forma autónoma, se toma su tiempo para realizar los gráficos en el computador. Cuando llega al aula para continuar con la actividad de teselas, se muestra indecisa con respecto a que decoración

hacer, aunque tiene claro que quiere una figura central de la cual salga toda la decoración, al final se decide por el signo del yin yang, acompañado de degradados. Demuestra tener un pensamiento predominantemente aritmético.

En la clase sobre los cubos soma se vio rezagada, lo cual le generó un poco de frustración, muestra un poco de impotencia y rabia en sus acciones, por ejemplo, rayando las figuras que debía colorear y expresando frases como “esto está muy difícil”, “ash”, entre otras. La estudiante no puede realizar ninguna solución de las figuras propuestas, sigue trabajando de forma aislada, y realiza su trabajo de forma autónoma. Se puede potenciar el pensamiento geométrico en la estudiante, lo que complementaría el pensamiento aritmético que ha demostrado en las actividades anteriores, así como su participación en las olimpiadas matemáticas, donde es representante de su curso y una de las mujeres con mayor puntuación entre los cursos del colegio.

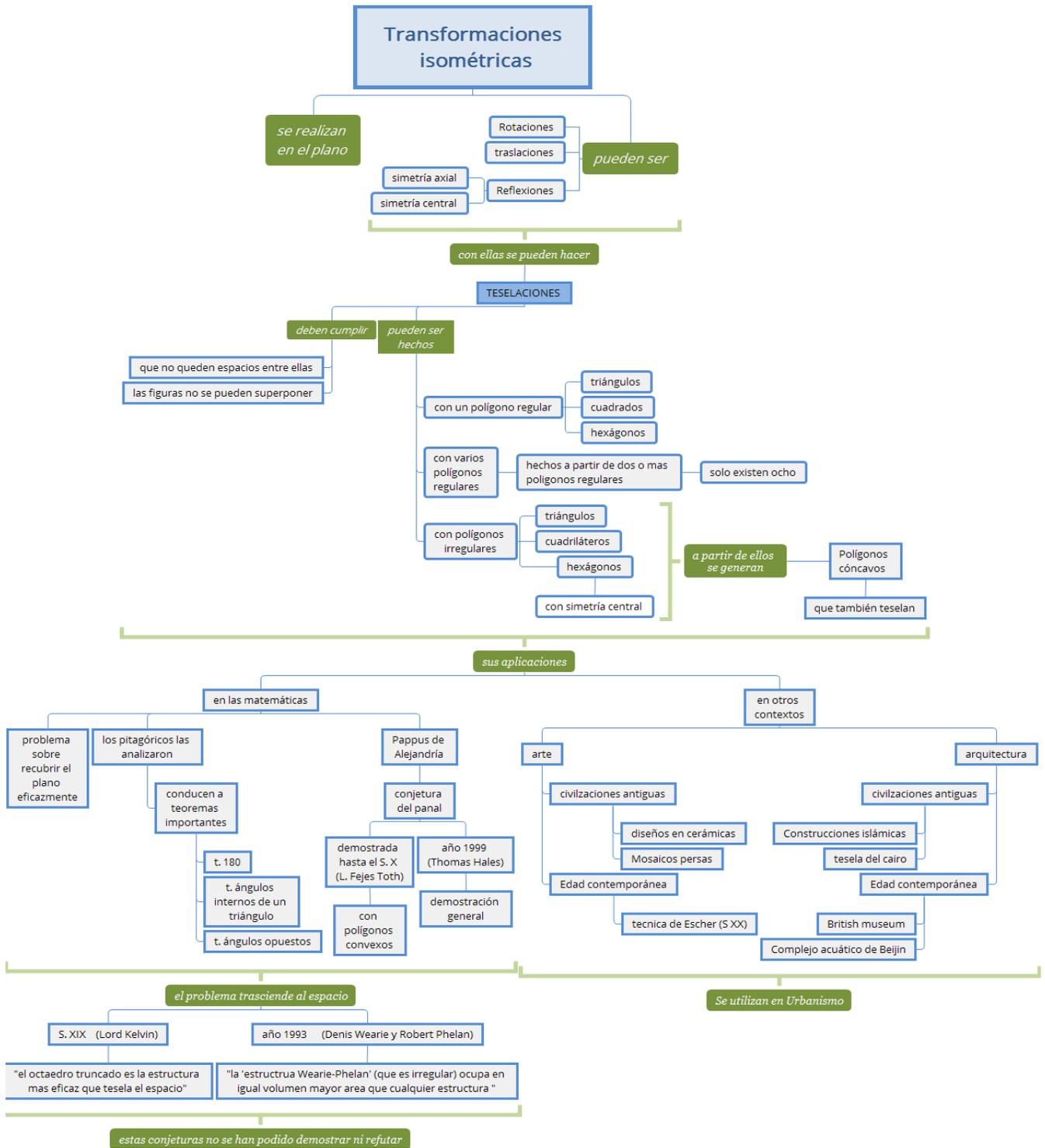
En la sesión 10 la estudiante trabaja autónomamente, tiene una calificación de 90, su trabajo fue normal, es una de las estudiantes que presenta su propuesta de teselación, lo que hace ver que está trabajando para mejorar su pensamiento geométrico.

En la sesión de volúmenes en 3d, la estudiante trabaja de forma autónoma, manejando correctamente el software.

En la evaluación de competencias, saca nota perfecta, con plus en trabajo de teselaciones. La estudiante participará en la feria empresarial.

2. Análisis de contenido:

Ilustración 3: red conceptual sobre las teselaciones



A continuación, las definiciones relacionadas en la red conceptual:

- Cuadrado: Polígono regular de cuatro lados. El cuadrado es un rectángulo que tiene la propiedad de que sus 4 lados miden lo mismo.
- Eje de simetría: La recta que divide a una figura geométrica en dos partes iguales que se pueden superponer una sobre la otra doblando la figura sobre esta recta. Por ejemplo, el cuadrado tiene cuatro ejes de simetría.
- Grupos cristalográficos planos: se generan cuando el grupo de traslaciones está generado por dos traslaciones (no paralelas), lo que hace que la figura básica se repita en todo el plano teselándolo.
- Hexágono regular: Polígono de 6 lados iguales y 6 ángulos iguales
- Se dice que una transformación T del plano es una isometría si T no altera la distancia entre los puntos. Si $P(x, y)$ y $Q(z, w)$ son dos puntos cualesquiera del plano, la distancia entre los puntos P y Q debe ser igual a la distancia entre los puntos $T(P)$ y $T(Q)$. Por lo tanto $d(T(x, y), T(w, z)) = d((x, y), (w, z))$ donde d es la distancia entre los puntos del plano, dada por $d((x, y), (w, z)) = ((x - w)^2 + (y - z)^2)^{1/2}$
- Polígono: Figura plana cerrada delimitada por segmentos de recta que no se cortan entre ellos, salvo en sus extremos. Cada uno de los segmentos de recta es un lado del polígono y el punto donde se intersectan dos lados consecutivos del polígono se llama vértice.
- Polígono cóncavo: o Un polígono es cóncavo si al menos uno de sus ángulos internos es entrante. Si es posible dibujar un segmento de recta con extremos dentro del polígono, pero parte del segmento fuera de la figura, entonces el polígono es cóncavo

- Polígono regular: Cuando un polígono tiene todos sus lados y todos sus ángulos iguales se llama polígono regular. Es decir, un polígono es regular si es equilátero y equiángulo a la vez.
- Polígono irregular: polígono que no cumple la igualdad en todos sus lados o ángulos.
- Es posible que un punto quede fijo, digamos Q , y entonces se tendrá $T(Q) = Q$. En este caso se dice que el punto Q permanece Invariante bajo la transformación T .
- Una reflexión con respecto a una recta L es un movimiento del Plano que actúa de la forma siguiente: cada punto P del plano es enviado a otro punto Q , tal que existe un único punto sobre la recta L , que denotaremos por P_0 , tal que la recta que une a P y Q es perpendicular a la recta L , y además se tiene la siguiente igualdad entre las distancias $d(P, P_0) = d(P_0, Q)$.
- Reflexión: "movimientos directos en la dirección y orientación de una figura respecto a un eje. Estos pueden ser de dos tipos:
 - Rotación: Movimiento rígido del plano (o de una figura) alrededor de un punto fijo, el cual es llamado eje de rotación.
 - Una rotación $R(C, \theta)$ con centro C y ángulo de rotación θ es un movimiento que hace girar los puntos del plano de acuerdo a la relación siguiente: cada punto P del plano es enviado a un punto Q , tal que P y Q están sobre una circunferencia de centro C y radio igual a la distancia desde P a C . Además, el ángulo entre los radios CP y CQ es igual a θ
- Simetría: propiedad que presentan algunas figuras geométricas que consiste en una correspondencia en la forma, el tamaño y la secuencia de las partes que la componen respecto de una línea o punto.

- Simetría axial: Un objeto geométrico presenta simetría axial cuando tiene una recta de simetría. Esa recta se dice que es el eje de simetría de la figura.
- Simetría central: Un objeto geométrico presenta simetría central (radial) cuando su centro sirve de centro de simetría.
- Teselado: Es el recubrimiento de una región plana con un patrón de figuras geométricas, que tiene como característica que no pueden quedar figuras sobrepuestas ni huecos o espacios entre estas.
- Teselación regular: El patrón que se repite es un mismo polígono regular
- Teselación semirregular: se utilizan dos o más polígonos regulares. Cada vértice tiene el mismo patrón.
- Teselación irregular: se utilizan dos o más polígonos irregulares. Cada vértice tiene el mismo patrón.
- Traslación: Movimiento de un objeto geométrico de manera que cada uno de sus puntos se mueve en la misma dirección, la misma distancia, sin rotación, reflexión o cambio en su tamaño.
- Una traslación en el plano es una transformación que mueve a todos los puntos en una dirección fija. Este viene expresado por la fórmula $T(x,y) = (x + a, y + b)$, donde (a, b) es un punto fijo del plano.
- Triángulo: Polígono de tres lados.
- Teorema 180: la suma de los tres ángulos internos de un triángulo que se encuentra en el plano suma 180 (o dos ángulos rectos).

Demostración: Porque al trazar una paralela a uno de los lados por el vértice opuesto a él, los ángulos interiores suman dos rectos (por el quinto postulado de Euclides). Es decir,

los ángulos interiores de un mismo lado de la transversal son suplementarios. Pero los adyacentes en la base son también suplementarios (forman llano); de aquí que los ángulos alternos internos formado por la paralela a la base y el lado son iguales. Pero los tres adyacentes en el vértice forman un llano. Por tanto, la suma de los ángulos interiores de un triángulo suma dos rectos.

- Teorema. (Fedorov, Schoenflies, Barlow, 1880s) Hay exactamente 17 teselaciones del plano esencialmente diferentes que tienen simetrías en dos direcciones independientes. (los 17 tipos cristalográficos planos).
- Teorema: Las únicas teselaciones regulares por polígonos regulares son las $\{3, 6\}$, $\{4, 4\}$ y $\{6, 3\}$ (teselaciones con triángulos, cuadrados y hexágonos).
 - Demostración: Un polígono regular de m lados tiene ángulos de $t = 180(m - 2)/m$ grados. Si en cada vértice se encuentran n polígonos debe tenerse: $180(m - 2)n/m = 360$, es decir, la ecuación: $(m - 2)(n - 2) = 4$, Ecuación cuyas únicas soluciones son las del enunciado, dado que m y n son números naturales.
- Vértice: Punto característico de una figura geométrica donde se intersecan dos lados o varias (dos o más) aristas.
- Transformación isométrica: son transformaciones que se realizan a las figuras conservando la medida de sus lados y de sus ángulos (generando una nueva figura congruente a la primera).
- Una transformación del plano es una función o aplicación uno a uno del plano en sí mismo. Si designamos a la transformación por la letra T, entonces todo punto P del plano es enviado en un único punto P' y esto se denota por $T(P) = P'$.

➤ **Aplicaciones del contenido en las matemáticas:**

Con las teselaciones se busca hallar figuras que recubran todo el plano de manera eficaz. El grupo matemático de los pitagóricos analizó tales construcciones y probablemente éstas los hayan conducido al famoso teorema que establece que la suma de los ángulos interiores es igual a un ángulo llano. Pappus de Alejandría formularía la Conjetura del panal, la cual establece que el polígono regular más eficiente para recubrir una superficie es el hexágono regular; esta conjetura se demostró hasta el siglo X, donde L. Fejes Tóth considera como hipótesis inicial que las celdas son polígonos convexos. Es luego, en el año de 1999 cuando **Thomas Hales** publica una demostración general de la conjetura del panal, en el que prueba que, efectivamente, el hexágono regular es la figura más eficiente.

El problema de la eficiencia del recubrimiento del plano trasciende al espacio, y a finales del siglo XIX, Lord Kelvin conjetura que el octaedro truncado es la figura que cumple con esta tarea. Esta conjetura no se ha podido demostrar, pero en 1993 Denis Wearie y Robert Phelan hallaron otra estructura aún más eficiente que el octaedro regular, esta nueva figura ocupaba en igual volumen mayor área que cualquier figura, la cual está formada por dos dodecaedros irregulares con caras pentagonales y seis tetradecaedros con dos caras hexagonales y doce caras pentagonales; se denomina “estructura de Wearie-Phelan”. Tampoco se ha logrado comprobar si ésta estructura es la más eficiente de todas o si habrá alguna mejor.

➤ **Aplicaciones del contenido fuera de las matemáticas:**

Los teselados aparecen en las civilizaciones más antiguas a través de la arquitectura y el arte; los enladrillados de ciudades como Alejandría, Babilonia y Persia dan esbozos de la fascinación del hombre por las figuras simétricas y su relación armoniosa, la cultura islámica ha generado majestuosas construcciones arquitectónicas mediante estas técnicas.

Recientemente, el artista M.C. Escher (1898-1972) ha utilizado la técnica de teselados en cuadros artísticos entre los cuales destacan “límite circular III”, “reptiles”, “día y noche” y “cycle”. Esto ha producido un gran movimiento en el que los teselados han vuelto a tomar valor estético en creaciones artísticas, arquitectónicas y urbanísticas en el mundo contemporáneo, como lo demuestra la construcción del centro acuático de Beijín, el cual está hecho con teselados de estructuras en 3d.

3. Análisis cognitivo:

➤ **Objetivos de la Unidad Didáctica:**

El objetivo de la unidad didáctica propuesta en este documento consiste en generar una serie de (cinco) actividades para que los estudiantes del curso 5-D del colegio Abraham Lincoln puedan tener un acercamiento al concepto de teselaciones por medio de la apreciación artística y de la creación de teselas en cartón y en geometría dinámica.

➤ **Propuestas didácticas de enseñanza:**

Esta unidad didáctica le apuesta a la relación que existe entre el arte y la geometría, han sido muchos los autores que han validado en sus experiencias académicas la efectividad de esta fusión.

Godino y Ruiz (2003) plantean que es de gran interés que los niños construyan y dibujen formas, ya que, a partir de esta manipulación, podrán luego recrear figuras con determinadas condiciones. Asimismo, da una muestra del software de geometría dinámica como una herramienta para evaluar y determinar posibles errores en el pensamiento de los estudiantes.

Vergel, Rocha y León (2006, citado en Garzón, Duarte, Rengifo 2015) manifiestan que hay varias dimensiones que afectan la estructura de las actividades matemáticas en el aula: La matemática, que vincula todo el conocimiento del concepto, procesos, habilidades en el área específica que se trabajan interactuando con el dispositivo didáctico; la cognitiva, que se ocupa del diseño de estrategias y soluciones por parte del estudiante y la socio-matemática, que pone en juego las normas socioculturales y sociomatemáticas establecidas, producto de la interacción grupal y el saber, manifestadas en discusiones e interpretaciones que pueden tener los estudiantes respecto al tema que se trate en clase.

➤ **Experiencias de aprendizaje**

El trabajo de Mejía (2008) realizó teselaciones en software de geometría dinámica inspirados en algunas obras de Escher, lo que generó que el concepto fuese mejor

asimilado, tal como se puede evidenciar en los trabajos realizados por los estudiantes en el programa Cabri II plus.

Acosta y Rincón (2014) manifiestan en su experiencia de aula que se puede hacer que los estudiantes validen ciertas características que deben tener los octaedros para que puedan teselar, entre los cuales se encuentra el paralelismo que deba tener la figura, así como la congruencia entre sus partes opuestas.

➤ **Dificultades**

El hecho que se implemente algún tema de matemáticas genera aversión y antipatía en muchos de los estudiantes, por lo que está preparado para algún momento en el que los estudiantes no deseen realizar actividades, por este motivo se utilizará el enlace del arte, para intentar atraer la atención del estudiante hacia el concepto matemático.

Las teselaciones no hacen parte de los “temas y/o conceptos esenciales” que se imparten en las aulas de clases, en los mismos documentos curriculares existen muy pocas referencias sobre estos conceptos, lo que hace que no exista un repertorio significativamente grande de propuestas didácticas comparado con otros conceptos.

Se añade a este inconveniente la poca formación del pensamiento geométrico que existe en los estudiantes del país, lo que hace que algunos conceptos claves para generar teselaciones, como simetrías y paralelismos no sean totalmente asimilados por los alumnos.

➤ **Errores**

Los estudiantes tienden a confundir teselados con mosaicos, los cuales recubren el plano, pero no tienen uniformidad en el patrón de tesela (en los mosaicos se puede colocar cualquier figura en los ‘huecos que vayan quedando’).

Hay una tendencia marcada que hace que se confundan los teselados irregulares con los semirregulares, los estudiantes relacionan la palabra ‘irregular’ con una o más figuras presentes en la tesela, es de esta forma que nombran a algún grupo cristalográfico como “irregular”, a pesar que éste es semirregular.

4. Análisis de instrucción:

- **Actividad 1: “explorando el arte de Escher”**: como los estudiantes del curso ya han realizado actividades con teselaciones, se retomará el tema abordándolo inicialmente por medio de la observación de la técnica de Escher. Se proyectarán ciertas obras del artista y se les solicitará a los estudiantes que analicen que tipo de figuras conforman las teselas, tratando de establecer sobre cuál polígono se creó la figura que tesela el cuadro (triángulos, cuadriláteros o hexágonos) y diagramándolos en el tablero. De esta forma los estudiantes van analizando que a partir de los polígonos mencionados anteriormente se pueden generar polígonos convexos que cumplan con la teselación. Esta actividad se fundamenta teóricamente en el trabajo de Mejía (2008), quien indica que “Ahora, para realizar teselaciones con polígonos cóncavos, se siguió la recomendación de Gutiérrez (1990), al utilizar las obras de M. Escher como material didáctico. A los estudiantes se les presenta algunas de las obras de Escher, ellos analizan los movimientos de la tesela y en algunas de ellas se explora la elaboración de la pieza teselante. Los

detalles y el color de la tesela hacen que tomen formas, estos elementos motivan a los estudiantes a crear teselas con formas de animales o cosas.”

- La duración estimada de la actividad está esquematizada de la siguiente forma:
 - Preliminares (10 min): se realizarán las actividades de conexión del proyector, acomodación de los estudiantes y prueba del proyector.
 - Introducción (15 min) se explicará a los estudiantes los conceptos de teselación y tesela, así como sus propiedades. Se realizará después una breve reseña sobre la vida y obra de Escher y su visita a la Alhambra.
 - Instrucción y realización de la actividad (40 min). Se proyectarán los cuadros de Escher, para lo cual se estima que por cada cuadro se tomen unos 2 minutos de duración promedio. Al mismo tiempo que se realiza esta actividad, los estudiantes irán completando unas hojas con teselas (las fotocopias se les suministrarán antes de la proyección del primer cuadro), las cuales también deberán colorear.

- Nota: la actividad complementaria es tomada del libro Prime mathematics 5b:

Ilustración 3.1: actividad complementaria 1

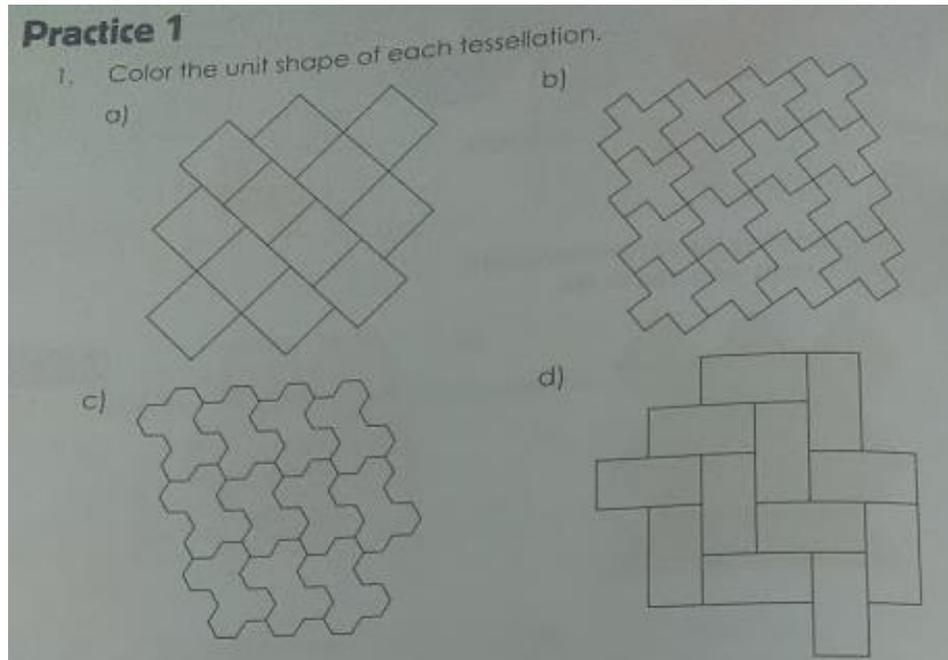
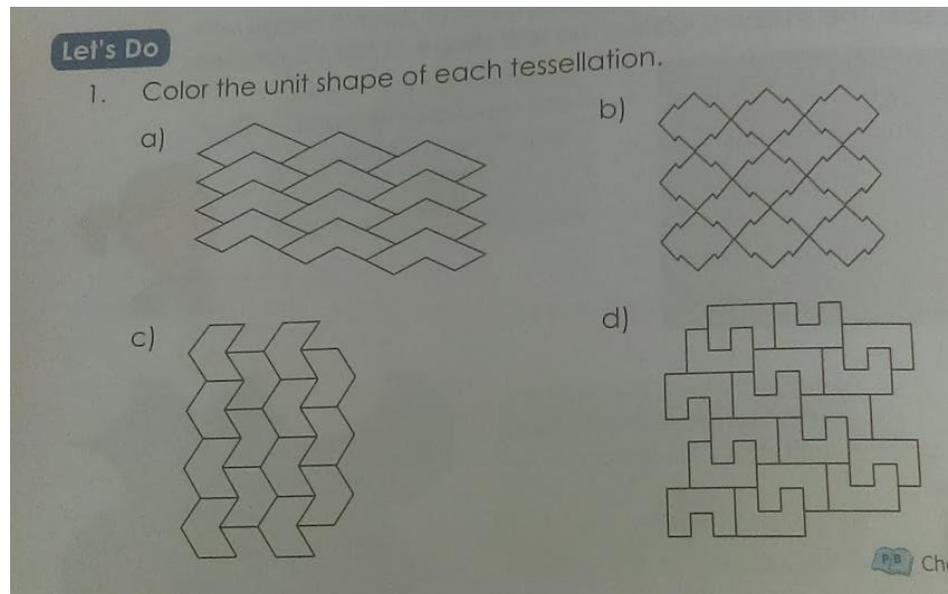


Ilustración 3.2 actividad complementaria 2



Algunos cuadros que se utilizarán en la proyección son los siguientes:

Ilustración 4: "A 11" M.C. Escher (1938). Cordon Art-Baarn-Holland. All rights Reserved

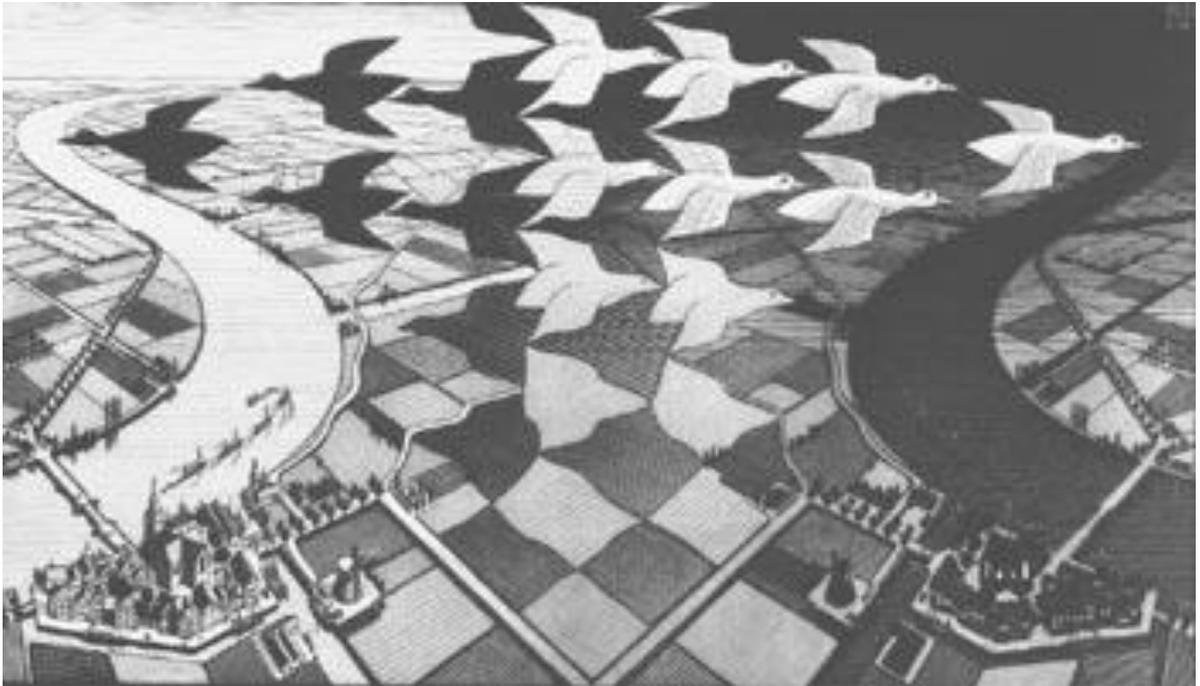


Ilustración 5: Systematic Study. M.C. Escher (1936). Cordon Art-Baarn-Holland. All rights Reserved



Ilustración 6: Development I, M.C. Escher (1936). Cordon Art-Baarn-Holland. All rights Reserved

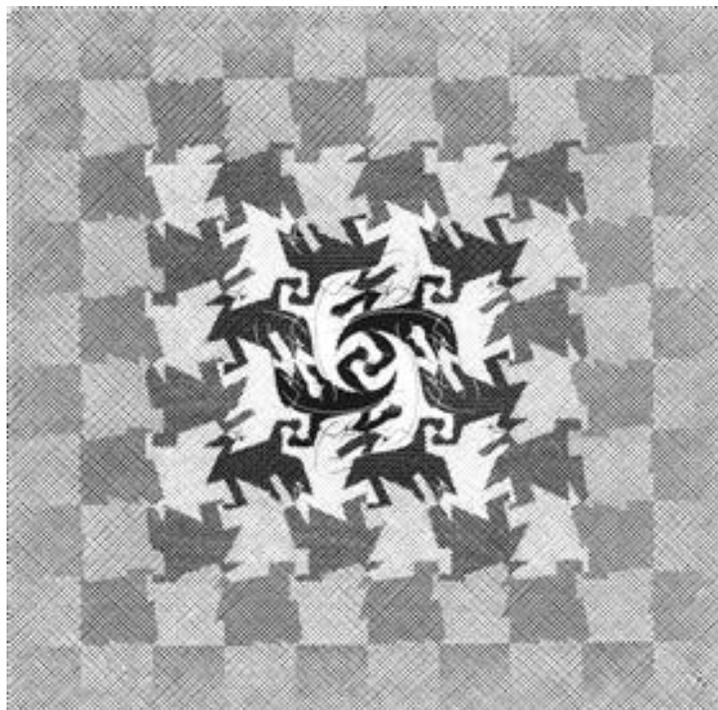


Ilustración 7: Lizard, M.C. Escher (1936). Cordon Art-Baarn-Holland. All rights Reserved



Ilustración 8: Bird fish. M.C. Escher (1936). Cordon Art-Baarn-Holland. All rights Reserved

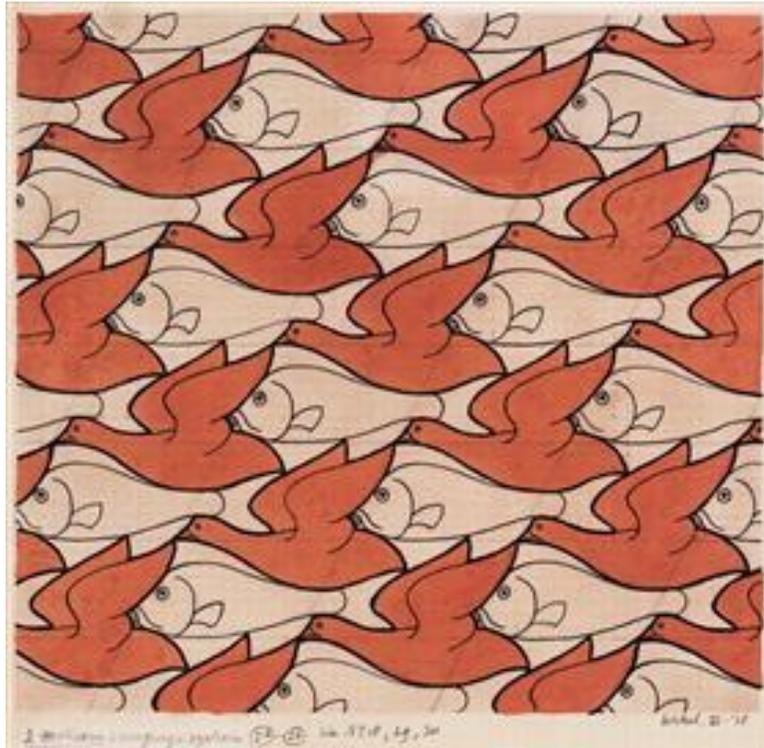


Ilustración 9: Two birds. M.C. Escher (1936). Cordon Art-Baarn-Holland. All rights Reserved

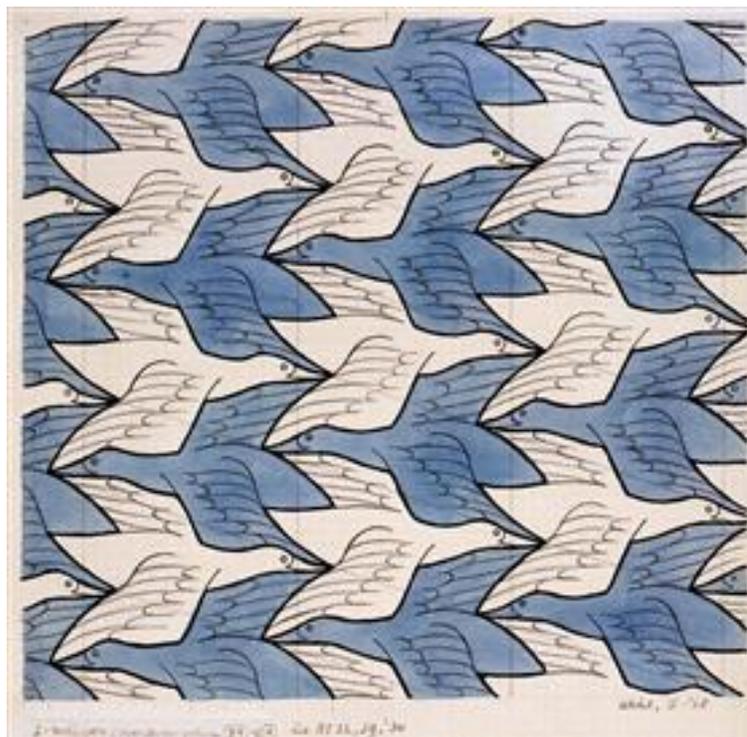


Ilustración 10: cycle. M.C. Escher (1938). Cordon Art-Baarn-Holland. All rights Reserved

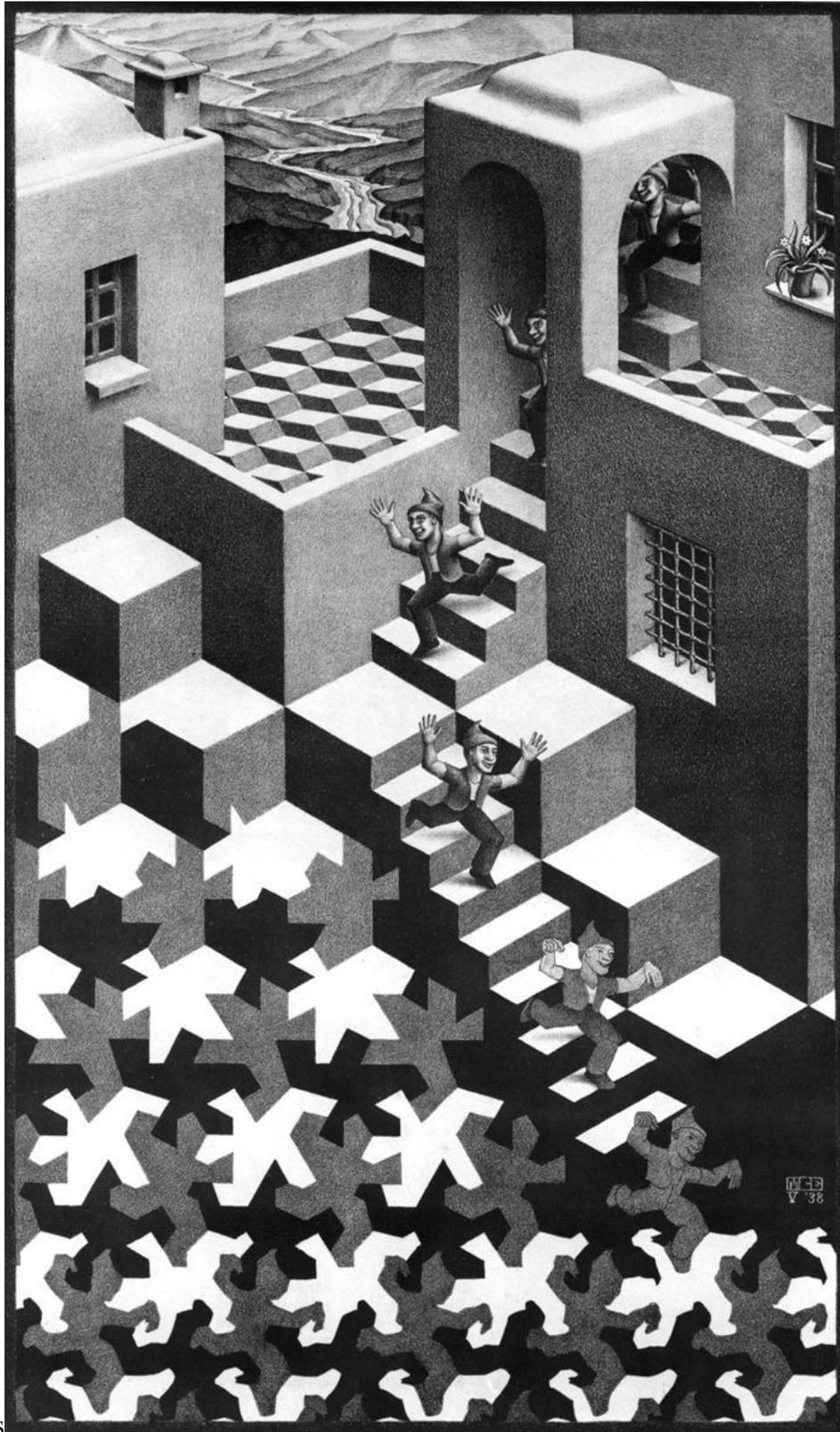


Ilustración 11: SKY AND WATER I. M.C. Escher (1938). Cordon Art-Baarn-Holland. All rights Reserved

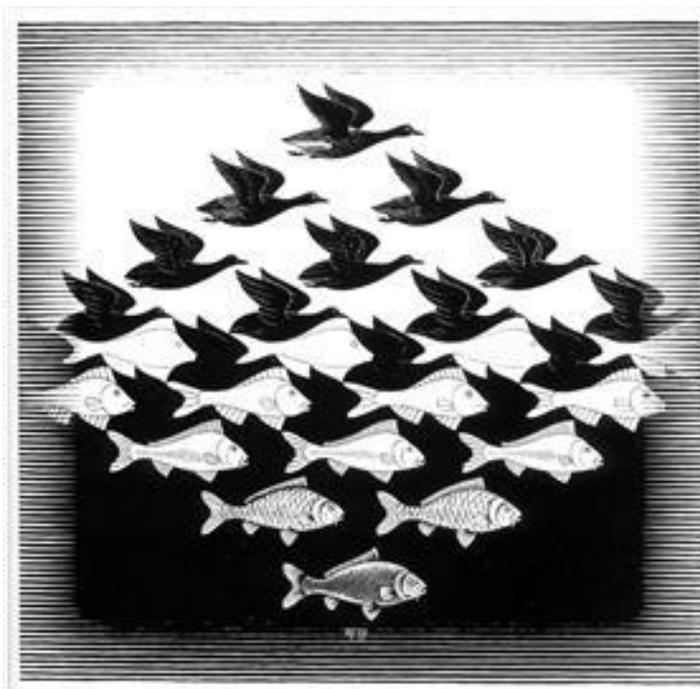
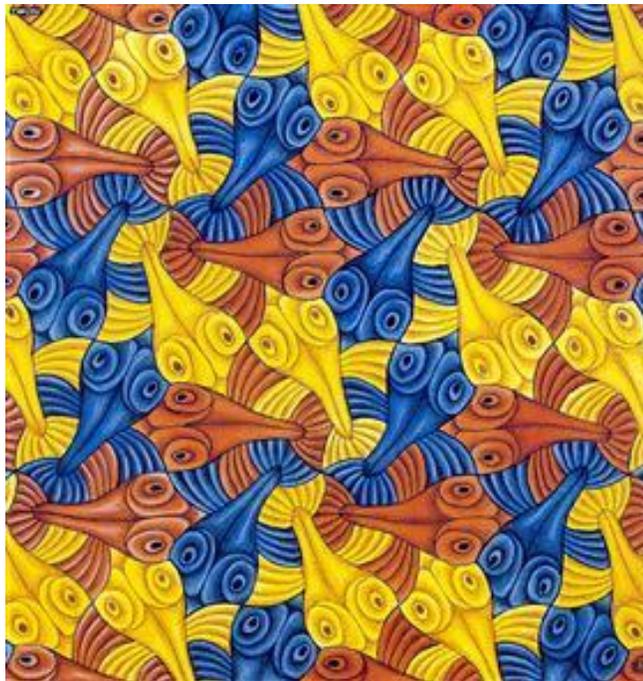


Ilustración 12: Shells and Starfish. M.C. Escher (1941). Cordon Art-Baarn-Holland. All rights Reserved



Ilustración 13: Symmetry watercolor 55 fish. M.C. Escher (1938). Cordon Art-Baarn-Holland.

All rights Reserved



- Objetivo actividad 1: Hacer un acercamiento a las teselaciones por medio del arte para motivar a los estudiantes en el estudio de las mismas.

- Recursos actividad 1:
 - Proyector
 - Computador
 - Tablero
 - Marcadores

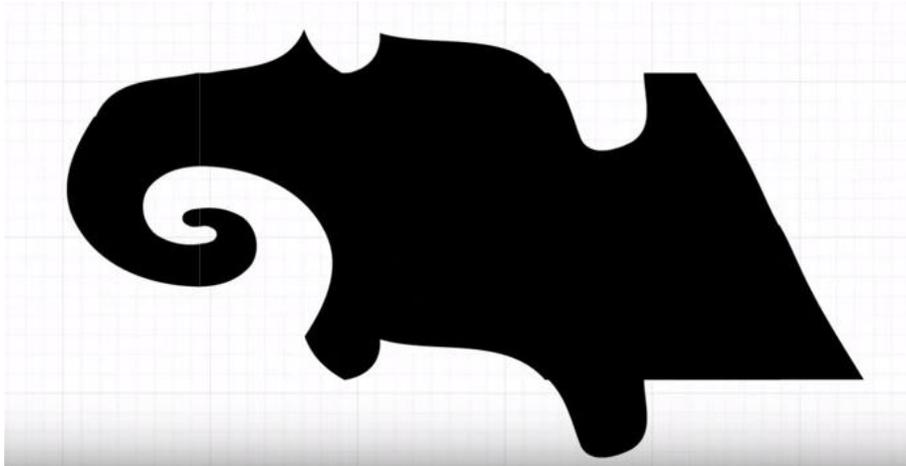
- La forma en que se planea recopilar la información de esta actividad consiste en evaluar las participaciones de los estudiantes, quienes participarán de dos formas:
 - En primer lugar, algunos estudiantes pasarán al tablero (la presentación de las diapositivas estará sobre el tablero para así poder escribir ‘entre los

cuadros’) para que señalen cual es la tesela y para que indiquen a partir de que figura geométrica fue creada.

- Los estudiantes que no se encuentren en el tablero podrán participar manifestando sus opiniones, lo cual será tenido muy en cuenta por el maestro en formación para tener un referente en cuanto a la apropiación del concepto en los estudiantes.

➤ **Actividad 2 ”Teselas de identidad”**: se aprovechará el interés de los estudiantes por dibujar para que decoren teselas que se les suministrarán en la clase, se espera que los estudiantes se den cuenta que las teselaciones son agrupaciones de unidades, de esta forma, se incentivará a que los estudiantes fomenten los valores de bondad y civismo que son pilares del colegio, de esta forma se utilizará el concepto matemático en dos sentidos: inicialmente, el estudiante recordará las condiciones para lograr un teselado: que no se sobreponga ninguna ficha, ni que queden agujeros en el plano. Se dará un momento de la clase para que cada estudiante decore su tesela a su gusto Cuando todos los estudiantes tengan lista su teselado, se procederá a pegarlos en el mural de papel kraft, que servirá de recordación del concepto matemático y de los valores del colegio. Se tiene en cuenta la propuesta de Herrera, Cruz, Montes y Vargas en su trabajo sobre teselaciones, donde indican que desde el pensamiento geométrico se ve la necesidad de crear espacios que permitan una conexión sociocultural, y esta conexión se puede lograr por la expresión artística.

Ilustración 14: plantilla de tesela

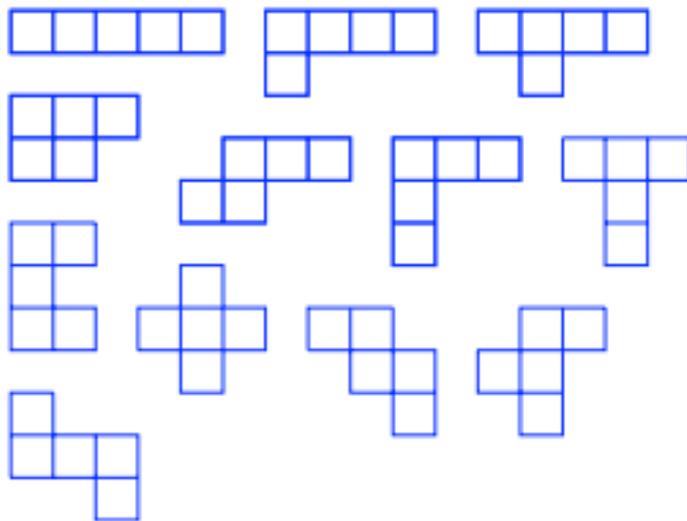


- Objetivo actividad 2: Generar en los estudiantes por medio de las teselaciones sentido de identidad y de pertenencia hacia su curso, aprovechando la decoración de teselas en el aula de clases.
- Recursos actividad 2:
 - Plantillas de teselados (en cartulinas) se obtiene del video <https://www.youtube.com/watch?v=bbbvv1z7lo0>
 - Colores, marcadores, plumones
 - Papel kraft
 - Barras de pega stick
- Se planea recopilar información mediante la forma en que los estudiantes coloquen las teselas en el mural. Puede suceder que varios estudiantes se reúnan para realizar sus decoraciones de forma uniforme, para que, al momento de colocar las figuras en el mural generen estilos llamativos, si esto llega a suceder, es maestro en formación procederá a motivar al curso para que trabajen en grupos de máximo tres personas.

- La duración estimada de la actividad está esquematizada de la siguiente forma:
 - Introducción (2 min) se explicará a los estudiantes las dos características que debe tener una tesela.
 - Instrucción y realización de la actividad (20 min). Se dará el tiempo especificado para que los estudiantes decoren, coloreen y dibujen su tesela. A medida que vayan acabando este paso, se procederá a ir pegando las teselas en el papel kraft.
- **Actividad 3: “Teselas y pentominós”:** ya que los pentominós son polígonos convexos creados a partir de simetrías de cuadriláteros, pueden teselar el plano, por lo que se realizará la introducción de los pentominós y se indicará a los estudiantes que intenten teselar una hoja cuadrículada tamaño carta con las 12 fichas del pentominó, repitiéndolas secuencialmente. Se les permitirá a los estudiantes que decoren sus pentominós a su gusto, para potenciar la creatividad y la expresión de personalidad. La cantidad de cuadrados de la hoja (carta) no es múltiplo de cinco, por lo que no se podrá teselar completamente la misma, pero esto también servirá para que los estudiantes se den cuenta en uno de los requerimientos para teselar con pentominós es que el número de cuadros sea, precisamente, múltiplo de cinco.

Esta actividad está basada en la conferencia de Ardila en el congreso nacional de matemáticas del año 2005, donde ponía de manifiesto las soluciones de teselaciones con pentominós con cuadros de 3×20 , 5×6 y 6×10 .

Ilustración 15: “las 12 fichas del pentominó”



- Objetivo actividad 3: Fomentar la creatividad y razonamiento lógico de los estudiantes por medio de teselaciones irregulares a partir de las fichas de pentominós.
- Recursos actividad 3:
 - Hojas cuadrículadas
 - Regla
 - Colores, marcadores, plumones
- Como todos los estudiantes realizarán el trabajo en hojas cuadrículadas, al final de la clase se recogerán estos trabajos para posteriormente evaluar de qué forma pudieron (o no) teselar la hoja, se espera que alguno de los estudiantes pueda generar teselas cuadradas con los doce pentominós y, que posteriormente usen este cuadro para teselar toda la hoja.

- La duración estimada de la actividad está esquematizada de la siguiente forma:
 - Introducción (7 min) se explicará a los estudiantes la forma en que se debería realizar el teselado con las 12 fichas del pentominó indicando que vayan tomando de una en una y que vayan dibujándolos patrones correspondientes como teselas. se colocarán plantillas de las fichas del pentominó en el tablero para que los estudiantes las referencien.
 - Instrucción y realización de la actividad (30 min). Se dará este tiempo aproximadamente para que los estudiantes generen sus propuestas de teselación. Las teselaciones deben ir coloreadas y hechas con regla
 - Conclusión (10 min.): se validará que hay más de una forma de generar teselaciones y que los pentominós pueden teselar áreas rectangulares que sean múltiplos de cinco.

- **Actividad 4 “Creando nuestras propias teselas”:** para esta actividad se tiene en cuenta los Derechos Básicos de Aprendizaje (2016), los cuales toman como evidencia que se “construye plantillas para cuerpos geométricos dadas sus medidas” y que se “utiliza la regla y el compás para dibujar las plantillas de cuerpos geométricos cuando se tiene sus medidas.”. Se realizarán teselas irregulares a partir de rectángulos, de acuerdo con conceptos de simetría central y paralelismo. Al principio el maestro en formación generará una tesela de ejemplo en el tablero, seguidamente se le dará un espacio de tiempo a los estudiantes para que ellos mismos creen sus propias plantillas teseladas.
 - Objetivo actividad 4: Aplicar técnicas con regla y compás para crear plantillas de figuras que teselen.
 - Recursos actividad 4:

- Hojas cuadriculadas
 - Cartón cartulina
 - Regla
 - Compás
 - Lápiz
 - Tijeras
 - Cinta
- Se recogerán las plantillas realizadas por los estudiantes, se analizará la simetría central que estas figuras tengan. Se tendrán en cuenta los “cortes y pegues” que tengan las plantillas para analizar como las crearon los estudiantes.
 - La duración estimada de la actividad está esquematizada de la siguiente forma:
 - Explicación (5 min) se explicará a los estudiantes que las teselas irregulares se pueden obtener a partir de cortes y pegues paralelos en caras de rectángulos.
 - Ejemplo (5 min.): el maestro en formación realizará un ejemplo de tesela sencilla, generará una teselación en el tablero.
 - Realización de la actividad y conclusiones. (25 min). A partir de cortes con tijeras los estudiantes generarán teselas irregulares y comprobarán que a partir del paralelismo se mantiene la teselación regular en teselaciones irregulares.

- Nota: se dejará la siguiente actividad como opcional (tomada del libro maths frameworking):

Ilustración 15.1: rangoli

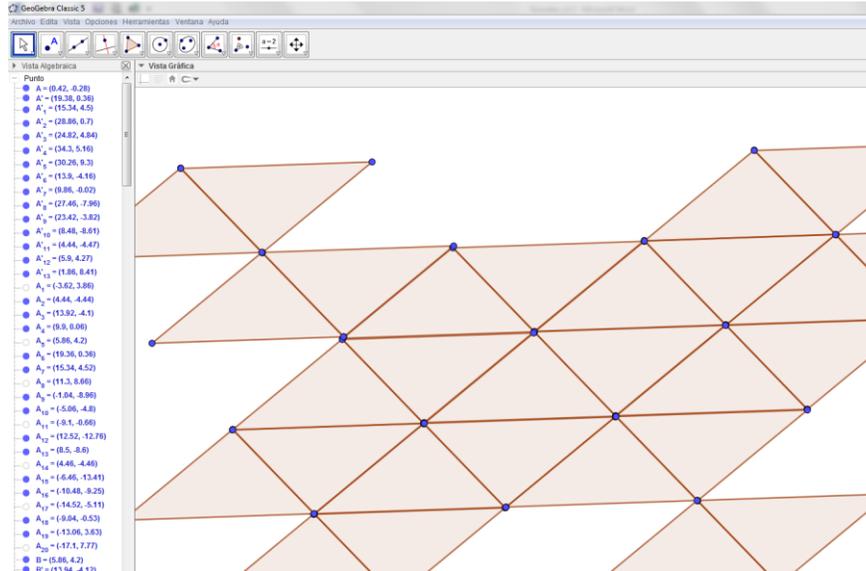


- **Actividad 5: “teselaciones en computador”:** se utilizarán hojas de cálculo y software de geometría dinámica para potenciar la creación de teselados en el aula de clases, de esta forma los estudiantes harán teselados más precisos y de forma ms rápida que con los métodos utilizados anteriormente.

Primeramente, se recordará a los estudiantes que cualquier figura hecha a partir de triángulos, cuadriláteros y los hexágonos con simetría central puede teselar el plano, que se fundamenta en los ejercicios que se han desarrollado anteriormente. Ahora se procederá a mostrar estas nociones a partir de herramientas computacionales. Cada estudiante tendrá un equipo de cómputo (preferiblemente, a lo sumo se trabajará con dos estudiantes por equipo). La actividad estará dividida en cuatro partes:

- Parte 1: “Tesela con triángulos”: se les solicitará a los estudiantes que realicen un triángulo en la herramienta geogebra por medio del comando polígono, se copiará el triángulo y se colocará en uno de los vértices del otro por medio de una rotación de 180° sobre uno de sus vértices (por medio del comando de geogebra) generando así un cuadrilátero, ahora se copiarán esas dos figuras y se colocarán junto con las otras dos, ahora se copiarán las cuatro figuras, luego las ocho, luego las 16. De esta manera los estudiantes podrán tener una experiencia que los acerque conceptualmente a la noción del teorema 180.

Ilustración 16: teselado del plano con triángulos en geogebra



- Parte 2: “Tesela con cuadriláteros””: en la primera parte los estudiantes se dieron cuenta que los paralelogramos teselan , por lo que sería interesante preguntarse si los trapezoides también lo hacen, por lo que se les solicitará a los estudiantes que realicen cualquier cuadrilátero en sus computadores, seguidamente se les indicará que copien el cuadrilátero y que lo coloquen junto a algún vértice del cuadrilátero inicial (traslación de la figura).Luego de este paso, se realizará una simetría central de la figura en alguno de sus tres vértices, esta figura se copiará y se colocará en alguno de los pedazos que hacen falta , los cuales se crearon cuando se unieron los dos primeros cuadriláteros, luego se hará una copia del tercer cuadrilátero , y se colocará en la pieza faltante. Esta será nuestra pieza de teselación.

Ilustración 17: Teselas de cuadriláteros en geogebra

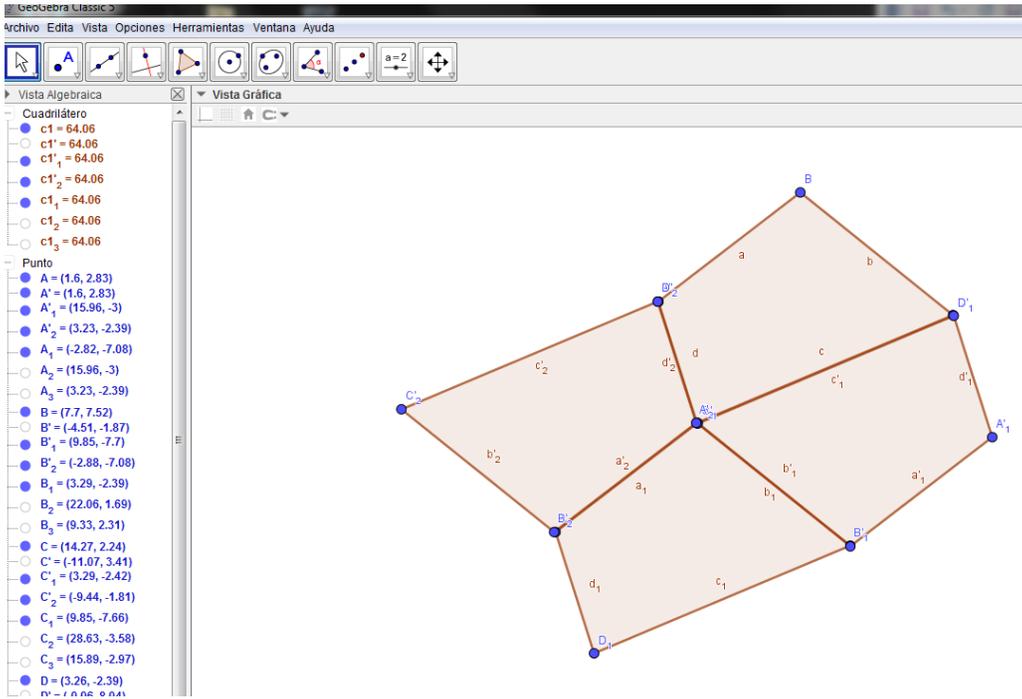
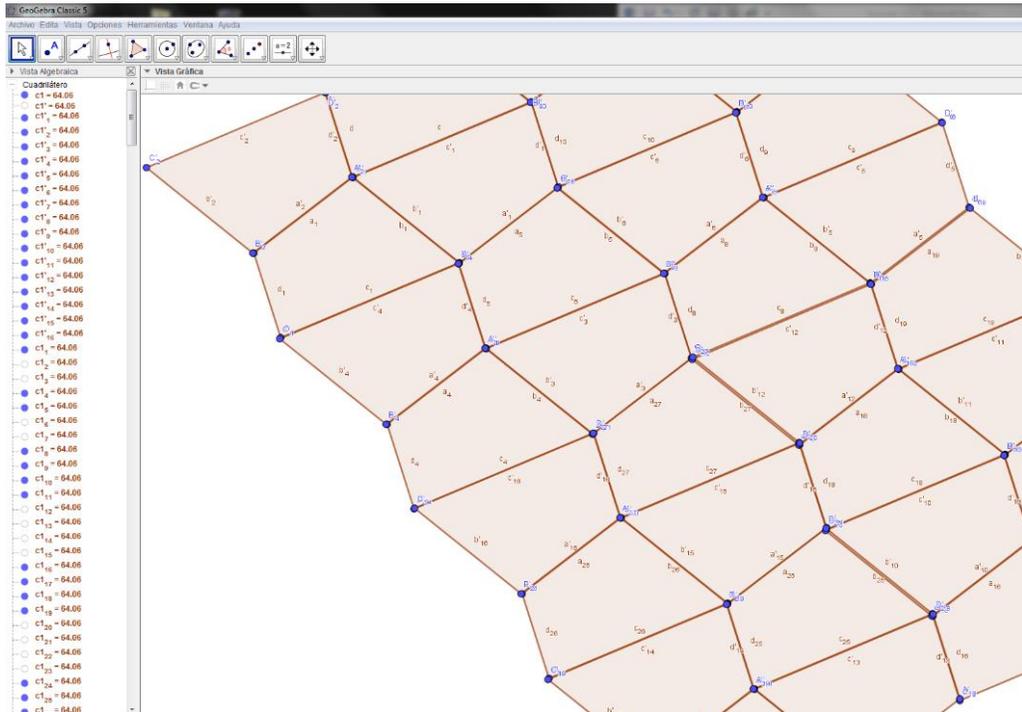


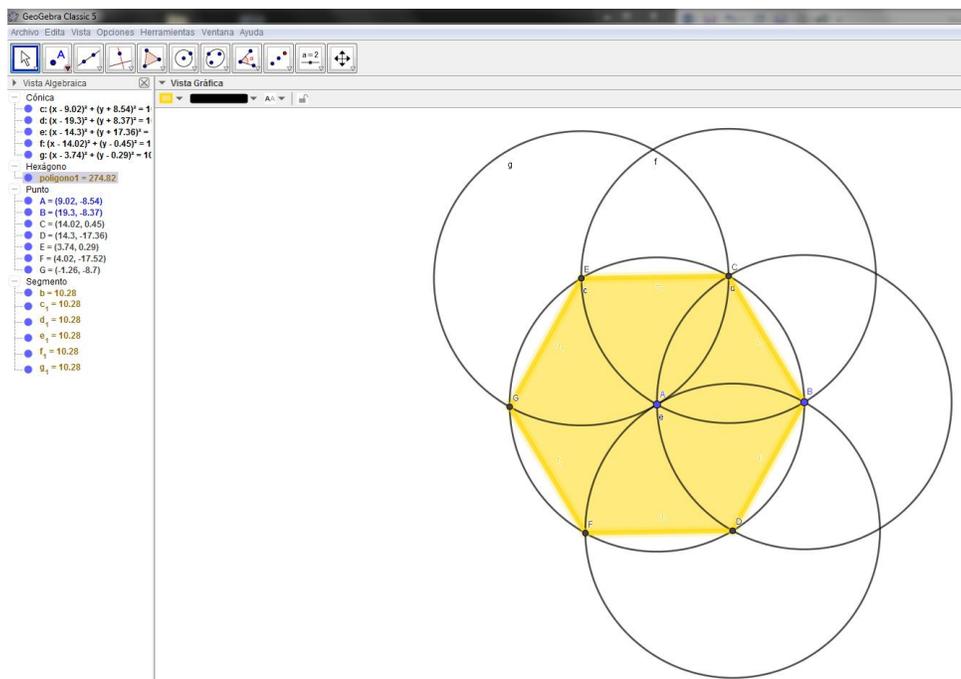
Ilustración 18: Teselando el plano con cuadriláteros en geogebra.



- Parte 3: “Tesela con hexágonos regulares”: los cuadriláteros forman una tesela similar a la de los hexágonos, e incluso, los triángulos se pueden unir de forma que generen un hexágono, por lo que se realizará la teselación de un hexágono como “panal de abejas”, que resulta ser la forma más óptima de teselar el plano.

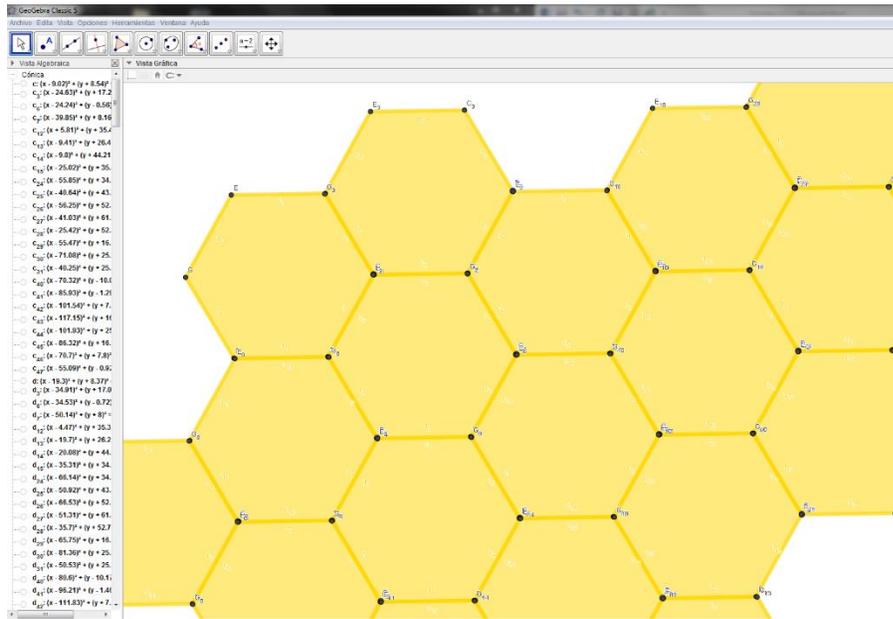
La teselación se realizará a partir de circunferencia y sus intersecciones, de esta forma se construirá el hexágono regular. Se ha optado realizar esta construcción específicamente por dos motivos: en primer lugar, esta construcción es muy intuitiva y, en segundo lugar, el hexágono regular es la figura más eficiente para teselar el plano.

Ilustración 19: Construcción de un hexágono regular en geogebra.



A lo cual solo se copiarán las figuras y se irá teselando el plano:

Ilustración 20: Teselando el plano con hexágonos regulares.



- Parte 4 “otra forma de teselar”: Primero se les explicará a los estudiantes de realizar la siguiente teselación (propuesta por el maestro en formación):

Ilustración 21: diseño de teselación para implementar en computador



La forma de realizar la tesela consiste en los siguientes pasos:

- Realizar un segmento
- Hallar su punto medio
- A partir de ese punto trazar un segmento perpendicular al primer segmento y de su mismo tamaño.

Esta acción nos da el esquema de teselación, y generando más segmentos de esta forma se generan hexágonos cóncavos irregulares que también teselan el plano.

La idea del ejercicio es que los estudiantes logren crear macros sencillas en geogebra para replicar esta tesela.

Ilustración 22: ejemplo de creación de teselado en hojas de cálculo

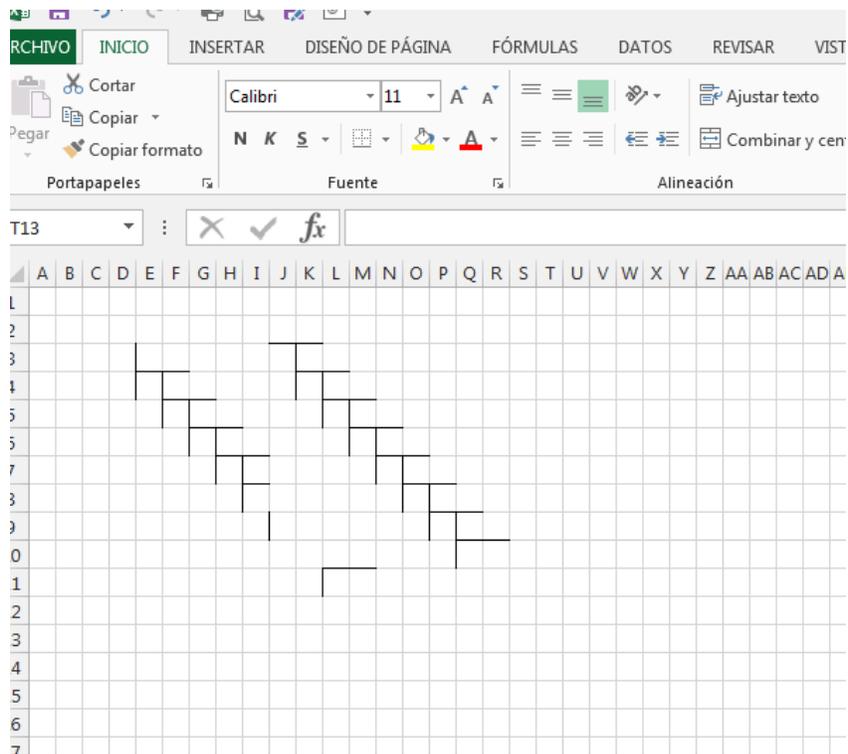
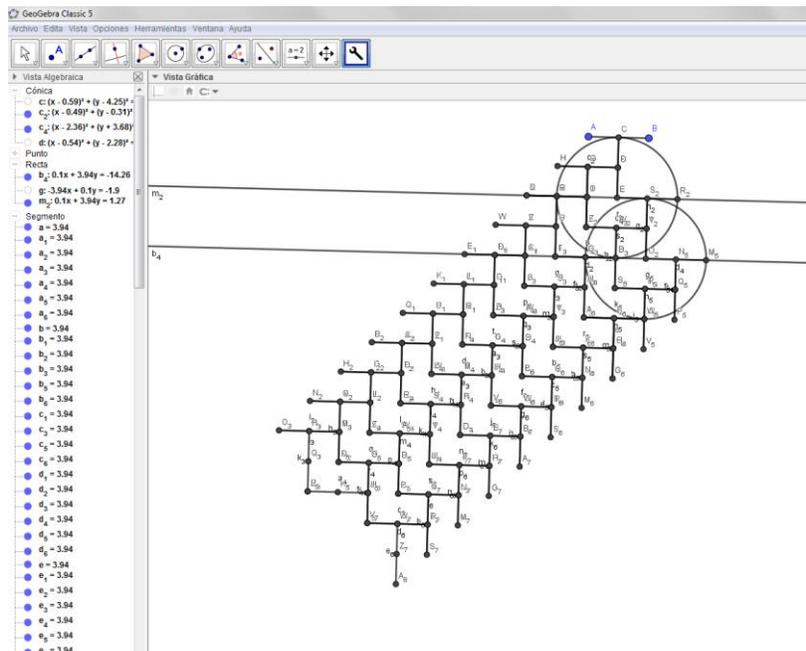


Ilustración 23: ejemplo de creación de teselado en geogebra



De acuerdo a la experiencia de Reyes y Rojas (2011) indican que el software de geometría dinámica lo siguiente:

“En cuanto a la incorporación del SGD, se crea un nuevo ambiente de aprendizaje en el aula de clase ya que se diseñan actividades que promueven en el estudiante desarrollo de procesos cognitivos que favorecen el aprendizaje de la geometría, tales como: visualizar, explorar, medir, comparar, clasificar, analizar y explicar. También se ayuda a mejorar actitudes hacia el trabajo geométrico. De otro lado, propicia el trabajo autónomo y colaborativo, ya que el estudiante puede manipular e interactuar con los objetos matemáticos contribuyendo en la búsqueda de comprensión de los contenidos geométricos” (p. 293)

Y como ellas mismas indican en su trabajo:

“Castiblanco, Urquina, Camargo y Acosta (2004) señalan que “en particular, los programas de geometría dinámica han revolucionado la manera de hacer matemáticas y la forma de enseñarlas, proporcionando contextos de aprendizaje con nuevas y potentes posibilidades de representación” (p. xxv).” (p. 299)

- Objetivo actividad 5: Utilizar software de geometría dinámica y hojas de cálculo como herramientas óptimas para realizar teselaciones de forma más precisa y rápida.
- *Recursos actividad 5*
 - Equipos de cómputo
 - Proyector.
- A medida que los estudiantes vayan indicando que pudieron teselar, el maestro en formación tomará fotos de esos trabajos en computador.

La duración estimada de la actividad está esquematizada de la siguiente forma:

- Preliminares (10 min): acomodación de los estudiantes en la sala de sistemas.
- Introducción (10 min) se explicará a los estudiantes como manejar el software de geometría dinámica; en específico los comandos de polígono, circunferencia por centro y punto simetría axial, simetría central, punto medio, perpendicular, así como de copiar y pegar polígonos.

- Instrucción y realización de la actividad (70 min). Se dividirá en estas partes:
 - ❖ Creación de triángulos (20 min.): Se dará tiempo de exploración a los estudiantes y a los 15 minutos se explicará la forma de hacer la tesela.
 - ❖ Creación de cuadriláteros (25 min.): Se dará libre exploración para ver si los estudiantes pueden teselar el plano con un trapecioide.
 - ❖ Creación de un panal (15 min.): se darán las instrucciones para generar un hexágono regular, para generar así el panal de abejas. Se les explicará que esta es la teselación más eficiente para el plano.
 - ❖ Creación de otra tesela (opcional-10 min) dependiendo el tiempo empleado por los estudiantes, se generarán los pasos para construir la tesela cuatro.

5. Análisis de actuación:

➤ **Instrumentos de recolección de información:**

Para la actividad 1, se recopilaron los datos que los estudiantes manifestaban en la exposición mediante anotaciones del diario de campo y grabaciones a modo de entrevistas realizadas a algunos estudiantes con el fin de analizar qué tanto de la exposición de los cuadros de Escher fue significativa para ellos.

Para la actividad 2 el instrumento de recolección era la actividad en sí, es decir, se iba a recoger la tesela realizada a partir de las plantillas, pero como el profesor le indicó al

maestro en formación que dejara la tesela como decoración del salón se tomaron registros fotográficos del trabajo final de los estudiantes.

La actividad 3 fue realizada en los cuadernos de los estudiantes, por lo que no se podían arrancar las hojas. Por este motivo se tomaron registros fotográficos de algunos trabajos de los estudiantes

Para las actividades 4 y 5 se planea tomar registros fotográficos y guardar algunos archivos electrónicos generados por los estudiantes.

Descripción y análisis de las sesiones:

El análisis que se realizará a continuación estará enfocado principalmente en los trabajos entregados por los estudiantes, ya que, sea a partir de entrevistas, opiniones, dibujos, propuestas de teselaciones y otras producciones, se podrá validar si el objetivo de la unidad didáctica se cumplió.

No se hará énfasis en los posibles errores cometidos de los estudiantes, ya que, las evidencias que se presentarán a continuación demuestran que los conceptos trabajados fueron bien asimilados por los estudiantes y, en caso de que no hubiese sido así, se tomaron las debidas medidas en la clase, aunque se recalca se sólo hubo dos ocasiones en las que sucedió algo similar.

Implementación actividad 1:

Cuando empieza la segunda hora de la sesión, el profesor da la siguiente instrucción: “para ir a la actividad de profesor Cesar, usted debió haber completado la figura en su cuaderno, realizar un diseño y, haber adelantado algo del papel milimetrado”. Al mismo tiempo le indica al maestro de formación que se adelante a la sala de proyección.

Cuando los estudiantes llegan, el profesor los asigna en sus respectivos puestos, esto con el fin de evitar desorden en el auditorio, seguidamente, les indica que la dirección de la clase en esa última parte de la sesión estaría a cargo del maestro en formación, también les indica que va a tener en cuenta el comportamiento de cada uno de ellos para las notas, por lo que les pide el favor que traten con respeto al maestro en formación.

El maestro en formación explica la temática de la presentación, les solicita que a medida que avance la exposición expongan sus puntos de vista, participando de manera ordenada, levantando la mano. Aclarada la metodología, se da inicio a la exposición.

Se les pregunta a los estudiantes si sabían algo sobre teselaciones, algunos de ellos levantan la mano indicando que en la semana lincolniana habían estado en ese taller, por lo que se refrescan las condiciones de una tesela: que se repita la misma figura o el mismo patrón de figuras, que no se superpongan y que no queden espacios entre ellas.

Se da la introducción sobre la obra de Escher, a lo que los estudiantes escuchan atentamente. Cuando se habla de la inspiración de Escher en la cultura islámica los estudiantes se muestran ansiosos por participar, se aprovecha este momento para explicarles que Escher logró unir las matemáticas y el arte por medio de las

teselaciones, y que esto lo logró gracias al contacto que tenía con amigos suyos que eran matemáticos, así como de la apropiación de técnicas similares a las encontradas en la alhambra.

Los estudiantes quieren pasar al frente para dibujar la tesela y decir sobre que figura geométrica está basada, pero se toma la decisión de sólo dejar pasar a tres estudiantes por los siguientes motivos:

- La atención de los estudiantes ya estaba captada
- Los estudiantes participaban y opinaban sobre sus puntos de vista
- Los estudiantes que pasaban al frente se demoraban varios minutos para dibujar, lo que generaba tiempo muerto entre sus compañeros, lo cual podía repercutir en el orden de la actividad.

En este momento (después del quinto cuadro) se les da la instrucción que anoten el nombre del cuadro o los cuadros que más les llamen la atención, por lo que se realiza un recuento de los cuadros vistos.

Cabe resaltar varias situaciones que se vivieron en esta actividad:

- Los estudiantes lograron captar que, a medida que transcurría el tiempo, el artista dominaba mejor la técnica y podía hacer teselas cada vez más complejas
- Los estudiantes captaron que las teselaciones no son solamente regulares, y que no solo son de una figura
- Los estudiantes encuentran de forma eficaz la figura geométrica base de la tesela, destacando la siguiente frase: “la tesela del cuadro (Development I)

puede ser un rectángulo, pero si los divido por la mitad la tesela puede ser un triángulo”

- En el cuadro Lizard, los estudiantes comprenden que las teselas deben ser congruentes
- En el cuadro Day and Night, los estudiantes manifiestan comprender el concepto de simetría axial.
- En Symmetry Watercolor 55 Fish, los estudiantes validaron que los colores pueden afectar la percepción de las formas, pero no la congruencia de las mismas.
- En Development II, varios estudiantes indicaron que “pareciera que las lagartijas salieran de un túnel”, lo que permite realizar una reflexión sobre las teselaciones en el plano y en el espacio. Es una de las situaciones que más destacan porque, efectivamente, este cuadro es un ejemplo de teselaciones en espacios no euclidianos, siendo más específicos, en espacios hiperbólicos.
- En Reptiles Colour, los estudiantes retoman la vista 3d que aprendieron en sesiones pasadas.

Se acaba la sesión, el maestro en formación realiza una pequeña socialización, donde los estudiantes replican las condiciones para tener una tesela, así como diferenciar entre tesela y teselación, todos los estudiantes dicen las condiciones correctamente. Se les indica que habrá más sesiones de teselaciones y finaliza la clase.

Con lo nombrado anteriormente, se llega a un resultado similar al del trabajo de Mejía (2008), efectivamente, los colores, detalles y demás componentes de estos cuadros

realizados a partir de teselas motivan a los estudiantes a crear sus propios diseños de teselas, como se podrá evidenciar de mejor forma en las actividades siguientes.

El maestro en formación habla con el profesor en la sala de profesores, quien le da sus observaciones con respecto a la sesión, se muestra satisfecho con los resultados obtenidos, enfatizándose en que “fue muy bueno el que se haya podido generar una reflexión en los estudiantes”.

Implementación actividades 2 y 3

El maestro en formación se dirige al salón para organizar las actividades 2 y 3 de su práctica. Conforme a lo acordado con el profesor, los estudiantes irían al salón de uno en uno a medida que le mostraran las actividades finalizadas en el computador. El maestro en formación coloca un pliego de papel kraft en la parte izquierda del tablero, coloca una plantilla de tesela en cada puesto de los estudiantes y, asimismo, coloca una en la parte superior del papel kraft, deja seis plantillas de repuesto en el puesto de profesor y, seguidamente se dispone a dibujar con marcadores de colores las 12 piezas del pentominó en el tablero. Van llegando los estudiantes y se les da la siguiente instrucción: “por favor colorean, dibujen, adornen (...) las plantillas que tienen en sus puestos, cuando finalicen esto, pasen al frente y pegamos la figura en el papel kraft”.

Los estudiantes empezaron a dibujar, colorear y decorar libremente sus figuras, varios reconocieron que eran teselas y que, juntos realizarían una teselación irregular. Cada estudiante realizó una propuesta de decoración diferente a la de sus compañeros, pero se evidenció que tenían un poco de miedo para pasar de primeras, pero a medida que se

van acercando los primeros estudiantes y pegan su tesela, sus compañeros van pasando al frente.

Ilustración 24: teselas de los estudiantes en papel kraft



Después que ellos pegan su tesela, se les indica la segunda actividad de la siguiente forma: “¿has jugado Tetris?, bueno, la idea es que cojas una hoja de tu cuaderno y vayas colocando las fichas que aparecen en el tablero y vayas teselando toda la hoja. Recuerda que no puedes superponer una ficha en otra y tampoco deben quedar cuadrados por ahí sobrando, ¿de acuerdo?”. Varios estudiantes comprendieron la instrucción, aunque hubo unos pocos que no la comprendieron del todo, pero al ver algunas propuestas de tesela de sus compañeros proceden a realizar la suya.

Los estudiantes manifestaron las siguientes preguntas al momento de realizar las teselas de pentominós: ¿debo usar todas las figuras? ¿puedo usar un mismo patrón? ¿pueden ser distintos? ¿puedo girar/rotar las fichas? A lo que se responde que sí.

Mientras se van agregando más teselas al papel kraft, se ve mucho mejor la teselación, lo que llena de satisfacción a los estudiantes y al profesor, quien toma fotos de las producciones obtenidas.

Ilustración 25: algunas propuestas de teselas decoradas



Como ya se va a acabar la clase, el maestro en formación realiza el siguiente anuncio a la clase “para que ustedes puedan ir a la próxima actividad, deben cumplir con dos condiciones: primero, deben finalizar su tesela y pegarla aquí al frente y, para la próxima clase, traer completada la tesela con pentominós. Quien no la traiga no podrá asistir a la siguiente actividad que se realizará”.

Se le pregunta al profesor sobre que se hará con las teselaciones, quien indica que “este trabajo no se puede perder, se va a colocar como decoración del salón, encima del tablero”, por lo que, al finalizar la clase, el maestro en formación organiza las teselas, las cubre con cinta, recorta el papel kraft sobrante y procede a pegar la teselación de los estudiantes en la pared donde se encuentra el tablero.

Ilustración 26: Localización final del trabajo de los estudiantes



Ilustración 27: detalle del producto final organizado



Efectivamente, en la propuesta de Herrera, Cruz, Montes y Vargas (2010) se aboga por dos conclusiones que son importantes en este tipo de trabajos:

En primer lugar, se puede abordar el pensamiento geométrico desde otras perspectivas, lo cual enriquece la clase y el aprendizaje de los estudiantes, haciendo que se vean mejores resultados en las sesiones de clase.

También es importante que el docente vaya complejizando el trabajo propuesto, lo cual hace que se mejore el trabajo de la clase y, asimismo, los estudiantes se apropien más del conocimiento. Esto se logró con la actividad 3, que se relatará más adelante.

En las sesiones siguientes los estudiantes fueron trayendo sus propuestas de teselaciones para pentominós, lo que pone de manifiesto que la actividad fue entendida y, que los conceptos de teselación, tesela y teselación irregular fueron correctamente asimilados por los estudiantes.

A continuación, algunas propuestas de los estudiantes:

Ilustración 28: propuesta 1

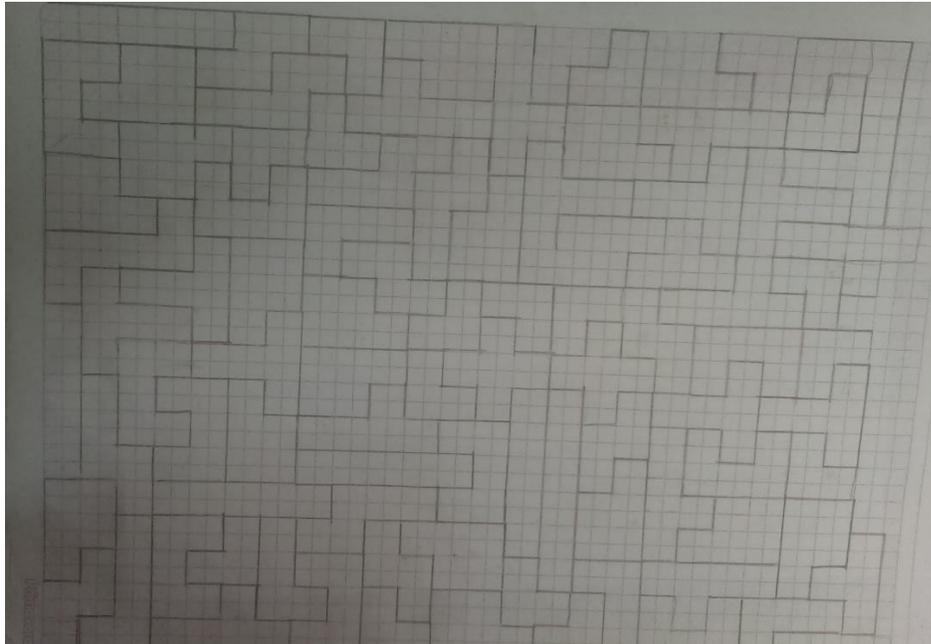


Ilustración 29: propuesta 2

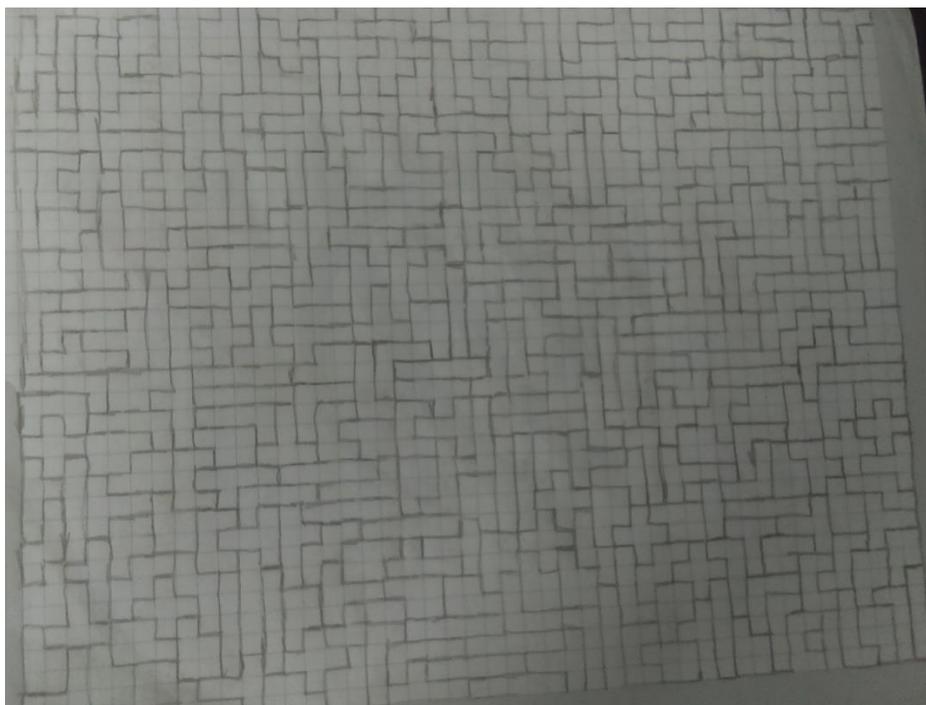


Ilustración 30: propuesta 3

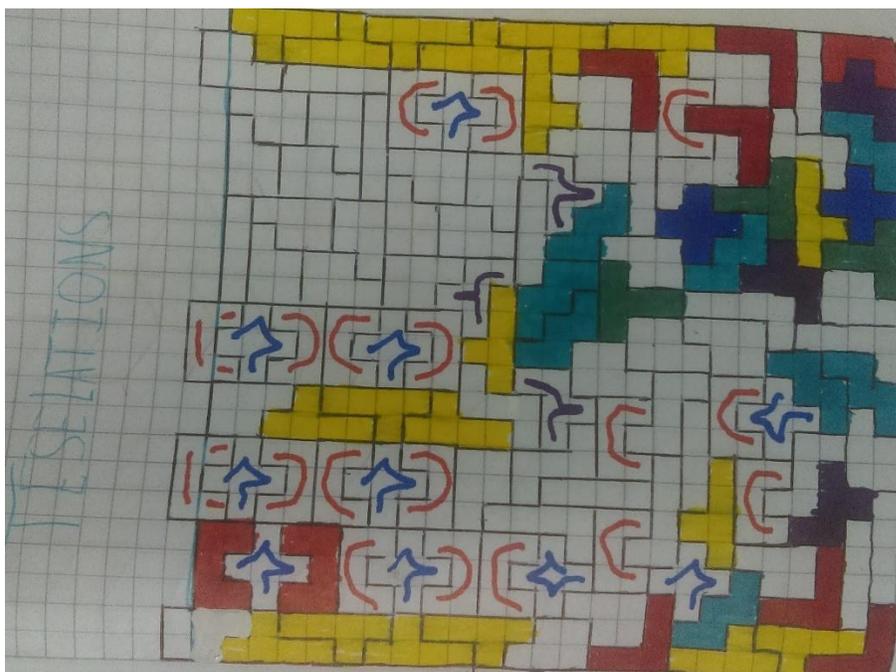
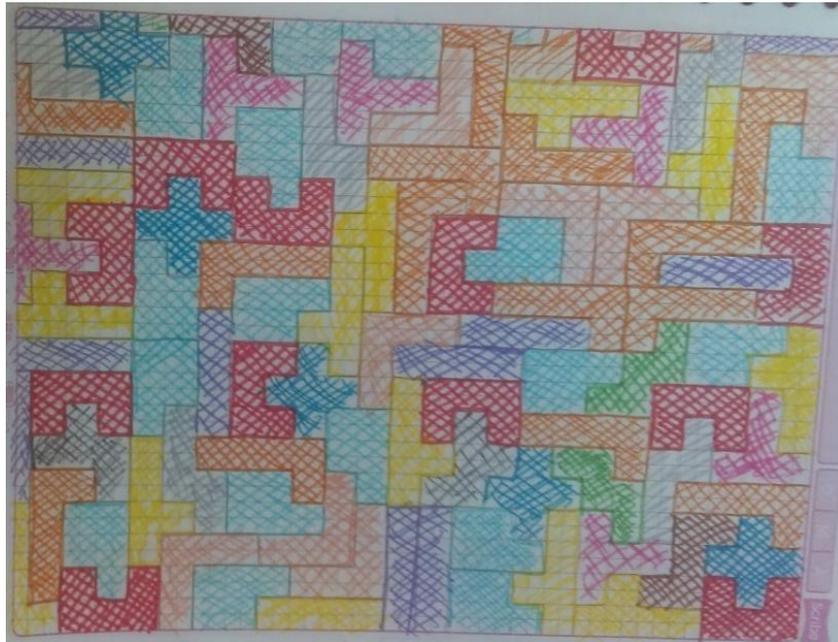
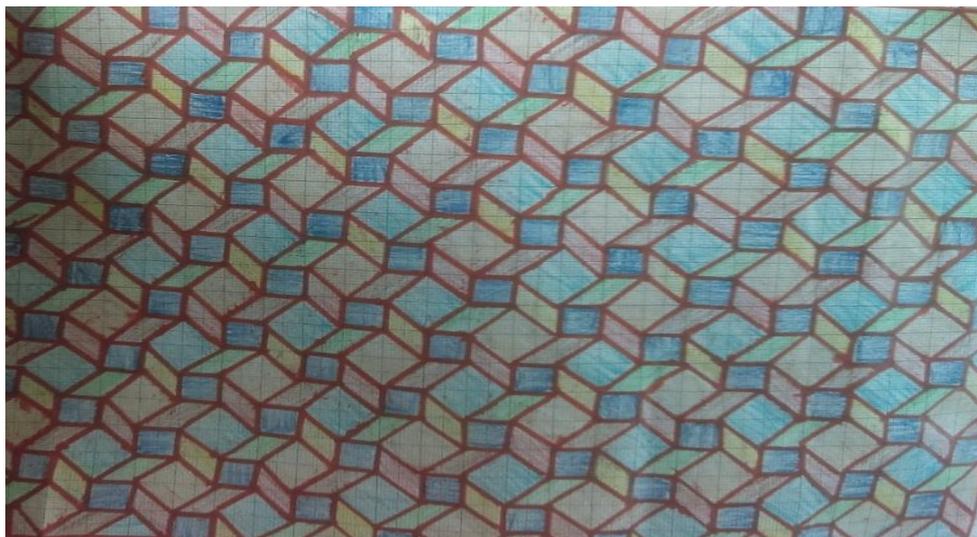


Ilustración 31: propuesta 4



También se evidencia que el profesor continuó con el tema de teselaciones en las clases que el maestro en formación no tenía días de práctica, ya que había algunos trabajos de teselaciones propuestos por el texto guía de la clase en los cuadernos de los estudiantes.

Ilustración 32: trabajo realizado con el profesor



Lo cual pone de manifiesto aún mas que el tema y sus conceptos fueron asimilados por los estudiantes.

Cuando se analizan las propuestas de teselaciones se ve que algunos estudiantes intentaron generar cierto patrón con determinadas fichas y, replicar este patrón en la hoja. Esta forma de trabajar tiene mucho que ver con la conferencia de Ardila (2005), lo que pone en manifiesto que es posible generar actividades “complejas” para estudiantes aún de cursos pequeños, los cuales, naturalmente, abordarán el problema desde sus propias nociones.

Con respecto a las actividades 4 y 5: se debe informar que la actividad 4 cambió. Se había propuesto primero a partir de material manipulativo tangible, pero después de hablar con el profesor se decidió que, en caso de implementarse, se realizaría en computador a partir de la aplicación “paint”.

Por lo tanto, habría dos actividades que se realizan a partir de las TIC, las cuales, hasta el momento en que se escribió este párrafo, no han podido ser implementadas debido a que los estudiantes en este momento están finalizando año académico.

Al analizar estas actividades bajo lo que indican Godino y Ruiz (2003), se evidencia qué era lo que se quería decir en cuanto al “gran interés” de que sea el niño quien construya y manipule las formas, porque es de esta manera que puede lograr un aprendizaje significativo; esto se ve claramente en la implementación de clase, ya que, los estudiantes han realizado varias actividades en las que recrean, proponen y desarrollan teselas interesantes, teniendo en cuenta los conceptos necesarios para realizarlas.

Incluso se llega a pensar que si se hubiera abordado el tema (sobre todo la introducción) de forma tradicional, la atención de los estudiantes hacia el concepto de teselaciones hubiera sido tan bueno como el evidenciado en este trabajo.

Teniendo en cuenta el trabajo de Vergel, Rocha y León (2006), se lograron evidencia las tres áreas que se mencionan de la siguiente forma:

- Matemáticamente, se trabajó sobre el concepto de teselación según lo establecido en los libros de texto del colegio y en la documentación realizada en la sesión dos de este trabajo.
- Cognitivamente, los estudiantes abordaron las situaciones de maneras distintas e igualmente válidas, sobre todo en la creación de teselas a partir de pentominós, algunos estudiantes agrandaron el tamaño de las fichas, lo que generaba un trabajo estéticamente mejor y, seguía teselando, incluso esta situación se podría aprovechar para explicar alguna homotecia.
- Socio-matemáticamente hablando, se evidencia en la primera actividad que varios estudiantes tenían ideas similares (¿preconceptos?), los cuales se ven afectados por el propio entorno en que ellos se encuentran inmersos. Este tal vez sea el área que más tenga cambios en caso de implementar esta actividad en algún otro curso.

Aunque Mejía (2008) trabajó las obras de Escher desde un contexto más computacional (desde software de geometría), también sucedió en esta unidad didáctica que el concepto se asimiló mejor gracias a la influencia del arte en la

clase de matemáticas. Fue una buena estrategia y sirve para lograr la interdisciplinariedad entre estas dos áreas que parecen tan distantes.

Se prevé que, si se pudieran implementar las dos actividades restantes, los resultados serían aún mejores, esto de acuerdo con el trabajo de Acosta y Rincón (2014), que a su vez sirvió de fundamento para diseñar la actividad 5.

6. Balance de la experiencia

➤ **Conclusiones:**

- Aunque los estudiantes del colegio donde se realizó esta unidad didáctica son de un nivel socioeconómico alto, siguen manteniendo muchas características inherentes a niños de su edad, sobre todo en lo relacionado a sus componentes emocionales y sociales.
- Hay que recordar que trabajar con cursos de primaria puede requerir de mucha energía por parte del docente, pero sabiendo captar la atención de los estudiantes, se pueden lograr resultados muy buenos e interesantes.
- En el curso con el que se trabajó, se evidenció la preponderancia en la mayoría de estudiantes del pensamiento geométrico sobre el aritmético, pero a pesar de esta situación, con uno se puede potenciar el otro, como lo mostraron las estudiantes del curso a quienes se les hizo el seguimiento de clase.
- Abordando el concepto de teselaciones se pueden enlazar conceptos de geometría fundamentales, como polígonos regulares, irregulares, transformaciones isométricas, teoremas de ángulos en polígonos, entre otros.

- Se deben aprovechar las instalaciones del colegio (en este caso, la actividad 1 se pudo realizar gracias al uso de la sala de proyecciones). Muchas veces los profesores de matemáticas nos restringimos al aula y difícilmente al salón de informática.
- En algunas ocasiones se pueden cambiar los resultados en las notas de los estudiantes dándoles algún tipo de motivación. Muchos inconvenientes que se tienen en esta rama del conocimiento son actitudinales antes que aptitudinales.
- Se debería fomentar la interdisciplinariedad de las matemáticas con otras áreas del conocimiento.

➤ **Limitantes**

Desafortunadamente las actividades de TIC no se pudieron realizar. Aunque el resultado de la unidad didáctica fue satisfactorio, este mismo podría ser aún mejor aprovechando las tecnologías computacionales.

Los tiempos con los que se cuenta para implementar la unidad didáctica muchas veces son insuficientes para desarrollar todas las actividades que se planteen.

➤ **Sugerencias**

- Para crear actividades se sugiere que ésta se pueda realizar tanto tangiblemente como virtualmente, ya que esto permite versatilidad en el aula y se convierte en una contingencia eficaz.
- Cada curso tiene su propio contexto, por lo que hay algunas actividades que se deberían modificar en caso de ser implementadas en otros cursos. Por ejemplo, el

curso en que realizaron las actividades de este trabajo se motivaba por el trabajo artístico, he allí el porqué del énfasis de las actividades.

Referencias

- Acosta, D. y Rincón, D. (2014). Octágonos que teselan el plano. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/3834/1/AcostaOct%C3%A1gonosGeometria2011.pdf>.
- Ardila, F. (2005). Teselaciones. Recuperado de <http://math.sfsu.edu/federico/Articles/teselaciones.pdf>.
- Bosque, B., Lupiáñez, J. y Segovia, I. (2017). EXPLORACIÓN DEL PAPEL DE LA ESTÉTICA EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS. Recuperado de <http://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/download/6536/5664>.
- Buffalo state University.EDU 312 (2004). Annotated lessons: A 5th grade every day math lesson tessellations. Recuperado de <http://pds.buffalostate.edu/sites/pds.buffalostate.edu/files/uploads/Annotated%20Lesson%20Plan%20-%20Math.pdf>
- Castiblanco, C., Urquina, H., Camargo, L. y Acosta, M. (2004). Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional. Recuperado de http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-113753_archivo.pdf
- Evans, K., Gordon, K., Senior, T., Spend, B. Pearce, C. (2017). Maths Frameworking 3rd Edition. Glasgow, United Kingdom. HarperCollins Publishers.
- Cruz, A., Herrera, V., Montes, Y., Vargas, A. (2010). Teselaciones: Una Propuesta para la Enseñanza y el Aprendizaje de la Geometría a Través del Arte. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1066/1/422_Teselaciones_Una_Propuesta_para_la_Enseñanza_a_Asocolme2010.pdf.

- Garzón, A., Duarte, Dilza. Y Rengifo, M. (2014). Movimientos en el plano a través de teselados. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/8645/1/Duarte2015Movimientos.pdf>.
- Godino, J. y Ruiz, F (2002). Geometría y su didáctica para maestros. Recuperado de https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/4_Geometria.pdf
- Mejía, M. F. (2008). EL ESTUDIO DE LA TESELACIONES PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRIA TRANSFORMACIONAL. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/5580/1/MejiaElestudioGeometria2008.PDF>
- Ministerio de Educación Nacional (2016). Derechos básicos de aprendizaje Matemáticas V.2. Recuperado de http://www.santillana.com.co/www/pdf/dba_mat.pdf
- Ministerio de Educación Nacional (2006). Estándares Básicos Competencias en Matemáticas. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf
- Ministerio de Educación Nacional (1998). Lineamientos curriculares de matemáticas. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-89869_archivo_pdf9.pdf.
- Ministerio de Educación Nacional (2017). Mallas de Aprendizaje matemáticas grado 4°. Recuperado de <http://aprende.colombiaaprende.edu.co/ckfinder/userfiles/files/MATEM%C3%81TICAS-GRADO-4.pdf>.
- Reyes, D., Rojas, C. (2011). Una experiencia de aula con teselados, arte y geogebra en el colegio Carlos Arturo Torres Peña (Santa Rosa de Viterbo-Boyacá). Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/3854/1/ReyesUnaexperienciaGeometria2011.pdf>.

- Rivero, F. (1999) Grupos Cristalográficos Planos. Recuperado de <https://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol6/frivero.pdf>.
- Rodríguez, H. (2016) Teselando Ando para transformar mi espacio. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/8507/1/C1.2.pdf>
- Scholastic international (2014) Prime mathematics 5b. New York. EEUU. Scholastic Inc.
- Soto Apolinar, E. (2012). Diccionario ilustrado de conceptos matemáticos. Recuperado de <http://wordpress.colegio-arcangel.com/matematicas/files/2012/10/DICM.pdf>