

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

GRÁFICA DE LA FUNCIÓN SENO

JULIÁN ENCISO, HÉCTOR GONZÁLEZ, RAMÓN GUTIÉRREZ, JOHANA OLARTE
Y MARÍA FERNANDA MORA

BOGOTÁ, MAYO DE 2018

En este documento, presentamos una unidad didáctica que diseñamos para estudiantes de grado décimo con el propósito de contribuir a su comprensión de la representación gráfica de la función seno. Los autores de esta cartilla somos el grupo dos de la quinta promoción de la maestría en Educación Matemática de la Universidad de los Andes.

Estructuramos la cartilla en tres apartados. En el primer apartado, presentamos las consideraciones que el profesor debe tener en cuenta, antes de implementar la unidad didáctica, con el propósito de que identifique, a nivel general, los fundamentos de la estructura con la que se organiza la secuencia de tareas que proponemos. En el segundo apartado, describimos cada uno de los elementos de las tareas que conforman la secuencia, con el detalle necesario para que pueda ser implementada. En el tercer apartado, proponemos un procedimiento para evaluar el aprendizaje de los estudiantes que desarrollan las tareas descritas.

El contenido y las expectativas que orientaron la realización de la propuesta se basaron en el análisis didáctico (Gómez, 2007) que utilizamos para realizar la totalidad del diseño. Los dos aspectos, contenido y expectativas, se enmarcan en el análisis de contenido (Cañadas, Gómez y Pinzón, 2016) y en el análisis cognitivo (González y Gómez, 2016).

Realizamos la implementación de la unidad didáctica con 11 estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Vallecitos, Sede Buena Vista Alta, ubicada en la zona rural del Departamento de Tolima. Esta comunidad educativa se ubica en el estrato uno. Su actividad económica es la recolección de maíz, café y plátano. Las edades de los estudiantes oscilan entre los 15 y 19 años.

En el aula de clase, evidenciamos la dificultad que se genera en los estudiantes para identificar las situaciones que cuentan con un comportamiento que corresponda al del modelo matemático de la función seno y la falta de asociación con algún sistema de representación que les permita identificar características propias de este modelo como, por ejemplo, la periodicidad. Esta dificultad se debe, entre otras razones, a que los estudiantes aún no han desarrollado capacidades como identificar, diseñar, relacionar e introducir datos, y analizar el resultado que aporta un sistema de representación matemático que les permita organizar y analizar la información e identificar características de las situaciones que se aborden en el aula de clase.

Con la unidad didáctica, abordamos el tema gráfica de la función seno. Buscamos desarrollar capacidades en los estudiantes para que logren realizar de forma correcta la representación matemática de situaciones de la vida real que cuenten con un comportamiento periódico, expresadas inicialmente en un lenguaje verbal o escrito para transformarlas en una representación gráfica. Como describiremos más adelante, usar este sistema de representación implica el uso de otros sistemas.

La unidad didáctica contribuye a los estándares básicos de competencias, especialmente en el pensamiento espacial y sistemas geométricos, para los grados décimo y once. Los estándares a los que nos referimos son “uso de argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias”, “describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas” y “reconozco y describo curvas y o lugares geométricos” (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2006, p. 88). Por otra parte, consideramos que la unidad didáctica también contribuye al logro de los derechos básicos de aprendizaje correspondientes a grado décimo y noveno “comprende la definición de las funcio-

nes trigonométricas $\text{sen}(x)$ y $\text{cos}(x)$, en las cuales x puede ser cualquier número real y calcula a partir del círculo unitario el valor aproximado de $\text{sen}(x)$ y $\text{cos}(x)$ ” (MEN, 2015, p. 87) y “conoce las razones trigonométricas, seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos” (p. 82).

1. ANTES DE IMPLEMENTAR

En este apartado, resumimos el análisis que hicimos sobre el contenido gráfica de la función seno. Este análisis se centra en los conceptos y procedimientos más relevantes, los sistemas de representación con los que se pueden manipular esos conceptos y procedimientos, y las situaciones o fenómenos en los que tiene sentido la función seno. Posteriormente, describimos las expectativas que planteamos y que orientaron el diseño de esta propuesta. Estas expectativas responden a las dimensiones cognitiva y afectiva.

1.1. Articulación de los contenidos

En la figura 1, presentamos el mapa conceptual de la gráfica de la función seno que fundamenta la estructura conceptual de la unidad didáctica. Este mapa se estructura en cuatro conceptos fundamentales para el tema. Estos son la razón trigonométrica, el círculo unitario, la función trigonométrica y la gráfica de la función seno (centro del mapa). Al interior, identificamos relaciones que se traducen en procedimientos que son fundamentales para abordar el tema. Entre estos procedimientos se encuentran identificar el rango de la función con la amplitud de la gráfica e identificar el comportamiento (creciente o decreciente) de la función con el aspecto de la gráfica en ciertos intervalos.

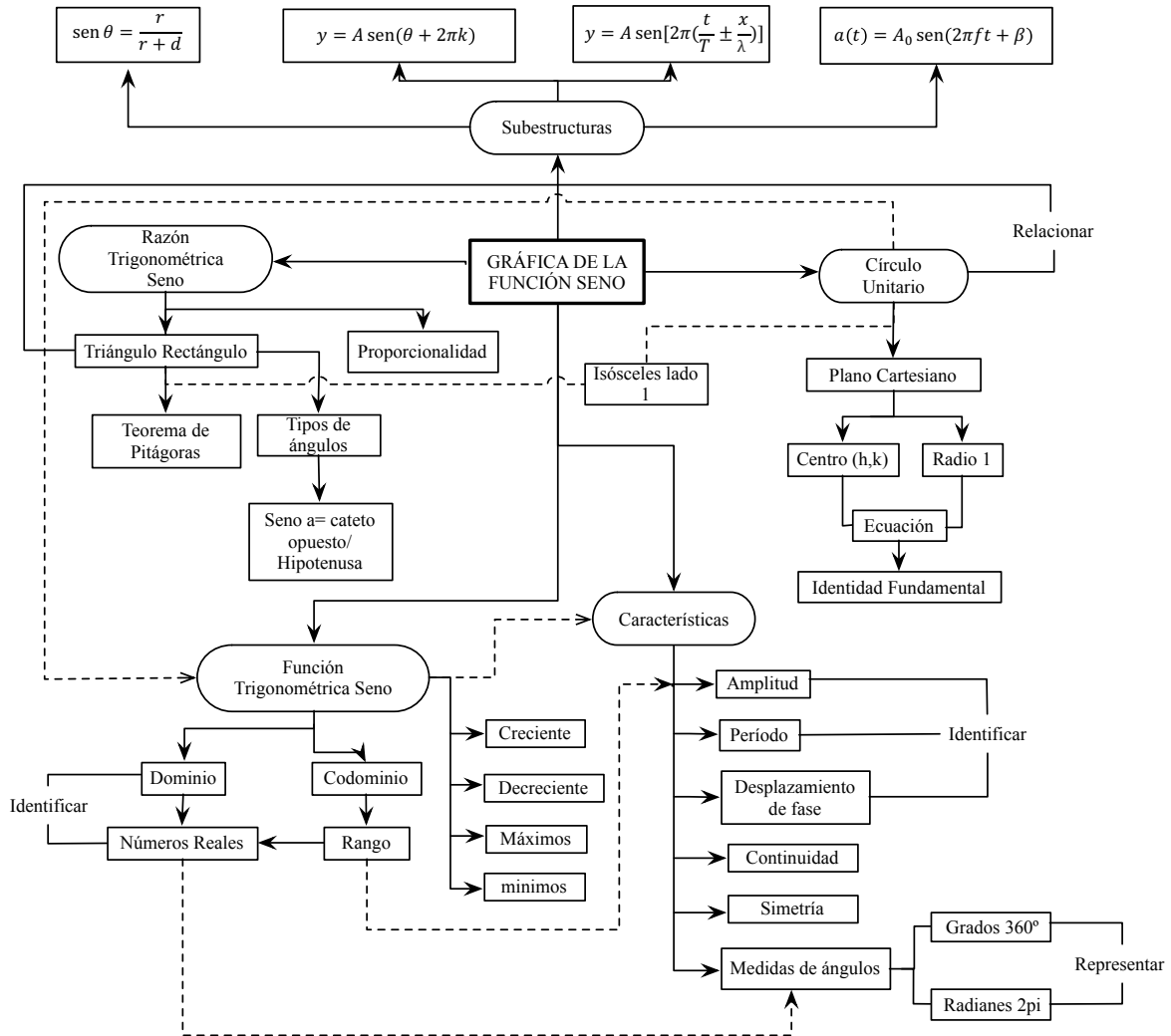


Figura 1. Estructura conceptual del tema gráfica de la función seno

En el mapa conceptual que presentamos en la figura 2, identificamos los sistemas de representación más relevantes para el tema de la unidad didáctica.

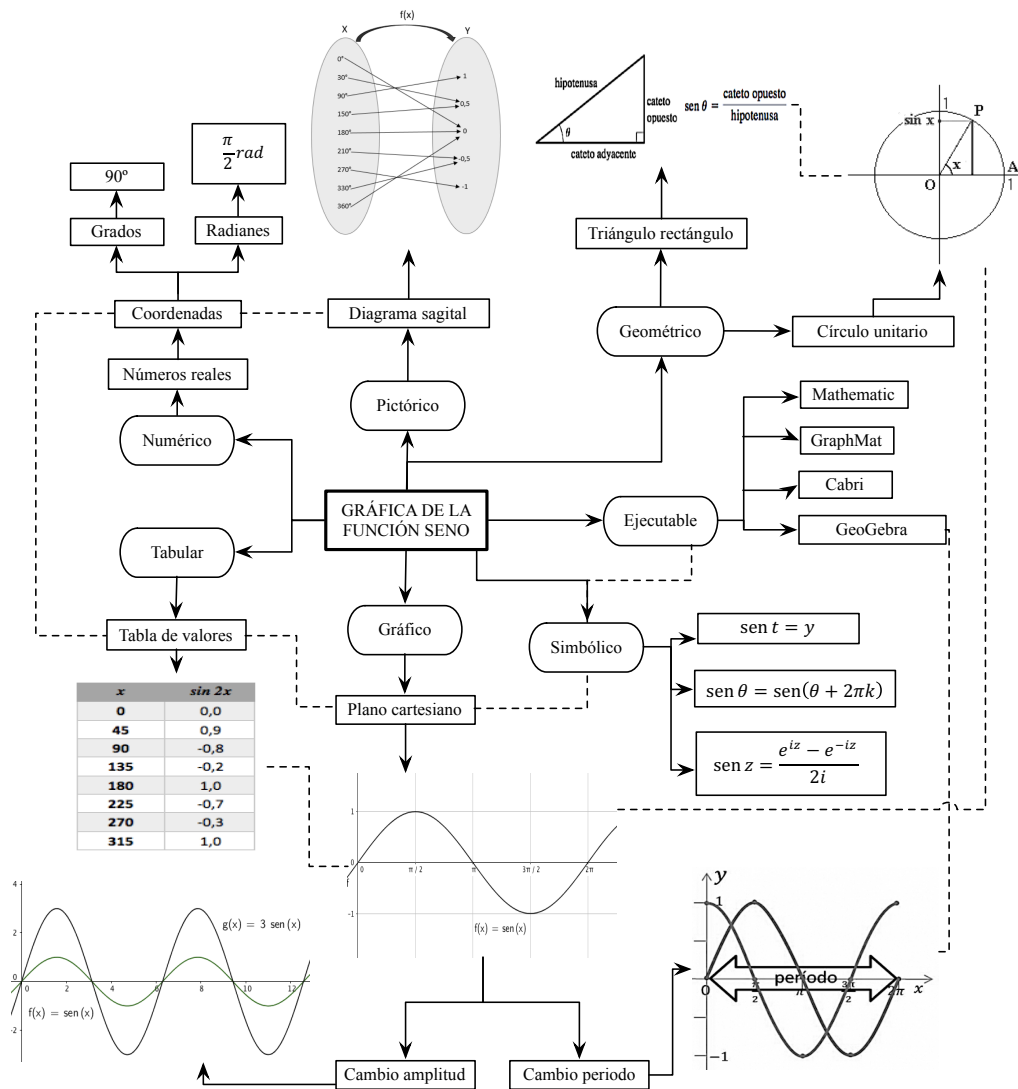


Figura 2. Mapa conceptual de los sistemas de representaciones

Observamos que, dentro de estos sistemas de representación, se encuentran el gráfico, el tabular, el simbólico, el geométrico, el numérico y el ejecutable. En el mapa, se evidencian una serie de relaciones que implican transformaciones y traducciones dentro y entre sistemas de representación. El sistema de representación tabular resulta útil para organizar información de una situación y luego graficarla en un plano cartesiano. La identificación, en estos dos sistemas de representación, de parámetros como la amplitud y el periodo, por ejemplo, puede aportar al análisis de la situación estudiada y a que sea representada mediante otro sistema de representación como el simbólico. Las traducciones entre estos sistemas de representación no son lineales y no obedecen a una única dirección. Por otra parte, estos sistemas de representación no agotan las formas de ver los conceptos y procedimientos más relevantes relacionados con el tema. Otro sistema de representación que tiene un papel fundamental es el sistema geométrico puesto que las primeras

ideas del seno están ligadas a la idea de razón trigonométrica y, por tanto, a la idea de triángulo rectángulo. Otra figura que tiene un papel relevante es el círculo trigonométrico que facilita la transición entre razón seno y función seno. En la propuesta, abordamos todos los sistemas de representación, excepto el ejecutable.

Para hacer el análisis de contenido, es importante, además de revisar la estructura conceptual y los sistemas de representación, revisar las situaciones o fenómenos en los que tiene sentido el concepto matemático. Analizamos algunos fenómenos relacionados con la función seno al tener en cuenta, como característica principal, la periodicidad. Encontramos muchas situaciones de la vida real que tienen esta característica, y que se pueden modelar con la función trigonométrica seno. Identificamos fenómenos como las olas del mar, el radio terrestre, el osciloscopio, el motor simple de corriente directa, el generador de turbina de vapor y las señales de audio y radio. Con la revisión anterior, identificamos seis categorías en las que podemos organizar los fenómenos. Estas categorías son vibraciones y ondas, electromagnetismo, mediciones, magnetismo, movimiento armónico simple y corriente alterna. Cada una de estas categorías comparte una estructura matemática. Por ejemplo, en la categoría de las vibraciones y las ondas, es fundamental tener en cuenta la amplitud, el periodo, la frecuencia, el tiempo, la distancia y la longitud de onda presente en la ecuación $y = A \operatorname{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right)\right]$.

De igual manera, observamos que los fenómenos de la formación de ondas de las olas del mar, las señales de audio y radio transmitidas por cables eléctricos, y el sonido formado por instrumentos musicales como la guitarra —todos fenómenos que se inscriben en la categoría de vibraciones y ondas— son fenómenos de contexto profesional o laboral. Estos contextos, pertenecen a la clasificación presentada en el marco PISA 2012 que considera que los fenómenos se pueden clasificar de acuerdo con aquellos aspectos del mundo del individuo en el cual se encuentran situados los problemas (Ministerio de Cultura y Deporte, 2013, p. 102). Los fenómenos que se pueden modelar con la función seno y que trabajamos en este documento se encuentran en los contextos científico, profesional, personal y social.

1.2. Expectativas y limitaciones de aprendizaje

Con esta unidad didáctica, buscamos contribuir a expectativas de diferente nivel relacionadas con la dimensión cognitiva y con la dimensión afectiva. Para la dimensión cognitiva, partimos de las consideraciones que realizamos en cuanto a la estructura conceptual, los sistemas de representación y el análisis de las situaciones o fenómenos que le dan sentido al concepto matemático. Para la dimensión afectiva, tenemos en cuenta lo anterior, pero también nuestro interés por fomentar en los estudiantes la motivación (González y Gómez, 2016, p. 43).

Expectativas de nivel superior

Con la unidad didáctica, buscamos contribuir, en mayor medida, a que los estudiantes desarrollen los procesos matemáticos de formular y emplear (Ministerio de Cultura y Deporte, 2013, p. 13). Específicamente, buscamos que “realicen una traducción de un escenario del mundo real al área de las matemáticas, dotando al problema del mundo real de una estructura, representación y especificidad matemáticas” (p. 13) y a “la utilización y el cambio entre distintas representaciones en el proceso de búsqueda de soluciones [y en este caso en la búsqueda de comprensión sobre los

fenómenos estudiados]” (p. 14). Contribuir al desarrollo de estos procesos va de la mano de contribuir al desarrollo de capacidades matemáticas fundamentales (p. 15). En esta propuesta, pretendemos contribuir a la comunicación, la matematización, la representación, el razonamiento y la argumentación, el diseño de estrategias para resolver problemas, la utilización de un lenguaje formal y la utilización de herramientas.

Objetivos de aprendizaje

A continuación, presentamos los dos objetivos que orientaron la realización de esta propuesta.

Objetivo 1. Identificar y representar fenómenos periódicos del mundo real mediante la gráfica de la función seno.

Objetivo 2. Modelar fenómenos periódicos mediante la función trigonométrica seno a partir de la identificación de su amplitud, periodo y desfase.

Caracterización de los objetivos de aprendizaje

Para explicar con mayor detalle cada una de las frases con las que hemos resumido los objetivos de aprendizaje, planteamos una serie de criterios de logro con los que logramos caracterizar y, por tanto, explicar el alcance de cada objetivo. Para el planteamiento de los criterios de logro seguimos el procedimiento descrito en Gómez y Romero (2017, p. 9). Cada criterio de logro determina una evidencia de la progresión que tienen los estudiantes en el logro de los objetivos de aprendizaje. Con base en la redacción de criterios de logro, concluimos que con el objetivo 1 pretendemos que el estudiante tome datos relevantes y necesarios para resolver el problema, reconozca que el problema puede resolverse por un sistema gráfico o de tabulación, traslade puntos ubicados en la circunferencia al plano cartesiano, relacione la parte positiva y negativa del eje Y con la circunferencia, relacione puntos máximos y mínimos de la gráfica con los datos de la tarea, reconozca el dominio y el rango de la función, realice la gráfica de la función seno con base en un fenómeno periódico, ubique los parámetros de la función seno, determine la amplitud en una gráfica de la función seno, determine el periodo de una gráfica de la función seno, realice una tabla a partir de los datos del problema, verifique los resultados, relacione la ecuación de la función seno, y reconozca el comportamiento de la gráfica de la función seno.

Con el objetivo 2, esperamos que el estudiante tome datos relevantes y necesarios para la solución del problema, reconozca que el problema puede resolverse haciendo uso de un sistema de representación gráfico o tabular, calcule el valor de la amplitud, el periodo y el desfase por cualquiera de los dos sistemas de representación, plantee la ecuación que describa el movimiento periódico, verifique la consistencia de la ecuación, y relacione la ecuación con el fenómeno estudiado.

Grafos de criterios de logro de los objetivos de aprendizaje

Los grafos de criterios de logro son esquemas que resultan al prever diferentes estrategias que una persona puede llegar a utilizar cuando desarrolla tareas que dan cuenta del alcance del objetivo planteado. Estos grafos se convierten en una guía clave para el diseño de las tareas de aprendizaje que describimos en la segunda parte de esta cartilla. Cada estrategia (camino en el grafo) está conformada por criterios de logro numerados de tal manera que el primer número indica el

objetivo y el número después del punto indica el criterio de logro al que hace referencia. En la figura 3, presentamos el grafo de criterios de logro del objetivo 1.

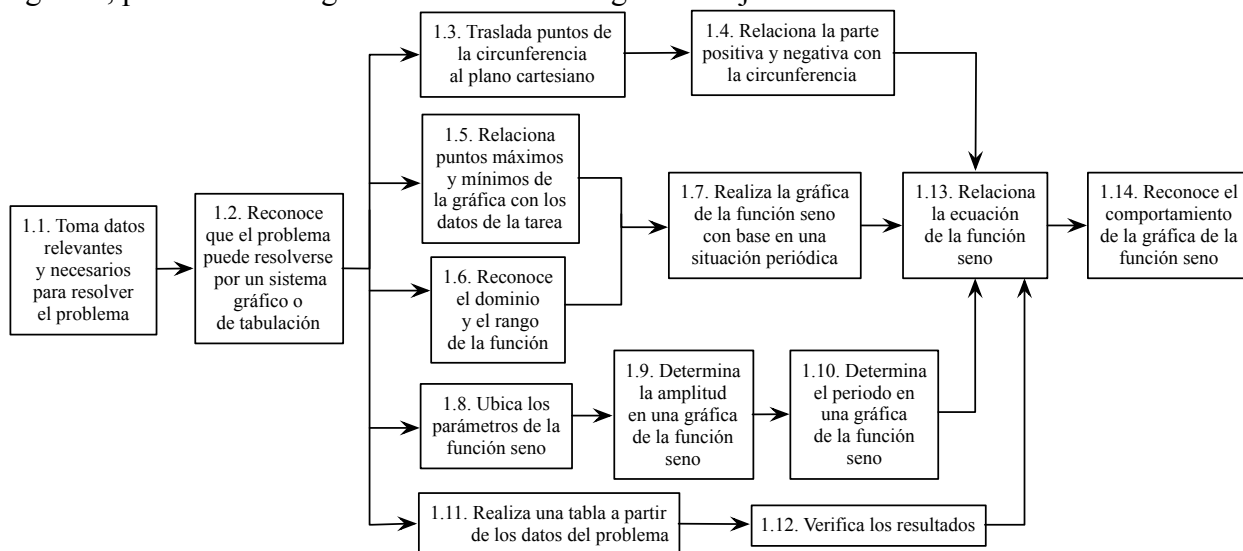


Figura 3. Grafo de criterios de logro para el objetivo 1

Los dos primeros criterios están relacionados con la toma de datos e interpretación de la información. Seguidamente, el grafo indica las posibles estrategias que los estudiantes pueden utilizar en el desarrollo de tareas que dan cuenta del alcance del objetivo. Se tienen en cuenta tres estrategias. La primera consiste en realizar la gráfica de la función seno con base en el círculo unitario y la circunferencia. La segunda se basa en la recolección y tabulación de datos obtenidos por un simulador. La tercera se basa en el desarrollo de la razón trigonométrica seno.

En la Figura 4, presentamos el grafo de criterios de logro para el objetivo 2.

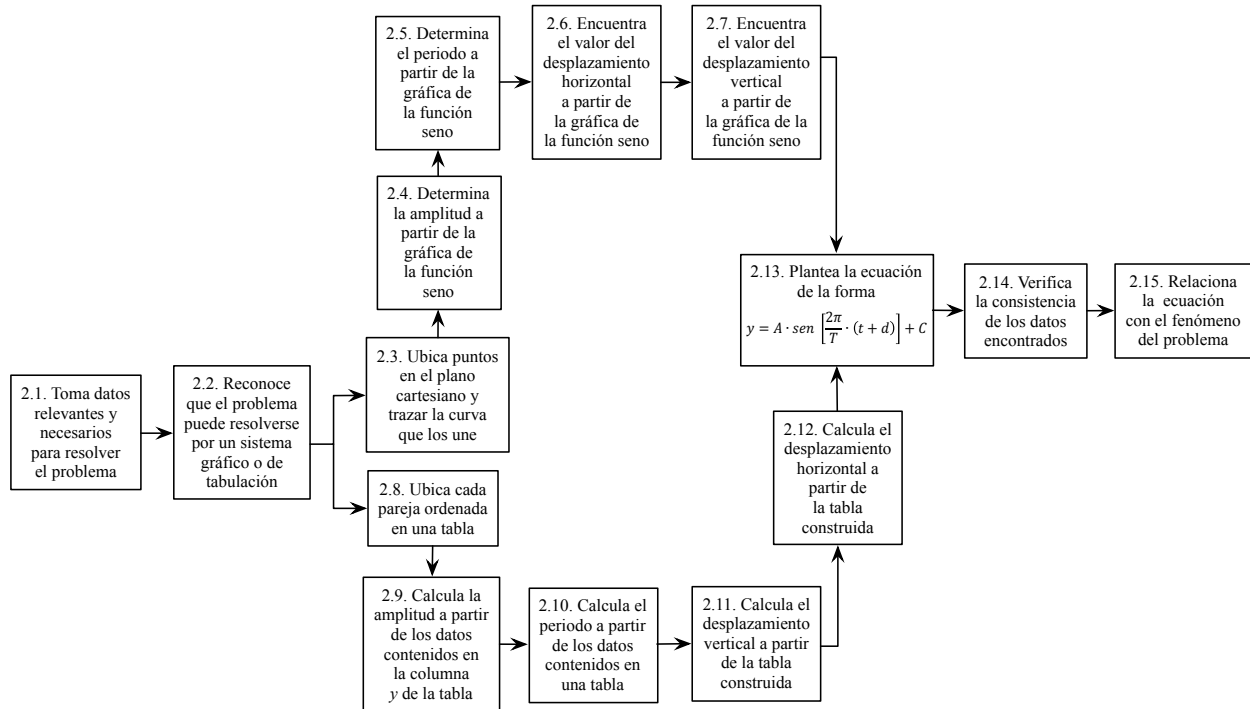


Figura 4. Grafo de criterios de logro para el objetivo 2

Los dos primeros criterios están relacionados con la toma de datos e interpretación de la información. Seguidamente, el grafo indica las posibles estrategias que los estudiantes pueden utilizar en el desarrollo de la tarea, con base en la gráfica de la función seno mediante los parámetros de amplitud, periodo, desfase y la modelación de un fenómeno periódico. Las estrategias consisten en plantear dicha ecuación en un sistema de representación tabular o gráfico.

Expectativas afectivas

En la tabla 1, describimos las expectativas afectivas a las que buscamos contribuir.

Tabla 1

Expectativas afectivas

EA	Descripción
1	Desarrolla curiosidad por descubrir cómo se realiza la gráfica de la función seno
2	Valora positivamente la precisión y utilidad de diferentes elementos geométricos para graficar la función seno
3	Desarrolla una actitud favorable al identificar características de la gráfica de la función seno tales como la amplitud, el periodo y la frecuencia

Nota. EA: expectativa afectiva.

Limitaciones de aprendizaje

Las limitaciones de aprendizaje que presentan los estudiantes están asociadas a las dificultades y errores en los que ellos puedan incurrir. Los errores se presentan cuando los estudiantes ejecutan procedimientos inadecuados o cuando ejecutan procedimientos adecuados de manera incorrecta (González y Gómez, 2017, p. 24). A continuación, presentamos los errores y dificultades que pueden presentarse con mayor frecuencia. Por ejemplo, un error en el que algunos estudiantes incurrir es hallar incorrectamente las coordenadas del plano cartesiano de un punto que estaba sobre un círculo. Este error obedece a la dificultad para construir y utilizar el plano cartesiano. El listado completo de dificultades y errores se encuentra en el anexo 2. En la tabla 2, resumimos el listado de dificultades y errores más relevantes.

Tabla 2

Dificultades y errores

E	Descripción
D2. Dificultad para construir y utilizar el plano cartesiano	
4	Ubicar incorrectamente las coordenadas sobre los ejes X , Y , de un punto que esta sobre el círculo en el plano cartesiano
9	Ubicar incorrectamente puntos o parejas ordenadas sobre el plano cartesiano
D4. Dificultad para reconocer los parámetros de la función seno	
16	Señalar incorrectamente los puntos máximos y mínimos de la función seno
17	Intercambiar los parámetros de la amplitud, periodo y desfase de la función seno
D6. Dificultad para modelar situaciones cotidianas relacionadas con la función seno	
29	Despejar de forma incorrecta una variable
39	Obtener datos incorrectos o incompletos para hallar la amplitud
40	Obtener datos incorrectos o incompletos de la gráfica de la función seno
41	Obtener datos incorrectos o incompletos de la ecuación de la función seno
42	Obtener datos incorrectos o incompletos de una tabla
44	Obtener datos incorrectos o incompletos en la ubicación de parejas ordenadas
D7. Dificultad para graficar la función seno	
30	Graficar incorrectamente la función seno
D8. Dificultad para ubicar datos en una tabulación	
31	Ubicar de manera incorrecta una pareja ordenada

Nota. E: error, D: dificultad.

1.3. Esquema general de la unidad didáctica

La secuencia de tareas se desarrolla en 6 sesiones de clase de 110 minutos cada una. En primer lugar, se presenta la tarea diagnóstica que diseñamos al tener en cuenta los conocimientos previos que se requieren para afrontar con éxito las tareas que prosiguen. El objetivo es identificar dificultades para brindar las ayudas que sean necesarias. Luego, proponemos las tareas con las que se busca contribuir al logro de cada uno de los objetivos. Para dar cierre a la secuencia de tareas, proponemos una evaluación final. Con este instrumento, pretendemos identificar el impacto de la secuencia de tareas en el aprendizaje de los estudiantes. A continuación, describimos brevemente la secuencia de tareas y su contribución al logro de los objetivos de aprendizaje.

Las tres primeras tareas contribuyen al objetivo 1 y la cuarta tarea contribuye al objetivo 2. En la tabla 3 describimos la secuencia de tareas.

Tabla 3

Descripción de la secuencia de tareas

Sesión	Objetivo	Tarea	Metas	Tiempo
1	1 y 2	Diagnóstica	Evaluar los conocimientos previos relevantes para el desarrollo de las tareas de aprendizaje por medio de tres ejercicios	110 min
2	1	1.1	Con las variables de distancia y tiempo que presenta un sistema masa resorte, los estudiantes realizarán la gráfica de su movimiento periódico	110 min
3	1	1.2	Por medio de la relación plato piñón existente en el mecanismo de funcionamiento de una bicicleta, los estudiantes representarán ese fenómeno por medio de una gráfica sinusoidal	110 min
4	1	1.3	Al trazar el movimiento que describe un péndulo suspendido, los estudiantes realizarán la gráfica que mejor representa este movimiento	110 min
5	2	2.1	Por medio de la lectura tomada por un espirómetro, los estudiantes tendrán que encontrar la ecuación que mejor describe este fenómeno periódico	110 min
6	1,2	Examen Final	Evaluar los conocimientos aprendidos por parte de los estudiantes por medio de dos ejercicios que corresponden a cada uno de los objetivos planteados.	110 min

Nota. T1.1 = Masa-Resorte; T1.2 = Bicicleta; T1.3 = Péndulo; T2.1 = Espirómetro.

2. TAREAS

En este apartado, describimos la tarea diagnóstica y las tareas de aprendizaje que proponemos para el logro de los objetivos.

2.1. Tarea diagnóstica

La tarea diagnóstica incluye preguntas abiertas distribuidas en tres situaciones. Con las dos primeras situaciones, buscamos evaluar el conocimiento de los estudiantes sobre la ubicación de puntos en el plano cartesiano y la identificación de una relación entre dos variables (radio y área). Ellos deben deducir una serie de datos, tabularlos, graficarlos y proponer una fórmula. Con la tercera situación, esperamos evaluar el conocimiento de los estudiantes sobre la traducción de un enunciado verbal a una representación gráfica, el uso de las razones trigonométricas, el planteamiento de una ecuación y la propuesta de una solución.

Requisitos. Los requisitos de la tarea diagnóstica son la elección de una escala adecuada para la ubicación de un conjunto de puntos predeterminados y la ubicación de puntos en el plano cartesiano —a partir de sus coordenadas—; la identificación de variable dependiente e independiente de una función y su relación con los ejes de las abscisas y de las ordenadas; la identificación de elementos de un triángulo rectángulo, para asociarlos con una situación hipotética; y la medición de ángulos con el transportador. También es necesario conocer sobre el número pi y la fórmula del área del círculo.

Metas. Con la tarea, pretendemos que el estudiante identifique la variable dependiente y la variable independiente, utilice el lenguaje simbólico para representar esta relación, represente una situación por medio de un esquema o dibujo e identifique esta situación con alguna razón trigonométrica que le permita darle una solución. Para esto último, el estudiante debe plantear y solucionar una ecuación.

Pretendemos que el estudiante represente una relación en el plano cartesiano, utilice el lenguaje simbólico para representar esta relación, represente una situación por medio de un esquema o dibujo e identifique esta situación con alguna razón trigonométrica que le permita darle una solución. Para esto último, el estudiante debe plantear y solucionar una ecuación.

Formulación

1. Ubica los siguientes puntos en un plano cartesiano.

$A(-90, 0)$

$B(-30, 0.75)$

$C(0, 1)$

$D(60, 0.5)$

$E(30, -0.35)$

$F(0, -1)$

- a. Une, con un segmento, todos los puntos en orden alfabético y mide, con el uso del transportador, el ángulo que hay entre cada uno de los segmentos trazados.

- b. Colorea con amarillo la figura que se forma en el primer cuadrante, con azul la figura que se forma en el segundo cuadrante, con rojo la figura que se forma en el tercer cuadrante y con verde la figura que se forma en el cuarto cuadrante.
2. El diámetro de una pupila tiene aproximadamente 4,5 mm. Cuando la pupila se dilata, puede llegar, en los casos más extremos, hasta los 9 mm de diámetro.
- a. Determina varios radios posibles y calcula, para cada caso, el área que le corresponde.
- b. Determina el área de la pupila para los casos en que el radio sea el que se especifica en la primera columna de la siguiente tabla. Completa la tabla.

Radio (mm)	Área (mm ²)
4,5	
6,0	
7,5	
9,0	

- c. Realiza una gráfica en la que se relacione el área de la pupila con su respectivo radio (puedes utilizar los datos de la tabla anterior).
- ¿Cuál variable (radio o área) ubicas en el eje horizontal o de las abscisas?
- ¿Cuál variable (radio o área) ubicas en el eje vertical o de las ordenadas?
- d. Escribe una fórmula con la que se pueda calcular el área de la pupila a partir de su radio respectivo.
- e. Dibuja una pupila (amplíala al quintuple para poderla ver mejor).
- f. Calcula la longitud de las circunferencias de las pupilas en los casos descritos en la tabla del punto b.
- g. Compara la mayor área que puede tener una pupila con la del iris.
3. La distancia entre 2 edificios es 60 m. Desde la azotea del edificio más bajo, cuya altura es 40 m, se observa la azotea del otro edificio con un ángulo de elevación de 40°.
- a. Realiza un esquema gráfico de la descripción anterior.
- b. Halla la altura del edificio más alto.

Conceptos y procedimientos. En esta tarea, los estudiantes abordan los conceptos de parejas ordenadas, dominio, rango y ángulo. También ubican pares ordenados en un plano cartesiano, ta-

bulan y grafican. Además, los estudiantes deben realizar el cálculo de una distancia mediante una razón trigonométrica.

Sistemas de representación. Pretendemos que los estudiantes utilicen los sistemas de representación gráfico, tabular y simbólico.

Contextos. Ubicamos la primera situación en un contexto matemático, la segunda en un contexto científico y la tercera en un contexto social.

Materiales y/o recursos. Los materiales y recursos necesarios para esta tarea son el material imprimible (ver anexo 6), hojas milimetradas, regla, transportador y lápiz.

Agrupamiento e interacción. La tarea debe hacerse individualmente.

Temporalidad. La tarea se debe desarrollar en un tiempo de 110 minutos.

Errores en los que puede incurrir el estudiante y ayudas. Enunciamos los errores y dificultades en los que los estudiantes pueden incurrir, durante la implementación de la tarea diagnóstica, en el anexo 2. Los estudiantes, al realizar gráficas en el plano cartesiano, pueden dividir asimétricamente las unidades sobre los ejes. Para ayudarles a superar esta dificultad y otras que se pueden llegar a presentar, proponemos un listado de ayudas que se encuentra en el anexo 3. Si los estudiantes dividen asimétricamente los ejes, se les puede hacer preguntas, como en el plano cartesiano que han realizado, ¿se mantiene la distancia entre las unidades?

Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea. Para el desarrollo de la tarea diagnóstica, sugerimos que el profesor inicie con la entrega de la guía de trabajo y la lectura de los puntos de la tarea diagnóstica. En esta parte, sugerimos que el profesor pregunte a los estudiantes sobre la claridad de los puntos y si alguno de ellos no entiende alguno de los enunciados. Recomendamos al profesor revisar la entrega de todas las tareas y preguntar al final si existió alguna dificultad con el fin de realizar alguna realimentación.

Evaluación. En la tarea diagnóstica evaluamos los conocimientos previos como la ubicación de puntos sobre el plano cartesiano, el concepto de función y trigonométricas.

2.2. Tarea 1.1 Masa-Resorte

En esta tarea, presentamos una situación en la que los estudiantes deben analizar el movimiento periódico que se presenta en un sistema masa-resorte. Para esto, deben obtener los datos de un simulador que tiene resortes, masas, regla y cronómetro; relacionar las variables distancia y tiempo con los ejes coordenados; organizar la información en una tabla; representarla por medio de una gráfica en el plano cartesiano; y analizar la situación con la información que se puede observar en la gráfica.

Requisitos. El estudiante debe reconocer las variables dependiente e independiente de una función y ubicar puntos en el plano cartesiano.

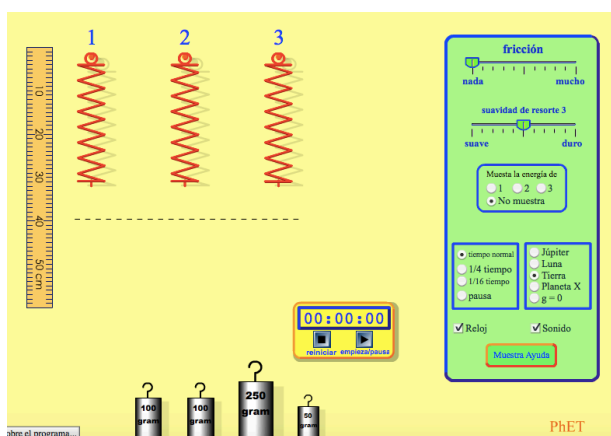
Metas. Pretendemos que los estudiantes puedan obtener correctamente los datos representativos de una situación dada, organicen estos datos en una tabla, relacionen las variables distancia y

tiempo con los ejes de coordenadas y luego los representen por medio de una gráfica en el plano cartesiano.

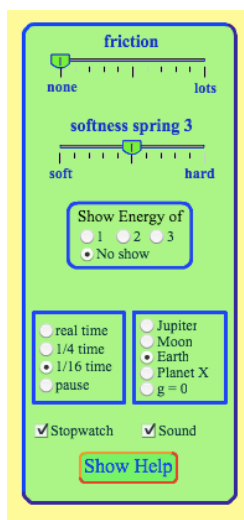
Formulación

Dentro de los fenómenos físicos que se pueden describir con un movimiento armónico simple se encuentran las oscilaciones de una masa que cuelga de un resorte, como se muestra en el simulador. Para el desarrollo de la actividad se deben seguir los siguientes pasos.

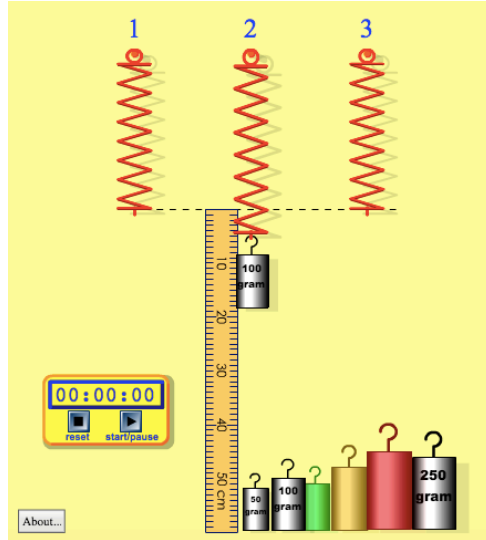
1. Formar grupos de tres estudiantes.
2. Ingresar al enlace <http://bit.ly/2Ljhe7s> (simulador de sistema masa - resorte). El simulador consiste en un sistema que tiene resortes, unas masas y una regla, como mostramos en la figura.



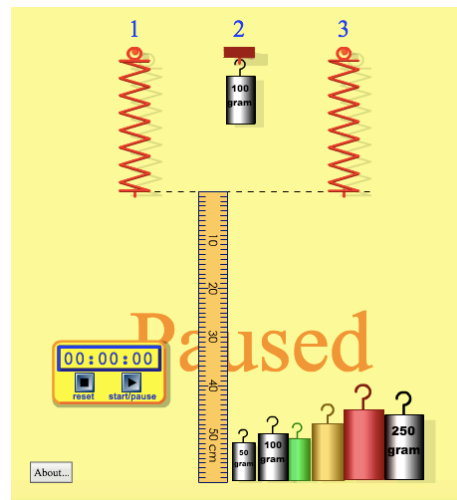
3. Practicar un tiempo para que se familiarice con las herramientas suministradas.
4. El menú de la parte derecha se debe colocar con las opciones que muestra la figura.



5. Se debe tener en cuenta que la regla y la línea de referencia se deben ubicar junto al resorte, como mostramos en la figura.



6. Para que el funcionamiento entre el resorte y el cronómetro sea sincronizado, se debe poner el sistema en pausa, como mostramos en la figura. Además, en la figura se muestra el punto de referencia del resorte; es decir, el punto donde debe iniciar el resorte para poder tomar los datos.



7. Se quiere analizar la distancia que recorre una masa con la regla del software y el tiempo que se demora en cada oscilación. Para esto se deben tomar los datos con el simulador. Deben tomar 15 datos.

8. ¿De qué manera podrían organizar los datos para realizar un análisis de esta situación? Justificar.

9. Organizar los 15 datos en una tabla.

10. ¿Cómo saber en qué instante el resorte tiene un largo de 10 cm cuando se cuelga una masa de 20 gr?

11. ¿Con una masa de 20 gr qué largo tendrá el resorte en un tiempo de 2 segundos?
12. ¿Cuál es la distancia más larga que recorre esta masa? ¿Cuál es la distancia más pequeña que recorre esta masa?
13. Ubicar los puntos de la tabla en el plano cartesiano.
14. De acuerdo al resultado obtenido al ubicar estos puntos en el plano cartesiano, ¿se puede afirmar que este movimiento es periódico? Justificar.
15. Presentar los resultados a los demás grupos, mediante una exposición.

Conceptos y procedimientos. En esta tarea, abordamos los procedimientos y conceptos asociados con parejas ordenadas, plano cartesiano, variable dependiente e independiente, y gráfica de una función seno.

Sistemas de representación. Los sistemas de representación involucrados en la tarea son el tabular, el gráfico y el numérico.

Contextos. Situamos la tarea en un contexto científico.

Materiales y/o recursos. Para el desarrollo de esta tarea, se requiere el material imprimible (ver anexo 6), computador o tableta, simulador, hojas milimetradas y curvígrafo.

Agrupamiento e interacción. Para el desarrollo de esta tarea, los estudiantes deben trabajar en grupos de tres personas con el fin de interactuar para tomar los datos y organizarlos en la tabla de manera correcta. El profesor debe solucionar las inquietudes de los estudiantes (por ejemplo, con el uso del simulador) y motivarlos a desarrollarla. La interacción que se da en esta tarea es entre estudiante y estudiante cuando están trabajando en grupo y luego entre estudiante y profesor, cuando el profesor los orienta en el desarrollo de la tarea.

Temporalidad. El profesor inicia con la presentación la tarea y las indicaciones de la formulación. Luego, los estudiantes conformarán los grupos de trabajo y desarrollarán la tarea. En seguida, contarán con 10 minutos para preparar una pequeña exposición. Por último, presentarán las conclusiones a los demás. El tiempo máximo en el que se desarrollará la tarea es de 110 minutos.

Errores en los que puede incurrir el estudiante y ayudas. Al desarrollar esta tarea, los estudiantes pueden incurrir en errores como obtener los datos incorrectos del simulador, confundir los ejes de las variables dependiente e independiente, y organizar de manera incorrecta los datos en la tabla. El listado completo de los errores se encuentra en el anexo 2. Cuando el estudiante incurra en alguno de los errores descritos, el profesor puede formularle una serie de preguntas e indicaciones que le sirven de ayudas para desarrollar correctamente la tarea. Por ejemplo, si el estudiante incurre en el error de organizar de manera incorrecta los datos en la tabla, el profesor le pregunta ¿Es el primer dato organizado en la tabla el tiempo y el segundo la distancia? El listado completo de las ayudas se encuentra en el anexo 3.

Grafo de criterios de logro de la tarea. En la figura 5, presentamos el grafo de criterios de logro del objetivo 1 en el que resaltamos los criterios de logro que se activan con esta tarea. Los primeros criterios de logro están asociados a la toma de los datos y a la elección del sistema de representación que se utiliza para desarrollar la tarea. Luego, encontramos criterios de logro asociados

a la organización de los datos en una tabla y, por último, observamos criterios de logro asociados al reconocimiento del comportamiento periódico de la situación.

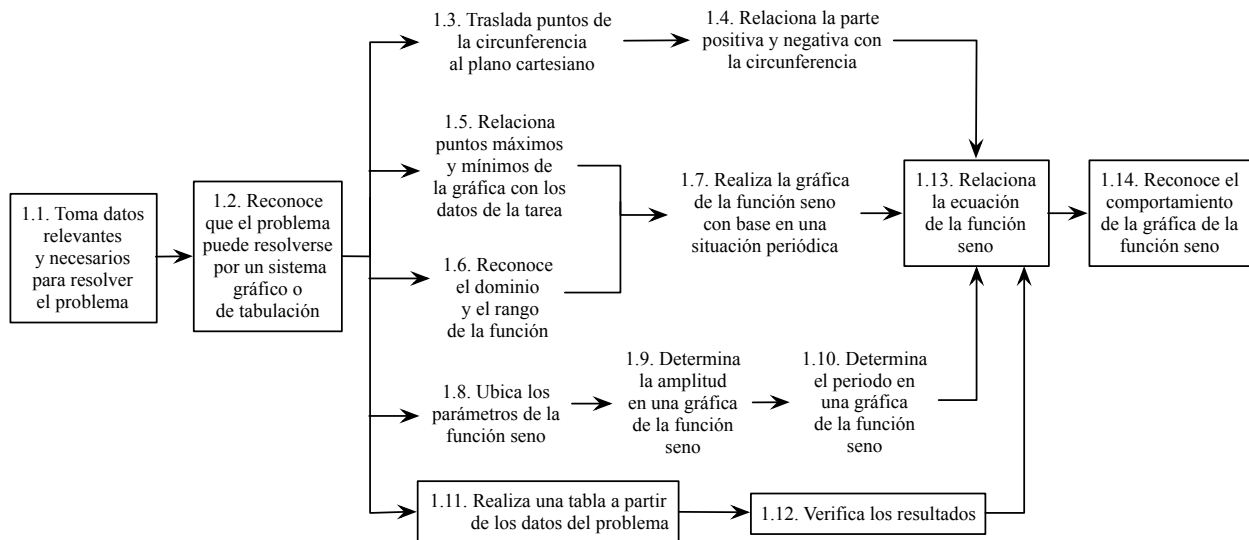


Figura 5. Grafo de criterios de logro de la tarea masa - resorte

Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea. Inicialmente el profesor debe verificar que los estudiantes puedan manipular correctamente el simulador y comprenden qué datos deben obtener. Luego, es importante que el profesor verifique que los estudiantes comprenden el objetivo y las metas de la tarea para que puedan desarrollarla correctamente. Por último, el profesor debe motivar a los estudiantes a trabajar en grupo y a que ayuden a los demás compañeros para el desarrollo de la tarea.

Evaluación. Con esta tarea, evaluamos que el estudiante pueda obtener correctamente los datos del simulador, los organice en una tabla, pueda representarlos por medio de una gráfica en el plano cartesiano, analice la gráfica obtenida y resalte las características de la situación a partir de esta representación gráfica.

2.3. Tarea 1.2 Bicicleta

Buscamos que el estudiante logre graficar el movimiento periódico del giro de la rueda trasera de una bicicleta de cambios. Para esto, los estudiantes deben medir los radios de los platos y los piñones. Ellos analizarán el desempeño de la bicicleta en las diferentes combinaciones de platos y piñones mediante la gráfica de la función seno.

Los estudiantes deberán representar el movimiento periódico de la rueda trasera de una bicicleta con cambios al dar un giro de 360° , con base en el movimiento de cada uno de los 6 piñones ajustados a un solo plato del pedal. Cada grupo debe realizar la tarea con un plato diferente y representar los resultados obtenidos sobre el plano cartesiano. Para poder describir el fenómeno, los estudiantes deben hacer uso de la traslación y proyección de puntos al tener como referencia los dientes de cada piñón. Cada grupo de estudiantes, debe realizar las 6 representaciones gráfi-

cas posibles, con el fin de señalar los cambios que se presentan en el desempeño de cada uno de los piñones.

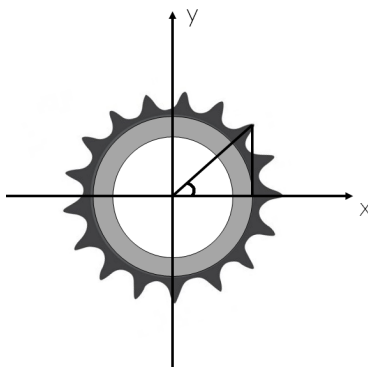
Requisitos. El estudiante debe proyectar puntos situados sobre una circunferencia en el plano cartesiano y trazar rectas paralelas y perpendiculares.

Metas. Pretendemos que el estudiante utilice las medidas de cada uno de los piñones, como el radio y el diámetro, para representar la periodicidad del movimiento al realizar proyecciones en el plano cartesiano por medio de una gráfica.

Formulación

Le proponemos analizar el movimiento de la rueda trasera de una bicicleta de cambios. Para esto, se deben seguir una serie de pasos que se describen a continuación.

1. Colocar marcas en la rueda trasera y en cada uno de los piñones. Hacer estas marcas con un lápiz de color para poder referenciar el giro completo de la rueda en relación con cada uno de los piñones.
2. Representar, en las hojas milimetradas, cada uno de los piñones (un piñón por hoja). Para esto, se debe tomar medida del radio de cada piñón.
3. Indicar la posición de los dientes de cada piñón con el transportador.



4. Dibujar un plano cartesiano y representar los ángulos de las divisiones del piñón sobre el eje x y la altura de cada diente sobre el eje y . La medida de los ángulos se debe escribir en grados.
5. Trazar la gráfica.
6. Comparar las gráficas, y destacar sus diferencias y semejanzas.
7. Analizar el comportamiento, la periodicidad de este movimiento para cada uno de los piñones y su desempeño al girar la rueda 360° .

Conceptos y procedimientos. En esta tarea, abordamos los procedimientos y conceptos asociados con el plano cartesiano, la traslación de puntos, rectas paralelas y perpendiculares, manipulación de instrumentos de medida y gráfica de una función.

Sistemas de representación. Los sistemas de representación involucrados son el numérico y el gráfico.

Contextos. La tarea está situada en el contexto personal, puesto que está relacionada con una actividad del diario vivir del estudiante que se analiza con base en las propiedades y aplicabilidad de la función seno al realizar una gráfica con base en esta función que permita representar el giro de la rueda trasera de una bicicleta con cambios en la que se debe hacer la relación directa entre el plato, los piñones, y su desempeño.

Materiales y/o recursos. Los estudiantes requieren utilizar la guía de trabajo (ver anexo 6), hoja milimetrada, lápiz, regla, escuadras, transportador, curvígrafo y una bicicleta con cambios por cada grupo.

Agrupamiento e interacción. Los grupos deben estar conformados por cuatro estudiantes. El docente realizará este agrupamiento con base en sus habilidades y destrezas, con el fin de que se puedan colaborar y apoyar mutuamente. La recolección de los datos se realizará mediante la siguiente metodología. Con un representante de cada grupo, se conformará una delegación que se encargará de tomar las medidas de cada uno de los 6 piñones, en presencia del docente para verificar que la toma de las medidas y el registro de los datos sea correcta. Luego, cada uno de los representantes se reúne con su grupo y les comparte la información obtenida. El grupo 1 realizará la tarea con base en la información suministrada por el plato pequeño de los pedales. El grupo 2 se encargará de realizar la tarea con la información del plato mediano y el grupo 3 la realizará con la información dada por el plato grande. Todos los integrantes del grupo deberán participar en el desarrollo de la tarea puesto que se deben presentar seis gráficas.

La presentación de la tarea se llevará a cabo al finalizar la sesión. Los integrantes del grupo pasarán al frente y mostrarán los resultados obtenidos con la tarea. Los tres grupos deberán realizar este proceso con el fin de obtener las conclusiones que permitan relacionar el movimiento periódico de la rueda trasera de la bicicleta con la función seno y su desempeño. El desempeño es la longitud de arco que se genera en el plato cuando la rueda da un giro de 360° .

Comunicación e interacción. Los estudiantes medirán y representarán gráficamente el movimiento de cada uno de los piñones en hojas milimetradas. Sugerimos que los integrantes del grupo distribuyan las responsabilidades con el fin de construir las gráficas correspondientes para cada uno de los piñones. El docente prestará un acompañamiento permanente con el fin de orientar a los estudiantes y utilizar las ayudas presentes en el anexo 3. Estas ayudas permiten desarrollo de la tarea con base en los errores en los que los estudiantes pueden incurrir. El listado completo de errores y dificultades se encuentra en el anexo 2.

Temporalidad. La tarea se desarrollará en diferentes momentos. Primero, el docente dará la indicación de la tarea en un tiempo límite de 15 minutos. Luego, el grupo, usará la regla y la escuadra para proyectar los puntos de los dientes del piñón sobre el plano cartesiano —luego de dibujar el piñón y ubicar los dientes— en un tiempo aproximado de 30 minutos. Después, trazarán la gráfica correspondiente al movimiento de cada piñón, relacionarán el ángulo con la posición del diente y analizarán los datos obtenidos relacionados con las dimensiones de los platos y el movimiento de cada uno de ellos para que la rueda gire 360° . Esta fase se desarrollara en un tiempo

aproximado de 50 minutos. Finalmente, se presentarán los resultados obtenidos de cada uno de los grupos en un tiempo aproximado de 15 minutos. Esta tarea tendrá un tiempo límite de 110 minutos.

Errores en los que puede incurrir el estudiante y ayudas. Al desarrollar esta tarea, los estudiantes pueden incurrir en errores como obtener los datos incorrectos de las medidas de los radios de los piñones. Pueden confundir las rectas paralelas con las perpendiculares o usar inadecuadamente de los instrumentos de medida en la realización de la gráfica. El listado completo de los errores se encuentra en el anexo 2. Cuando el estudiante incurra en alguno de los errores descritos, el profesor puede presentarle una serie de preguntas e indicaciones que le sirven de ayudas para desarrollar correctamente la tarea. Por ejemplo, si el estudiante incurre en el error de confundir rectas paralelas con rectas perpendiculares, el profesor puede realizar la siguiente pregunta: ¿el trazo entre el punto del plano y el punto del diente del piñón es perpendicular al eje y ? El listado completo de las ayudas se encuentra en el anexo 3.

Grafo de criterios de logro de la tarea. En la figura 6, presentamos el grafo de criterios de logro del objetivo 1 en el que resaltamos los criterios de logro que se activan con esta tarea. El listado completo de criterios de logro se encuentra en el anexo 4.

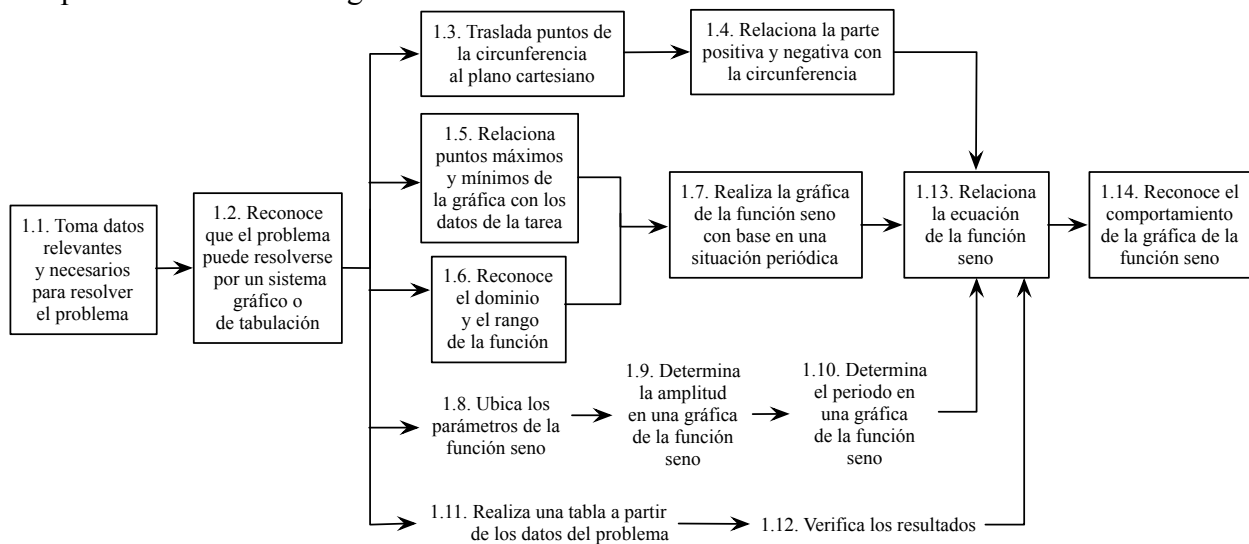


Figura 6. Grafo de criterios de logro de la tarea bicicleta

Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea. Inicialmente, el profesor debe verificar que los estudiantes tengan a mano la bicicleta con cambios y conozcan sus partes. Es importante que el profesor verifique que los estudiantes comprenden el objetivo y las metas de la tarea para que puedan desarrollarla correctamente. Por último, el profesor debe motivar a los estudiantes a trabajar en grupo, en el que cada estudiante va a tener un rol.

Evaluación. Con esta tarea, pretendemos que el estudiante pueda graficar el movimiento periódico de la rueda trasera de unas bicicletas mediante traslación de puntos, rectas paralelas y perpen-

diculares. Además, el profesor podrá evaluar la manera en que los estudiantes utilizan instrumentos de medida como la regla y el transportador.

2.4. Tarea 1.3 Péndulo

Con la tarea Péndulo, buscamos que el estudiante grafique el movimiento periódico de dos péndulos de diferente longitud al utilizar distancias, ángulos simétricos y equidistantes, triángulos rectángulos, y el cálculo de la razón trigonométrica seno para diferentes ángulos.

Requisitos. Para esta tarea, se requiere que el estudiante esté en la capacidad de hallar razones trigonométricas y conozca los conceptos básicos del movimiento de un péndulo con base en su longitud y el ángulo que se forma con el punto de equilibrio.

Metas. Buscamos que los estudiantes representen un fenómeno periódico mediante la gráfica de la función seno e identifiquen la relación que tienen los diferentes sistemas de representación al obtener los datos relevantes de una situación dada y pasar de un sistema tabular a un sistema gráfico. Con esta tarea, pretendemos que los estudiantes utilicen la razón trigonométrica del seno para hallar valores que se puedan ubicar sobre el plano cartesiano y trazar la gráfica de la función seno.

Formulación

Para analizar el movimiento de un péndulo, proponemos seguir los pasos que se describen a continuación.

1. Construir un péndulo con una cuerda que mida 20 cm y otro con una cuerda que mida 30 cm. Usen los materiales que trajeron para la clase.
2. Ubicar el péndulo de tal manera que el ángulo inicial del movimiento sea de 50° respecto al eje de simetría o punto de equilibrio. Se puede dibujar sobre una hoja un esquema que permita visualizar el movimiento del péndulo al representar las medidas de los ángulos con relación a su longitud.
3. Referenciar 10 ángulos sobre el eje de simetría para cada péndulo mediante el esquema anterior.
4. Representar sobre hojas milimetradas los resultados obtenidos.
5. Observar el movimiento que se genera por la gravedad, los cambios de dirección, la trayectoria, los puntos de retorno y la variación de la velocidad, como lo muestra la figura. Hallar los valores y representar el valor correspondiente del seno por medio de la razón trigonométrica seno, la longitud del péndulo y la distancia perpendicular entre la masa suspendida y el eje de simetría. Se debe analizar el movimiento pendular mediante reglas y escuadras para determinar el valor de los catetos opuestos, y utilizar la razón trigonométrica correspondiente para hallar el seno de dicho ángulo. Esto se debe hacer para cada uno de los péndulos. Los valores del seno se deben registrar en la tabla de la función seno.

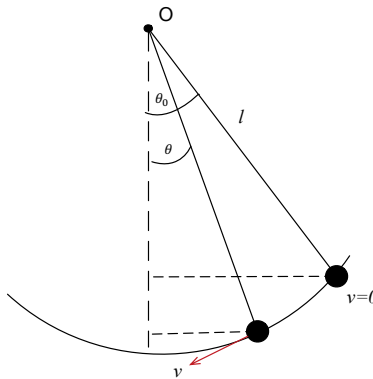


Tabla de la función seno

Péndulo 20 cm		Péndulo 30 cm	
Ángulo x	$\text{Seno } x = (C.Op/Hip)$	Ángulo x	$\text{Seno } x = (C.Op/Hip)$
x_1		x_1	
x_2		x_2	
x_3		x_3	
x_4		x_4	
x_5		x_5	
x_6		x_6	
x_7		x_7	
x_8		x_8	
x_9		x_9	
x_{10}		x_{10}	

6. Con los datos obtenidos, se debe completar la tabla de la función seno.
7. Ubicar estas parejas ordenadas sobre el plano cartesiano y realizar las gráficas correspondientes a cada uno de los péndulos.
8. Determinar los parámetros de amplitud, periodo y desfase y relacionarlos con la ecuación de la función seno, con el fin de analizar su comportamiento.

Conceptos y procedimientos. En esta tarea, se aplican conceptos y procedimientos referentes a representaciones de funciones trigonométricas, ángulos simétricos y equidistantes, triángulos rectángulos y cálculo de la razón trigonométrica seno.

Sistemas de representación. Los sistemas de representación que se activan son el numérico, el tabular y el gráfico.

Contextos. La tarea está asociada a un contexto científico-matemático.

Materiales y recursos. Los recursos que se requieren para el desarrollo de esta tarea son guía de trabajo (ver anexo 6), hojas milimetradas, lápiz, regla, escuadra, transportador, curvígrafo, cuerda y masa (una tuerca de hierro).

Agrupamiento. El profesor comenta a los estudiantes el objetivo al cual se está contribuyendo con el desarrollo de la tarea. Los estudiantes forman grupos de tres personas para desarrollar la tarea de aprendizaje. Cada estudiante ejerce un rol diferente en la toma de datos, la representación tabular y la representación gráfica. Todos los grupos deben realizar el cálculo de razones trigonométricas (seno), y el manejo de las hojas milimetradas, escuadras y curvígrafo para graficar funciones trigonométricas. El docente organizará este agrupamiento con base en las habilidades y destrezas de los estudiantes, con el fin de que se puedan colaborar y apoyar mutuamente. El docente prestará un acompañamiento permanente, con el fin de orientar a los estudiantes mediante las ayudas (anexo 3) a partir de los errores en los que los estudiantes puedan incurrir.

Temporalidad. La tarea se desarrollará en diferentes momentos. Primero, el profesor dará la instrucción de la tarea para que el grupo de estudiantes construya los péndulos con las medidas indicadas. Luego los estudiantes usarán las reglas y las escuadras para calcular las distancias perpendiculares entre la masa y el eje de simetría, al tomar como referencia 10 ángulos simétricos y equidistantes para cada uno de los péndulos. Hallarán el seno de cada uno de los ángulos para completar la tabla. Ubicarán cada una de las parejas ordenadas sobre el plano cartesiano y finalmente, trazarán la gráfica correspondiente para relacionarla con la gráfica de la función seno. Esta tarea tendrá un tiempo límite de 110 minutos.

Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea. El profesor debe hacer la lectura de la formulación, recordar el uso de reglas y escuadras para la obtención de ángulos, y explicar la forma para determinar los valores correspondientes al seno del ángulo. El profesor presentará al grupo los valores de ángulos notables para la función seno. Los estudiantes utilizarán los recursos proporcionados para registrar valores en forma tabular y representarlos gráficamente. Esta información se presenta al grupo en general y se explica lo que se representa.

Grafo de criterios de logro. En la figura 7, presentamos el grafo de la tarea. En este grafo, se inicia con la toma de datos y con la determinación del sistema de representación que se utilizará. Luego, se determinan los parámetros de la función y se construye la ecuación de la función seno.

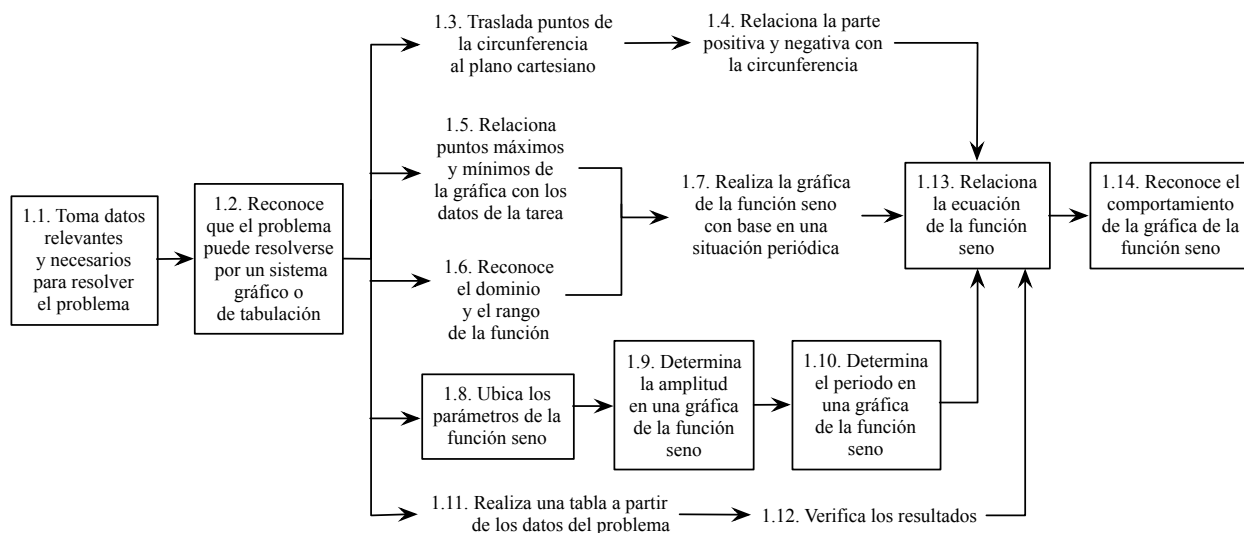


Figura 7. Grafo de criterios de logro de la tarea Péndulo

Errores en los que pueden incurrir los estudiantes. En la tarea, los estudiantes pueden incurrir en errores que no permitan la solución correcta de la tarea. Los estudiantes pueden obtener datos incorrectos o incompletos, señalar de manera incorrecta los parámetros de la función seno, o despejar de manera incorrecta una variable. El listado completo de errores se encuentra en el anexo 2.

Actuación del profesor. El profesor debe explicar la forma en la que se utilizan los instrumentos requeridos para la solución de la tarea. Él debe observar el desarrollo de la tarea por grupos y resolver inquietudes o dar sugerencias a los estudiantes cuando se presenten dificultades. Para superar los inconvenientes presentados en el desarrollo de la tarea, cuenta con un listado de ayudas del anexo 3.

Evaluación. El profesor debe realizar un seguimiento a los grupos de trabajo y registrar las actuaciones de los estudiantes durante la implementación de la tarea. Él debe determinar los errores en que incurrieron los estudiantes, la forma en que se solucionó la tarea y definir el aporte al objetivo.

2.5. Tarea 2.1 Espirómetro

Con esta tarea, pretendemos que el estudiante encuentre la ecuación de la función seno que modela una situación de la vida real. Para tal propósito, los estudiantes pueden elegir entre la organización de datos en una tabla, para calcular los parámetros, y la representación gráfica en el plano cartesiano. A partir de estos cálculos o de la gráfica, los estudiantes identifican los parámetros y plantean la ecuación.

Requisitos. Los estudiantes deben saber representar en forma tabular y gráfica los datos suministrados en la formulación de la tarea. Adicionalmente, deben saber graficar la función seno estándar.

Metas. Esperamos que el estudiante, al desarrollar la tarea, logre observar y analizar una situación de la vida real para determinar si es un fenómeno periódico. Queremos que los estudiantes organicen los datos en una tabla, determinen la amplitud con los valores máximos y mínimos, determinen el periodo con la frecuencia de las repeticiones de los datos, y encuentren el desfase con el valor promedio de los datos. Pretendemos que los estudiantes presenten los datos en una gráfica sobre el plano cartesiano y relacionen con esta gráfica los datos de amplitud, periodo y desfase que han encontrado con antelación.

Formulación

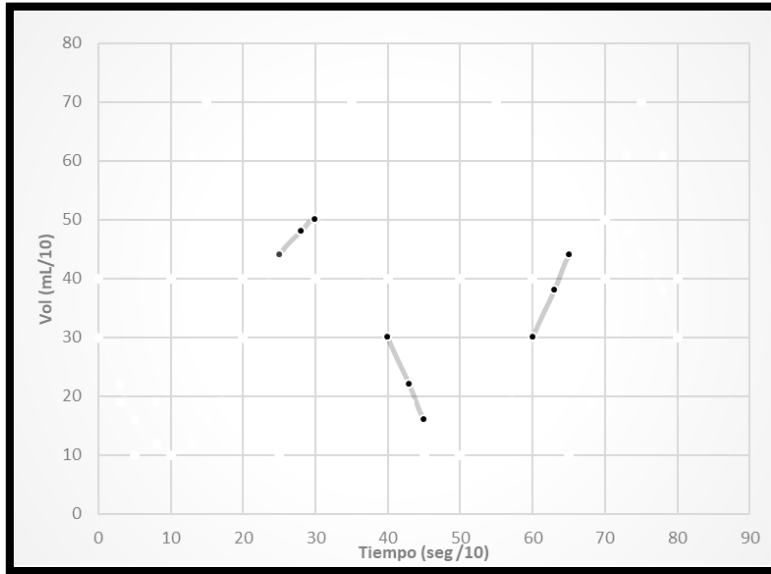
Un espirómetro es el aparato que mide el volumen y tasa del flujo del aire que respira una persona en cualquier momento. A continuación, mostramos los datos de parejas ordenadas de dos situaciones distintas en las que el valor de la izquierda corresponde al tiempo medido en segundos y el valor de la derecha corresponde al volumen de aire en los pulmones medido en mililitros. El primer conjunto de datos corresponde a una persona cuando está en reposo (Datos 1) y el segundo conjunto de datos corresponde a la misma persona cuando está en actividad física (Datos 2).

$Datos\ 1 = \{ (0,30) \quad (3,22) \quad (5,16) \quad (8,12) \quad (10,10) \quad (13,12) \quad (15,16) \quad (18,22)$
 $(20,30) \quad (23,38) \quad (25,44) \quad (28,48) \quad (30,50) \quad (33,48) \quad (35,44) \quad (38,38)$
 $(40,30) \quad (43,22) \quad (45,16) \quad (48,12) \quad (50,10) \quad (53,12) \quad (55,16) \quad (58,22)$
 $(60,30) \quad (63,38) \quad (65,44) \quad (68,48) \quad (70,50) \quad (73,48) \quad (75,44) \quad (78,38)$
 $(80,30)\}$

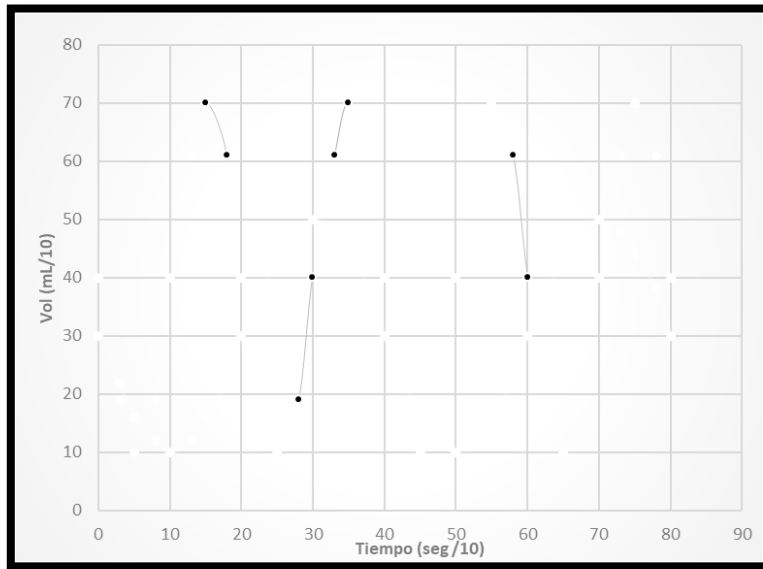
$Datos\ 2 = \{ (0,40) \quad (3,19) \quad (5,10) \quad (8,19) \quad (10,40) \quad (13,61) \quad (15,70) \quad (18,61)$
 $(20,40) \quad (23,19) \quad (25,10) \quad (28,19) \quad (30,40) \quad (33,61) \quad (35,70) \quad (38,61)$
 $(40,40) \quad (43,19) \quad (45,10) \quad (48,19) \quad (50,40) \quad (53,61) \quad (55,70) \quad (58,61)$
 $(60,40) \quad (63,19) \quad (65,10) \quad (68,19) \quad (70,40) \quad (73,61) \quad (75,70) \quad (78,61)$
 $(80,40)\}$

Antes de responder las siguientes preguntas, escoja una de las dos formas de solución que se encuentran a continuación.

Lado A
Situación en reposo



Situación en actividad física



Lado B

Situación en reposo

Tiempo (Seg/10)	Volumen (mL/10)
0	30
	16
18	
	38
35	44
	10
	12
58	
	50
78	

Situación en actividad física

Tiempo (Seg/10)	Volumen (mL/10)
	19
18	
	25
	61
50	
	70
	73
	61

1. Identifique los momentos en que la persona contiene el mayor y menor volumen de aire en sus pulmones. Llame a este valor amplitud.
2. Determine el momento (tiempo) en que la persona contiene el mayor volumen de aire en sus pulmones e identifique en qué momento vuelve a ocurrir dicho registro. Calcule el tiempo transcurrido entre esos dos registros. Llame a este valor periodo.
3. Identifique los tiempos con el mayor y menor volumen de aire. ¿Qué valor se ubica entre el mayor y el menor? Llame a este valor desfase vertical.
4. Identifique el valor de volumen que vuelve a repetirse al valor del inicio. Llame a este valor desfase horizontal.

Organice los valores hallados en la siguiente tabla. Cada uno de los valores se simboliza con una letra.

Primer conjunto de datos		
Parámetro	Símbolo	Valor encontrado
Amplitud	A	
Periodo	T	
Desfase vertical	C	
Desfase horizontal	d	
Tiempo	t	
Volumen de aire en mililitros	y	

Segundo conjunto de datos		
Parámetro	Símbolo	Valor encontrado
Amplitud	A	
Periodo	T	
Desfase vertical	C	
Desfase horizontal	d	
Tiempo	t	
Volumen de aire en mililitros	y	

Los datos hallados se reemplazan en una ecuación que corresponde a un fenómeno periódico como el de la respiración. La ecuación periódica está expresada de la siguiente manera.

$$y = A \cdot \text{sen} \left[\frac{2\pi}{T} \cdot (t + d) \right] + C$$

5. Formule la ecuación para cada conjunto de datos.
6. Utilice la fórmula para hallar dos de los datos de cada uno de los conjuntos anteriores.

Sistemas de representación. Los sistemas de representación que se activan son el gráfico, el tabular y el simbólico. El sistema de representación gráfico está relacionado con el sistema tabular y el simbólico, de tal manera que, los puntos dados permitan modelar con una ecuación trigonométrica el comportamiento periódico de la situación dada.

Contextos. La tarea está asociada a un contexto científico-matemático. El comportamiento natural de la respiración es un fenómeno periódico que consiste en inhalar y exhalar aire a través de los pulmones. Este comportamiento periódico puede representarse en la gráfica de la función seno. Los puntos máximos corresponden a la mayor cantidad de aire que se contiene en los pulmones y los puntos mínimos corresponden a la menor cantidad.

Materiales y recursos. Los estudiantes requieren de curvígrafo para trazar las curvas generadas por los puntos ubicados en los planos cartesianos.

Agrupamiento. Los estudiantes se organizan grupos de cuatro. En cada grupo, dos de los estudiantes se encargan de la situación en que los datos provienen de una persona en estado de reposo y los otros dos se encargan de la situación en la que los datos provienen de una persona en actividad física. Al final, los resultados se comunican dentro del grupo al comparar las ecuaciones obtenidas de las dos situaciones. Por último, el profesor presenta los resultados obtenidos por cada grupo.

Temporalidad. La tarea se desarrolla en las siguientes etapas. Primero, se hará una lectura del enunciado y se expondrán por parte del profesor los materiales que podrán utilizar para desarrollar la tarea. Para ello se dispondrá de 10 minutos. Segundo, los estudiantes dispondrán de 80 minutos para hallar los parámetros de la ecuación de la función seno. Tercero, los estudiantes compararán, al interior de los grupos, las ecuaciones que encuentren. Para esto, los estudiantes dispondrán de 20 minutos. Finalmente, los grupos de estudiantes presentarán las estrategias que realizaron para el desarrollo de la tarea y analizarán cuál es la más conveniente.

Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea. El profesor debe hacer la lectura de la formulación de la tarea, explicar la forma de utilizar las guías de trabajo y recordar el manejo del curvígrafo. Él debe explicar la relación existente entre máximos y mínimos con la amplitud, la frecuencia de repeticiones con periodo y el valor promedio con desfase. Los estudiantes deben utilizar los valores para realizar una representación gráfica o tabular y lograr una representación simbólica. Los resultados obtenidos se presentan en forma grupal y luego con todos los compañeros.

Grafo de criterios de logro. En la figura 8, presentamos el grafo de criterios de logro de la tarea. Este grafo inicia con la toma de datos y luego se elige el sistema de representación. En ambos casos, los estudiantes calculan los valores de la amplitud, periodo y desfase. Por último, construyen la ecuación que representa el fenómeno.

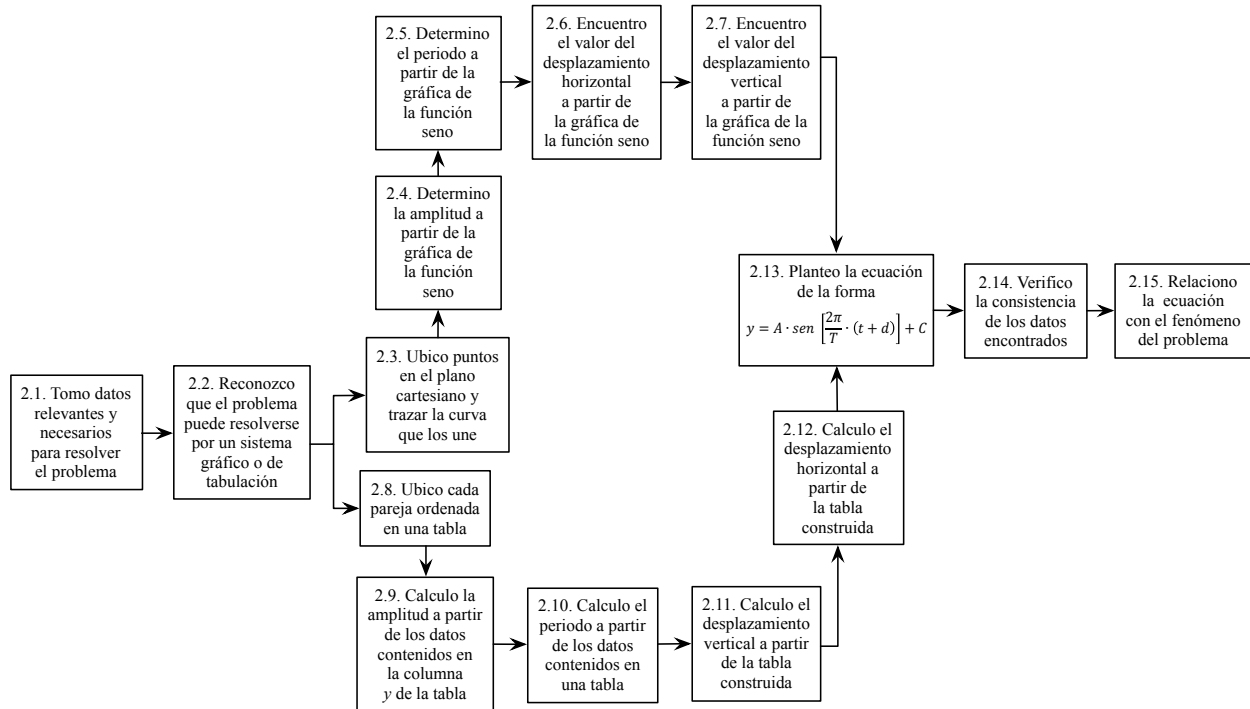


Figura 8. Grafo de criterios de logro de la tarea

Errores en los que pueden incurrir los estudiantes. En esta tarea los estudiantes pueden incurrir en errores como no distinguir los valores máximos y mínimos y no identificar la frecuencia de repetición de los valores. El listado completo de dificultades y errores se encuentra en el anexo 2.

Actuación del profesor. El profesor explica la forma en la que se utilizan los instrumentos requeridos para la solución de la tarea. Él debe observar continuamente los grupos de estudiantes, aclarar las dudas que se planteen y orientar en la utilización de las ayudas proporcionadas que se encuentran en el anexo 3.

Evaluación. El estudiante debe determinar los parámetros de amplitud, periodo y desfase, con el fin de modelar la situación dada. El profesor, durante el desarrollo de la tarea de aprendizaje, debe realizar un acompañamiento permanente a los grupos de trabajo y observar cómo cada uno aporta al logro de las metas planteadas. Debe registrar los aportes realizados por los integrantes del grupo y valorar la presentación grupal que se logra al finalizar la tarea. Por último, debe determinar el aporte realizado por el grupo al objetivo propuesto.

3. EXAMEN FINAL

En este apartado, describimos el examen final que proponemos para evaluar el logro de los objetivos.

3.1. Formulación del examen final

A continuación, presentamos las actividades que los estudiantes deben desarrollar en el examen final. Recomendamos que este examen sea desarrollado por los estudiantes de forma individual.

1. Una rueda de Chicago tiene un diámetro de 16 metros y da una vuelta de 360° .
 - a. En una hoja milimetrada, y con compás, realice una gráfica representando la rueda de Chicago.
 - b. Use el transportador para dividir la circunferencia y ubicar puntos que representen cada una de las canastillas de la rueda de Chicago. Tenga en cuenta que la rueda, a la que estamos haciendo referencia, cuenta con 18 canastillas.
 - c. Trace los ejes de un plano cartesiano, teniendo como referencia el centro de la circunferencia.
 - d. Ubique sobre el eje x el valor de los ángulos en donde están las canastillas.
 - e. Projete los puntos, que representan las canastillas, sobre el plano cartesiano.
 - f. Utilice el curvógrafo para trazar la gráfica de la función seno.
 - g. Señale el dominio, el rango, la amplitud, el periodo, el desfase horizontal y el desfase vertical de la función.
 - h. Represente con una ecuación la fórmula de la gráfica.

2. Un estudiante de grado décimo decide realizar un análisis sobre la temperatura que presenta su cuarto en un día del mes de septiembre con la ayuda de un termómetro. Durante su observación, el estudiante consignó en una libreta las siguientes temperaturas para cada hora, desde las 7:00 a.m. El primer número corresponde a la hora del día en que fue tomado el dato y el segundo número corresponde a la temperatura consignada en grados Celsius ($^\circ\text{C}$).

(7:00,9.0)	(8:00,11.0)	(9:00,14.0)	(10:00,18.0)	(11:00,19.5)	(12:00,20.0)	(13:00,20.0)
(14:00,19.0)	(15:00,17.0)	(16:00,15.0)	(17:00,13.0)	(18:00,11.5)	(19:00,10.0)	(20:00,9.0)
(21:00,8.0)	(22:00,7.0)	(22:00,7.0)	(24:00,1.2)	(1:00,6.0)	(2:00,5.5)	(3:00,5.5)
(4:00,6.0)	(5:00,7.0)	(6:00,8.5)	(7:00,9.0)}			

- a. Represente estos datos en un plano cartesiano.
- b. Encuentre la ecuación que mejor representa el fenómeno. Resalte en esta ecuación la amplitud, el periodo y el desfase

3.2. Rúbrica del examen final

Presentamos la rúbrica de evaluación que diseñamos para evaluar el alcance de cada uno de los objetivos propuestos. Cada nivel de logro está caracterizado por los criterios de logro conseguidos y los errores en los que el estudiante puede incurrir. En la columna calificación se encuentra la nota que el profesor puede asignar a los estudiantes según el nivel de desempeño. En la tabla 4, presentamos la rúbrica de evaluación para el objetivo 1.

Tabla 4

Niveles de logro e indicadores para el objetivo O1

Nivel de desempeño	Indicadores	Calificación
Superior	Reconoce totalmente el comportamiento periódico de la gráfica de la función seno. Activa los criterios de logro CdL1.1, CdL1.2, CdL1.3, CdL1.4, CdL1.5, CdL1.6, CdL1.7, CdL 8, CdL 9, CdL 10, CdL 11, CdL 12, CdL1.13, y CdL1.14.	4.6 – 5.0
Alto	El estudiante incurre en el error E34 y reconoce parcialmente el comportamiento periódico de la gráfica de la función seno. Activa los criterios de logro CdL1.1, CdL1.2, CdL1.3, CdL1.4, CdL1.5, CdL1.6, CdL1.7, CdL 8, CdL 9, CdL 10, CdL1.13, CdL1.14.	4.0 – 4.5
Básico	El estudiante incurre en al menos uno de los errores E9-21. Activa los criterios de logro CdL1.1, CdL1.2, CdL1.8, CdL1.9, CdL1.10, CdL1.13 y CdL1.14.	3.0 – 3.9
Bajo	El estudiante incurre en al menos uno de los errores E9-10-21-22-23.	1.0 – 2.9

En la tabla 5, presentamos la rúbrica de evaluación para el objetivo 2.

Tabla 5

Niveles de logro e indicadores para el objetivo O2

Nivel de desempeño	Indicadores	Calificación
Superior	Plantea totalmente la ecuación de la forma $y = A \cdot \text{sen} \left[\frac{2\pi}{T} \cdot (t + d) \right] + C$. Halla el valor del desplazamiento vertical a partir de la gráfica de la función seno. Activa los criterios de logro CdL2.1, CdL2.2, CdL2.3, CdL2.4, CdL2.5, CdL2.6, CdL2.7, CdL2.8, CdL2.9, CdL2.10, CdL2.11, CdL2.12, CdL2.13, CdL2.14, CdL2.15.	4.6 – 5.0

Tabla 5
Niveles de logro e indicadores para el objetivo O2

Nivel de desempeño	Indicadores	Calificación
Alto	El estudiante incurre en el error E35 y plantea parcialmente la ecuación de la forma $y = A \cdot \text{sen} \left[\frac{2\pi}{T} \cdot (t + d) \right] + C$. Halla el valor del desplazamiento vertical a partir de la gráfica de la función seno. Activa los criterios de logro CdL2.1, CdL2.2, CdL2.3, CdL2.4, CdL2.5, CdL2.6, CdL2.7, CdL2.8, CdL2.9, CdL2.10, CdL2.11, CdL2.12, CdL2.13.	4.0 – 4.5
Básico	El estudiante incurre en al menos uno de los errores E15-25-32-23. Activa los criterios de logro CdL2.1, CdL2.2, CdL2.3, CdL2.4, CdL2.5, CdL2.6, CdL2.7, CdL2.8, CdL2.9, CdL2.10, CdL2.11, CdL2.12.	3.0 – 3.9
Bajo	El estudiante incurre en al menos uno de los errores E14-15-23-25-32.	1.0 – 2.9

4. CONCLUSIONES

En este documento, presentamos el diseño final de la unidad didáctica gráfica de la función seno, luego de su implementación y análisis de los resultados obtenidos en el desarrollo de las tareas, diagnóstica, de aprendizaje y examen final. Para lograr este diseño, definimos el tema y lo estructuramos de la siguiente forma: análisis de contenido, expectativas de aprendizaje y de tipo afectivo, expectativas de aprendizaje de nivel superior, tareas de aprendizaje (dificultades y errores, ayudas y criterios de logro) y examen final.

Con la unidad didáctica se abordó el tema gráfica de la función seno que desarrolla capacidades en los estudiantes para representar situaciones o fenómenos de un contexto real que cuentan con un comportamiento periódico por medio de diferentes sistemas de representación para identificar, relacionar, diseñar y analizar la información relevante de algunos de estos fenómenos.

La tarea diagnóstica y las tareas de aprendizaje están diseñadas para implementarse en cualquier aula de clase dado que los recursos y materiales necesarios son de fácil adquisición y no se requiere de un ambiente especializado. Las tareas se desarrollan en forma grupal y se utilizan instrumentos de medida que permite a los estudiantes el desarrollo de capacidades para la utilización de diferentes elementos, instrumentos o materiales según la situación que se les presenta. Contribuye al desarrollo de la capacidad matemática de representación con el proceso de emplear.

Una de las fortalezas que tiene esta unidad didáctica es el esquema que proponemos para conformar los grupos de trabajo. Este esquema tiene en cuenta las habilidades individuales, lo que permite optimizar la contribución de cada uno de los estudiantes en la activación de los criterios de logro relacionados con el alcance de cada objetivo.

Para la implementación de la unidad didáctica, es necesario realizar varias sesiones en las que los estudiantes puedan representar diferentes fenómenos que cuenta con un comportamiento periódico por medio de la función seno, pero que son necesarias para abordar y lograr los objetivos planteados. Un complemento a esta unidad didáctica puede ser la ampliación a las otras funciones trigonométricas.

5. LISTADO DE ANEXOS

En la tabla 6, presentamos el listado de los anexos que son necesarios en la primera parte de la unidad didáctica.

Tabla 6
Listado de anexos

Anexo	Nombre del anexo	Descripción
1	Listado de conocimientos previos	En este anexo presentamos los conocimientos previos
2	Listado de dificultades y errores	En este anexo se encuentra todo el listado de errores y al grupo de dificultades que corresponde
3	Listado de ayudas	En este anexo presentamos las ayudas para cada tarea
4	Listados de criterios de logro	En este anexo se encuentran todos los criterios de logro de los dos objetivos
5	Expectativas afectivas	En este anexo se encuentran las expectativas afectivas
6	Tareas Imprimibles	En este anexo se encuentra la formulación de las tareas para imprimir
7	Fichas de las tareas	En este anexo se encuentran las fichas de las tareas

6. REFERENCIAS

Cañadas, M., Gómez, P. y Pinzón, A. (2016). *Apuntes módulo 2 de MAD 5*. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/1983/>

- González, M. J. y Gómez, P. (2017). *Apuntes módulo 3 de MAD 5*. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Gómez, P. (2007). Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Gómez, P. y Romero, I. (2017). *Apuntes módulo 5 de MAD 5*. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Gómez, P., (2018). *Apuntes módulo 8 de MAD 5*. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Ministerio de Educación Cultura y Deporte. (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: Matemáticas, lectura y ciencias*.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2015). *Derechos básicos de aprendizaje*. Bogotá: Autor.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: Autor.