

*MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA*

# SIMETRÍA AXIAL EN FIGURAS PLANAS

NORMA HERNÁNDEZ, NORMA MENESSES, YEIMMY SÁNCHEZ, GUSTAVO  
MONTEALEGRE Y SARA PARRA

BOGOTÁ, JUNIO DE 2018

En este documento, presentamos el trabajo realizado durante dos años por el grupo uno de la quinta cohorte de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad de los Andes. Presentamos una propuesta de unidad didáctica para el tema simetría axial en figuras planas. Diseñamos, implementamos, evaluamos y ajustamos esta unidad didáctica con base en el marco del modelo del análisis didáctico (Gómez, 2007).

Elaboramos esta cartilla para apoyar el trabajo del docente de Matemáticas que requiera abordar el componente geométrico-métrico en grado séptimo. Seleccionamos el tema simetría axial en figuras planas para favorecer el proceso de aprendizaje de los escolares y apoyar la enseñanza de las transformaciones geométricas.

Implementamos la unidad didáctica en la Institución Educativa José Celestino Mutis de la ciudad de Ibagué (Tolima). Esta institución educativa se ha ubicado, en las pruebas Saber 9, en un nivel de desempeño mínimo en el componente geométrico-métrico, durante los tres últimos años. Realizamos la implementación con escolares de edades entre 11 y 15 años de estratos 1 y 2. La mayoría de los escolares pertenecen a familias extensas y/o compuestas de varias familias nucleares.

Las actividades de la unidad didáctica permiten activar en el escolar capacidades matemáticas y procesos matemáticos que le ayudan a identificar el paralelismo, la perpendicularidad, la equidistancia, la inversión, la forma y el tamaño, como propiedades de la simetría axial. El escolar utiliza para solucionar estas actividades materiales y recursos de fácil acceso y uso, como papel calcante, regla y compás.

El tema simetría axial está establecido en la normatividad curricular colombiana en los estándares básicos de competencias “predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte” e “identifico características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica”. Estos estándares básicos de competencias pertenecen al pensamiento espacial y sistemas geométricos, para el grupo de grados de sexto a séptimo. (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2006, p. 84). El tema aporta al derecho básico de aprendizaje nueve de grado séptimo “predice el resultado de rotar, reflejar, trasladar, ampliar o reducir una figura” (MEN, 2015, p. 22). A continuación, presentamos aspectos de contenido, aspectos cognitivos y la estructura general de la unidad didáctica.

# 1. ARTICULACIÓN DE CONTENIDOS

En este apartado, describimos la estructura conceptual de la simetría axial, sus sistemas de representación y las situaciones del contexto que dan sentido al concepto.

## 1. ESTRUCTURA CONCEPTUAL DE LA SIMETRÍA AXIAL

La simetría axial es una transformación isométrica en la que a cada punto de la figura original se le asocia otro punto (llamado imagen). La simetría axial es el movimiento que consiste en copiar todos los puntos de una figura geométrica a otra posición equidistante de una recta denominada eje de simetría. La figura resultante conserva propiedades como la perpendicularidad, el paralelismo, la equidistancia y la inversión con respecto a la figura original.

La simetría axial es una función inyectiva porque a cada punto de la figura inicial le corresponde un único punto en la figura final y viceversa. También es sobreyectiva porque todos los puntos de la imagen están relacionados con al menos un punto de la figura inicial. La simetría se puede realizar sobre un punto, un segmento o un polígono. Una figura plana se puede reflejar a partir de un eje de simetría interno o externo. En el mapa conceptual de la figura 1, presentamos la estructura conceptual de la simetría axial. En ese mapa, mostramos las características, propiedades y conceptos relacionados con la simetría. Las líneas discontinuas indican los procedimientos y relaciones entre los elementos de la estructura conceptual.

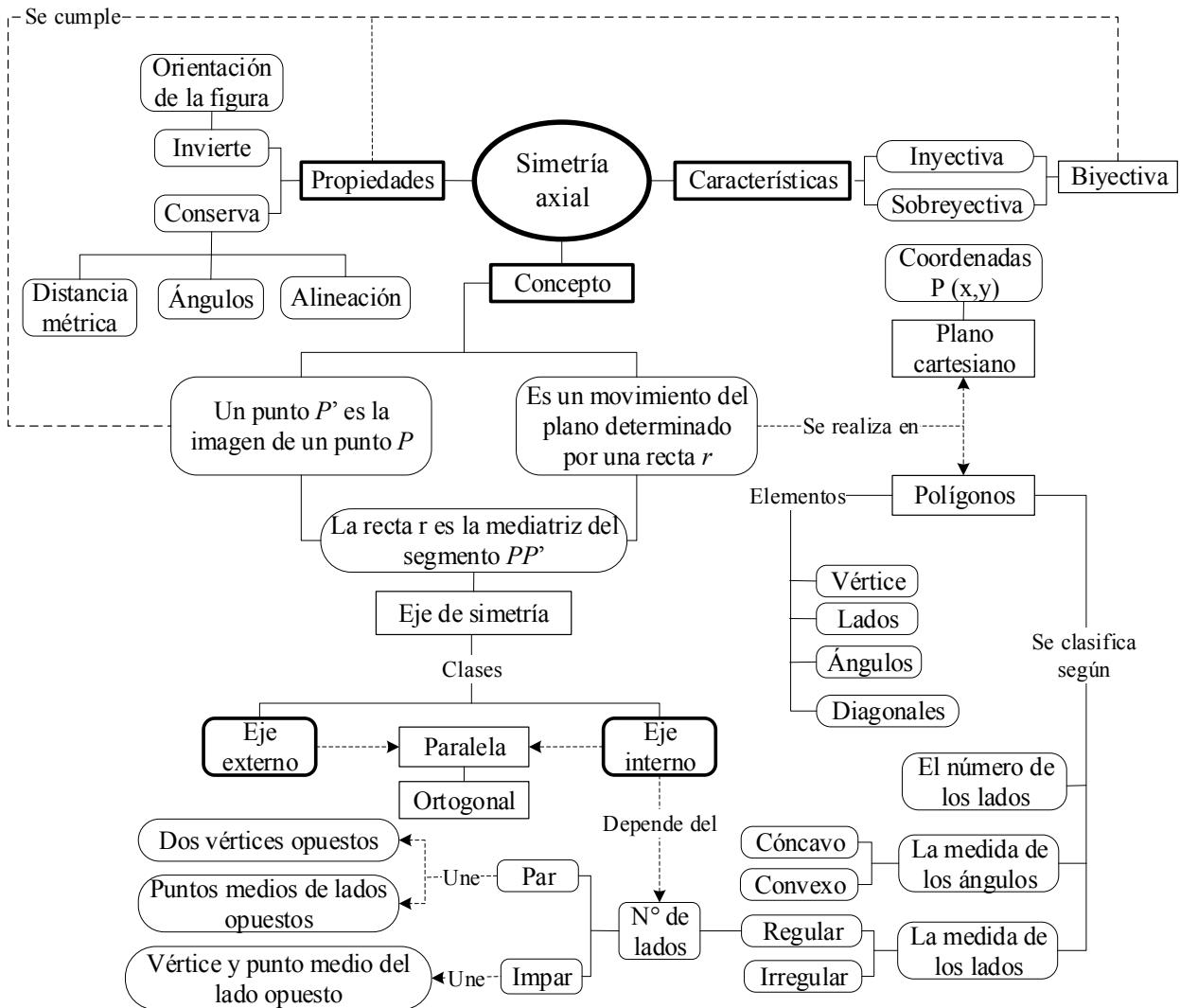


Figura 1. Estructura conceptual de la simetría axial

## 2. SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

En Educación Matemática, hablamos de sistemas de representación para hacer referencia a los sistemas de signos que permiten designar un concepto (Cañadas, Gómez y Pinzón, 2016). En la figura 2, presentamos el mapa conceptual de los sistemas de representación para la simetría axial en figuras planas. Las líneas discontinuas indican las transformaciones dentro de un mismo sistema de representación.

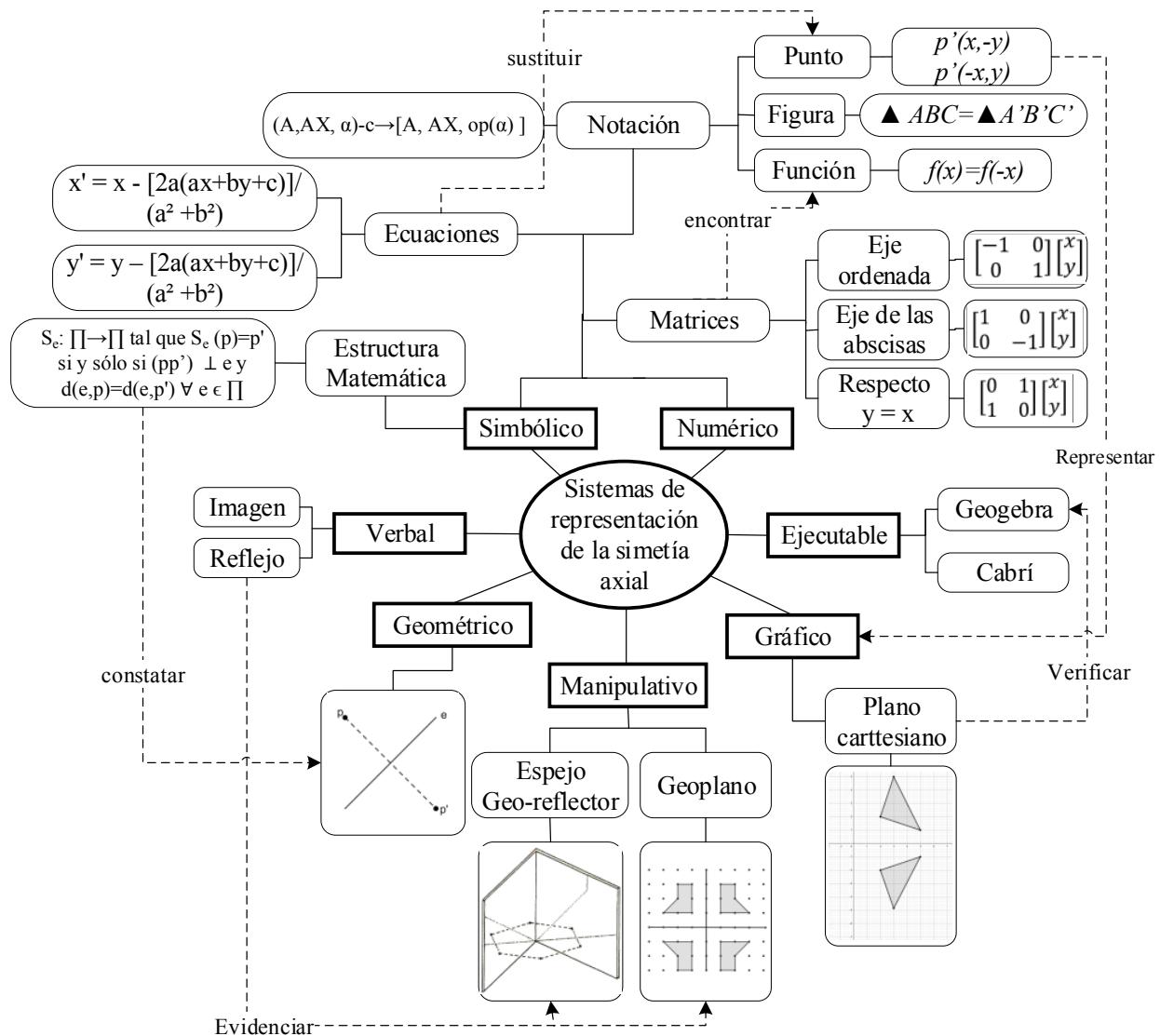


Figura 2. Sistemas de representación de la simetría axial

Los sistemas de representación asociados con nuestro tema son el gráfico, el manipulativo, el geométrico, el verbal, el simbólico, el numérico y el ejecutable. No obstante, privilegiamos el uso, durante el desarrollo de la unidad didáctica, de los sistemas de representación gráfico, manipulativo, geométrico y verbal y simbólico.

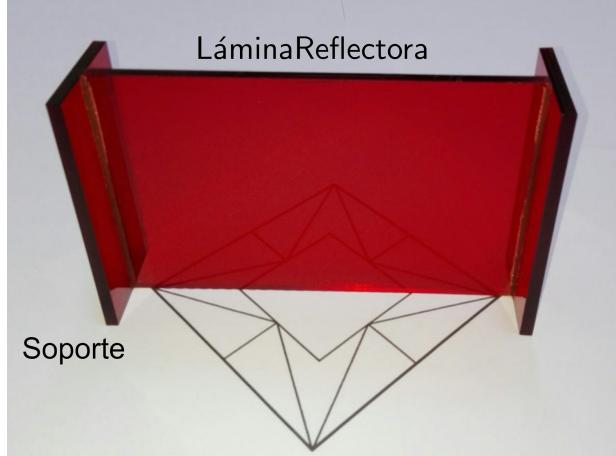
## 2.1. Sistema de representación gráfico

El sistema de representación gráfico permite observar la transformación rígida a la que se puede someter un punto, una recta o un polígono. Este sistema permite encontrar en un plano cartesiano las coordenadas de una figura geométrica después de ser sometida a la simetría axial.

## **2.2. Sistema de representación manipulativo**

El espejo geo-reflector (figura 3) es un sistema de representación manipulativo para la simetría axial, ya que tiene sus elementos y reglas propias. El espejo geo-reflector está constituido por una base y una lámina reflectora (máximo 3 mm).

Para realizar la construcción de una figura simétrica, con el uso del espejo geo-reflector, se deben seguir dos reglas. La primera, es que el grosor del espejo debe ser igual al del eje de simetría. La segunda, implica que quien hace el reflejo debe estar en una posición de  $90^{\circ}$  con respecto a la mitad de la lámina reflectora.



*Figura 3. Espejo geo-reflector*

## **2.3. Sistema de representación geométrico**

La representación geométrica de la simetría axial permite construir simetrías o trazar ejes en una figura sobre el plano euclíadiano. Entendemos por plano euclíadiano “el conjunto de puntos que se extiende indefinidamente a semejanza de un pizarrón, un papel, un piso o una pared” (Gómez, 2005, p.15).

## **2.4. Sistema de representación verbal**

El sistema de representación verbal tiene sentido en la simetría axial, porque permite relacionarla con los conceptos de imagen y reflejo, términos que utilizamos en la cotidianidad al mirarnos en una superficie reflectora. Por ejemplo, el profesor puede introducir al escolar en el tema con una actividad cotidiana y sencilla como ver su imagen en el espejo y solicitarle que compare las características de su rostro con las de su reflejo.

## **2.5. Sistema de representación simbólico**

El sistema de representación simbólico en la simetría axial permite hallar la imagen de un polígono al reflejar los vértices que lo componen. Al reflejar cada punto  $P(x, y)$  con respecto al eje  $x$ , obtenemos el punto  $P'(x, -y)$  y, al reflejarlo con respecto al eje  $y$ , obtenemos  $P'(-x, y)$ .

### 3. FENOMENOLOGÍA

En este apartado, presentamos los fenómenos o situaciones del contexto en el que se abordan las actividades de la unidad didáctica. Los ejes de simetría interno o externo permiten organizar los fenómenos que dan sentido al concepto de simetría axial (ver figura 4). A partir de un eje interno, la figura se divide en dos partes equivalentes. Con un eje externo, se refleja una imagen.

El marco conceptual de PISA 2012 hace énfasis en la necesidad de desarrollar en los escolares la capacidad para utilizar las Matemáticas en un contexto del mundo real (Ministerio de educación cultura y deporte, 2013, p. 10). Abordamos en la unidad didáctica situaciones que se pueden asociar a los contextos científico, personal y profesional, según las condiciones o características de cada situación. En el contexto científico, clasificamos las situaciones relacionadas con la ciencia, como la Biología, la Física y las Matemáticas. En el personal, relacionamos las situaciones referentes a las actividades del propio individuo y de quien lo rodea, como mirarse al espejo y practicar deportes como el billar. En el profesional, identificamos situaciones que se centran en lo laboral, como la distribución de campos deportivos y la elaboración de planos arquitectónicos.

Exponemos las relaciones entre los fenómenos, los contextos y los conceptos de eje interno y externo (figura 4). Las líneas en doble sentido señalan la relación bicondicional que existe entre las subestructuras matemáticas y los contextos en los que se desarrollan los fenómenos. Las líneas discontinuas muestran la asociación de cada fenómeno a los contextos PISA 2012.

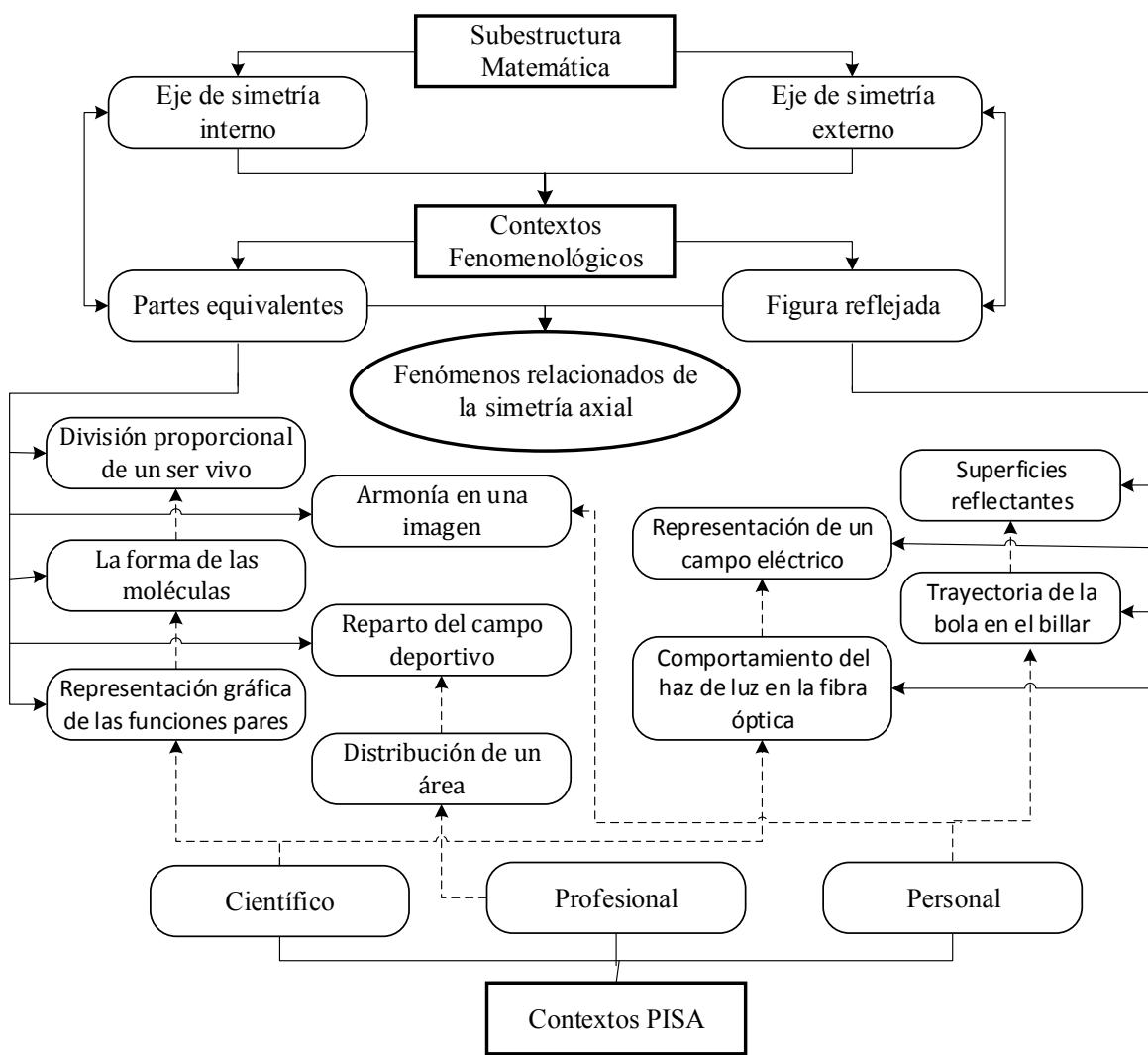


Figura 4. Fenomenología

## 2. ASPECTOS COGNITIVOS

Exponemos los aspectos cognitivos de la unidad didáctica desde las expectativas de aprendizaje, las limitaciones de aprendizaje y los criterios de logro.

### 1. EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE

Pretendemos contribuir con el diseño de nuestra unidad didáctica a expectativas de aprendizaje de nivel superior, objetivos de aprendizaje y expectativas de tipo afectivo. A continuación, explicamos cada una.

#### **1.1. Expectativas de aprendizaje de nivel superior**

Las expectativas de aprendizaje de nivel superior están relacionadas con las capacidades y procesos matemáticos que el escolar activa cuando se enfrenta a una actividad. Seguimos los lineamientos del programa PISA 2012, que propone las capacidades matemáticas fundamentales y los procesos matemáticos que debe activar un escolar para ser matemáticamente competente. Con el diseño de nuestra unidad didáctica, contribuimos a las capacidades matemáticas diseño de estrategias para resolver problemas, razonamiento y argumentación, utilización de herramientas matemáticas, representación y comunicación. También aportamos a los procesos matemáticos formular, emplear e interpretar.

#### **1.2. Objetivos de aprendizaje**

Caracterizamos los objetivos de aprendizaje a partir de las limitaciones de aprendizaje y el grafo de criterios de logro. Proponemos para nuestra unidad didáctica dos objetivos con los que pretendemos que el escolar identifique en diversas situaciones las propiedades de la simetría axial, a partir de un eje de simetría interno o externo.

*Objetivo 1.* Interpretar el significado de eje de simetría interno y aplicarlo en diversos contextos para obtener partes equivalentes de figuras.

*Objetivo 2.* Comprobar el cumplimiento de las propiedades de la simetría axial al reflejar figuras y trazar ejes de simetría externos.

## 2. LIMITACIONES DE APRENDIZAJE

Las limitaciones de aprendizaje son aquellos aspectos que pueden distorsionar, hacer más lento o detener el aprendizaje de los escolares (González y Gómez, 2017). Organizamos las limitaciones de aprendizaje, identificamos los errores en que podrían incurrir los escolares al abordar las actividades de la unidad didáctica y agrupamos esos errores en dificultades. Los escolares pueden presentar dificultades para caracterizar los elementos de una figura geométrica, definir cuándo una recta es un eje de simetría, conocer las propiedades de la simetría axial en figuras planas, verificar la reflexión de una figura e interpretar la información de un enunciado. Presentamos el listado completo de errores y dificultades en el anexo 1<sup>1</sup>.

Los errores en los que los escolares incurren en mayor medida, al desarrollar actividades o tareas relacionadas con la simetría, son considerar cualquier recta como eje de simetría, dividir o reflejar una imagen sin que quede simétrica, ubicar puntos como homólogos sin tener en cuenta la equidistancia al eje de simetría y confundir la inversión de una figura con la rotación.

## 3. CRITERIOS DE LOGRO

Con el fin de contribuir al alcance de los objetivos, proponemos unos criterios de logro entendidos como los procedimientos que un escolar puede utilizar dentro de su estrategia para resolver una tarea. Por ejemplo, un escolar puede utilizar, para construir la parte que falta de una figura, el procedimiento de encontrar los puntos opuestos al eje de simetría a través de la medición con regla. Exhibimos el listado completo de criterios de logro para la unidad didáctica en el anexo 2.

### 3.1. Grafos de criterios de logro de los objetivos de aprendizaje

Los grafos de criterios de logro nos permiten caracterizar los objetivos. Estos grafos son esquemas que muestran de forma secuencial la acción que se espera que realice el escolar, al aplicar las estrategias de solución de las tareas (Gómez, P. y Romero, I. 2017). Los grafos de criterios de logro de los objetivos de nuestra unidad didáctica conservan la misma estructura. Inician con los criterios de logro relacionados con la extracción de información y la toma de decisiones. Luego, se encuentran los criterios de logro relacionados con los procedimientos que implican diferentes estrategias de solución. Finalmente, se hallan los criterios de logro relacionados con la verificación de propiedades y las condiciones de la tarea.

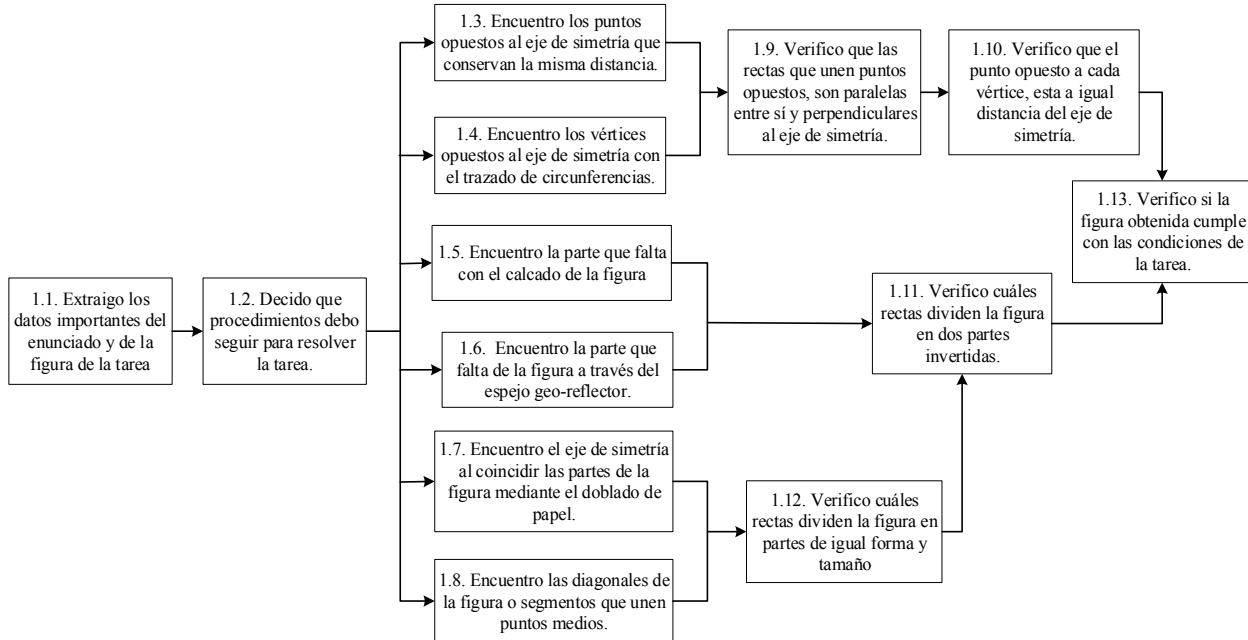
#### *Grafo de criterios de logro del objetivo 1*

Para interpretar el significado de eje de simetría interno y aplicarlo en contextos para obtener partes equivalentes de figuras, el escolar debe extraer del enunciado y de la imagen datos relevantes como el eje de simetría interno; elegir un procedimiento a seguir para completar la imagen; encontrar los puntos homólogos a los vértices de la figura a través de la medición con regla, el trazado de circunferencias con compás, o el calcado y uso del espejo geo-reflector; trazar rectas mediante el doblado el papel y/o la ubicación de las mediatrix; comprobar que las rectas que unen los puntos homólogos son paralelas entre sí y perpendiculares al eje de simetría; verifi-

<sup>1</sup> Los anexos se pueden consultar en este enlace: <http://funes.uniandes.edu.co/11767>.

<sup>2</sup> El video sobre simetría axial se encuentra en el enlace <https://www.youtube.com/watch?v=ccc2ZICsDVI>

car las propiedades de equidistancia, forma, tamaño e inversión; y comprobar que la figura obtenida es simétrica. Este conjunto de procedimientos, en términos de estrategias de abordaje y resolución, se pueden organizar secuencialmente como mostramos en el esquema de la figura 5.



*Figura 5. Grafo de criterios de logro del objetivo 1*

#### *Grafo de criterios de logro del objetivo 2*

Para interpretar el significado de eje de simetría externo y aplicarlo en contextos para obtener el reflejo de una imagen, el escolar debe extraer del enunciado y de la imagen datos relevantes como eje de simetría externo; elegir un procedimiento a seguir para reflejar la imagen; encontrar las coordenadas de los puntos opuestos a los vértices de la figura a través de la medición con regla o con el doblado del papel; trazar ejes de simetría mediante el uso del espejo geo-reflector y/o la ubicación de los puntos medios de los segmentos que unen los puntos opuestos, para trazar la mediatrix; y verificar las propiedades de forma, tamaño e inversión y comprobar que la figura obtenida es simétrica. Este conjunto de procedimientos, en términos de estrategias de abordaje y resolución, se pueden organizar secuencialmente como mostramos en el esquema de la figura 6.

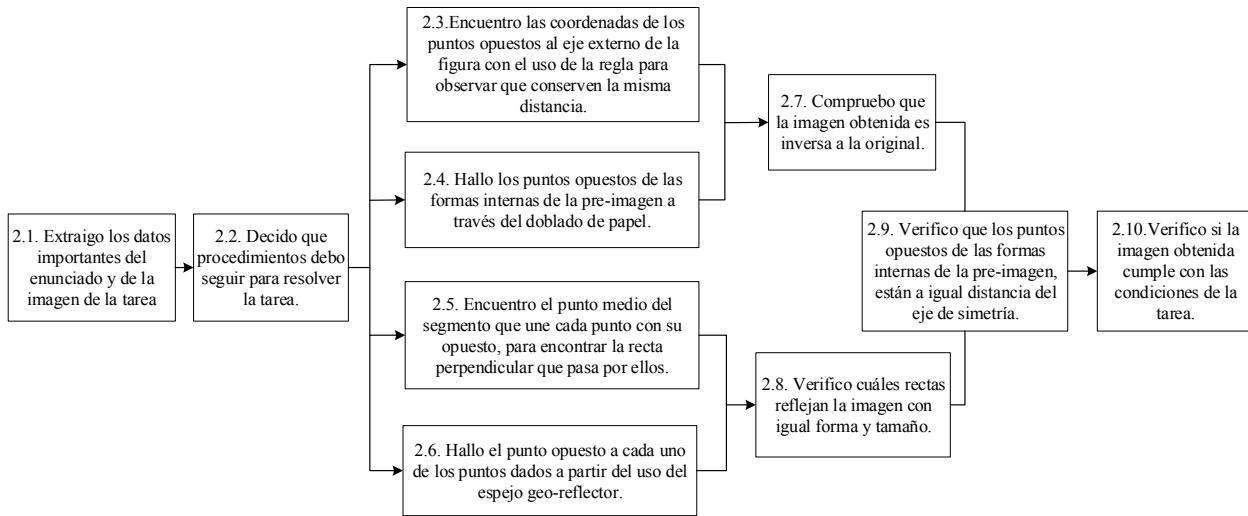


Figura 6. Grafo de criterios de logro del objetivo 2

#### 4. EXPECTATIVAS DE TIPO AFECTIVO

En el rendimiento escolar, intervienen numerosos factores afectivos. Por lo tanto, establecimos, para la unidad didáctica, cinco expectativas de tipo afectivo (EA). Mediante las actividades de aprendizaje, esperamos fortalecer en los escolares la autoestima, la confianza, el interés y la curiosidad por aprender. A continuación, presentamos nuestras expectativas de tipo afectivo.

- EA1.* Desarrollar interés para argumentar la posición de un eje de simetría.
- EA2.* Desarrollar curiosidad para hallar una simetría axial.
- EA3.* Desarrollar seguridad para construir la parte que falta de una imagen a partir de un eje de simetría.
- EA4.* Tener confianza para sustentar cuándo una recta divide una imagen en partes equivalentes.
- EA5.* Desarrollar autoestima mediante la validación de procedimientos que se aplican para identificar figuras simétricas.

#### 5. ESQUEMA GENERAL DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

A continuación, presentamos la estructura general de la unidad didáctica, e indicamos los procedimientos, momentos y tiempos de la implementación. En total, requerimos de 13 sesiones para la implementación. Iniciamos con la tarea diagnóstica y finalizamos con una sesión de cierre. Presentamos el esquema general detallado de los tiempos y modos globales de la unidad didáctica en el anexo 3.

Con la tarea diagnóstica, el profesor puede establecer el dominio de los conocimientos previos que tiene el escolar para abordar la unidad didáctica. Exponemos el listado completo de los conocimientos previos que hemos considerado necesarios en el anexo 4.

La unidad didáctica tiene cinco tareas de aprendizaje. Las tareas de aprendizaje son actividades que el profesor propone a los escolares con el propósito de contribuir a que ellos logren las expectativas que ha establecido y superen sus limitaciones de aprendizaje (Gómez, P, Mora y Velazco, 2017, p.5). Proponemos tres tareas para la construcción de figuras simétricas y dos para la verificación de las propiedades de la simetría axial. Con las tareas de construcción, el escolar desarrolla el concepto de partes equivalentes, cuando el eje de simetría es interno, y de reflejo, si es externo. Con las tareas de verificación, el escolar comprueba el cumplimiento de las propiedades de la simetría axial a partir del trazo de ejes de simetría.

Para el primer objetivo, relacionado con el eje de simetría interno, diseñamos las tareas de construcción Tarjeta navideña y Diamante princesa. También diseñamos la tarea de verificación Señal de tránsito. Para el segundo objetivo, relacionado con el eje de simetría externo, diseñamos una tarea de construcción La siembra, y una de verificación, Canal de riego. Cada tarea de aprendizaje se puede implementar en una sesión de 110 minutos.

En la tabla 1, indicamos como ejemplo la descripción de cada momento del desarrollo de la tarea Diamante princesa. El profesor inicia la sesión con la realimentación de la tarea anterior; socializa las metas de la tarea que se va a resolver; hace la lectura y la explicación general de la tarea; y distribuye los materiales y recursos. Después, los escolares solucionan la tarea, contrastan los resultados con otros grupos de escolares, y realizan el proceso de autoevaluación y coevaluación del trabajo en equipo.

Tabla 1  
*Tiempos y fases de la sesión 6 – tarea Diamante princesa*

Fases	Tiempos
Realimentación de la tarea anterior	10 min
Socialización de las metas de la tarea	5 min
Lectura dirigida de la tarea y explicación general	5 min
Distribución de materiales y recursos	5 min
Desarrollo de la tarea	50 min
Contraste del resultado con otro grupo de escolares	15 min
Autoevaluación y coevaluación	20 min
Total	110 min

Encontramos continuidad entre los dos objetivos y entre las tareas de aprendizaje. Las tareas del objetivo 1 preparan el camino para abordar las tareas del objetivo 2. La secuencia en las tareas (tabla 2), lleva al escolar desde identificar algunas características de la simetría axial, hasta comprobar sus propiedades.

Al solucionar cada tarea, el escolar adquiere conocimientos que le permiten abordar y resolver las tareas siguientes. Por ejemplo, para solucionar la primera tarea del objetivo 2, La siembra, el escolar debe tener las nociones de figura reflejada, eje de simetría y equidistancia, que son conocimientos que adquiere cuando alcanza las metas de las tareas del objetivo 1.

**Tabla 2**  
*Descripción de la secuencia de tareas*

Sesión	Objetivo	Tarea	Meta	Tiempo (minutos)
5	1	Tarjeta navideña	Buscamos que los escolares construyan la parte que falta de la tarjeta y verifiquen las propiedades de equidistancia, paralelismo y perpendicularidad.	110
6	1	Diamante princesa	Esperamos que los escolares encuentren la parte faltante del diamante princesa y verifiquen las propiedades de inversión, forma y tamaño, a partir de un eje de simetría oblicuo.	110
7	1	Señal de tránsito	Pretendemos que los escolares tracen las rectas, que permitan determinar la inversión como propiedad de la simetría axial.	110
9	2	La siembra	Esperamos que los escolares construyan la parte que falta de la siembra, a partir del canal de riego (eje de simetría externo) y comprueben las propiedades de equidistancia e inversión.	110
10	2	Canal de riego	Pretendemos que los escolares decidan un procedimiento para trazar el canal de riego y verifiquen las propiedades de equidistancia, forma y tamaño.	110

Una vez los escolares finalicen cada tarea de aprendizaje, el profesor realiza la realimentación. En ese momento, él muestra de forma detallada a los escolares los errores en que incurrieron en mayor medida. Después de terminar las tareas de aprendizaje, el profesor implementa el examen final que diseñamos para valorar el alcance de los objetivos propuestos para la unidad didáctica.

A continuación, presentamos nuestra unidad didáctica simetría axial en figuras planas. La unidad didáctica se divide en tres partes: la tarea diagnóstica, las tareas de aprendizaje y el examen final.

# 3. TAREA DIAGNÓSTICA

En este apartado, describimos la tarea diagnóstica. Presentamos algunas sugerencias metodológicas y la formulación de la tarea. El material con la tarea diagnóstica para imprimir se encuentra en el anexo 5.

## 1. SUGERENCIAS METODOLÓGICAS

Proponemos entregar la tarea diagnóstica de forma impresa a cada escolar para que sea resuelta de forma individual. Para resolver las actividades de la tarea diagnóstica, el escolar requiere el uso de regla y compás.

Con la tarea diagnóstica, el profesor puede establecer si los escolares que la resolvieron tienen o no los conocimientos previos necesarios para abordar la unidad didáctica. Por ejemplo, los escolares pueden incurrir en errores como confundir la ordenada con la abscisa, el radio de la circunferencia con el diámetro y la inversión con la rotación. Además, podrían determinar dos figuras de diferente tamaño como congruentes. El listado completo de dificultades y errores se encuentra en el anexo 1.

En caso de detectar conocimientos en los que haya dificultad, sugerimos al profesor realizar una realimentación al finalizar la tarea diagnóstica. El objetivo de esta realimentación es reforzar los conocimientos previos en los que se detectaron dificultades. Sugerimos al profesor hacer énfasis en los conocimientos previos de congruencia e inversión que, en nuestra experiencia, son los que presentan mayor dificultad. El material de la realimentación de la tarea diagnóstica para imprimir se encuentra en el anexo 6.

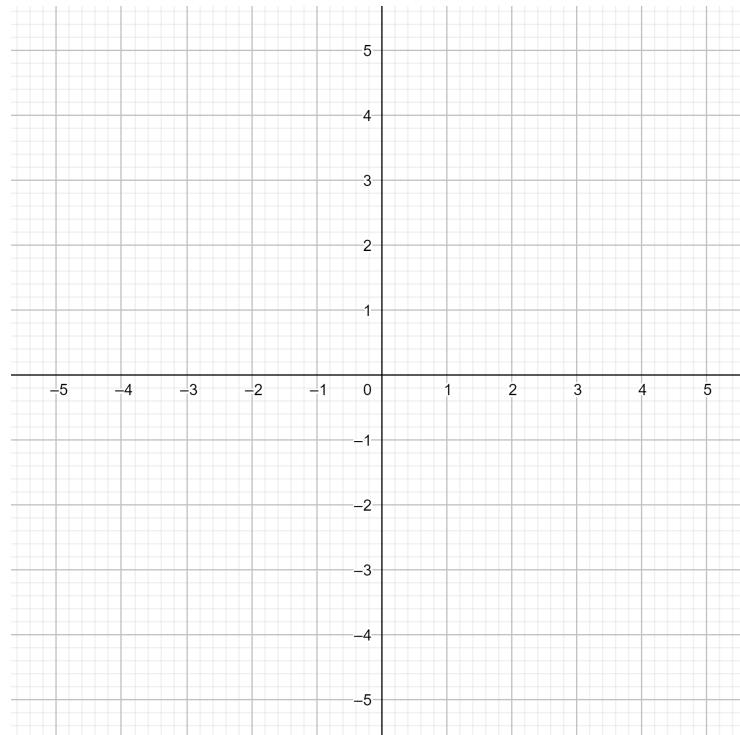
## 2. FORMULACIÓN DE LA TAREA

La tarea diagnóstica consta de cuatro actividades diseñadas para que el escolar las resuelva en sesiones de 55 minutos. La primera actividad evalúa los conocimientos previos relacionados con el manejo del plano cartesiano, y de las rectas paralelas y perpendiculares. La segunda hace énfasis en la congruencia y la inversión de figuras. La tercera aborda los conocimientos relacionados

con los elementos de la circunferencia y la medición de longitudes. La cuarta evalúa los elementos de los polígonos.

## 2.1. Actividad 1

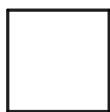
Observa el plano cartesiano que se muestra en la figura.



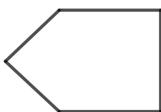
1. Identifica y señala el eje  $x$  y el eje  $y$ .
2. Sobre el plano cartesiano ubica los puntos  $A(-2,5)$ ,  $B(4,5)$ ,  $C(-3,-4)$  y  $D(5,-4)$ . Luego, une con una recta los puntos  $A$  y  $B$  y, con otra recta, los puntos  $C$  y  $D$ .
3. Al comparar las dos rectas obtenidas, ¿estas tienen algún punto en común? ¿Por qué crees que sucede esto?
4. Observa las cuatro rectas que tiene el plano cartesiano:  $\overleftrightarrow{AB}$   $\overleftrightarrow{CD}$ , eje  $x$  y el eje  $y$ . ¿Hay rectas perpendiculares? ¿Cuáles?  
¿De qué clase son los ángulos que se forman entre estas rectas?

## 2.2. Actividad 2

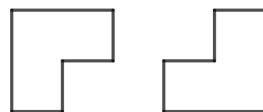
Utiliza la regla para medir los lados y el transportador para medir los ángulos internos de cada figura en las siguientes tres parejas.



Pareja 1



Pareja 2



Pareja 3

Identifica cuál o cuáles parejas de figuras cumplen con las siguientes condiciones. En cada caso justifica tu respuesta.

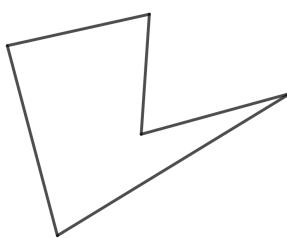
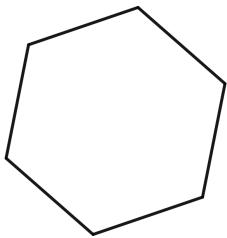
1. Figuras que tienen el mismo tamaño.
2. Figuras que tienen la misma forma.
3. Figuras congruentes.
4. Figuras que están invertidas.

### 2.3. Actividad 3

Ubica en la hoja un punto  $M$  como centro de una circunferencia. A partir de ese punto, traza un radio de 4 centímetros y, con la ayuda del compás, dibuja la circunferencia.

### 2.4. Actividad 4

Observa las siguientes figuras geométricas.



1. Señala y nombra los vértices.
2. Ubica los puntos medios de cada lado.
3. Traza segmentos que unan dos vértices no consecutivos. ¿Qué nombre reciben esos segmentos?

# 4. TAREAS DE APRENDIZAJE

En este apartado, presentamos las tareas de aprendizaje como elemento principal del proceso de aprendizaje de la simetría axial en figuras planas. Las fichas de las tareas de aprendizaje se encuentran en el anexo 7. Exponemos la estructura de las cinco tareas de aprendizaje en cuatro apartados. En el primero, describimos detalladamente cada tarea. En el segundo, presentamos los errores en que, en mayor medida, incurren los escolares al resolver las tareas; exponemos el gráfico de criterios de logro; y hacemos referencia a la actuación del profesor. En el tercero, realizamos algunas sugerencias metodológicas y aclaraciones. Finalmente, en el cuarto, sugerimos una forma de evaluar cada tarea.

## 1. TAREA TARJETA NAVIDEÑA

Con la formulación de la tarea Tarjeta navideña, pretendemos contribuir al logro del objetivo 1. La tarea está diseñada para que el escolar identifique el eje de simetría interno y obtenga la parte equivalente de la tarjeta.

### 1.1. Elementos de la tarea

Describimos los elementos de la tarea a partir de sus requisitos, sus metas (los aportes a los objetivos de aprendizaje), su formulación (lo que se entrega a los escolares), los conceptos y procedimientos implicados en la tarea, los sistemas de representación que se activan, los contextos en los que se sitúa la tarea, los materiales y los recursos que se requieren, el agrupamiento de los escolares, las interacciones previstas y su temporalidad.

#### *Requisitos*

Para abordar la tarea, el escolar debe conocer el significado de partes equivalentes, paralelismo y perpendicularidad. Además, el escolar debe tener destreza para determinar medidas con el uso del compás o la regla.

#### *Metas*

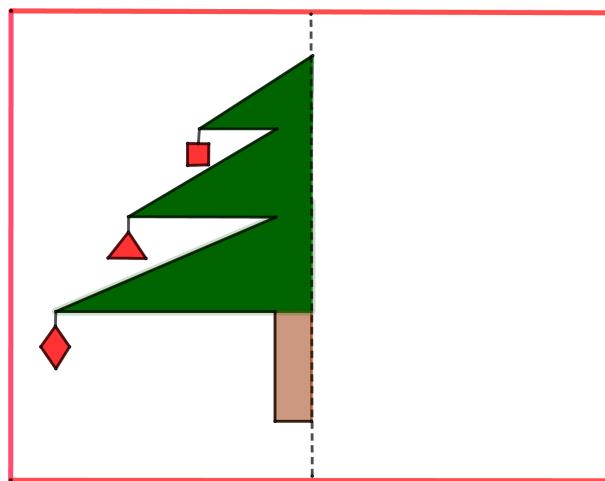
Con esta tarea, buscamos que los escolares construyan la parte que falta de una tarjeta, que asocien la noción de mitad y de división como proceso para obtener partes equivalentes de una figura.

ra, y que verifiquen la propiedad de equidistancia entre los adornos de la figura en la tarjeta y el eje de simetría.

#### *Formulación*

Exponemos la formulación de la tarea Tarjeta navideña. La imagen de la tarea fue tomada y modificada (Narváez, O. 2016). El material de esta tarea para imprimir se encuentra en el anexo 8.

Una tipografía elabora tarjetas navideñas, pero durante la impresión de un modelo, el papel quedó doblado y el árbol salió incompleto como se muestra en la figura.



*Figura. Tarjeta navideña*

Con tu compañero, ayuda a la tipografía a completar el diseño de la tarjeta. Dibujen la mitad del árbol de navidad que falta, de tal manera que el diseño guarde las proporciones iniciales. Pueden hacer uso de la regla o del compás. A medida que completen el diseño, enumeren y describan los procedimientos que usaron.

Contesten las siguientes preguntas, una vez terminen el diseño de la tarjeta.

1. Si comparan las distancias entre la línea que marca el doblez de la tarjeta, con los vértices del árbol en el que están los adornos, tanto de la parte impresa como la que construyeron, ¿qué pueden concluir?
2. Al trazar rectas que unen los vértices de la parte impresa del árbol, con cada vértice de la parte que construyeron, ¿qué clase de rectas se forman entre ellos?
3. ¿Qué clase de rectas forman las rectas que se unieron con la línea punteada?
4. Describan ante el grupo el diseño de su tarjeta.

#### *Conceptos y procedimientos*

El procedimiento que realiza el escolar para construir la parte que falta de la tarjeta consiste en encontrar los puntos homólogos a cada vértice del árbol de navidad con el uso de regla o compás.

Los conceptos que se abordan al resolver la tarea son equidistancia, paralelismo y perpendicularidad para determinar si la tarjeta quedó simétrica.

#### *Sistemas de representación*

Diseñamos la tarea en un plano euclíadiano para permitir que el escolar utilice el sistema de representación geométrico al ubicar los puntos homólogos y verificar las propiedades de paralelismo y perpendicularidad. El escolar utiliza el sistema de representación verbal para relacionar el término imagen con la parte simétrica del árbol de navidad.

#### *Contexto*

El contexto en el que se sitúa la tarea es el profesional. El escolar ayuda a una tipografía a resolver un problema a través del concepto de la simetría axial.

#### *Materiales y recursos*

La formulación de la tarea se entrega a cada grupo de forma impresa. El material en que se presenta la imagen de la tarjeta navideña no debe ser translúcido, para promover las mediciones en los escolares. Además, debe ser de textura lisa para facilitar el trazo de rectas. Sugerimos utilizar el papel Kimberly en la impresión de la imagen. Los escolares puedan usar la regla o el compás como recursos para solucionar la tarea. El profesor puede utilizar el video beam u otro medio audiovisual para presentar la tarea.

#### *Agrupamiento de los escolares*

Sugerimos que el profesor organice a los escolares en parejas de acuerdo con sus habilidades y destrezas para el trazo de rectas y el uso del compás.

#### *Interacciones previstas*

La interacción entre escolares se realiza al inicio de la sesión para definir roles. Los escolares interactúan durante la solución de la tarea, lo que permite que un escolar ubique los puntos homólogos y el compañero verifique las propiedades. La interacción entre el escolar y el profesor facilita la aclaración de dudas. La pareja de escolares interactúa con el grupo de clase durante la exposición y puesta en común del diseño de las tarjetas navideñas.

#### *Temporalidad*

Presentamos las etapas del desarrollo de la tarea y los tiempos aproximados para cada una de ellas. La sesión se divide en presentación del video *Hm1.11 Simetría de la serie educativa horizonte matemático*<sup>2</sup> (10 minutos), puesta en común del objetivo 1 y metas de la tarea (10 minutos), organización del agrupamiento y solución de la tarea (55 minutos), exposición de los procedimientos utilizados para elaborar las tarjetas (20 minutos) y la autoevaluación y la coevaluación (10 minutos).

---

<sup>2</sup> El video sobre simetría axial se encuentra en el enlace <https://www.youtube.com/watch?v=ccc2ZICsDVI>

## **1.2. Errores, grafo de criterios de logro y actuación del profesor**

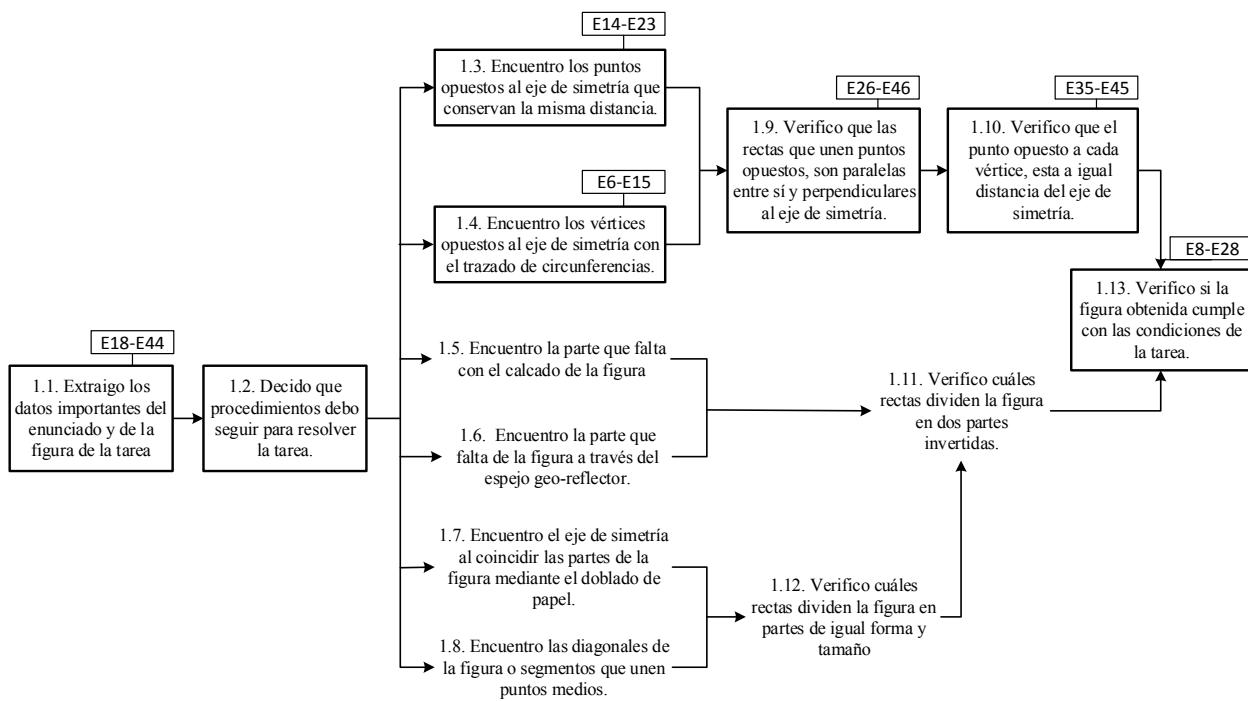
En este apartado, presentamos los errores más comunes en los que pueden incurrir los escolares al resolver la tarea. Exhibimos el listado de las posibles ayudas que el profesor puede utilizar con el fin de que los escolares superaren esos errores. También, resaltamos, en el grafo de criterios de logro del objetivo 1, las estrategias que puede utilizar el escolar para solucionar la tarea. El listado completo de ayudas para esta y las demás tareas de la unidad didáctica se encuentra en el anexo 9.

### *Errores y ayudas*

Al resolver la tarea, los escolares pueden incurrir en mayor medida en el error de considerar como homólogos puntos que no conservan la equidistancia. En este caso, el profesor puede proponer al escolar que use la regla para verificar que las medidas son iguales. El escolar también puede incurrir en el error de realizar la simetría sin tener en cuenta la perpendicularidad de la figura con el eje de simetría. En este caso, el profesor puede guiar al escolar cuestionándolo acerca de la presencia o ausencia de ángulos rectos.

### *Grafo de criterios de logro*

En la figura 7, exponemos el grafo de criterios de logro para el objetivo 1. Resaltamos con recuadros los posibles procedimientos de solución que el escolar puede usar para resolver la tarea. Para resolver esta tarea, el escolar debe extraer información del enunciado y de la figura. El escolar puede identificar la posición del eje de simetría y de los vértices de la figura. Luego, el escolar debe tomar la decisión de elegir un procedimiento para seguir. El escolar puede decidir trazar radios con el compás para hallar la equidistancia o trazar rectas con regla para encontrar los puntos homólogos. Después de que obtenga los puntos homólogos, debe verificar que las rectas que unen estos puntos son paralelas entre sí y perpendiculares al eje de simetría. También, debe verificar la equidistancia de los vértices de la figura al eje de simetría. Finalmente, el escolar debe verificar que la figura obtenida cumple con las condiciones de la tarea, es decir que la tarjeta navideña quede completa y simétrica.



*Figura 7. Grafo de criterios de logro de la tarea Tarjeta navideña*

#### *Actuación del profesor*

Proponemos que el profesor garantice que los grupos de trabajo se conformen por un escolar con desempeño bajo y un escolar de desempeño alto, ya que esto permite una interacción eficaz al resolver la tarea. Al llegar al final de la tarea, el profesor debe resaltar a sus escolares las propiedades de paralelismo, perpendicularidad y equidistancia. Consideramos que en este punto es oportuno explicar que estas tres propiedades garantizan que las figuras queden simétricas.

#### **1.3. Sugerencias metodológicas y aclaración de la tarea**

Consideramos que el doblado de papel es un procedimiento fácil para que un escolar de grado séptimo ubique los puntos homólogos. Por eso, sugerimos al profesor limitar este procedimiento con el uso de un material grueso como el papel Kimberly, lo que evita que el escolar lo doble. El profesor, al realizar la introducción de la tarea, debe ser cuidadoso de no exponerla de manera guiada.

#### **1.4. Evaluación de la tarea**

El profesor puede evidenciar que los escolares han cumplido con la meta de la tarea cuando logran construir la mitad faltante de la tarjeta y obtienen una figura simétrica. También, lo puede constatar cuando los escolares comuniquen su estrategia de resolución ante el grupo y hagan énfasis en las propiedades de la simetría axial.

## 2. TAREA DIAMANTE PRINCESA

Con la tarea Diamante princesa, buscamos contribuir al logro del primer objetivo porque está diseñada para que el escolar encuentre la mitad que falta del diamante, al ubicar puntos homólogos y verificar la inversión. El escolar, al completar la figura a partir de un eje de simetría oblicuo, identifica diferentes posiciones del eje de simetría y relaciona las partes opuestas que se generan con cada eje.

### 2.1. Elementos de la tarea

A continuación, describimos los elementos de la tarea.

#### *Requisitos de la tarea*

Para solucionar la tarea, el escolar debe conocer las nociones de partes equivalentes e inversión, tener destreza para trazar rectas y ubicar puntos homólogos con el uso del papel calcante.

#### *Metas*

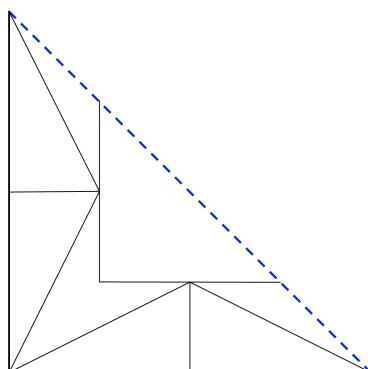
Con el desarrollo de esta tarea, buscamos que los escolares identifiquen la inversión como propiedad de la simetría axial, a partir de un eje de simetría interno y oblicuo.

#### *Formulación*

Exponemos la formulación de la tarea. La tarea fue tomada y modificada (Cerdeira, S., et al. 2007). El material para imprimir de la tarea se encuentra en el anexo 10.

Los diamantes son piedras preciosas. Es notable que estén compuestas del mismo material que el carbón. Un diamante recién extraído no tiene el brillo característico que adquiere después de ser tallado. El tallador de diamantes emplea mucho las simetrías para que se vean hermosos. Hay algunos diseños clásicos como los diamantes de talla princesa que, gracias a sus cortes, maximizan su brillo.

Arnulfo, un joyero, debe elaborar un anillo de compromiso con un tallado princesa. Él cuenta con solo medio plano del tallado como se muestra en la figura.



Con dos de tus compañeros, completen la mitad del diamante que debe tallar Arnulfo y dibujen la parte que falta (pueden usar papel de calcar o el espejo geo-reflector). Tengan en cuenta que la recta punteada divide el diamante en partes iguales.

1. Describan paso a paso lo que hicieron para ayudar a Arnulfo a completar la mitad que falta del diseño.
2. Ahora que tienen el diseño completo, ¿podrían dividirlo con otros ejes de simetría? Trácenlos en la imagen y justifiquen su respuesta.
3. Contrasten su trabajo con otro grupo de clase. ¿Qué semejanzas y diferencias encuentran?

#### *Conceptos y procedimientos*

El concepto que se aborda al resolver esta tarea es la inversión para determinar si el diamante quedó simétrico con respecto a las rectas que los escolares trazaron. El procedimiento que realiza el escolar para construir la parte que falta del diamante es ubicar puntos homólogos a partir de un eje de simetría oblicuo. Limitaremos el doblado de papel a través de un material rígido como el cartón paja o la cartulina.

#### *Sistemas de representación*

Con la tarea Diamante princesa, pretendemos que el escolar utilice el sistema de representación geométrico porque la figura está diseñada en un plano euclíadiano. Igualmente, el escolar emplea el sistema de representación manipulativo al utilizar el espejo geo-reflector para realizar la simetría.

#### *Contexto*

La tarea se encuentra en un contexto profesional porque permite al escolar ayudar al joyero a resolver el problema de terminar el tallado del diamante, mediante el concepto de la simetría axial.

#### *Materiales y recursos*

La formulación de esta tarea se entrega de forma impresa a cada grupo. La imagen del diamante princesa se imprime y se pega en cartón paja o cartulina. El escolar utiliza como recursos papel calcante, regla y lápiz. El profesor presenta la tarea por medio de diapositivas o cualquier otro medio audiovisual.

#### *Agrupamiento de los escolares*

Para solucionar la tarea, sugerimos que el profesor organice los escolares en grupos de acuerdo con la cantidad de espejos geo-reflectores con que cuenta. Sugerimos agrupaciones de tres escolares. La actividad requiere del manejo del espejo geo-reflector por primera vez, lo que implica que los escolares deben practicar su manejo.

#### *Interacciones previstas*

La interacción entre los escolares inicia con la práctica del manejo del espejo geo-reflector, de tal manera que se identifiquen roles dentro del grupo para que sea un solo escolar quien lo manipule. También se da esta interacción durante el proceso de resolución de la tarea. La interacción escolar-profesor permite la aclaración de dudas y la instrucción sobre las reglas para el uso del espejo geo-reflector. La interacción entre grupos de escolares facilita la comunicación y el contraste de los resultados.

### *Temporalidad*

Presentamos las etapas del desarrollo de la tarea y los tiempos aproximados para cada una de ellas. La sesión se divide en realimentación de la sesión anterior (10 minutos), puesta en común de las metas de la tarea (5 minutos), lectura dirigida de la tarea y explicación general (5 minutos), distribución de materiales y recursos (5 minutos), desarrollo de la tarea (50 minutos), contraste de resultados con otro grupo de escolares (20 minutos) y la autoevaluación y la coevaluación (15 minutos).

### **2.2. Errores, grafo de criterios de logro y actuación del profesor**

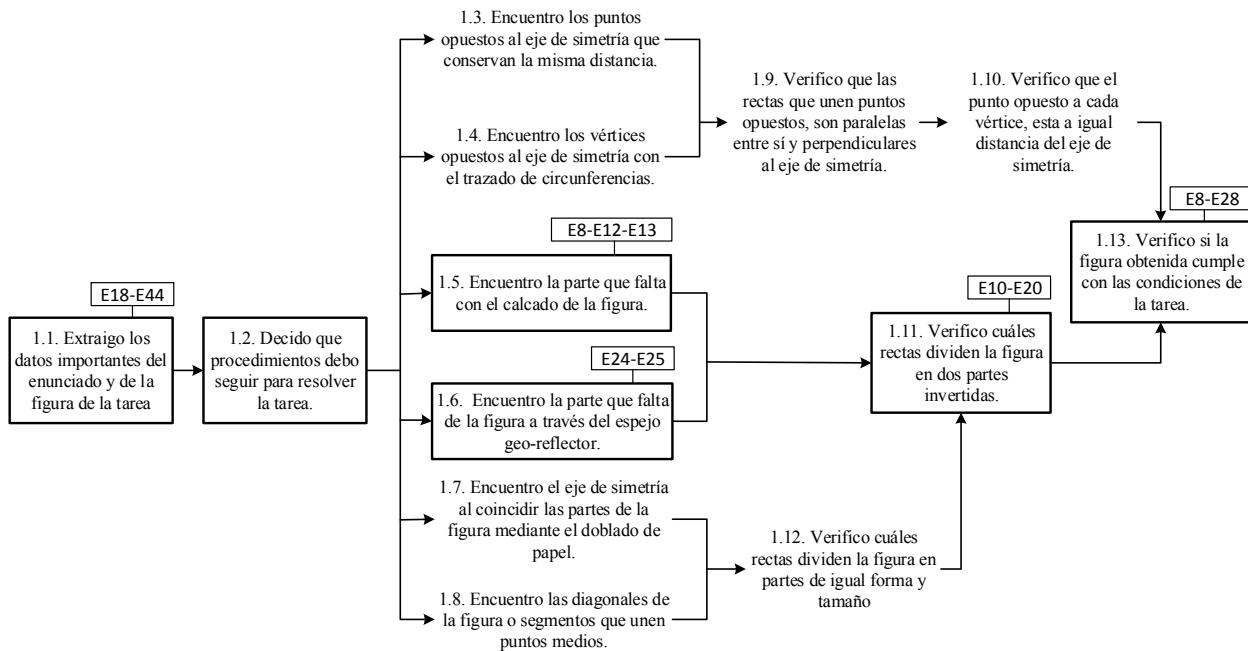
En este apartado, exponemos los errores más comunes en los que pueden incurrir los escolares al resolver la tarea. Recomendamos algunas ayudas que puede brindar el profesor para superar esos errores. Exponemos los procedimientos y posibles estrategias que pueden utilizar los escolares para resolver la tarea y algunas sugerencias de actuación del profesor al implementar la tarea.

#### *Errores y ayudas*

Al resolver la tarea, los escolares pueden incurrir en mayor medida en el error de confundir la inversión de una figura con la rotación. Para superar este error, el profesor puede pedir al escolar que ubique nuevamente el espejo geo-reflector sobre el eje de simetría y cuestionarlo sobre cómo ve la imagen. El profesor también puede preguntar al escolar sobre cuáles de esos dos movimientos ve en el espejo.

#### *Grafo de criterios de logro*

Exponemos el grafo de criterios de logro para el objetivo 1. Resaltamos con recuadros las posibles estrategias de solución que puede elegir el escolar para resolver la tarea (figura 8).



*Figura 8. Grafo de criterios de logro de la tarea Diamante princesa*

El escolar debe extraer del enunciado toda la información relevante. Por ejemplo, un escolar puede deducir la posición del eje. El escolar decide el procedimiento a seguir para solucionar la tarea, puede decidir entre ubicar los puntos homólogos a través del calcado o con el uso del espejo geo-reflector. El escolar traza más rectas como ejes de simetría, determina con cuáles rectas se cumple la propiedad de la inversión y verifica si la parte construida del diamante es simétrica.

#### *Actuación del profesor*

El profesor realiza la realimentación de la tarea anterior por medio de diapositivas; resalta los aciertos y los errores más frecuentes en que incurrieron los escolares; destaca la importancia de la simetría axial en algunas situaciones laborales; organiza los grupos para que resuelvan la tarea con el uso de los materiales y recursos disponibles; y modera la puesta en común de los resultados obtenidos durante el contraste con otro grupo de escolares.

### **2.3. Sugerencias metodológicas y aclaración de la tarea**

Sugerimos al profesor tener en cuenta que el grosor del espejo geo-reflector no debe superar los 3mm y que los ejes de simetría de la figura tengan el mismo grosor. Al inicio de la solución de la tarea, el profesor describe las reglas que los escolares deben tener en cuenta para el uso del espejo geo-reflector.

### **2.4. Evaluación de la tarea**

El profesor puede evidenciar que los escolares han alcanzado la meta de la tarea si la parte que construyen queda simétrica, justifican la propiedad de inversión y argumentan la posición de otros ejes de simetría.

### 3. TAREA SEÑAL DE TRÁNSITO

Con la tarea Señal de tránsito contribuimos al logro del objetivo 1. La tarea está diseñada para que los escolares tracen ejes de simetría. Ellos deben aplicar las propiedades de la simetría axial que se trabajaron en las tareas anteriores. Igualmente, al dividir la señal en partes iguales, los escolares tienen en cuenta las formas internas de la figura.

#### 3.1. Elementos de la tarea

A continuación, describimos los elementos de la tarea.

##### *Requisitos de la tarea*

En relación con los requisitos de la tarea, el escolar debe tener la noción de mitad y de división como proceso para obtener partes iguales con ejes en diferentes posiciones; conocer las propiedades de equidistancia, paralelismo, perpendicularidad e inversión; y tener destreza para doblar el papel, usar la regla para medir distancias y trazar rectas.

##### *Metas*

Con la tarea, buscamos que los escolares encuentren las rectas que son ejes de simetría y que permiten determinar la inversión, forma y tamaño de una figura, como propiedades de la simetría axial.

##### *Formulación*

Exponemos la formulación de la tarea. El material de la tarea para imprimir se encuentra en el anexo 11.

La siguiente imagen corresponde a una señal de tránsito preventiva.



Con tu pareja, tracen por lo menos dos rectas en la señal de tránsito, de tal manera que las dos partes separadas por cada recta queden simétricas (enumeren las rectas trazadas). Describan los pasos que utilizaron para dividir la señal de tránsito.

Respondan las siguientes preguntas.

1. Al dividir la imagen de la señal de tránsito con cada recta ¿las partes obtenidas tienen la misma forma? ¿Por qué?
2. Al dividir la imagen de la señal de tránsito con cada recta ¿las partes obtenidas tienen el mismo tamaño? ¿Por qué?

3. Observen las partes que obtuvieron al dividir la señal de tránsito. Identifiquen la recta que permite que las partes queden invertidas. Justifiquen su respuesta.
4. A partir de la forma, el tamaño y la posición de las dos partes en que quedó dividida la imagen, ¿cuál recta permite que estas partes queden simétricas?
5. Comparen con otra pareja sus resultados.

#### *Conceptos y procedimientos*

Los conceptos que se abordan al resolver la tarea son equidistancia, paralelismo, perpendicularidad e inversión. Respecto a los procedimientos, los escolares pueden trazar un eje de simetría al doblar el papel o trazar la mediatrix con el uso de la regla.

#### *Sistemas de representación*

El escolar utiliza el sistema de representación geométrico, porque la tarea está diseñada en un plano euclíadiano. También, esperamos que el escolar utilice el sistema de representación verbal, al relacionar los términos imagen y reflejo cuando comparta los resultados con otra pareja.

#### *Contexto*

El contexto en el que se sitúa la tarea es el social, dado que una señal de tránsito se establece como una norma general en una comunidad.

#### *Materiales y recursos*

Entregamos a cada grupo la formulación de la tarea de manera impresa. El material en que se presenta la imagen de la señal de tránsito debe ser traslúcido para inducir al escolar en el doblado de papel. Sugerimos imprimir la imagen en papel pergamino. Los escolares puedan usar la regla y el transportador como recursos para solucionar la tarea. Sugerimos que el profesor utilice el video beam o cualquier otro medio audiovisual para presentar la tarea.

#### *Agrupamiento de los escolares*

Para solucionar la tarea los escolares se agrupan por parejas y, una vez finalicen, se reúnen con otra pareja para que comparen sus resultados.

#### *Interacciones previstas*

La interacción para abordar y resolver la tarea se dará en tres formas: entre los escolares para definir los roles, lo que permite que un escolar trace las rectas que dividen la señal de tránsito y el otro compañero verifique que cumplen las propiedades de inversión, forma y tamaño; entre escolares y profesor, para facilitar la aclaración de dudas; y entre grupos de escolares para contrastar resultados.

#### *Temporalidad*

Presentamos las etapas del desarrollo de la tarea y los tiempos aproximados para cada una de ellas. La sesión se divide en realimentación de la tarea anterior (10 minutos), comunicación de las metas de la tarea (5 minutos), lectura dirigida de la tarea y explicación de forma general (5 minutos), distribución de los materiales y recursos (5 minutos), desarrollo de la tarea (50 minu-

tos), contraste de los resultados entre grupos de escolares (20 minutos) y la autoevaluación y la coevaluación (15 minutos).

### **3.2. Errores, grafo de criterios de logro y actuación del profesor**

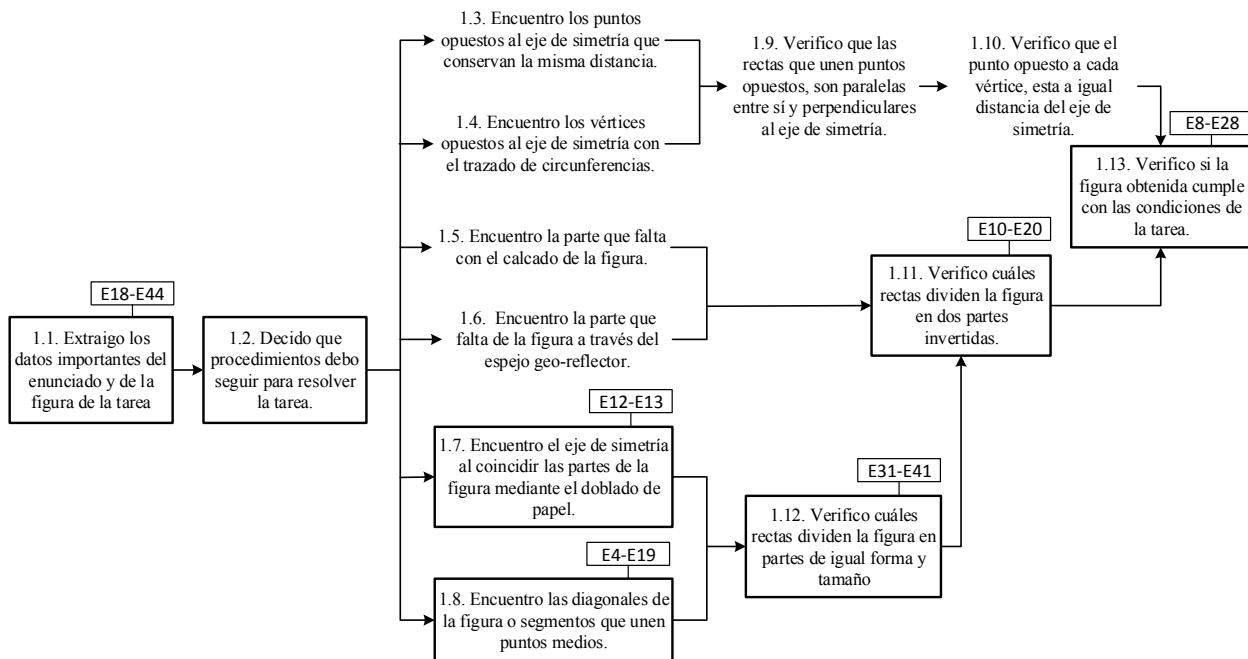
En este apartado, exponemos los errores más comunes en los que pueden incurrir los escolares al resolver la tarea, algunas ayudas que puede brindar el profesor a sus escolares para superar estos errores, los grafos de criterios de logro que muestran los posibles procedimientos que puede seguir el escolar al resolver la tarea y algunas sugerencias de actuación del profesor al implementar la tarea.

#### *Errores y ayudas*

Al resolver la tarea, los escolares pueden incurrir en el error de tener en cuenta el tamaño, pero no la forma al dividir la señal de tránsito. Para superar este error, proponemos que el profesor solicite al escolar que compare los ángulos de las formas internas de cada parte de la señal. El escolar puede confundir la inversión con la rotación, por lo que el profesor le puede sugerir que verifique si las partes opuestas tienen los vértices en la misma dirección y sentido.

#### *Grafo de criterios de logro*

A continuación, presentamos el grafo de criterios de logro del objetivo 1. Resaltamos con recuadros los procedimientos que puede utilizar un escolar como estrategias para resolver la tarea (figura 9). El escolar debe extraer del enunciado y de la figura la información necesaria para solucionar la tarea. Por ejemplo, él puede identificar las formas internas de la imagen. Después, el escolar debe decidir el procedimiento a seguir: puede encontrar la congruencia entre las dos partes a través del doblado de papel o unir los vértices o puntos medios de la figura con el uso de la regla. Luego, el escolar debe determinar qué rectas son ejes de simetría.



*Figura 9. Grafo de criterios de logro de la tarea Señal de tránsito*

#### *Actuación del profesor*

El profesor expone la tarea sin inducir al escolar a que doble el papel. El escolar, al observar el material en el que está diseñada la imagen, debe descubrir que el doblado de papel es una opción de solución. En la realimentación de la tarea anterior, el profesor debe enfatizar en las propiedades que garantizan que una recta es un eje de simetría.

#### **3.3. Sugerencias metodológicas y aclaración de la tarea**

Cuando los escolares lleguen al final de la tarea, el profesor debe resaltar las propiedades de forma, tamaño, inversión e indicar que estas propiedades también garantizan la simetría axial. Después de realizar la realimentación de la tarea, el profesor debe hacer una realimentación general del objetivo 1, en la que resalte todas las propiedades que se deben cumplir en la simetría axial y hacer énfasis en aquellas propiedades en las que observó mayor dificultad.

#### **3.4. Evaluación de la tarea**

El profesor puede evidenciar que sus escolares han alcanzado la meta de la tarea si logran identificar cuáles de las rectas que trazaron son ejes de simetría. El profesor debe comprobar que los escolares tienen en cuenta las formas internas y verifican las propiedades de forma, tamaño e inversión.

## 4. TAREA LA SIEMBRA

Con la tarea La siembra, pretendemos contribuir al logro del objetivo 2. La tarea está diseñada para que el escolar construya el reflejo de la figura a partir de un eje de simetría externo.

### 4.1. Elementos de la tarea

A continuación, describimos los elementos de la tarea.

#### *Requisitos*

Para abordar la tarea, el escolar debe conocer la noción de plano cartesiano, objeto reflejado, equidistancia, eje de simetría e inversión. El escolar debe tener destreza para hallar los puntos homólogos al doblar el papel o al medir con la regla.

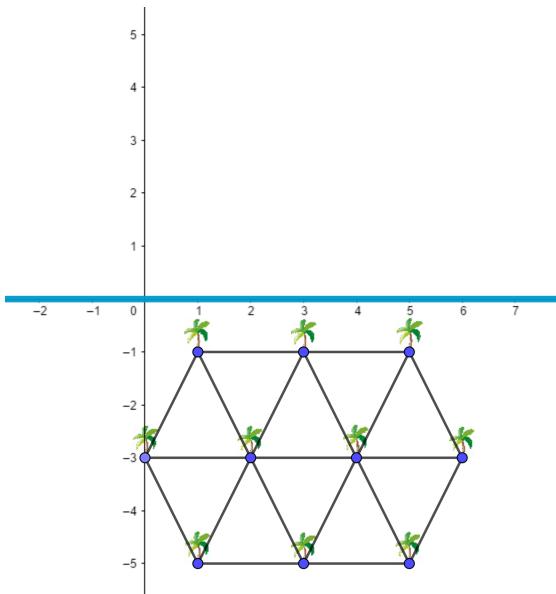
#### *Metas*

Con esta tarea, buscamos que los escolares construyan figuras reflejadas a partir de un eje de simetría externo; reflejen figuras que conserven la forma y el tamaño, aunque estén invertidas; y ubiquen puntos homólogos que conserven la equidistancia.

#### *Formulación*

Exponemos la formulación de la tarea La siembra. El material para imprimir esta tarea se encuentra en el anexo 12.

El marqueo de plantación al tresbolillo es una técnica utilizada para sembrar. Con esta técnica, las plantas ocupan en el terreno los vértices de triángulos equiláteros. El dueño de una finca ha aplicado la técnica del tresbolillo para sembrar plantas a un lado del canal de riego representado sobre el eje x del plano cartesiano de la figura. El dueño desea saber si es posible distribuir la siembra de forma que se refleje al otro lado del canal de riego de tal modo que no necesite repetir la técnica de plantación y que el resultado sea el mismo para tener un máximo aprovechamiento de los recursos.



Junto con uno de tus compañeros, elaboren un diseño de la forma como quedaría la siembra en la finca. Tengan en cuenta que deben ubicar solo los puntos donde sembrarían cada planta. Describan los pasos que siguieron.

A partir de su diseño, respondan las siguientes cuestiones.

1. Encuentren las coordenadas de cada plantación en la nueva siembra de la finca.
2. Describan cómo es la posición de las plantas del nuevo sembrado con respecto a las plantas de la siembra original.
3. ¿Qué pueden concluir al comparar las coordenadas de la siembra original con las coordenadas de la siembra reflejada?
4. Si colorean las plantas que se encuentran en las coordenadas  $(3, -1)$ ,  $(5, -1)$ ,  $(4, -3)$  y las plantas que son reflejo de estas, ¿qué pueden concluir de las distancias de cada planta y su reflejo al canal de riego?
5. Comparen con otra pareja sus resultados. ¿Qué diferencias y semejanzas encuentran en sus procedimientos?

#### *Conceptos y procedimientos*

El procedimiento que realiza el escolar para construir la nueva siembra es encontrar las coordenadas de los puntos opuestos a partir del eje externo con el uso de la regla o el doblado del papel. Los conceptos que el escolar aborda al resolver la tarea son inversión, forma, tamaño y equidistancia para determinar si la nueva siembra quedó simétrica.

#### *Sistemas de representación*

Diseñamos las figuras de la tarea sobre un plano cartesiano. Esto permite que el escolar utilice el sistema de representación gráfico, al usar el sistema de coordenadas para ubicar los puntos de la siembra; el sistema de representación simbólico, al identificar la simetría con parejas ordenadas;

y el sistema de representación verbal, al relacionar el término imagen con el reflejo de la nueva siembra.

#### *Contexto*

El contexto en el que se sitúa la tarea es profesional. El escolar ayuda al dueño de una finca a utilizar la técnica del tresbolillo mediante el uso de la simetría axial.

#### *Materiales y recursos*

Entregamos a cada grupo la formulación de la tarea de forma impresa. El material en que se presenta la imagen de la siembra debe ser translúcido (por ejemplo, el papel pergamino), para promover en el escolar una forma de hallar los puntos homólogos por medio del doblado de papel. La imagen debe ser legible para facilitar el trazo de rectas. Los escolares puedan usar la regla como recurso para verificar la equidistancia de cada una de las plantas al canal de riego y el compás para marcar los puntos una vez se doble el papel. El profesor puede utilizar el video beam u otro medio audiovisual para presentar la tarea.

#### *Agrupamiento de los escolares*

Sugerimos que el profesor organice a los escolares en parejas para realizar un trabajo colaborativo. Al finalizar la tarea, el profesor puede agrupar las parejas que hayan hecho la siembra con una estrategia diferente para comparar los resultados finales.

#### *Interacciones previstas*

La interacción será profesor-escolar para presentar la tarea y resolver las dudas que se presenten. La interacción entre escolares inicia con la exploración de los materiales y la selección de roles para solucionar la tarea. La interacción entre grupos de escolares permite la puesta en común de las diferencias y semejanzas de los procedimientos usados para realizar la nueva siembra.

#### *Temporalidad*

Presentamos las etapas del desarrollo de la tarea y los tiempos aproximados para cada uno de ellas. La sesión se divide en realimentación de la tarea anterior (10 minutos), comunicación de las metas de la tarea (5 minutos), lectura dirigida y explicación general del contexto (5 minutos), distribución de materiales y recursos (5 minutos), desarrollo de la tarea (50 minutos), contraste de resultados con otra pareja de escolares (20 minutos) y la autoevaluación y la coevaluación (15 minutos).

### **4.2. Errores, grafo de criterios de logro y actuación del profesor**

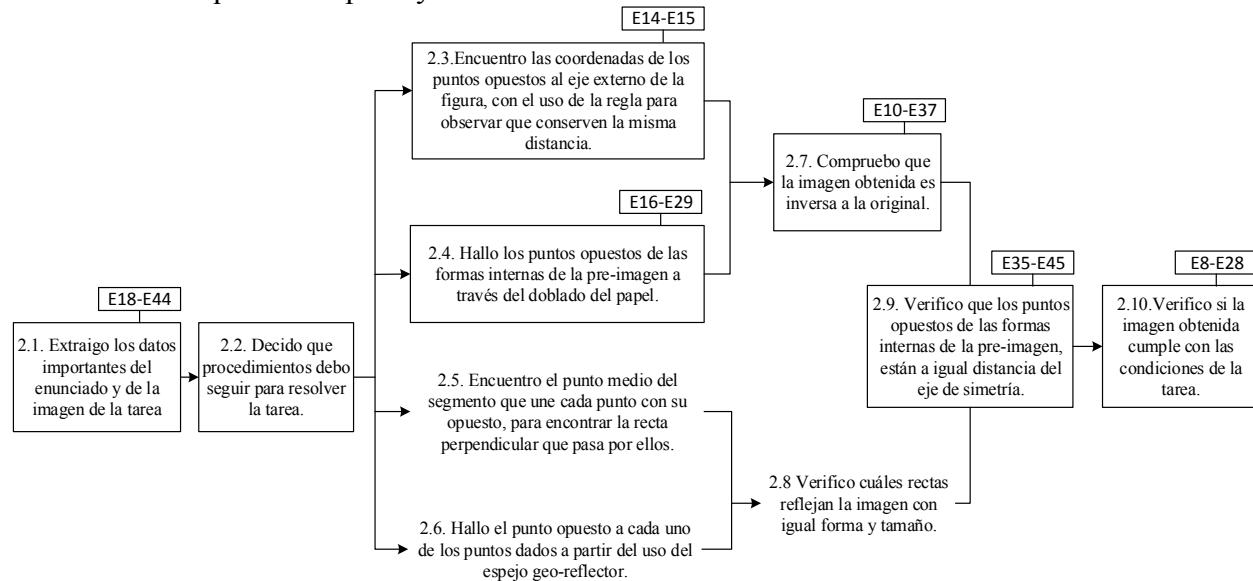
Exponemos los errores más comunes en los que pueden incurrir los escolares al resolver la tarea, el listado de algunas ayudas que el profesor puede utilizar con el fin de que los escolares superaren esos errores, el grafo de criterios de logro y algunas sugerencias que el profesor puede tener en cuenta al momento de implementar la tarea. El listado completo de ayudas para esta y las demás tareas de la unidad didáctica se encuentra en el anexo 9.

### *Errores y ayudas*

Al resolver la tarea, los escolares pueden incurrir en mayor medida en el error de realizar la nueva siembra sin tener en cuenta la orientación de la imagen. En este caso, el profesor puede proponer al escolar que ubique el espejo geo-reflector sobre el canal de riego y cuestionarlo sobre si la imagen que obtuvo está en la misma dirección de la imagen de la siembra original.

### *Grafo de criterios de logro*

En la figura 10, exponemos el grafo de criterios de logro para el objetivo 2. Resaltamos con recuadros los posibles procedimientos de solución que el escolar puede usar para resolver la tarea. El escolar debe extraer información del enunciado y de la figura. Por ejemplo, puede identificar la posición del eje de simetría y de los vértices de la figura. Luego, el escolar debe tomar la decisión de elegir un procedimiento para seguir. Puede elegir como procedimiento encontrar los puntos homólogos con regla o con el doblado de papel. Después que el escolar obtenga la nueva siembra, debe verificar que se cumplen las propiedades de inversión y equidistancia. Finalmente, debe verificar que la siembra obtenida cumple con las condiciones de la tarea; es decir, que la nueva siembra quedó completa y simétrica.



*Figura 10. Grafo de criterios de logro para la tarea La siembra*

### *Actuación del profesor*

Proponemos que el profesor garantice que los grupos de trabajo estén conformados por un escolar de desempeño bajo y uno de desempeño alto. Esto permite una interacción eficaz al resolver la tarea. Al realizar la introducción de la tarea, el profesor debe ser cuidadoso de no exponerla de manera guiada y estar atento a que los escolares tengan el conocimiento previo de ubicar puntos en el plano cartesiano.

#### **4.3. Sugerencias metodológicas y aclaración de la tarea**

Consideramos que el doblado de papel es un procedimiento fácil para que el escolar ubique los puntos homólogos. Pero el profesor debe estar atento a que los escolares hagan el doblez por el eje de simetría. Sugerimos que la imagen se imprima en papel pergamino para que el escolar marque mejor los dobleces. Al llegar al final de la tarea, sugerimos que el profesor resalte la propiedad de inversión, a partir de la orientación de la figura original y la reflejada.

#### **4.4. Evaluación de la tarea**

El profesor puede evidenciar que los escolares han alcanzado la meta de la tarea, cuando logren construir la nueva siembra y sustentar a otro grupo de escolares las propiedades de inversión y equidistancia que le permiten garantizar que la nueva siembra quedó simétrica.

### **5. TAREA CANAL DE RIEGO**

Con la tarea Canal de riego, buscamos contribuir al logro del objetivo 2. La tarea está diseñada para que el escolar ubique, en un sembrado de flores, un canal de riego que haga las veces de eje de simetría externo.

#### **5.1. Elementos de la tarea**

A continuación, describimos los elementos de la tarea.

##### *Requisitos de la tarea*

Para solucionar la tarea, el escolar debe conocer la noción de objeto reflejado, eje de simetría externo, paralelismo, perpendicularidad, equidistancia e inversión. El escolar debe tener destreza para verificar las propiedades de la simetría axial al utilizar el espejo geo-reflector y medir con la regla.

##### *Metas*

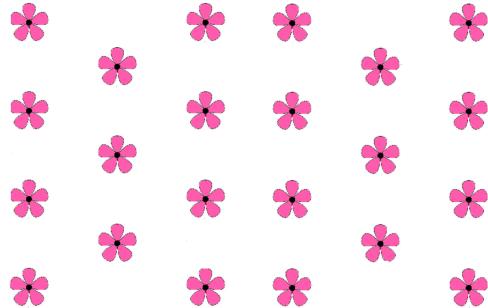
Con el desarrollo de esta tarea, buscamos que los escolares tracen rectas como ejes de simetría para garantizar las propiedades de paralelismo, perpendicularidad, tamaño y forma.

##### *Formulación*

Exponemos la formulación de la tarea. El material de la tarea para imprimir se encuentra en el anexo 13.

El marqueo de plantación al tresbolillo es una técnica utilizada para sembrar. Con esta técnica, las plantas ocupan en el terreno los vértices de triángulos equiláteros. Se guarda siempre la misma distancia entre plantas que entre las filas.

Para sembrar flores en el jardín de su casa, doña Lola ha aplicado la técnica del tresbolillo, como se muestra en la figura, pero aún no ha ubicado el canal de riego. Para garantizar que el suministro de agua sea suficiente para todo el sembrado, las flores deben quedar distribuidas simétricamente a cada lado del canal.



Con tu compañero encuentra la forma de ubicar un canal de riego, sin doblar el papel y sin dañar las flores. Describan el paso a paso del procedimiento que usaron para ubicar el canal de riego.

1. Comparen la cantidad de flores que quedaron a cada lado del canal de riego. ¿Son cantidades iguales o diferentes? Justifiquen su respuesta.
2. Para que el agua pueda distribuirse para todo el jardín, ¿están todas las flores opuestas al canal de riego a la misma distancia de él? Justifiquen su respuesta.
3. ¿Es posible ubicar otro canal de riego que permita que la distribución de las flores quede simétrica? Si es posible ubíquenlo con otro color.
4. Muestren al grupo de compañeros de clase las opciones de ubicación del canal de riego.

#### *Conceptos y procedimientos*

Los conceptos que se abordan al resolver la tarea son equidistancia, paralelismo, perpendicularidad, forma, tamaño e inversión. Los escolares pueden realizar procedimientos como trazar un eje de simetría externo con la ayuda del espejo geo-reflector o trazar la mediatrix con el uso de la regla.

#### *Sistemas de representación*

Con la tarea, pretendemos que el escolar utilice el sistema de representación geométrico porque la figura está diseñada en un plano euclíadiano. El escolar emplea el sistema de representación manipulativo al utilizar el espejo geo-reflector para ubicar el canal de riego. El escolar utiliza el sistema de representación verbal cuando relaciona los términos imagen y reflejo al comunicar y sustentar con el grupo la ubicación del canal de riego.

#### *Contexto*

La tarea se encuentra en un contexto profesional porque permite al escolar proponer estrategias para ubicar sobre un sembrado de flores, un canal de riego con uso de la simetría axial.

#### *Materiales y recursos*

La formulación de esta tarea se entrega de forma impresa a cada grupo. La imagen de la siembra de flores se imprime y se pega en cartón paja o cartulina. Los escolares pueden utilizar la regla

para encontrar la mediatrix o el espejo geo-reflector para buscar la ubicación del canal de riego. El profesor puede presentar la tarea con diapositivas u otro medio audiovisual.

#### *Agrupamiento de los escolares*

Para solucionar la tarea, sugerimos que el profesor organice a los escolares de acuerdo con la cantidad de espejos geo-reflectores. Proponemos organizar los escolares en parejas conformadas por un escolar con desempeño alto y uno de desempeño bajo. La actividad requiere del manejo del espejo geo-reflector. Por tanto, el profesor debe estar atento a que los escolares cumplan sus reglas de uso. Los grupos de escolares se organizan de forma aleatoria para comunicar y contrastar los resultados del trazo de sus canales de riego.

#### *Interacciones previstas*

La interacción entre escolares se da para asignar la función que debe cumplir cada uno. Un escolar puede trazar los canales de riego y el otro verificar que ese canal cumple con las propiedades de equidistancia, forma y tamaño. La interacción escolar-profesor permite la aclaración de dudas y recordar la instrucción sobre las reglas para el uso del espejo geo-reflector. La interacción entre grupos de escolares facilita el contraste de los resultados y la validación de propiedades para garantizar que el canal de riego ubicado sea un eje de simetría externo.

#### *Temporalidad*

Presentamos las etapas del desarrollo de la tarea y los tiempos aproximados para cada una de ellas. La sesión se divide en realimentación de la tarea anterior (10 minutos), comunicación de las metas de la tarea (5 minutos), lectura dirigida y explicación general del contexto (5 minutos), distribución de materiales y recursos (5 minutos), desarrollo de la tarea (50 minutos), contraste y sustentación de los resultados ante el grupo (20 minutos), y la autoevaluación y la coevaluación (15 minutos).

### **5.2. Errores, grafo de criterios de logro y actuación del profesor**

Exponemos los errores más comunes en los que pueden incurrir los escolares al resolver la tarea y recomendamos las posibles ayudas para superar esos errores. Presentamos los procedimientos y posibles estrategias que pueden utilizar los escolares para resolver la tarea y algunas sugerencias de actuación del profesor al implementar la tarea.

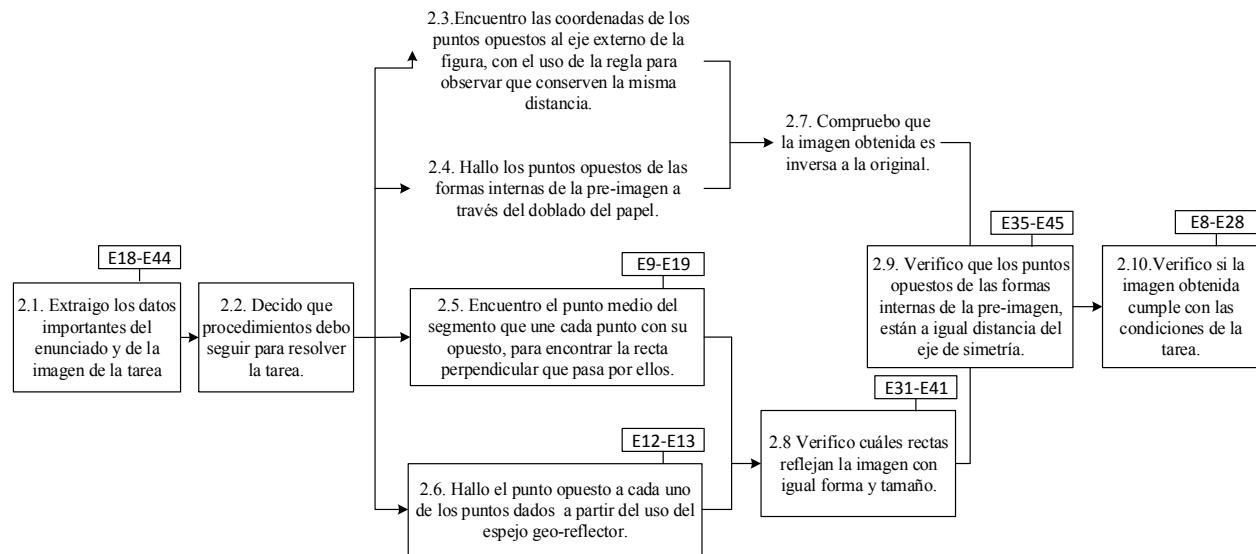
#### *Errores y ayudas*

Al resolver la tarea, los escolares pueden incurrir en el error de trazar la mediatrix de un segmento sin que sea perpendicular a este. Proponemos, para superar este error, que el profesor solicite al escolar unir dos flores que estén a la misma distancia del canal de riego y lo cuestione sobre qué clase de ángulo se forma entre el canal y el segmento que une esas flores.

#### *Grafo de criterios de logro*

Exponemos el grafo de criterios de logro del objetivo 2. Resaltamos con recuadros las posibles estrategias de solución que puede elegir el escolar para resolver la tarea (figura 11). Para resolver esta tarea, el escolar debe extraer información del enunciado y de la figura. Puede identificar la

posición de las flores. Luego, el escolar debe elegir un procedimiento para seguir entre encontrar los puntos homólogos con el uso de la regla o del espejo geo-reflector. Después que el escolar ubique el canal de riego, debe verificar que se cumplan las propiedades de forma, tamaño y equidistancia. Finalmente, debe verificar que el canal de riego ubicado cumple con las condiciones de la tarea: es decir, que divide la siembra de flores de forma simétrica.



*Figura 11. Grafo de criterios de logro de la tarea Canal de riego*

#### *Actuación del profesor*

En la realimentación de la tarea, el profesor debe enfatizar en las propiedades de la simetría axial que garantizan que una recta sea un eje de simetría.

### **5.3. Sugerencias metodológicas y aclaración de la tarea**

Cuando los escolares lleguen al final de la tarea, el profesor debe resaltar las propiedades de forma, tamaño, equidistancia, paralelismo, perpendicularidad e inversión e indicar que estas propiedades también garantizan que una recta sea un eje de simetría. Sugerimos al profesor hacer una realimentación general del objetivo 2, en la que resalte a los escolares todas las propiedades que se deben cumplir en la simetría axial. El profesor debe hacer énfasis en aquellas propiedades de la simetría axial en las que observó mayor dificultad.

### **5.4. Evaluación de la tarea**

El profesor puede evidenciar que se alcanzaron las metas de la tarea, si los escolares ubicaron el canal de riego al tener en cuenta las propiedades de la simetría axial y sustentar por qué el canal que trazaron es un eje de simetría.

## 5. EXAMEN FINAL

En este apartado, presentamos la formulación del examen final y su rúbrica de calificación. El examen final tiene como propósito establecer el grado de alcance de los objetivos de aprendizaje. Para medir ese grado de alcance, diseñamos actividades relacionadas con las propiedades de la simetría axial, la construcción de partes simétricas en diferentes contextos y el trazo de ejes de simetría. El material del examen final para imprimir se encuentra en el anexo 14.

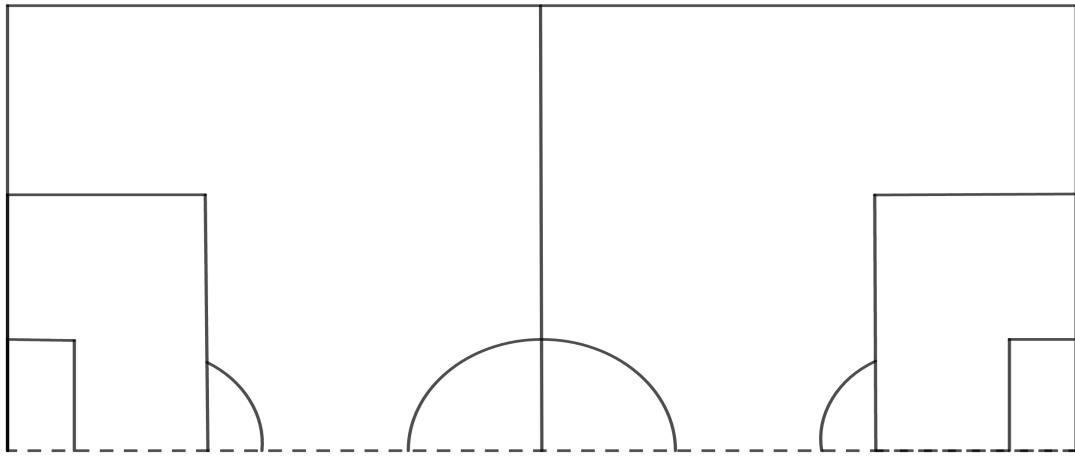
El examen final cuenta con tres actividades para evaluar el alcance del objetivo 1 y dos actividades para evaluar el alcance del objetivo 2. El examen final se realiza de manera individual, sin interacción y con la disponibilidad de materiales y recursos como el papel calcante, la regla y el compás.

### 1. ACTIVIDADES PARA EL OBJETIVO 1

El examen cuenta con tres actividades para evaluar el alcance del objetivo 1. La primera actividad evalúa cómo encontrar la parte simétrica, al tener en cuenta las formas internas que componen la figura y que permiten verificar las propiedades de forma y tamaño. La segunda evalúa el trazo de ejes de simetría y la comprobación de las propiedades de inversión y equidistancia. La tercera examina la ubicación de puntos homólogos con la verificación de las propiedades de perpendicularidad y paralelismo. A continuación, presentamos el diseño del examen final para el objetivo 1 de la unidad didáctica.

#### 1.1. Actividad 1

Construye la parte que falta del siguiente plano de una cancha de fútbol.



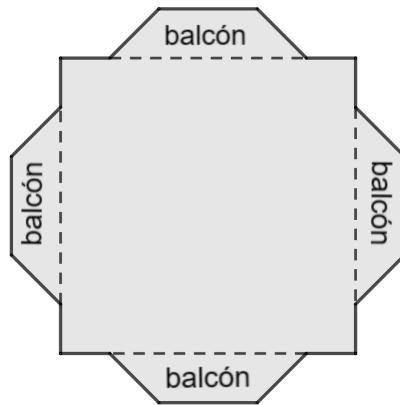
Después de construir la parte que falta, contesta cada pregunta.

1. ¿Las dos partes de la cancha tienen la misma forma? ¿Por qué?
2. ¿Las dos partes de la cancha tienen el mismo tamaño? ¿Por qué?

## 1.2. Actividad 2

A un arquitecto se le asigna el terreno como el que se muestra en la figura.

Ayúdale a trazar todos los ejes que le permiten dividir el terreno para dos apartamentos. Ten en cuenta que los apartamentos deben tener igual forma y tamaño. Enumera cada eje.



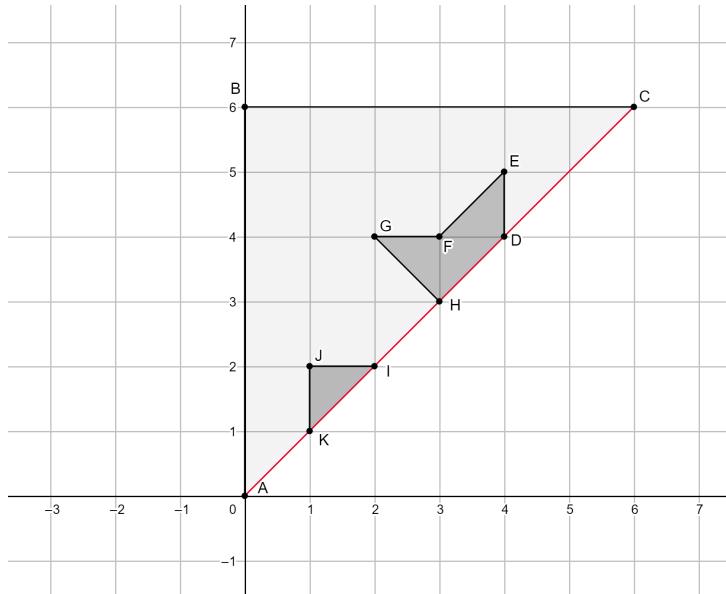
¿Los ejes que trazaste permiten que los balcones de los apartamentos queden en direcciones opuestas? ¿Por qué?

Colorea del mismo color un par de balcones que estén a la misma distancia de uno de los ejes que trazaste.

### 1.3. Actividad 3

La mitad de una baldosa cuadrada está diseñada sobre el plano cartesiano de la figura.

Completa el diseño de la baldosa. Ten en cuenta que existe un eje de simetría que es el segmento que une los puntos A y C.



Traza las rectas que unen los vértices de las figuras que tiene la parte de la baldosa dada con las de la parte que construiste.

¿Qué clase de rectas se formaron al unir los vértices?

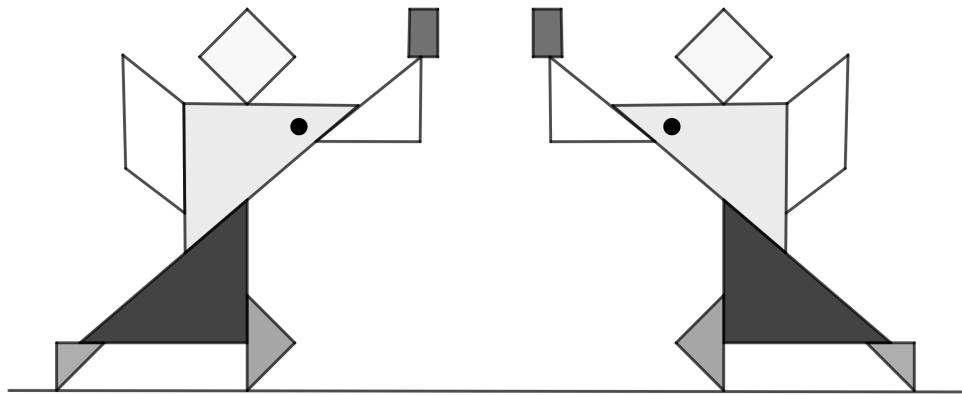
¿Qué clase de rectas se forman entre las rectas que trazaste y el eje de simetría?

## 2. ACTIVIDADES PARA EL OBJETIVO 2

Las actividades 4 y 5 del examen evalúan el alcance del objetivo 2. La actividad 4 evalúa el trazo de ejes de simetría externos con la revisión de las propiedades de forma, tamaño y equidistancia. La actividad 5 examina la ubicación de puntos homólogos a un eje externo para comprobar las propiedades de inversión y equidistancia.

### 2.1. Actividad 4

1. Traza el eje de simetría para la siguiente figura que representa un árbitro y su imagen. Responde cada pregunta.



¿La recta que trazaste es perpendicular al piso? ¿Por qué?

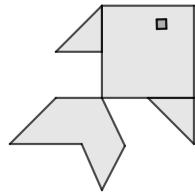
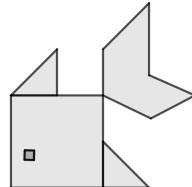
Si se unen con una recta los puntos que tienen los árbitros en su camisa, ¿qué clase de recta se forma con respecto al piso?

2. Observa la siguiente imagen.



Traza una recta que permita ver la propiedad de inversión. ¿Qué condiciones cumple la recta que trazaste?

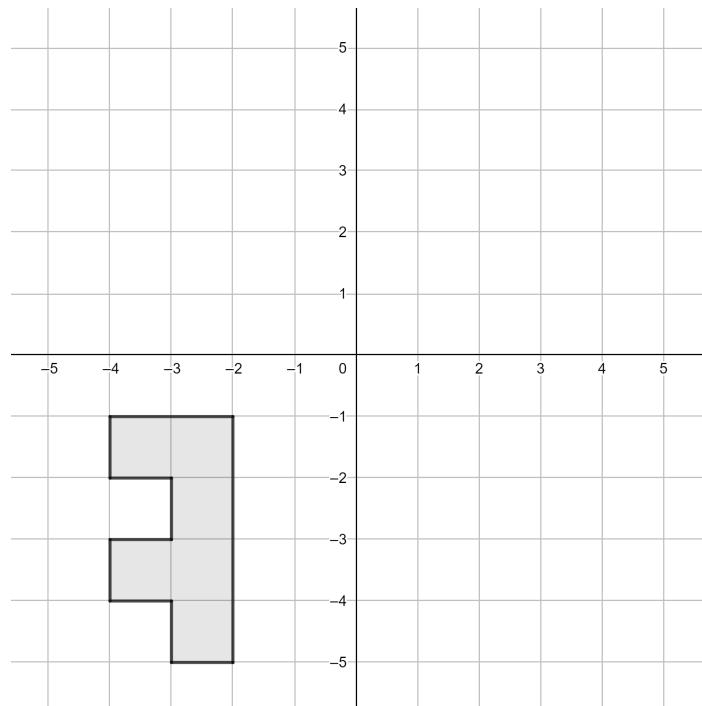
3. Traza el eje de simetría para la siguiente imagen y responde la pregunta.



¿Los peces quedan a igual distancia del eje de simetría que trazaste? ¿Por qué?

## 2.2. Actividad 5

Construye y enumera el reflejo de la figura en cada cuadrante del plano cartesiano. Ten en cuenta que los ejes del plano son los ejes de simetría. Inicia por el segundo cuadrante y termina en el cuarto.



¿Cuál de las tres figuras obtenidas no corresponde al reflejo de la figura inicial? Justifica tu respuesta.

## 3. TEMPORALIDAD

Mostramos en la tabla 3 los tiempos y modos previstos para la aplicación del examen final.

Tabla 3

*Tiempos y modos de la sesión 12– Examen final*

Modos	Tiempos
Entrega de materiales	5 min
Solución individual del examen final	45 min
Recolección del examen final	5 min
Total	55 min

## 4. RÚBRICA

Proponemos un modelo de rúbrica para evaluar el examen final (tabla 4). Esta rúbrica permite evaluar la consecución de los objetivos de aprendizaje propuestos para la unidad didáctica, al tener en cuenta los errores en los que pueden incurrir los escolares. La calificación del examen final se hace a partir de los cuatro niveles establecidos en la escala de valoración nacional.

Tabla 4  
*Niveles de logro e indicadores para la unidad didáctica*

Nivel de logro	Indicadores
Objetivo 1	
Superior	El escolar activa, sin incurrir en errores, todos los criterios de logro del objetivo que le permiten hallar ejes de simetría internos, completar la parte equivalente de una figura y verificar el cumplimiento de las propiedades de la simetría axial en diferentes contextos.
Alto	El escolar activa todos los criterios de logro del objetivo que le ayudan a hallar ejes de simetría internos, completar la parte equivalente de una figura y verificar el cumplimiento de las propiedades de la simetría axial en diferentes contextos. Al verificar algunas propiedades, el escolar pasa por alto la forma y/o el tamaño de la figura.
Básico	El escolar reconoce la situación planteada, halla ejes de simetría internos, completa la parte equivalente de una figura y verifica el cumplimiento de las propiedades de la simetría axial en diferentes contextos. El escolar realiza la simetría sin tener en cuenta las formas internas de la figura y/o la construye sin tener en cuenta el paralelismo ni la perpendicularidad. Sin embargo, este error no le impide finalizar la tarea.
Bajo	El escolar no activa los criterios de logro porque incurre en errores como ubicar todos los puntos como homólogos, sin tener en cuenta la equidistancia al eje de simetría. El escolar puede considerar cualquier recta como eje de simetría y en consecuencia completa la imagen sin que quede simétrica.

Tabla 4  
*Niveles de logro e indicadores para la unidad didáctica*

Nivel de logro	Indicadores
Objetivo 2	
Superior	El escolar activa, sin incurrir en errores, los criterios de logro del objetivo que le permiten construir el reflejo de figuras planas a partir de un eje de simetría externo. El escolar ubica los ejes de simetría en diferentes posiciones y comprueba el cumplimiento de las propiedades de la simetría axial en diferentes contextos.
Alto	El escolar activa los criterios de logro del objetivo que le permiten construir figuras simétricas con ejes de simetría externos y comprueba el cumplimiento de las propiedades de la simetría axial en diferentes contextos. El escolar pasa por alto la verificación de las propiedades de tamaño y/o la forma, pero estos errores no le impiden llegar hasta el final de la tarea.
Básico	El escolar reconoce la situación planteada y aplica el concepto de simetría con ejes externos, pero incurre en algunos errores como pasar por alto la perpendicularidad y el paralelismo. No obstante, incurrir en estos errores no le impide al escolar llegar hasta el final de la tarea.
Bajo	El escolar no activa los criterios de logro porque considera cualquier recta como eje de simetría, ubica puntos como homólogos sin que conserven la equidistancia, la inversión con otra transformación como la rotación. Estos errores le impiden al escolar finalizar la tarea.

## 5. CONCLUSIONES

Presentamos, a partir del análisis de contenido y el análisis cognitivo del tema simetría axial, una unidad didáctica que permite que los escolares apliquen y verifiquen las propiedades de la simetría axial en figuras planas. La caracterización de los objetivos nos permitió diseñar tareas de aprendizaje para que el escolar evidencie cuándo un eje de simetría es interno o externo y reconozca las propiedades de equidistancia, paralelismo, perpendicularidad, inversión, forma y tamaño de una figura simétrica. Al abordar y solucionar las tareas de aprendizaje, esperamos que el escolar desarrolle capacidades matemáticas fundamentales como el razonamiento y la argumentación. Al resolver las tareas, el escolar fortalece la capacidad matemática de comunicación. El escolar debe interpretar la información de los enunciados y de las imágenes. Él debe explicar y argumentar los resultados en el contexto de cada tarea.

Diseñamos las tareas de aprendizaje de la unidad didáctica en un contexto cercano al escolar como la elaboración de tarjetas de navidad o la ubicación de un canal de riego para una siembra de flores. Al resolver la tarea, el escolar puede evidenciar la importancia y la aplicación de la si-

metría axial para el mundo que le rodea. La unidad didáctica está diseñada para que el escolar, con cada tarea, aprenda al menos una propiedad de la simetría axial.

Los materiales que se utilizan en las tareas de aprendizaje permiten que el escolar explore diversas formas de solución. El aprendizaje es significativo para el escolar cuando adquiere los conceptos a partir de la manipulación de materiales. El uso de variados materiales y recursos para resolver las tareas motivan al escolar porque le permiten ser parte activa de su proceso de aprendizaje. Los recursos que se requieren para la solución de las tareas propuestas son de fácil acceso y uso.

El diseño de la unidad didáctica puede tener como limitación el sistema de representación manipulativo (espejo geo-reflector) porque es un producto comercial que es necesario adquirir. No obstante, sabemos que este material se puede mandar a elaborar en las tiendas y empresas de placas en acrílicos.

Un colega puede continuar nuestro trabajo aumentando el nivel de complejidad a partir de las figuras. Por ejemplo, él puede diseñar tareas en las que el escolar utilice figuras planas de lados curvos y figuras tridimensionales, para comprobar el cumplimiento de las propiedades de la simetría axial.

Finalmente, agradecemos al Ministerio de Educación Nacional por brindarnos la oportunidad de hacer parte del programa Becas de Excelencia Docente. Agradecemos al equipo de formadores de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad de los Andes, especialmente a su director Pedro Gómez, a la coordinadora de MAD 5 Paola Castro y a nuestra tutora Sara Parra.

## 6. LISTADO DE ANEXOS

Exhibimos el listado de los anexos que complementan el diseño de la unidad didáctica simetría axial en figuras planas. Se pueden consultar en este enlace: <http://funes.uniandes.edu.co/11767>.

- ◆ Anexo 1. Listado de dificultades y errores.
- ◆ Anexo 2. Listado de criterios de logro.
- ◆ Anexo 3. Esquema general de la unidad didáctica.
- ◆ Anexo 4. Listado de conocimientos previos.
- ◆ Anexo 5. Formulación de la tarea diagnóstica.
- ◆ Anexo 6. Formulación de la realimentación de la prueba diagnóstica.
- ◆ Anexo 7. Fichas de las tareas de aprendizaje.
- ◆ Anexo 8. Formulación de la tarea Tarjeta navideña
- ◆ Anexo 9. Listado completo de ayudas.
- ◆ Anexo 10. Formulación de la tarea Diamante princesa.
- ◆ Anexo 11. Formulación de la tarea Señal de tránsito.
- ◆ Anexo 12. Formulación de la tarea La siembra.
- ◆ Anexo 13. Formulación de la tarea Canal de riego.
- ◆ Anexo 14. Formulación del Examen Final.

## 7. REFERENCIAS

- Cañadas, M., Gómez, P. y Pinzón, A. (2016). *Apuntes sobre análisis de contenido. Módulo 2 de MAD 5*. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/1983/>
- Cerdeira S., et al. (2007). *Movimientos en el plano. Simetría en figuras*. Educ.ar. Recuperado de <https://www.educ.ar/recursos/91004/la-simetria-entre-los-diamantes>
- [EduMates]. (2011, Noviembre 17). *Hm1.11 Simetría* [Archivo de video]. Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=ccc2ZICsDVI>
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de Matemáticas de secundaria*. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Disponible en <http://bit.ly/2H26Sbn>
- González, M y Gómez, P (2017). *Apuntes sobre análisis cognitivo. Módulo 3 de MAD 5*. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/8693/>
- Gómez, P. Mora, M. y Velasco, C (2017). *Apuntes sobre análisis de instrucción. Módulo 4 de MAD 5*. Documento no publicado (Documentación). Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/8904/>
- Gómez, P. y Romero, I. (2017). *Apuntes sobre análisis de actuación. Módulo 5 de MAD 5*. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/8905/>
- Gómez, R. (2005). *Geometría Analítica*. Capítulo 3. Transformaciones. Disponible en <http://www.matem.unam.mx/~rgomez/geometria/Capitulo3.pdf>
- Ministerio de Educación Cultura y Deporte. (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: matemáticas, lectura y ciencias*. Madrid: Autor. Disponible en <http://www.mecd.gob.es/dctm/innee/internacional/pisa2012/marcopisa2012.pdf?documentId=0901e72b8177328d>
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2015). *Derechos básicos de aprendizaje*. Bogotá: Autor.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: Autor.
- Narváez, O. (2016). *Simetría con Geometría dinámica*. Disponible en: <http://matetics-unknown.blogspot.com.co/2016/01/navidad-y-simetria.html>