

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

VOLUMEN DE PRISMAS TRIANGULARES

CRISTIAN SALDARRIAGA, YEISON ROBAYO, FREDY LÓPEZ Y SONIA
CALDERÓN

BOGOTÁ, JUNIO DE 2018

Como estudiantes de la quinta cohorte de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad de los Andes, presentamos una unidad didáctica que aborda el tema del volumen de prismas triangulares. Construimos la unidad didáctica como parte del proceso formativo de la maestría, con la finalidad de aportar al aprendizaje del volumen de sólidos en instituciones que brinden educación básica secundaria.

Diseñamos la unidad didáctica para ser implementada en la IED Campo Alegre del municipio de El Rosal (Cundinamarca), en el grado noveno. Esta institución es de carácter oficial y rural. Sus estudiantes pertenecen a los estratos socioeconómicos 1 y 2, y los padres de familia son principalmente empleados de cultivos de flores.

A partir de nuestra experiencia en diferentes instituciones oficiales y privadas, nos llamó la atención que el componente geométrico se aborda de manera trivial, y en ocasiones, el docente supone que la relación entre las dimensiones de los sólidos y su volumen es evidente, lo que genera dificultades a los estudiantes. Como ejemplo, al abordar el tema de volumen de prismas, los profesores presentan a los estudiantes un listado de fórmulas a modo de recetas, que no tienen ningún sentido para ellos. De esta manera, al implementar nuestra unidad didáctica, consideramos que los estudiantes construirán las relaciones numéricas entre el listado de fórmulas y los elementos del prisma, mediante la modificación, cálculo y verificación de los elementos del prisma y su volumen. Además, brindamos una oportunidad para que los estudiantes relacionen el resultado de la fórmula con el espacio que ocupa el sólido.

Destacamos con esta unidad didáctica la vinculación de elementos tecnológicos como la aplicación GeoGebra y elementos de manipulación en el caso de los moldes de los prismas triangulares. En primer lugar, la aplicación GeoGebra nos permite generar archivos tridimensionales con los prismas con los que queremos trabajar. En segundo lugar, los moldes permiten a los estudiantes manipular los prismas y comprender el concepto de volumen como el espacio ocupado. Esto hace que los estudiantes sean los actores principales en el aula, estén motivados y se retengan a culminar las tareas de aprendizaje planteadas.

1. ANTES DE IMPLEMENTAR

Para implementar esta unidad didáctica, consideramos importante que el docente se tome un tiempo para realizar la revisión de este apartado, en el que describimos los aspectos previos al diseño de las tareas de aprendizaje. Estos aspectos son necesarios para comprender el diseño de las tareas de aprendizaje y de evaluación. Para esto, nos basamos en lo descrito por Cañadas, Gómez y Pinzón (2016) sobre el análisis de contenido, y en lo descrito por González y Gómez (2017) sobre el análisis cognitivo.

1.1. Análisis de contenido

A continuación, describimos los aspectos importantes sobre el volumen de prismas triangulares. Estos aspectos están relacionados con la caracterización de la estructura conceptual, los sistemas de representación y los fenómenos que le dan sentido al tema.

Estructura conceptual

Al describir los contenidos y procedimientos relacionados con el volumen de prismas triangulares (estructura conceptual), encontramos tres subestructuras mediante las que se puede abordar el contenido: la relación que hay entre las fórmulas de volumen y los componentes del prisma, la descomposición y transformación del prisma, y el cálculo mediante magnitudes físicas. En la figura 1, presentamos la estructura conceptual y las subestructuras mencionadas.

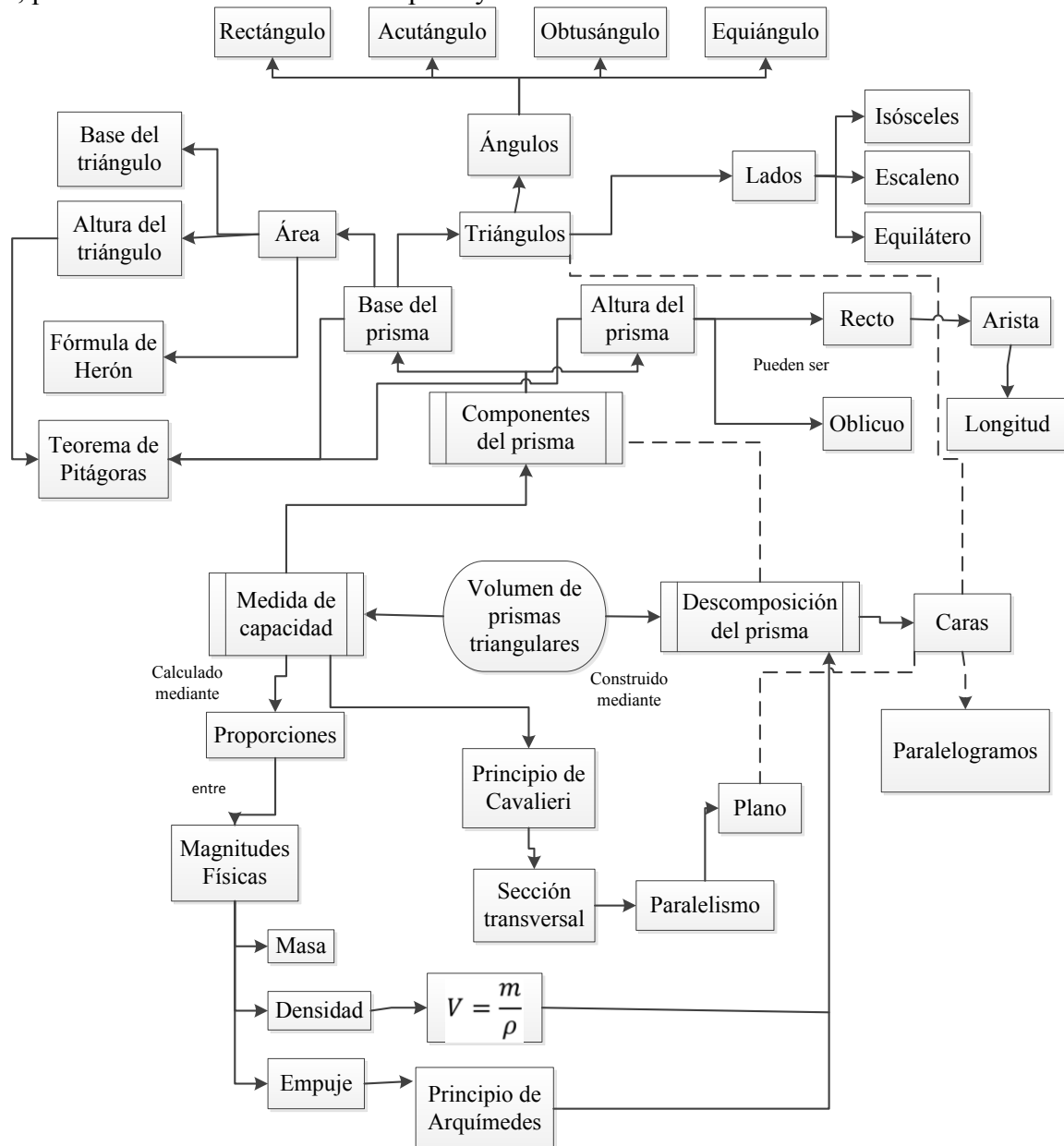


Figura 1. Estructura conceptual del volumen de prismas triangulares

En la figura 1, mostramos en la parte superior, la subestructura de la relación entre los componentes y dimensiones del prisma triangular con el espacio que ocupa. De esta forma, encontramos diferentes fórmulas, a partir de las combinaciones que se pueden dar para calcular el volumen de un prisma triangular. Las combinaciones dependen de características del prisma (como la clasificación en recto u oblicuo), de si la base del prisma está definida por sus lados o si está definida por su base y altura, de la clase de su base, y de si la combinación de los componentes está completa o hay necesidad de ejecutar procedimientos adicionales para calcular un componente faltante (por ejemplo, cuando requerimos usar el teorema de Pitágoras para calcular la altura del triángulo de la base del prisma).

En la parte derecha de la figura 1, ubicamos la segunda subestructura, en la que identificamos algunos elementos del prisma, como aristas y caras laterales, que son necesarios para el uso del principio de Cavalieri y los teoremas derivados de este principio (Guerrero, 2002, p. 344). Estos elementos nos permiten transformar un prisma oblicuo en recto. El procedimiento consiste en realizar un corte plano y perpendicular a las caras laterales del prisma, y reorganizar las partes resultantes para obtener un prisma recto. Luego, identificamos los componentes del prisma transformado para proceder a la aplicación de una de las fórmulas para calcular el volumen.

En la parte izquierda de la figura 1, ubicamos la tercera subestructura, en la que establecemos la relación del volumen con algunas magnitudes físicas. Por ejemplo, un estudiante puede calcular el volumen de un prisma construido con un material específico a partir la densidad y de la masa. Aunque incluimos esta subestructura en la estructura conceptual del tema, no la tenemos en cuenta para el diseño de las tareas de aprendizaje, por los impedimentos de encontrar la veracidad de las condiciones físicas en términos matemáticos. Esto lo sustentamos porque la relación entre volumen, masa y densidad excede los conocimientos matemáticos de los estudiantes de los grados octavo y noveno, y porque la demostración del principio de Arquímedes exige conocimientos matemáticos avanzados que, por su complejidad, decidimos no tener en cuenta. Entendemos que nuestra finalidad es el desarrollo de contenidos matemáticos basados en la normativa colombiana, que registramos en el apartado de ubicación curricular.

Sistemas de representación

Un sistema de representación es una manera de presentar un contenido matemático mediante tres operaciones sobre los signos que lo definen (Cañadas et al, 2017, p.17). Según la clasificación de los sistemas de representación, encontramos que el volumen de prismas triangulares cumple con las condiciones de los sistemas de representación geométrico, manipulativo, gráfico, numérico, simbólico y ejecutable, como mostramos en la figura 2.

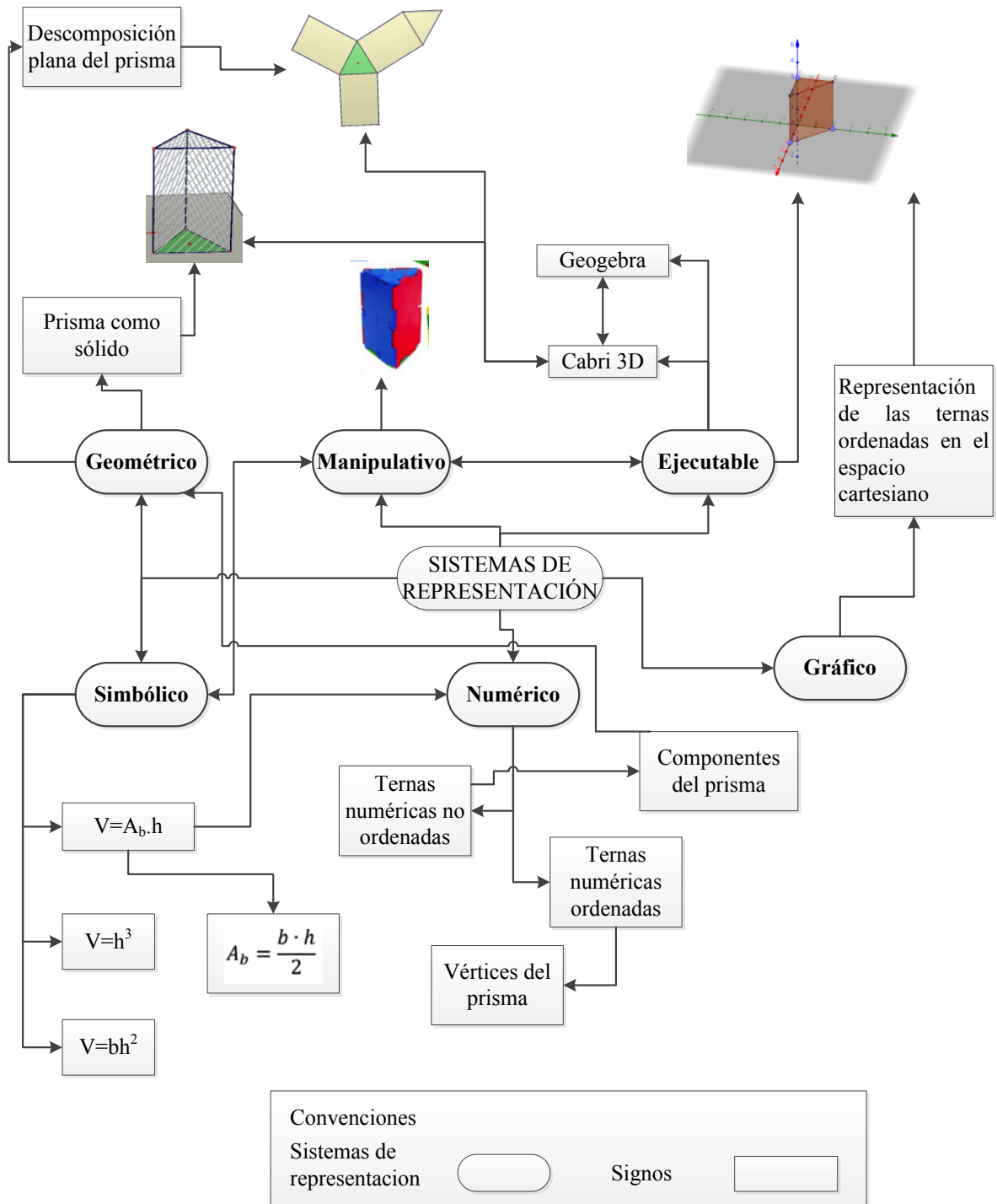


Figura 2. Sistemas de representación del volumen de prismas triangulares.

Los sistemas de representación que mostramos en la figura 2 nos permiten establecer diferentes relaciones para presentar a los estudiantes el volumen de un prisma como el espacio que ocupa un cuerpo. Inicialmente, con los sistemas de representación geométrico y manipulativo encontramos que un prisma puede ser representado mediante su descomposición plana o como un sólido. También, cuando la construcción del prisma depende de la manipulación de elementos (fichas en formas de paralelogramos o de triángulos), los estudiantes percibirán la forma del objeto geométrico desde diferentes perspectivas.

Identificamos otra relación entre los sistemas gráfico y numérico, cuando representamos el espacio que ocupa un prisma a través de la ubicación de sus vértices. Esto se da si definimos el prisma mediante las coordenadas o ternas ordenadas de los vértices, o por los puntos en el espacio cartesiano. Con el sistema de representación gráfico y numérico, los estudiantes pueden poner en práctica procedimientos relacionados con la distancia entre puntos en el espacio, para calcular los componentes del prisma.

Cuando describimos el volumen del prisma mediante las relaciones entre sus componentes y el espacio que ocupa, con una expresión algebraica, los estudiantes pueden encontrar que el cambio de alguno de los componentes de la expresión algebraica influye en el espacio que ocupa el prisma. Con lo anterior, encontramos las características para definir el sistema de representación simbólico, con base en el espacio que ocupa un prisma.

Si usamos una aplicación o programa informático para mostrar el prisma y calcular su volumen, cumplimos las condiciones del sistema de representación ejecutable. Este sistema de representación influye en la manera en la que los estudiantes visualizan los prismas, al permitirles modificar los componentes y cambiar la perspectiva en la que los observa.

Para nuestra unidad didáctica, decidimos usar los sistemas de representación geométrico, simbólico y ejecutable: el primero, cuando usamos los moldes planos para ser armados como sólidos; el segundo, cuando los estudiantes definen un listado de fórmulas válidas para calcular el volumen; y, el tercero, cuando nos apoyamos en una aplicación para que los estudiantes visualicen el prisma y lo relacionen con el espacio que ocupa.

Fenomenología

Seleccionamos los fenómenos que dan sentido al tema y sus posibles usos en la vida cotidiana, con base en las tres subestructuras matemáticas que identificamos anteriormente. Consideramos que los usos de las subestructuras pueden categorizarse en tres grupos que Cañadas, Gómez y Pinzón (2016, p. 36) definen como contextos fenomenológicos. Las categorías en las que agrupamos los fenómenos dependen de situaciones como la construcción de un prisma a partir de una medida cúbica, de calcular el volumen para conocer el espacio o capacidad que tiene el prisma, o de la relación con magnitudes físicas, como la densidad o el desplazamiento de un líquido (principio de Arquímedes). En la figura 3, presentamos la relación entre las subestructuras, los fenómenos y la categorización de los fenómenos de acuerdo con los contextos del marco conceptual PISA 2012 (Ministerio de Educación Cultura y Deporte, 2013).

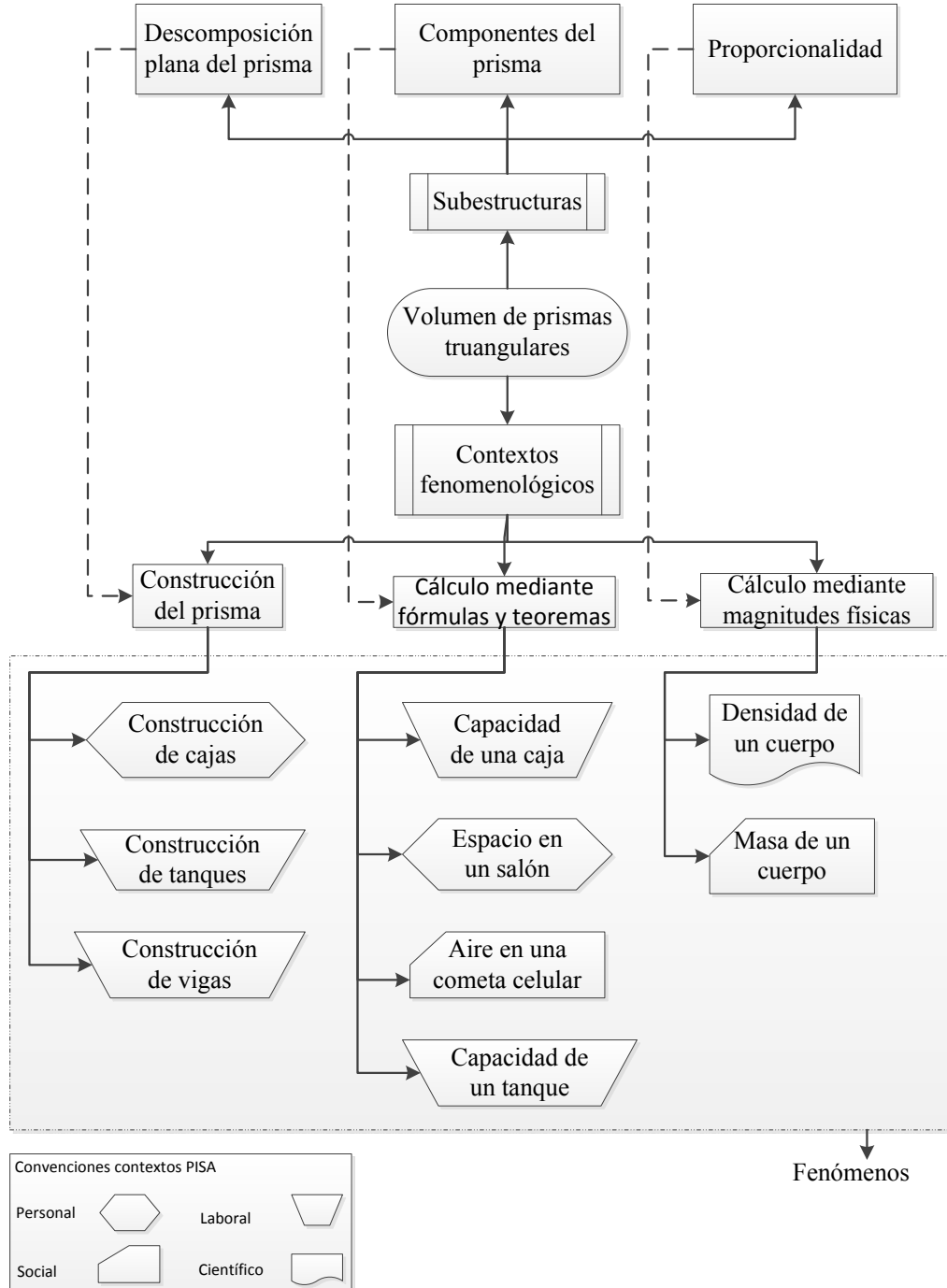


Figura 3. Relación entre la estructura conceptual, los sistemas de representación y los fenómenos. Decidimos enfocarnos en los fenómenos que se refieren a la construcción de prismas a partir de un volumen dado y al cálculo del volumen de un prisma para saber cuánto material se debe usar

para rellenarlo. Estos fenómenos se relacionan con las subestructuras de descomposición del prisma y del cálculo del volumen, respectivamente.

1.2. Análisis cognitivo

Luego de la descripción del volumen de prismas triangulares mediante la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología, definimos las expectativas que orientan los propósitos de aprendizaje y que guían los elementos de la unidad didáctica. A continuación, describimos la ubicación curricular, los procesos generales y las capacidades matemáticas fundamentales (Ministerio de Educación Cultura y Deporte, 2013), los objetivos de aprendizaje, las limitaciones al aprendizaje, los criterios de logro y los grafos de los criterios de logro (González y Gómez, 2017).

Ubicación curricular del tema

Construimos la unidad didáctica en correspondencia con la normativa colombiana, a partir de los estándares básicos por competencias (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2006). Aportamos al pensamiento geométrico en los grados 8° y 9°, en relación con el estándar: “generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos”. De igual manera, en cuanto a los derechos básicos de aprendizaje (MEN, 2015), nuestra unidad didáctica contribuye en particular al desarrollo del derecho 14 de grado octavo: “conoce las fórmulas para calcular el área de superficie y el volumen de cilindros y prismas”.

Procesos generales y capacidades matemáticas fundamentales

De acuerdo con las expectativas de aprendizaje descritas en el marco conceptual PISA 2012 (Ministerio de Educación Cultura y Deporte, 2013), describimos los procesos matemáticos generales. Consideramos que nuestra unidad didáctica aporta principalmente a los procesos de formular y emplear y, en menor medida, al proceso de interpretar.

Formular. Los estudiantes activan este proceso general, cuando definen las fórmulas y procedimientos necesarios para calcular el volumen de un prisma: ellos manipulan los prismas triangulares en moldes o aplicaciones ejecutables; identifican las relaciones numéricas entre los componentes y el espacio ocupado por el prisma; y buscan alternativas para el cálculo del volumen, como la transformación del prisma.

Emplear. Los estudiantes activan este proceso general, cuando aplican los procedimientos de cálculo necesarios para encontrar el espacio que ocupa un prisma, o cuando, a partir del volumen, describen y construyen un prisma. Los procedimientos de cálculo permiten la identificación del área de la base, ya sea por la fórmula de Herón o por la fórmula del área de un triángulo y la identificación de la altura del prisma.

Interpretar. Los estudiantes activan este proceso cuando describen el resultado obtenido mediante diferentes procedimientos de cálculo, en los términos de las preguntas y contextos de las situaciones.

Por otro lado, en relación con las capacidades matemáticas fundamentales, nuestra unidad didáctica aporta principalmente a la matematización, la comunicación, el diseño de estrategias para resolver problemas y la utilización de operaciones.

Matematización. Esta capacidad se activa cuando los estudiantes transforman el contexto de la situación problema, a partir de los conceptos y procedimientos matemáticos que la definen: por ejemplo, cuando los estudiantes transforman el contexto de una columna prismática y la describen como un prisma y sus componentes.

Comunicación. Esta capacidad se activa cuando los estudiantes se enfrentan a la necesidad de decodificar los enunciados de la situación, argumentar los procedimientos de solución empleados para calcular los componentes o el volumen del prisma, y cuando socializan los resultados obtenidos.

Diseño de estrategias para resolver problemas. Después de identificar los datos que brinda la situación problema, los estudiantes activan esta capacidad cuando definen un conjunto de procedimientos necesarios para calcular algún componente desconocido del prisma, y cuando buscan alternativas para transformar el prisma oblicuo mediante un corte y reorganización de las partes. Es importante recordar que nuestra intención no es dar las fórmulas y procedimientos de cálculo del volumen. Esperamos que el estudiante los encuentre.

Utilización de operaciones. Al hacer efectivos los procedimientos matemáticos de cálculo, ya sea de los componentes del prisma o de su volumen, los estudiantes deben organizar un conjunto de símbolos matemáticos y realizar operaciones aritméticas con ellos. De esta manera, activan esta capacidad al resolver los procedimientos aritméticos requeridos en las situaciones.

Objetivos de aprendizaje

Para definir los objetivos de nuestra unidad didáctica, seleccionamos la subestructura de descomposición del prisma y la de los componentes del prisma, en relación con los grupos de fenómenos de construcción del prisma y cálculo mediante fórmulas y teoremas (figura 3). Además, consideramos los sistemas de representación para responder a la relación entre las subestructuras y los fenómenos. De esta manera, esperamos contribuir a los siguientes objetivos de aprendizaje.

Objetivo 1. Determinar las relaciones numéricas entre las características de un prisma triangular y su volumen.

Objetivo 2. Describir un prisma triangular que ocupa un volumen específico, al usar las medidas necesarias y suficientes de sus componentes.

Limitaciones de aprendizaje

Denominamos dificultades de aprendizaje a las circunstancias que impiden o entorpecen el alcance de los objetivos (González et al, 2017, p. 22). Las dificultades organizan los errores en los que pueden incurrir los estudiantes al aplicar un procedimiento. Para el caso del volumen de prismas triangulares, identificamos la dificultad para identificar las dimensiones y componentes de un prisma, la dificultad para construir objetos que no cumplen con las características determi-

nadas en su definición y la dificultad para aplicar procedimientos sin las características necesarias y suficientes para su uso.

Con la primera dificultad, describimos aquellas circunstancias que evitan que el estudiante encuentre los elementos del prisma que necesita para calcular su volumen, porque no tiene claridad en las definiciones geométricas de los objetos que conforman el prisma o porque no reconoce las definiciones de objetos geométricos auxiliares, como los planos perpendiculares. Con la segunda dificultad, agrupamos todas las circunstancias que pueden afectar el proceso de desarrollo de las tareas de aprendizaje, cuando el estudiante no conoce las herramientas y/o elementos de la aplicación GeoGebra, o cuando una definición geométrica afecta la construcción de un objeto en la aplicación. Con la tercera dificultad, agrupamos todas las circunstancias que afectan el desarrollo de los procedimientos numéricos, en relación con el planteamiento de ecuaciones, desarrollo de operaciones entre números reales o identificación de componentes mediante un procedimiento aritmético.

Un estudiante incurre en un error, cuando hace observable una dificultad al ejecutar un procedimiento (González et al, 2017, p.23). Consideramos que los errores más comunes en los que incurren los estudiantes se refieren al uso de la fórmula de Herón para calcular el área de la base, al cumplimiento de las condiciones de los teoremas implicados, a la obtención de resultados que no corresponden con las soluciones posibles y al reconocimiento incorrecto de los componentes del prisma para calcular su volumen. Presentamos el listado completo de dificultades y errores en el anexo 1¹.

Criterios de logro

De acuerdo con lo que describen Gómez y Romero (2017, p.10), consideramos los criterios de logro como aquellos procedimientos que realiza el estudiante al abordar una tarea. Para cada uno de los objetivos de la unidad didáctica, definimos un conjunto de criterios de logro que permiten la consecución del objetivo.

Para el objetivo 1, identificamos los criterios de logro que se requieren para que un estudiante pueda calcular el volumen de un prisma. Consideramos importantes aquellos criterios de logro relacionados con los métodos de cálculo del área de la base del prisma. Por ejemplo, un estudiante puede calcular el área de la base del prisma mediante la fórmula de Herón (usando las medidas de los lados, criterio de logro 1.6), mediante la fórmula del área de un triángulo con su base y su altura (1.7), al señalar las dimensiones del prisma de los datos de la situación (1.8), al medir las dimensiones del prisma (1.9), o al seleccionar el área de los datos de la situación (1.10).

Para el objetivo 2, consideramos como los criterios de logro más relevantes aquellos que tienen que ver con los procedimientos necesarios para encontrar los componentes o dimensiones de un prisma a partir de su volumen. Por ejemplo, al tener el volumen del prisma, un estudiante puede obtener los componentes o dimensiones mediante la descomposición del volumen del prisma en factores primos (criterio de logro 2.2), mediante la obtención de las dimensiones por el ensayo y error (2.3), mediante el planteamiento de ecuaciones según la fórmula del área (2.4 y

¹ Los anexos se pueden consultar en este enlace: <http://funes.uniandes.edu.co/11769>.

2.5) o con la fórmula de Herón (2.6). Presentamos el listado completo de criterios de logro de los dos objetivos en el anexo 2.

Grafos de criterios de logro de los objetivos

Diseñamos grafos de criterios de logro para visualizar los procedimientos que caracterizan los objetivos de aprendizaje. En ellos, mostramos las diferentes alternativas que tiene un estudiante para abordar una tarea de aprendizaje. En la figura 4, presentamos el grafo de criterios de logro para el objetivo 1.

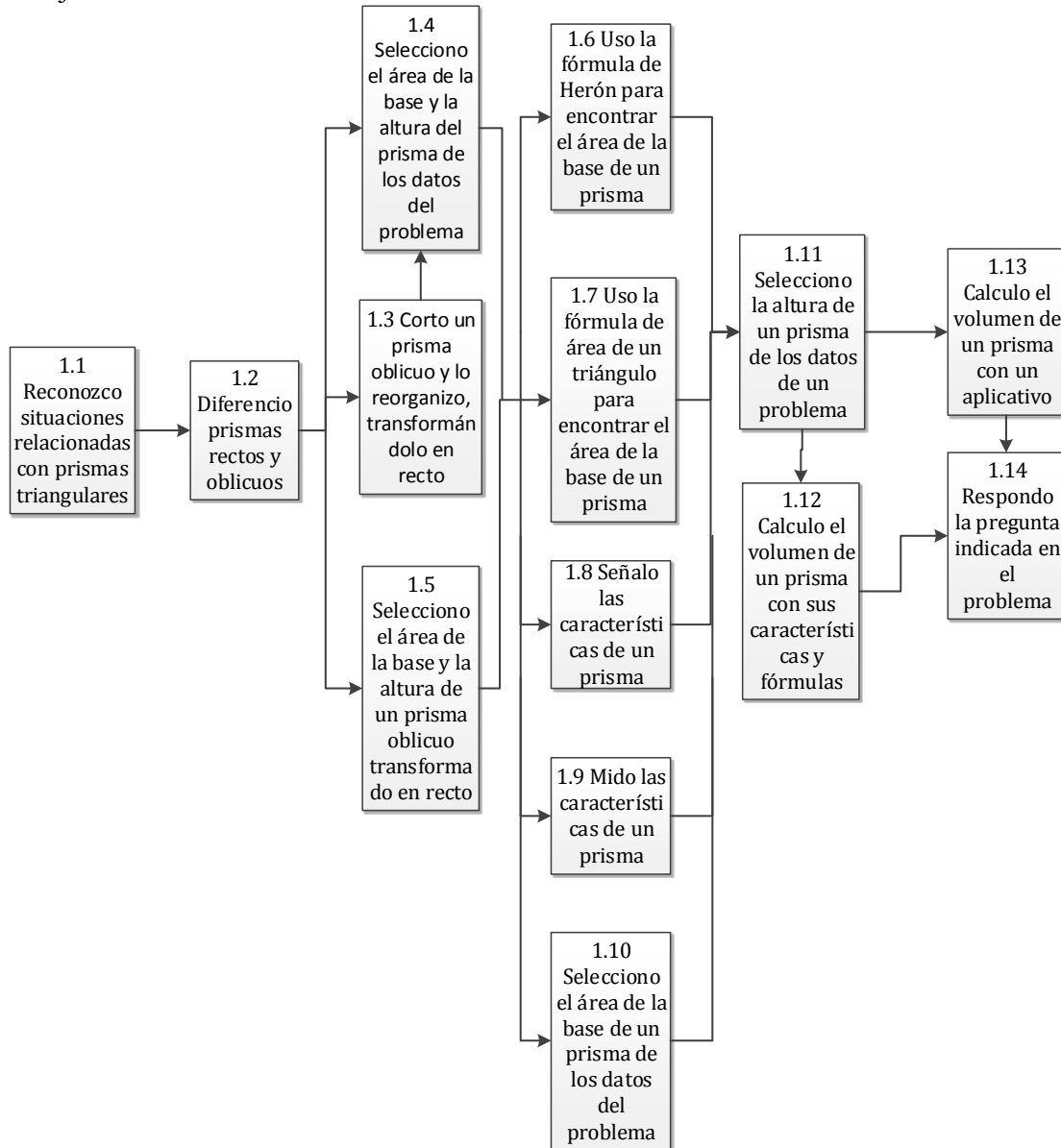


Figura 4. Grafo de criterios de logro del objetivo 1

Un estudiante que deba calcular el volumen de un prisma tendrá que iniciar con el criterio de logro 1.1, al relacionar la situación con el volumen del prisma triangular. Además, debe terminar en el criterio de logro 1.14, al relacionar el dato numérico obtenido como volumen del prisma, con la pregunta que debe responder. De esta manera, diseñamos las tareas de aprendizaje de la unidad didáctica dando cumplimiento a que su solución se haga mediante un recorrido en el grafo de criterios de logro que inicie y finalice en los criterios de logro 1.1 y 1.14, respectivamente.

Un estudiante que aborde una situación en la que se le pide el cálculo del volumen de un prisma triangular, inicia el recorrido por los procedimientos de solución con el criterio de logro 1.1. Luego, debe identificar si el prisma es recto u oblicuo (criterio de logro 1.2). Si es oblicuo, tiene la opción de transformarlo en recto mediante el principio de Cavalieri (1.3) y hacer el procedimiento de los prismas rectos (1.4), o puede calcular el volumen como prisma oblicuo (1.5). Posteriormente, debe escoger una opción para calcular el área de la base: usar la fórmula de Herón (1.6), la fórmula del área de un triángulo (1.7), seleccionar las dimensiones o componentes del prisma en los datos de la situación (1.8), medir las dimensiones de la base del prisma (1.9), o seleccionar el área de la base del prisma de los datos de la situación (1.10). Con el área de la base de un prisma triangular, debe buscar la altura del prisma (1.11) y puede calcular su volumen con una de las fórmulas para el volumen del prisma (1.12) o con una aplicación en la que esté construido el prisma (1.13). Por último, responde a la pregunta de la situación (1.14).

En la figura 5, presentamos el grafo de criterios de logro para el objetivo 2. El estudiante debe solucionar una situación en la que se le pida describir un prisma de un volumen dado, a partir del criterio de logro 2.1, en el que reconoce si la situación está relacionada con el volumen de un prisma triangular. Además, debe finalizar en el criterio de logro 2.12, en el que usa los datos numéricos obtenidos para responder la pregunta de la situación.

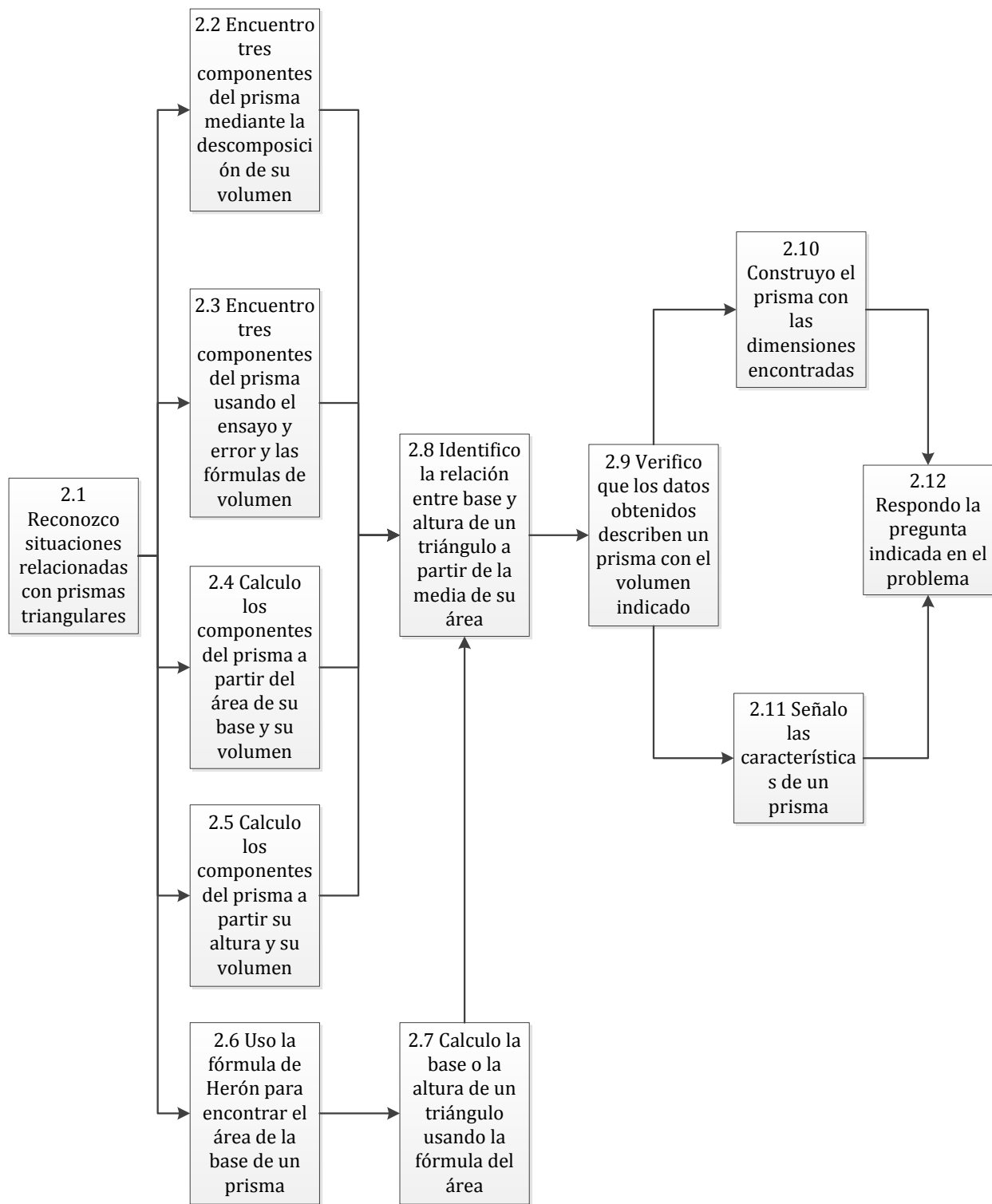


Figura 5. Grafo de criterios de logro del objetivo 2

Cuando un estudiante aborda situaciones que implican la descripción de un prisma dado su volumen, debe verificar si la situación corresponde al volumen de un prisma triangular (criterio de logro 2.1). Debe escoger cómo encontrar las dimensiones o componentes de un prisma al usar la descomposición en factores primos del volumen para encontrar las tres dimensiones del prisma (2.2), puede usar el ensayo y error para el mismo fin (2.3), puede plantear una ecuación con base en la fórmula del volumen —al tener el área de la base del prisma y encontrar su altura— (2.4) o al tener la altura del prisma y encontrar el área de la base (2.5). Igualmente, puede plantear una ecuación con base en la fórmula de Herón (2.6), para calcular el área de la base, y luego, calcular las dimensiones de la base del prisma mediante el planteamiento de una ecuación (2.7). Después de la elección, debe verificar que la relación entre las medidas de la base del prisma sean las que definió inicialmente (2.8). Además, debe verificar que las medidas de los componentes o dimensiones del prisma sean las adecuadas para describir el volumen, y, por lo tanto, debe calcular el volumen del prisma con ellas (2.9). Por último, debe escoger cómo mostrará la respuesta a la situación. Puede hacerlo con la construcción del prisma (2.10), con un listado de los componentes o con las dimensiones del prisma (2.11). El estudiante termina la solución de la tarea cuando responde a la pregunta de la situación (2.12)

Expectativas de tipo afectivo

Además de las expectativas de aprendizaje, consideramos importante desarrollar otras expectativas en los estudiantes, que les permitan afrontar conceptos matemáticos posteriores con mayor facilidad. A partir de las condiciones de la institución para la que diseñamos la unidad didáctica, identificamos dos expectativas de tipo afectivo, dado que los estudiantes no acostumbran comunicar los procedimientos y resultados que obtienen, y usan diferentes hojas para realizar los procedimientos (usualmente de manera incompleta o desordenada). Las expectativas de tipo afectivo para la unidad didáctica son las siguientes.

Expectativa afectiva 1. Desarrolla confianza para expresar y argumentar los resultados obtenidos en una situación de volumen de prismas triangulares.

Expectativa afectiva 2. Valora el orden en el uso de procedimientos, definiciones y teoremas, para encontrar la solución de una situación que involucre volumen de prismas triangulares.

1.3. Estructura general de la unidad didáctica

Para desarrollar los dos objetivos, planteamos cinco tareas de aprendizaje. Para el objetivo 1, diseñamos tres tareas: 1.1 Fórmulas, 1.2 Velas y 1.3 Columnas para puente. Para el objetivo 2, diseñamos dos tareas: 2.1 Molde por teléfono y 2.2 Procedimientos. Además, diseñamos dos tareas de evaluación, una para implementar antes de las tareas de aprendizaje (tarea diagnóstica) y una para implementar después (examen final). En la tabla 1, mostramos la secuencia de las tareas de aprendizaje incluyendo los tiempos necesarios para su ejecución.

Tabla 1
Descripción de la secuencia de tareas

Sesión	Objetivo	Tarea	Metas	Tiempo (min)
1		Diagnóstica	Evaluar los conocimientos previos	120
2	1	1.1	Encontrar las fórmulas necesarias para calcular el volumen de un prisma triangular, sea recto u oblicuo	120
3	1	1.2	Relacionar el dato calculado mediante una de las fórmulas de la tarea T1.1, con el espacio ocupado por el prisma triangular. Adicionalmente, reconocer las longitudes necesarias para obtener el volumen	120
4	1	1.3	Transformar un prisma oblicuo en uno recto, al reconocer que ambos tienen el mismo volumen y que las longitudes necesarias para calcular sus respectivos volúmenes no son las mismas	120
5	2	2.1	Reconocer los datos relevantes para definir un prisma con un volumen dado mediante la manipulación de un archivo en la aplicación GeoGebra	120
6	2	2.2	Usar procedimientos aritméticos para determinar los elementos faltantes de un prisma del cual se ha dado su volumen. Dichos procedimientos llevan a la definición de una ecuación	120
7	1 y 2	Examen final	Evaluar el desarrollo de los objetivos de aprendizaje	120

2. TAREA DIAGNÓSTICA

A continuación, presentamos la tarea diagnóstica con la que evaluamos si los estudiantes cuentan con los conocimientos previos que se requieren para implementar la unidad didáctica. Describimos los conocimientos previos, los errores en los que puede incurrir un estudiante, la formulación, los materiales y las sugerencias metodológicas.

2.1. Conocimientos previos

Para alcanzar los objetivos de aprendizaje previstos, el docente interesado en la unidad didáctica debe tener en cuenta los conocimientos previos requeridos. Planteamos la tarea diagnóstica para

establecer qué conocimientos de carácter geométrico, aritmético, algebraico o tecnológico tienen los estudiantes. Inicialmente, el estudiante debe dominar lo relacionado con la identificación de los componentes y dimensiones de un prisma. Adicionalmente, el estudiante debe manejar la noción de perpendicularidad: en especial, debe saber si un plano es perpendicular a una arista del prisma, para poder transformar un prisma oblicuo en recto. El estudiante debe también reconocer cuándo un triángulo es construible dadas las medidas de sus lados; es decir, debe conocer la desigualdad triangular. Esto corresponde a los conocimientos previos geométricos.

Por otra parte, es importante que el estudiante domine las operaciones entre números reales y reconozca sus propiedades. Son necesarias, por ejemplo, cuando aplica la fórmula de Herón o cuando describe un prisma a partir de su volumen. Esto está relacionado con los conocimientos aritméticos.

En cuanto a los conocimientos algebraicos, es necesario que el estudiante reconozca las propiedades de la igualdad para plantear y solucionar ecuaciones, debido a que tendrá que encontrar componentes del prisma mediante una ecuación, con base en alguna de las fórmulas del volumen de un prisma triangular o en el teorema de Pitágoras.

Después de la tarea diagnóstica, implementamos las tareas de aprendizaje. Algunas de las tareas, exigen que el estudiante haga uso de archivos de la aplicación GeoGebra. Por lo tanto, el estudiante debe tener las nociones básicas necesarias para manejar la aplicación. El docente no tendrá el tiempo para enseñar a manejarla durante la implementación, por lo que consideramos importante que se expliquen las herramientas de la aplicación antes de iniciar la implementación de la unidad didáctica. En el anexo 3, presentamos el listado completo de los conocimientos previos necesarios para la unidad didáctica.

2.2. Errores asociados a los conocimientos previos

Cuando un estudiante resuelve la tarea diagnóstica puede incurrir en errores que están relacionados con los conocimientos previos. Estos errores serán la base para que el docente diseñe una actividad previa a la implementación. Así, brindará la oportunidad para que todos los estudiantes tengan los conocimientos previos.

Uno de los conocimientos previos que se evalúa con la tarea diagnóstica es el uso del teorema de Pitágoras para calcular la medida de alguno de los lados en un triángulo rectángulo. Por lo tanto, un estudiante que no tiene en cuenta las características del triángulo (el ángulo recto) para aplicar el teorema de Pitágoras, incurre en el error 13. Por otro lado, el estudiante debe conocer la fórmula de Herón, pues es un procedimiento importante dentro de la solución de una situación de volumen de prismas. Con la tarea diagnóstica, el docente cuestionará al estudiante sobre el cálculo del área de un triángulo por medio de esta fórmula. Si el estudiante no verifica las condiciones para usar la fórmula de Herón y usa el perímetro en vez del semiperímetro, incurrirá en el error 15. El estudiante debe tener los conocimientos sobre las dimensiones y componentes de un prisma triangular, y su construcción en la aplicación GeoGebra. El estudiante, al responder la tarea diagnóstica, puede incurrir el error 11, al confundir la base con las caras laterales del prisma; en el error 1, al confundir la altura del prisma con la altura de su base; o en el error 7, al señalar otras medidas que no corresponden a las

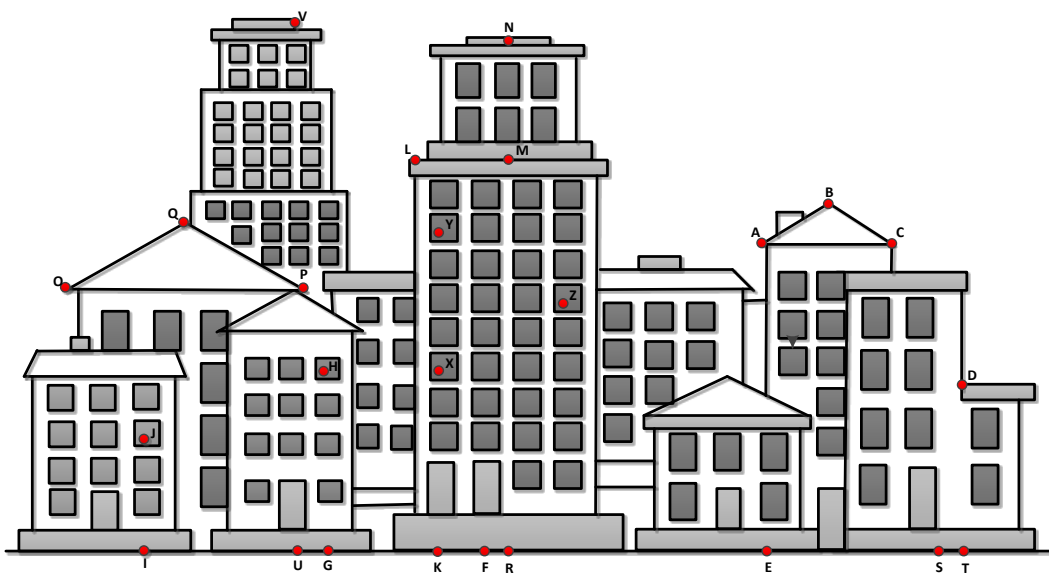
necesarias para calcular el volumen. En el anexo 3, presentamos el listado de los conocimientos previos y los errores correspondientes.

2.3. Formulación

En este apartado, presentamos la formulación de la tarea diagnóstica. La tarea está compuesta por siete numerales en los que cuestionamos al estudiante sobre la perpendicularidad y nociones básicas (numeral 1), características y área de triángulos (numeral 2), composición y descomposición de longitudes (numerales 3 y 4), definición de triángulos rectángulos y uso del teorema de Pitágoras (numerales 5 y 6), y definición y construcción de prismas triangulares (numeral 7). Presentamos a continuación la tarea diagnóstica, cuyo material para imprimir se encuentra en el anexo 4.

Tarea diagnóstica

Observe la siguiente imagen de la caricatura de una ciudad, en la que se han ubicado algunos puntos nombrados con las letras de la A a la Z. Luego, responda las preguntas que se plantean con base en esos puntos. Puede hacer uso de la calculadora.



1. Construya e identifique todos los segmentos que son perpendiculares a la recta m que contiene a los puntos I, U, G, K, F, R, E, S y T. Estos segmentos definen alturas dentro del dibujo. Deben usarse todos los espacios a continuación.

- _____ $\perp m$
- _____ $\perp m$
- _____ $\perp m$
- _____ $\perp m$
- _____ $\perp m$

$$\begin{array}{c} \text{_____} \perp m \\ \text{_____} \perp m \end{array}$$

2. Observe los triángulos cuyos vértices son ABC , YXZ , OPQ . Constrúyalos en el dibujo y escriba la clase de cada triángulo, según la clasificación por la medida de sus lados, o por la medida de sus ángulos. Luego, seleccione la base y dibuje la altura de cada triángulo. Mida los lados y la altura de los triángulos. Calcule su perímetro y su semiperímetro.

ΔABC . Clase _____ Base _____ Altura _____

Perímetro _____ Semiperímetro _____

ΔYXZ . Clase _____ Base _____ Altura _____

Perímetro _____ Semiperímetro _____

ΔOPQ . Clase _____ Base _____ Altura _____

Perímetro _____ Semiperímetro _____

3. Una persona en el punto V estima que la distancia hasta un perro que están en el punto R es de 65 m. Además, sabe que la distancia hasta la base del edificio es de 45 m. ¿Cuál es la distancia de la base del edificio al perro?

4. Si una persona ubicada en el punto G está a una distancia de 15 m de otra en el punto F y la persona del punto F está a una distancia de 54m de una tercera persona en el punto S, ¿cuál es la distancia entre las personas en los puntos G y S?

5. Tres personas están ubicadas en N, M y R, una justo debajo de la otra. La distancia de N a R es de 60 m, mientras que la distancia de M a R es de 48. ¿Cuál es la altura de la segunda sección del edificio (distancia de M a N)?

6. El área del triángulo ΔABC es $40 m^2$ y la altura del triángulo es 5 m. Plantee una ecuación que permita encontrar la base del triángulo ΔABC y resuélvala.

7. El tejado ΔOPQ define un prisma triangular. Los lados de su base tienen las siguientes medidas: $OP = 20 m$, $PQ = 15m$, $OQ = 15 m$. El tejado tiene una profundidad (altura del prisma) de 40 m. Construya, en la aplicación GeoGebra, una representación del prisma.

a) ¿Cuál es el área que ocupa el frente del tejado? Justifique con procedimientos aritméticos.

b) ¿Cuál es el espacio que ocupa el tejado? Use la herramienta área y volumen en la aplicación Geogebra.

2.4. Materiales y recursos

Para resolver la tarea diagnóstica, los estudiantes deben tener a disposición herramientas geométricas (regla y transportador), calculadora y tabletas o computadores con la aplicación GeoGebra previamente instalada.

2.5. Sugerencias metodológicas

Diseñamos la tarea diagnóstica para ser implementada en una sesión de clase de 120 minutos. El docente comenta a los estudiantes el nuevo tema a trabajar en la unidad didáctica. Luego, expone

que la tarea diagnóstica evalúa los conocimientos previos para el nuevo tema. Después, entrega una fotocopia con la formulación de la tarea a cada estudiante, para ser resuelta manera individual.

Con la tarea diagnóstica, el docente identifica puntualmente cuáles son los conocimientos previos que debe reforzar en la realimentación, antes de implementar las tareas de aprendizaje. La realimentación de la tarea diagnóstica debe diseñarse para que todos los estudiantes obtengan los conocimientos previos y superen los errores correspondientes. Sugerimos no dar una valoración a la tarea diagnóstica, pues su finalidad es dar a conocer al docente si los estudiantes tienen los conocimientos previos y las acciones a seguir cuando no es así.

3. TAREA 1.1 FÓRMULAS

Diseñamos la tarea 1.1 Fórmulas para aportar a la consecución del objetivo 1. En esta tarea, el estudiante manipulará prismas cuyas medidas o dimensiones cambian a partir de la manipulación de deslizadores. De esta manera, podrá observar que la medida del volumen cambia cuando los componentes del prisma cambian. Luego, intentará encontrar una fórmula que relacione las medidas de los componentes del prisma con su volumen. Nuestra intención con esta tarea es brindar la oportunidad al estudiante para encontrar las fórmulas de volumen mediante los cambios generados en los componentes del prisma, en cambio de dárselas como si fueran una receta. A continuación, presentamos la descripción de la tarea. La descripción completa de los elementos de la tarea se encuentra en el anexo 5.

3.1. Requisitos

Para abordar esta tarea, es necesario que el estudiante domine los conocimientos previos evaluados con la tarea diagnóstica. Además, debe tener una noción del volumen de un sólido. También, debe conocer previamente el manejo de la aplicación GeoGebra.

3.2. Metas

Con esta tarea, pretendemos que el estudiante encuentre la relación entre los componentes de un prisma triangular y su volumen. Esto implica que, con base en los resultados de la tarea, el estudiante recopilará un listado de fórmulas con las que puede calcular el volumen de un prisma triangular. En la realimentación de la tarea, el docente debe mostrar el listado de las fórmulas para calcular el volumen de un prisma, con base en los datos que reciba del desarrollo de la tarea.

3.3. Formulación

A continuación, presentamos la formulación de la tarea que el docente debe entregar en una fotocopia de manera individual. El material para imprimir de la tarea se encuentra en el anexo 6.

Tarea 1.1 Fórmulas

1. De manera individual, escriba lo que entiende por volumen de un sólido.

2. Reúnase con otros tres compañeros y comparta lo que escribió en el numeral anterior. En el siguiente espacio, escriban una definición de volumen de un sólido que expondrán ante los demás grupos.

3. En la carpeta Aplicativos T1.1, encontrarán archivos cuyos nombres son BAA, LLLA, Oblicuo y Aba. Modifiquen los valores de los componentes de prisma con los deslizadores. Luego, encuentren una fórmula que relacione los componentes del prisma con su volumen. Hagan esto con dos archivos.

4. Con las fórmulas obtenidas, calculen el volumen de los prismas que aparecen en el archivo Prismas T1.1, y completen lo siguiente.

a. Seleccionen las medidas del *Prisma_{ABCEFG}* que usaron para calcular el volumen y usen las herramientas de medición de la aplicación GeoGebra para encontrar su medida.

Longitud AB=	Longitud ED=
Longitud BC=	Longitud FD=
Longitud AC=	Longitud BF=
Longitud CD=	Longitud AE=
Área ABC =	Longitud AG =
Área EFD =	Longitud CH=
Longitud EF=	Longitud BI=

b. Seleccionen las medidas del *Prisma_{JKLMNO}*, que usaron para calcular el volumen y usen las herramientas de medición de la aplicación GeoGebra para encontrar su medida.

Longitud JK=	Longitud ON=
Longitud JL=	Longitud MJ=
Longitud LK=	Longitud NK=
Longitud MO=	Longitud OL=
Área JKL=	Longitud KP =
Área MNO=	Longitud JQ=
Longitud MN=	Longitud LR=
Longitud MS=	

c. Usen la calculadora del computador para calcular el volumen del prisma, a partir de la fórmula que obtuvieron en el numeral 3 y comparen el resultado con el que arroja la herramienta volumen de la aplicación GeoGebra. Escriban los resultados en los espacios correspondientes.

<i>Prisma_{ABCEFG}</i>	
Volumen calculado =	Volumen con la aplicación GeoGebra =
<i>Prisma_{JKLMNO}</i>	
Volumen calculado =	Volumen con la aplicación GeoGebra =

d. Escriban las fórmulas que usaron en el literal c.

5. Cada grupo debe escoger un integrante para explicar los resultados del numeral 3, otro integrante para explicar los resultados del numeral 4 a y b, y otro integrante para explicar los resultados del numeral 4 c. Para esto, usen un octavo de cartulina para escribir lo que el grupo considere más importante.

3.4. Conceptos y procedimientos

Al abordar esta tarea, consideramos que el estudiante usa conceptos relacionados con las definiciones de los componentes de un prisma triangular como la base, la altura, aristas, dimensiones del prisma y volumen de un sólido. También, emplea las características y clasificación de los prismas triangulares en rectos y oblicuos. En relación con los procedimientos, usa fórmulas para calcular el área de un triángulo como la fórmula de Herón y la fórmula del área de un triángulo. Otro procedimiento que aplica es el cálculo del volumen de un prisma triangular a partir de las fórmulas encontradas.

3.5. Sistemas de representación

Al abordar esta tarea, el estudiante emplea dos sistemas de representación de la figura 2: el ejecutable, cuando usa y manipula los prismas triangulares en los archivos de la aplicación Geogebra; y el simbólico, al recurrir a expresiones algebraicas que definen la relación entre el volumen de un prisma triangular y sus componentes.

3.6. Contextos

El contexto de esta tarea es científico, pues los estudiantes estarán inmersos en una actividad relacionada netamente con las matemáticas.

3.7. Materiales y recursos

Los estudiantes deben tener a su disposición las fotocopias de la formulación de la tarea, octavos de cartulina para la presentación de los resultados obtenidos y computadores con la aplicación GeoGebra, previamente instalada. Sugerimos que no se usen tabletas porque los archivos de la

tarea no funcionan correctamente en ellas. La carpeta con los archivos de la tarea, para usar en la aplicación GeoGebra, se encuentran en el anexo 7.

3.8. Agrupamiento e interacción

Consideramos que los estudiantes deben ser los actores principales en la tarea. Por lo tanto, la interacción debe ser principalmente entre ellos. La interacción con el docente es necesaria cuando haya evidencia de un error y sea necesario usar alguna de las ayudas descritas en el anexo 8. Por otro lado, los estudiantes deben responder el numeral 1 de forma individual y reunirse en grupos para los numerales 2 al 4. Cada grupo debe estar compuesto por 4 estudiantes. Para finalizar, los estudiantes deben presentar los resultados obtenidos.

3.9. Temporalidad

Diseñamos la tarea para ser implementada en una sesión de 120 minutos. Inicialmente, el docente explica a los estudiantes la intención de la unidad didáctica, el objetivo 1 y su grafo de criterios de logro. Luego, explica la finalidad de la tarea 1.1 Fórmulas, para que los estudiantes inicien su desarrollo. Por último, los estudiantes deben presentar los resultados que obtuvieron y generar un listado con las fórmulas para calcular el volumen de un prisma triangular.

3.10. Errores en los que puede incurrir un estudiante

Al abordar la tarea, el estudiante puede incurrir principalmente en errores referentes al cálculo del área de la base del prisma triangular. Esto implica que el estudiante puede incurrir en el error 1 o en el 15. El error 1 está relacionado con confundir la altura del prisma con la altura de la base del mismo. El error 15 está relacionado con no usar el semiperímetro sino el perímetro en la fórmula de Herón. Para solucionar esto, el docente puede hacer uso del listado de ayudas asociadas a los errores, disponible en el anexo 8. Por ejemplo, para el error 15, el docente pregunta al grupo cuál es la diferencia entre perímetro y semiperímetro, y si están cumpliendo todos los requisitos para usar la fórmula de Herón. De la misma forma, el estudiante puede incurrir en errores como el 7 y el 24 cuando encuentra relaciones entre los componentes del prisma y su volumen que son falsas. El listado completo de las ayudas para superar los errores se puede consultar en el anexo 8.

3.11. Grafo de criterios de logro

En la figura 6, presentamos el grafo de criterios de logro de la tarea, con base en el grafo de criterios de logro del objetivo 1 (figura 4). Resaltamos las posibilidades que tiene un estudiante para resolver la tarea.

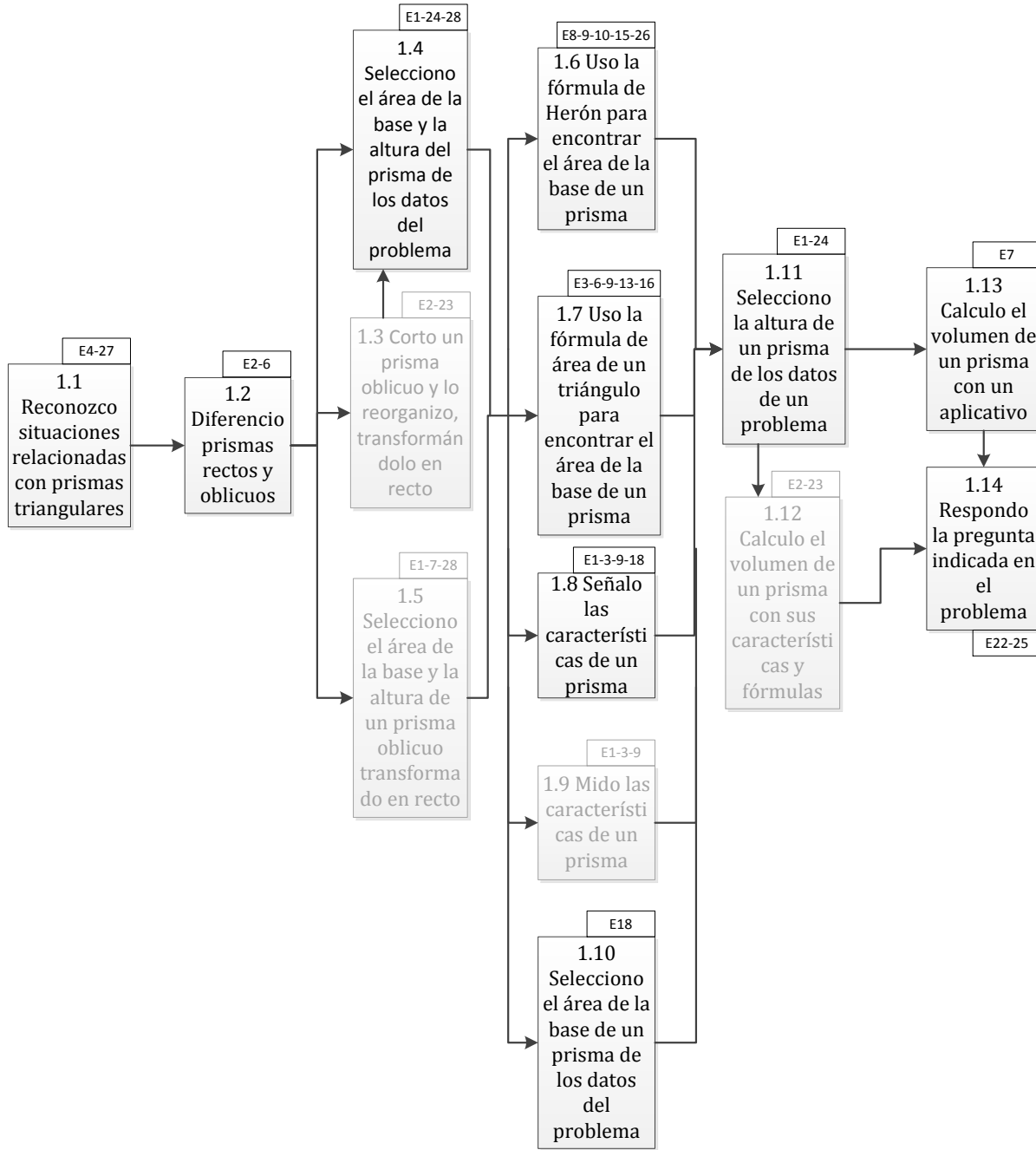


Figura 6. Grafo de criterios de logro de la tarea 1.1 Fórmulas

En la figura 6, presentamos las cuatro posibles formas con las que, los estudiantes pueden dar solución a la tarea. Los primeros criterios de logro se refieren a apropiarse de la situación problema. Luego, los estudiantes hacen uso de las estrategias para calcular el área base, con la fórmula de Herón, con la fórmula del área del triángulo, al señalar las características del prisma o al

señalar el área de la base de los datos del problema. Los últimos criterios de logro están relacionados con seleccionar la altura del prisma y encontrar las fórmulas para calcular el volumen del prisma. Por último, dan respuesta a la situación problema.

3.12. Sugerencias metodológicas

El docente debe verificar que los computadores de la institución cuenten con la aplicación GeoGebra. Además, sugerimos que verifique que los archivos de la tarea funcionan correctamente en los computadores. También, es indispensable que permita que los estudiantes incurran en los errores y que evite darles indicaciones sobre las fórmulas que deben obtener. Esto hace posible que los estudiantes entiendan cuáles medidas deben tener para calcular el volumen de un prisma triangular.

3.13. Evaluación

Durante la implementación de la tarea, el docente debe estar atento en cuáles de los criterios de logro hubo más estudiantes que incurrieron en errores. Sugerimos que el docente centre su mirada en los criterios de logro referentes al cálculo del área de la base y el cálculo del volumen del prisma. Además, debe observar la participación de cada uno de los integrantes de los grupos para hacer la respectiva realimentación al inicio de la siguiente tarea de aprendizaje. Los errores en los que incurran los estudiantes le permitirán dar una valoración cuantitativa al trabajo individual y grupal.

4. TAREA 1.2 VELAS

Diseñamos la tarea 1.2 Velas para aportar a la consecución del objetivo 1. En esta tarea, los estudiantes armarán unos moldes en forma de prisma triangular, impresos en cartón cartulina. Cada molde tiene medidas marcadas. Con ellas, los estudiantes podrán identificar los elementos necesarios para calcular el volumen del prisma triangular. Además, deben comparar el valor numérico del volumen, obtenido con alguna de las fórmulas, con el valor obtenido con una probeta graduada en centímetros cúbicos. De esta manera, observarán la relación entre el valor numérico del volumen con el espacio ocupado. A continuación, presentamos la descripción de la tarea. La descripción completa de los elementos de la tarea puede consultarse en el anexo 5.

4.1. Requisitos

Para abordar la tarea, el estudiante debe manejar los conocimientos previos evaluados con la tarea diagnóstica. Adicionalmente, debe tener el listado de las fórmulas obtenidas en la tarea 1.1 Fórmulas, pues son necesarias para calcular el valor numérico del volumen con los datos suministrados en los moldes. También, debe saber cómo se realiza la medición de la capacidad de un sólido con la probeta. Si la probeta está graduada en mililitros, debe conocer la equivalencia en centímetros cúbicos.

4.2. Metas

Con esta tarea, pretendemos que los estudiantes relacionen el valor numérico del volumen de un prisma triangular (calculado mediante una fórmula) con el espacio que ocupa el prisma. Esto implica que entenderá que el volumen es un número que indica un espacio ocupado y le dará sentido a las fórmulas obtenidas en la tarea 1.1 Fórmulas.

4.3. Formulación

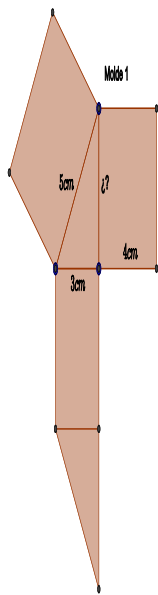
A continuación, presentamos la formulación de la tarea, que el docente debe entregar de manera individual. El material para imprimir se encuentra en el anexo 6.

Tarea 1.2 Velas

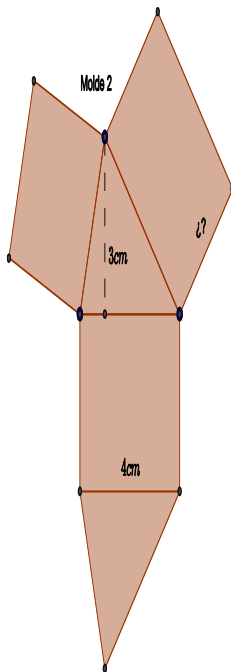
Para recolectar fondos para comprar las mallas y demarcar la cancha de microfútbol, el profesor Pedro Núñez le propuso a un grupo de estudiantes vender velas de diferente forma. Para ello, le pidió a cada estudiante que trajera un molde para el siguiente día. Cuatro estudiantes llevaron moldes en forma de prismas triangulares, como se muestra en los dibujos. Si se debe escoger solo uno de los cuatro moldes, y debe ser el que menos parafina gaste para obtener así más recursos para la demarcación y mallas de la cancha, ¿cuál de los cuatro moldes se debe escoger? Justifique su elección con un procedimiento aritmético.

1. Reúnase con dos compañeros.
2. Escojan dos de los moldes que se muestran a continuación. Recórtenlos y ármenlos. Luego llénelos de arena y midan la cantidad de arena que contiene con la probeta. Escriban la medida obtenida en el espacio correspondiente, de la siguiente tabla.

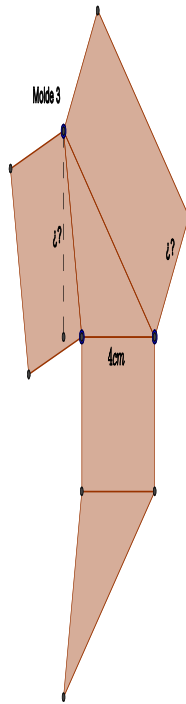
Molde 1=	Molde 2=	Molde 3=	Molde 4=
----------	----------	----------	----------



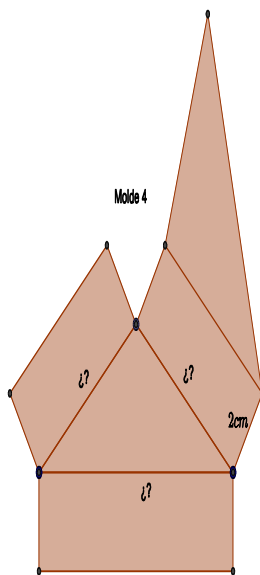
Molde 1



Molde 2



Molde 3



Molde 4

3. Midan las longitudes necesarias para calcular el volumen de los dos prismas que seleccionaron. Nombren los puntos que conforman los moldes que escogieron y describan las medidas a partir de los nombres de los segmentos.
4. Calculen el volumen del prisma con las fórmulas trabajadas en la tarea 1.1 Fórmulas. Deben hacer el procedimiento de cálculo.
5. Escojan un integrante del grupo para presentar los resultados obtenidos en los numerales 2, 3 y 4.
6. ¿Cuál de los moldes usa menos parafina?
7. Describan las combinaciones de medidas necesarias para calcular el volumen de un prisma triangular. ¿Son necesarias todas las medidas de las aristas, lados de la base o dimensiones del prisma para calcular su volumen?

4.4. Conceptos y procedimientos

Al abordar esta tarea, el estudiante usa conceptos relacionados con las definiciones de los componentes y dimensiones de un prisma triangular, y con la definición del desarrollo plano de un prisma y su transformación a la representación tridimensional. Esto implica que debe reconocer que, en el desarrollo plano de un prisma, hay varios segmentos que coinciden en la representación tridimensional. Usa procedimientos como el cálculo del área de la base de un prisma y de su volumen. Además, aplica el procedimiento de cálculo de la capacidad de un molde mediante una probeta.

4.5. Sistemas de representación

Al abordar la tarea, el estudiante emplea el sistema de representación geométrico, pues le presentamos los prismas triangulares en sus desarrollos planos para que los transforme en su representación tridimensional.

4.6. Contextos

Consideramos que el contexto de esta tarea es social, al tratarse de una situación que involucra algunas personas y lugares que están relacionados con la comunidad en la que se ubica la institución educativa para la que diseñamos la unidad didáctica.

4.7. Materiales y recursos

Los estudiantes deben tener a su disposición las fotocopias con la formulación de la tarea de manera individual, los moldes impresos en cartón cartulina para recortar y construir los moldes de los prismas triangulares, arena molida seca y probetas para medir la capacidad de cada molde. Los moldes deben armarse usando pegante o cinta para que queden fijos.

4.8. Agrupamiento e interacción

La interacción de la tarea es principalmente entre los estudiantes. La interacción con el docente es necesaria cuando haya evidencia de un error. Para esto, el docente hace uso de las ayudas descritas en el anexo 8. Los estudiantes permanecen durante toda la sesión en grupos de tres integrantes.

4.9. Temporalidad

Diseñamos la tarea para ser implementada en una sesión de 120 minutos. Inicialmente, el docente debe hacer la realimentación de la tarea 1.1 Fórmulas. Debe mostrar a los estudiantes el listado de las posibles fórmulas para calcular el volumen de un prisma triangular y los errores que identificó cuando los estudiantes estaban encontrando las fórmulas. Luego, presenta la tarea 1.2 Velas: presenta el grafo de criterios de logro de la tarea y su finalidad. Después, los estudiantes inician el trabajo: arman los moldes, usan la probeta y completan lo que pedimos en la formulación de la tarea. Para finalizar, el docente solicita a algunos de los grupos presentar sus resultados.

4.10. Errores en los que pueden incurrir los estudiantes

Al abordar esta tarea, el estudiante puede incurrir en errores relacionados con calcular el área de la base del prisma, al seleccionar la altura del prisma (error 24) o al responder las preguntas descritas en la formulación de la tarea (errores 22, 25 y 27). Por tal motivo, el docente debe proveer las ayudas respectivas cuando el estudiante confunda la altura de la base del prisma con cualquiera de los lados (error 3), cuando el estudiante no use correctamente las unidades de medida para el área de la base (error 18), o cuando el estudiante no obtenga la raíz de forma correcta en la fórmula de Herón (error 26). También, debe verificar si el estudiante obtiene de manera correcta la altura del prisma del desarrollo plano en el molde (error 24). En cuanto a la respuesta a las preguntas, el docente debe verificar si el estudiante obtiene valores numéricos sin relacionarlos con algún requerimiento de la tarea (error 22), obtiene valores numéricos incorrectos (error 25) o presenta conclusiones incorrectas (error 27). Si el docente encuentra evidencia de los errores mencionados u otros errores, debe hacer uso de las ayudas asociadas a los errores. Las ayudas de la tarea se pueden consultar en el anexo 8.

4.11. Grafo de criterios de logro

En la figura 7, presentamos el grafo de criterios de logro de la tarea, en el que señalamos los procedimientos que puede usar un estudiante para resolverla, con base en el grafo de criterios de logro del objetivo 1.

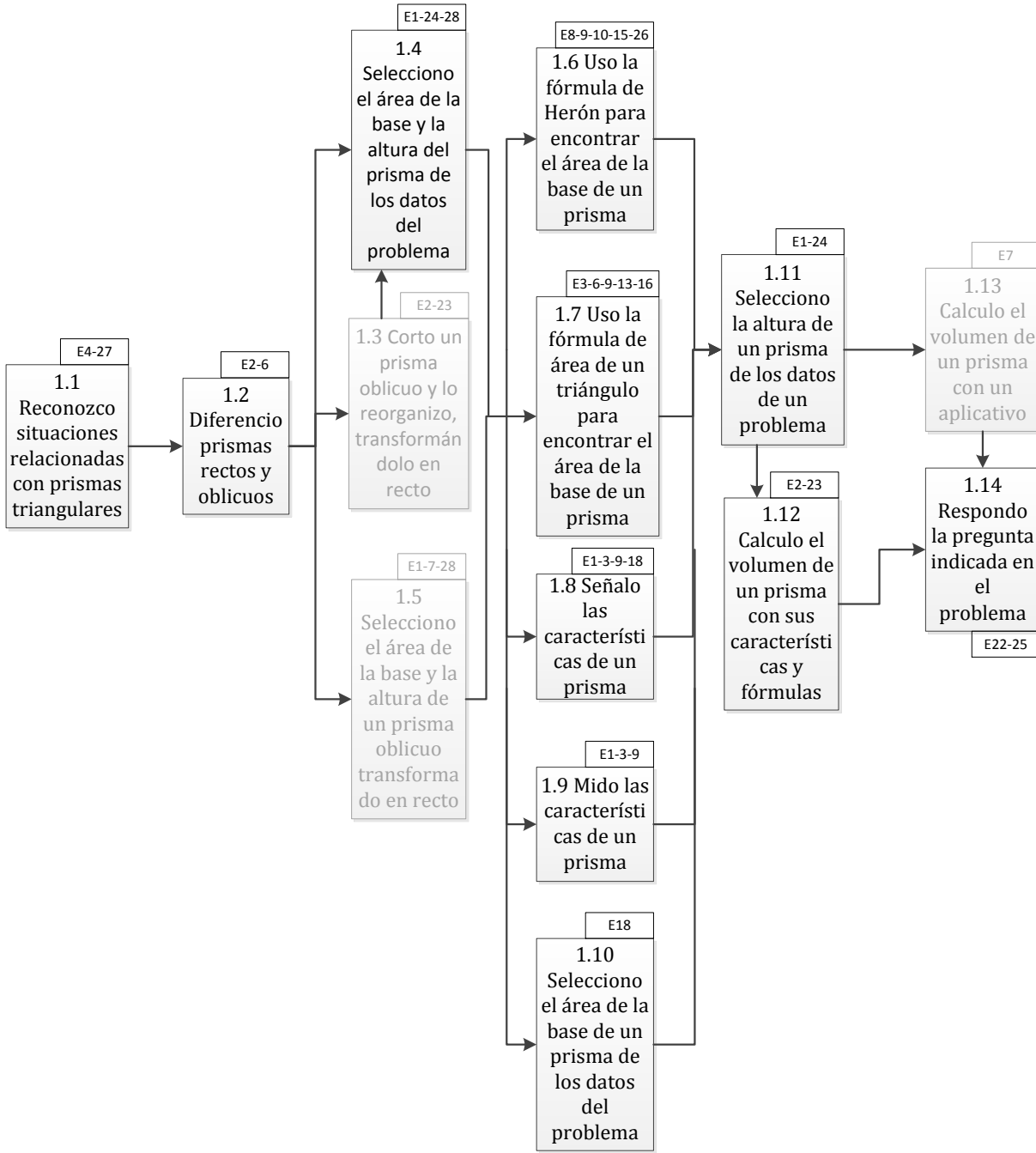


Figura 7. Grafo de criterios de logro de la tarea 1.2 Velas

En la figura 7, presentamos cinco formas de solución de la tarea. Los primeros criterios de logro están relacionados con que los estudiantes se apropien de la situación y la relacionen con el volumen de los prismas triangulares rectos. Entre las opciones que tienen los estudiantes para encontrar el área de la base del prisma pueden usar la fórmula de Herón, usar la fórmula del área

del triángulo, señalar las características del prisma, señalar el área de la base de los datos del problema o medir las características del prisma. Después, deben seleccionar la altura del prisma de los datos en el molde y, por último, responder las preguntas de la formulación de la tarea.

4.12. Sugerencias metodológicas

El docente debe verificar que los moldes cumplen con las medidas reales en centímetros. Sugerimos que las verifique con anterioridad mediante la regla de programas como Word. Además, al imprimir los moldes, algunos octavos de cartón cartulina quedan atascados. Sin embargo, consideramos que no es pertinente cambiar el material a cartulina, pues, al llenarlos con arena, las caras laterales del prisma tienden a volverse curvas. Por otro lado, sugerimos que el docente verifique que la arena esté seca y sea lo más fina posible, para que la medida obtenida con las probetas sea tan exacta como se pueda. Adicionalmente, el docente debe estar atento a que los estudiantes ocupen el tiempo en el desarrollo, pues al armar los moldes y usar la arena, puede generarse desorden que impida que algún grupo finalice la tarea.

4.13. Evaluación

Durante la implementación de la tarea, el docente debe registrar en qué criterios de logro hubo más estudiantes que incurrieron en errores. Sugerimos que el docente centre su mirada en los criterios de logro referentes al cálculo del área de la base, la selección de la altura del prisma y la relación entre el dato numérico del volumen obtenido con las fórmulas y el dato obtenido con las probetas.

5. TAREA 1.3 COLUMNAS PARA PUENTE

Diseñamos la tarea 1.3 Columnas para puente para aportar a la consecución del objetivo 1. En esta tarea, los estudiantes armarán unos moldes en forma de prisma triangular oblicuo, impresos en cartón cartulina, que cortarán para transformarlos en prismas rectos, con base en el principio de Cavalieri (Guerrero, 2002). Los moldes tienen las medidas necesarias para calcular su volumen. El estudiante debe caracterizar el corte que debe hacer a un prisma oblicuo, con un plano, para transformarlo en recto. Así, encontrarán una forma alternativa para calcular el volumen de un prisma oblicuo, con base en las fórmulas para prismas rectos. A continuación, presentamos la descripción de la tarea. La descripción completa de los elementos de la tarea se puede consultar en el anexo 5.

5.1. Requisitos

Para abordar la tarea, el estudiante debe manejar los conocimientos previos evaluados con la tarea diagnóstica, y manejar las fórmulas para calcular el volumen de los prismas triangulares, encontradas en la tarea 1.1 Fórmulas, y los componentes de los prismas necesarios para usarlas, reconocidos en la tarea 1.2 Velas. Adicionalmente, debe conocer la definición de los componentes de los prismas oblicuos y tener la noción de perpendicularidad y paralelismo en el espacio.

5.2. Metas

Con esta tarea, pretendemos que los estudiantes reconozcan los componentes de un prisma triangular oblicuo que son necesarios para calcular su volumen, después de transformarlo en recto. Los estudiantes deben establecer que el plano que corta el prisma oblicuo debe ser perpendicular a las aristas, para que la reorganización de las partes resultantes del corte defina un prisma recto. También, deben reconocer que las dimensiones del prisma transformado cambian.

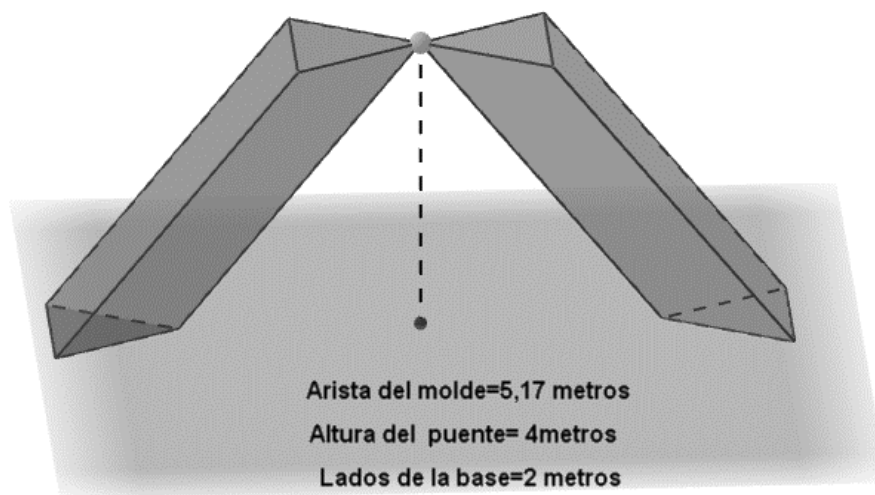
5.3. Formulación

A continuación, presentamos la formulación de la tarea, que debe entregarse de manera individual. El material para imprimir se encuentra en el anexo 6.

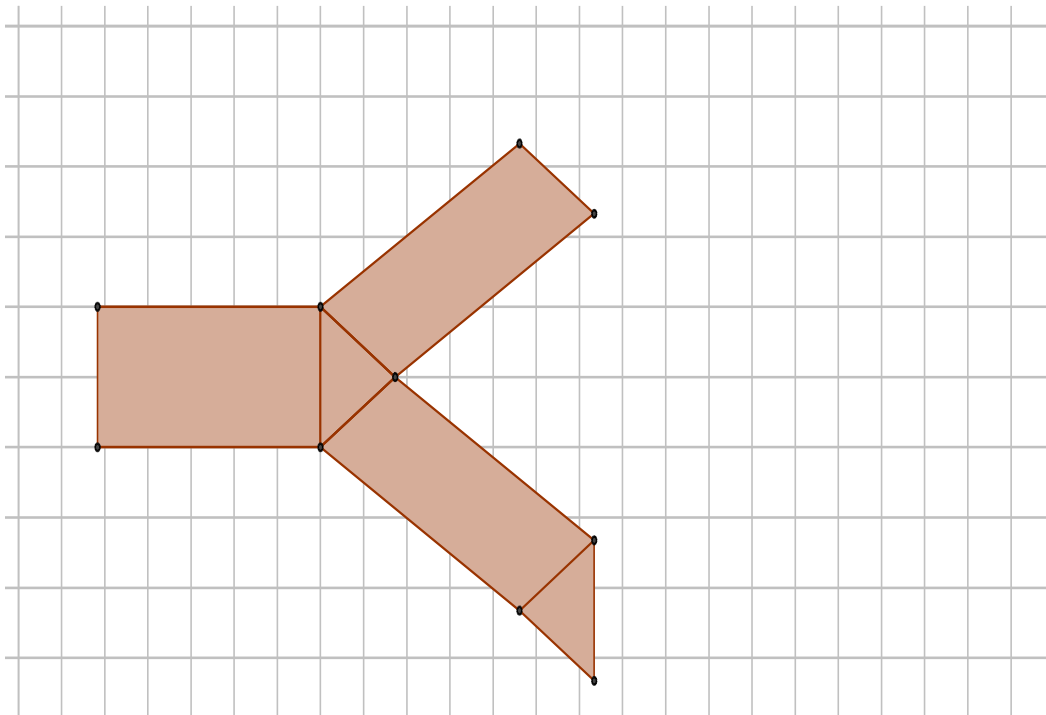
Tarea 1.3 Columnas para puente

Un grupo de obreros debe construir dos columnas iguales como las que se muestran en la figura, para sostener el primer tramo de un puente vehicular. Informan al ingeniero de la obra que usaron moldes de madera de esa forma para construirlas. El ingeniero decide usar el mismo molde para la siguiente sección, pero debe tener en cuenta que las siguientes columnas deben ser en forma de prisma triangular recto. El ingeniero ordena a dos de los obreros que hagan los cortes correspondientes para transformar las columnas en prismas triangulares rectos. Siguiendo la indicación, los dos obreros dibujaron los desarrollos planos de los moldes, como se muestra en las figuras. Usaron la escala de 1 cm por cada metro del molde. Es decir, como la arista del molde es de 5,17 m, los obreros las dibujaron de 5,17 cm en su esquema. Luego, marcaron los cortes que iban a realizar en los moldes.

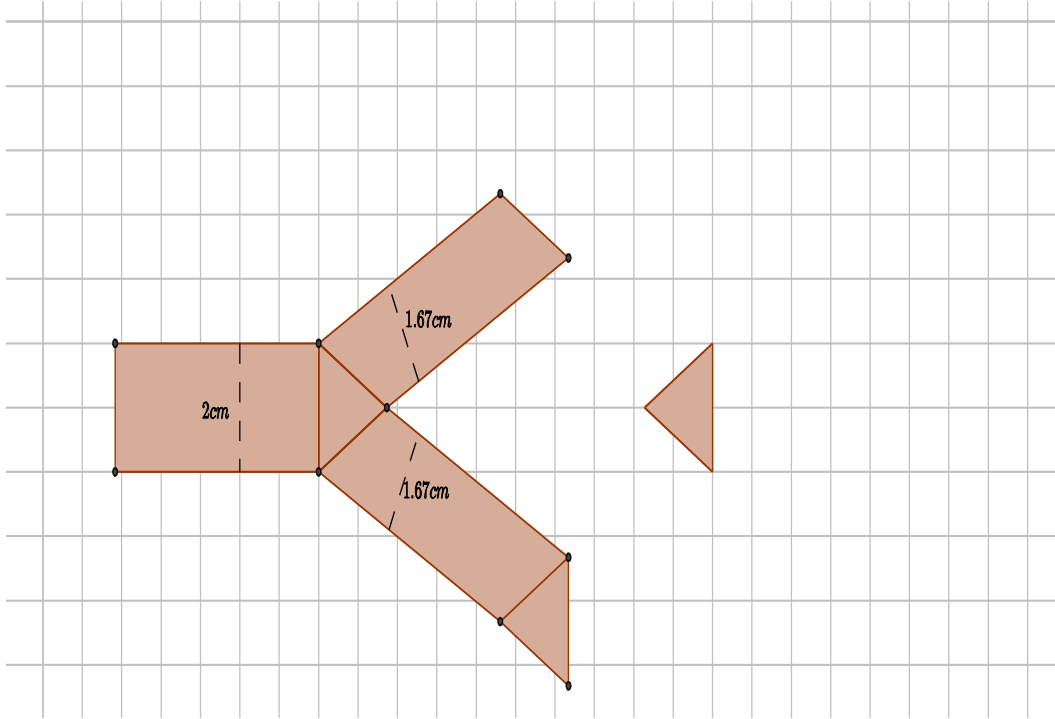
1. Reúnase con dos compañeros.



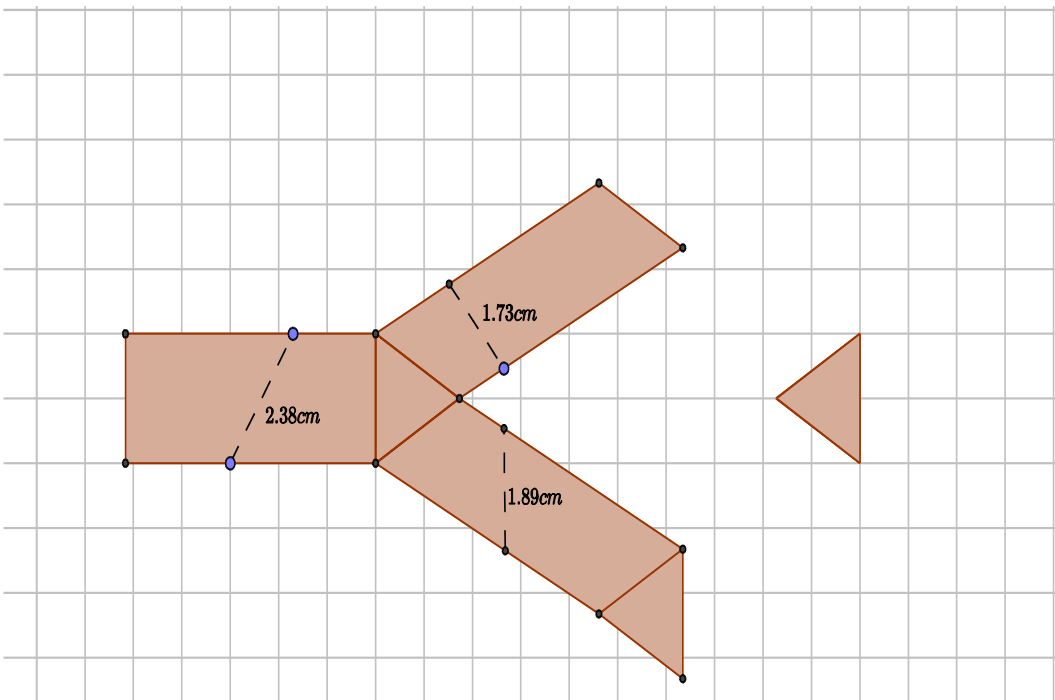
- Recorten los dos moldes, y hagan los cortes que plantean los dos obreros. Reorganicen las dos partes de cada uno de los moldes, de tal manera que obtenga un prisma triangular recto en alguno de los dos casos. ¿Con cuál de los cortes realizados por los obreros se puede transformar el molde de prisma oblicuo a recto?
- ¿Cómo son los cortes en los moldes oblicuos para transformarlos en rectos? Sugerencia: revisen la inclinación de los cortes, la distancia de los cortes a los vértices, y la forma de los polígonos de corte, entre otros. Describan el corte que debe realizarse a un prisma oblicuo para transformarlo en recto a partir de lo que observaron en la transformación de los moldes que construyeron.
- En el molde que no está marcado, verifiquen su conclusión sobre el corte. Para ello, tracen las líneas necesarias para realizar los cortes de transformación.
- ¿La columna original y la columna transformada usan la misma cantidad de concreto? Verifiquen su respuesta con el cálculo del volumen del prisma oblicuo y del prisma recto transformado.



Molde sin marcar



Molde cortado por el obrero 1



Molde cortado por el obrero 2

- e) Seleccionen a un integrante del grupo para que exponga los resultados que obtuvo en los numerales b, c y d.

5.4. Conceptos y procedimientos

Al abordar esta tarea, el estudiante aplica conceptos relacionados con la definición y caracterización de prismas triangulares oblicuos. Además, debe tener las nociones de los conceptos de perpendicularidad y paralelismo, y debe manejar las condiciones para aplicar el principio de Cavalieri en prismas triangulares. En relación con los procedimientos, aplica las fórmulas para calcular el volumen de un prisma triangular y describe el procedimiento para transformar un prisma oblicuo en uno recto (caracteriza el corte plano que se le haga al prisma oblicuo y la reorganización de las partes para que el prisma resultante sea recto).

5.5. Sistemas de representación

Al abordar esta tarea, el estudiante emplea el sistema de representación geométrico, al manipular los moldes con los desarrollos planos de los prismas, y el sistema de representación simbólico, al usar las fórmulas para calcular el volumen de los prismas.

5.6. Contextos

Consideramos que el contexto de esta tarea es profesional, al tratarse de una situación que involucra aspectos de la construcción y de la ingeniería.

5.7. Materiales y recursos

Los estudiantes deben tener a su disposición las fotocopias con la formulación de la tarea de manera individual y los moldes impresos en cartón cartulina, para que los recorten y construyan los prismas triangulares oblicuos.

5.8. Agrupamiento e interacción

La interacción de la tarea es principalmente entre los estudiantes. La interacción entre el docente y los estudiantes es necesaria cuando hay evidencia de un error. Para ello, el docente debe hacer uso de las ayudas descritas en el anexo 8. Al final de la clase, los grupos deben ser disueltos para que haya mejor disposición para la comunicación de los resultados. Los estudiantes permanecen en grupos durante el desarrollo de la actividad.

5.9. Temporalidad

Diseñamos la tarea para ser implementada en una sesión de 120 minutos. Inicialmente, el docente hace la realimentación de la tarea 1.2 Velas: presenta los principales errores en los que los estudiantes incurrieron mediante ejemplos. Luego, hace la presentación de la tarea 1.3 Columnas para puente. Para ello, proyecta la formulación y el grafo de criterios de logro. Después, los estudiantes inician el desarrollo de la tarea. Por último, el docente da el espacio para que los grupos presenten los resultados obtenidos, principalmente la caracterización del corte que debe hacerse a un prisma oblicuo para transformarlo en recto.

5.10. Errores en los que pueden incurrir los estudiantes

Al abordar esta tarea, el estudiante puede incurrir en errores relacionados con calcular el área de la base del prisma al evaluar de manera incorrecta la raíz cuadrada en la fórmula de Herón (error 26), confundir la altura del prisma con la altura de su base (error 1), no usar correctamente las unidades de longitud y área (error 18), y usar dimensiones del prisma oblicuo que no sirven para calcular su volumen (error 7). Los errores anteriores están relacionados con los procedimientos de cálculo del volumen. En cuanto a las respuestas solicitadas en la formulación, el estudiante puede incurrir en errores como obtener conclusiones incorrectas (error 27), en especial, en la caracterización del corte del prisma oblicuo para transformarlo en recto. Si el docente encuentra señales de estos u otros errores, debe hacer uso de las ayudas que describimos en el anexo 8.

5.11. Grafo de criterios de logro

En la figura 8, presentamos el grafo de criterios de logro de la tarea, en el que señalamos los procedimientos que puede usar un estudiante para resolverla, con base en el grafo de criterios de logro del objetivo 1.

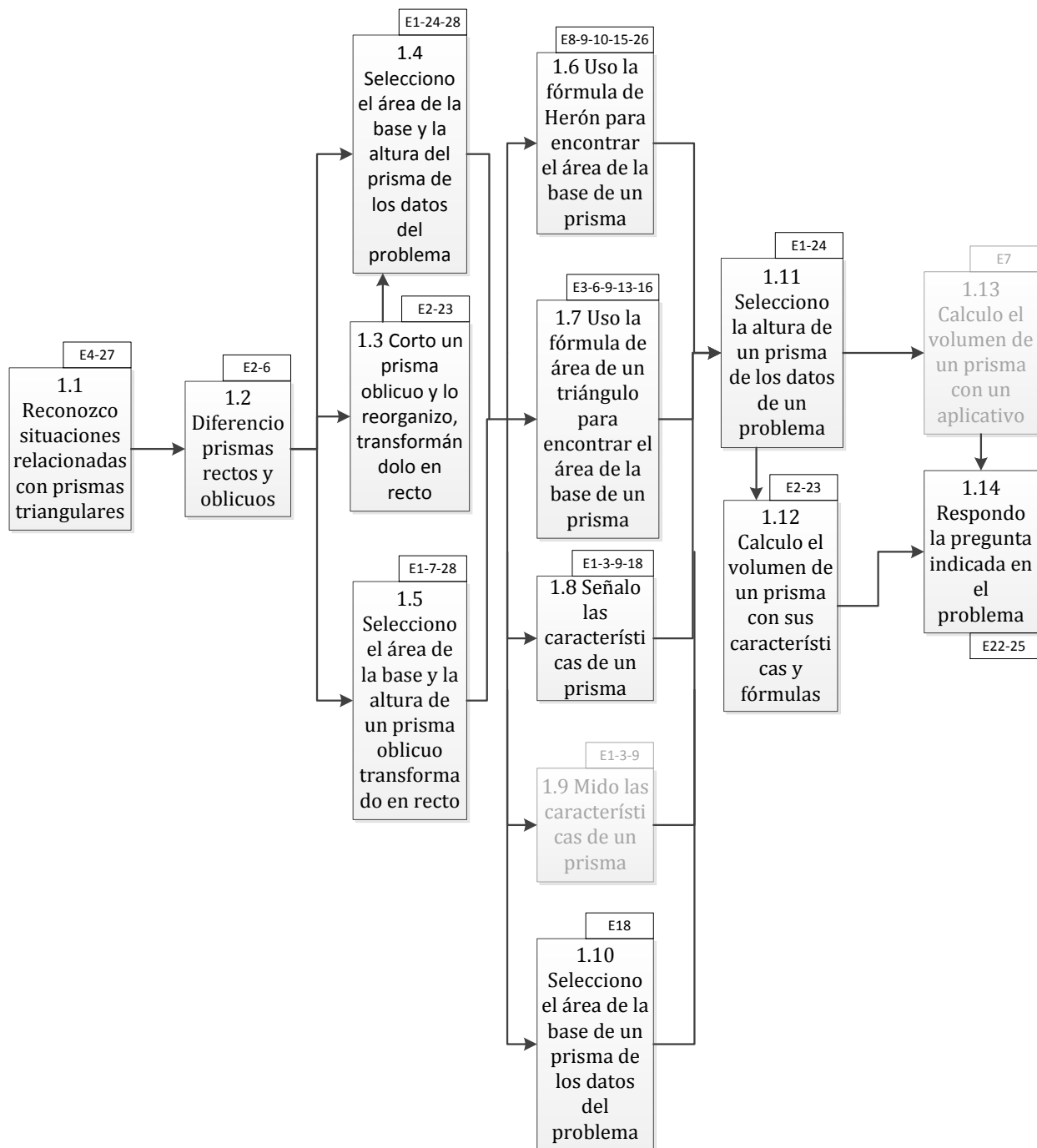


Figura 8. Grafo criterios de logro tarea 1.3 Columnas para puentes

En la figura 8, presentamos las formas de solución de la tarea. Los primeros criterios de logro están relacionados con que el estudiante se apropie de la situación y la relacione con el volumen de los prismas triangulares rectos. Luego, puede decidir si calcula el volumen del prisma oblicuo

con sus componentes, o lo transforma en prisma recto. El estudiante procede a calcular el área de la base y a señalar la altura del prisma, ya sea recto u oblicuo. Después, calcula el volumen y da respuesta a la situación.

5.12. Sugerencias metodológicas

El docente debe verificar que los moldes cumplen con las medidas reales en centímetros. Por tal motivo, sugerimos que las verifique con anterioridad mediante la regla de programas como Word. Además, al imprimir los moldes, algunos octavos de cartón cartulina quedan atascados. Sin embargo, consideramos que no es pertinente cambiar el material a cartulina, pues, al realizar los cortes, su manipulación puede tornarse difícil.

5.13. Evaluación

Durante la implementación de la tarea, el docente debe observar en qué criterios de logro hubo más estudiantes que incurrieron en errores. Sugerimos que el docente centre su mirada en los criterios de logro relacionados con la transformación de un prisma oblicuo en recto y en el cálculo del área de la base, ya que puede suceder que los estudiantes usen indiscriminadamente las longitudes dadas en los moldes.

6. TAREA 2.1 MOLDE POR TELÉFONO

Diseñamos la tarea 2.1 Molde por teléfono para contribuir al objetivo 2. En esta tarea, el estudiante debe completar las medidas de un prisma en los recuadros dados en un archivo de la aplicación GeoGebra, para que el prisma que aparezca sea idéntico al prisma dado. Puede optar por usar el ensayo y error, u otros procedimientos aritméticos o algebraicos.

6.1. Requisitos

Para abordar esta tarea, el estudiante debe dominar los conocimientos previos evaluados con la tarea diagnóstica. Además, debe tener claridad en el uso de las fórmulas obtenidas en la tarea 1.1 Fórmulas. También, debe distinguir entre las medidas de longitud, área y volumen para diferenciar los datos dados en la situación.

6.2. Metas

Con esta tarea, pretendemos que los estudiantes describan un prisma triangular a partir de su volumen; es decir, que puedan definir las longitudes de los componentes del prisma que hacen que ocupe un volumen dado inicialmente. Esto implica que reconozca las características para que dos prismas sean congruentes.

6.3. Formulación

A continuación, presentamos la formulación de la tarea que el docente debe entregar en una fotocopia de manera individual. El material para imprimir de la tarea se encuentra en el anexo 6.

Tarea 2.1 Molde por teléfono

Fernando es un estudiante de la IED José María Obando del municipio de El Rosal. A Fernando le gustó la actividad realizada en la IED Campo Alegre con los moldes para las velas. Por tal motivo, desea construir un molde exactamente igual a uno de los usados, y pide la ayuda por teléfono de su tío, que es experto en el manejo de latón para moldes. Su tío le pide las medidas necesarias para construir el molde. ¿Cuáles medidas debe darle Fernando a su tío para obtener un molde exactamente igual al que le gustó?

1. Reúnase con dos compañeros.

- En la carpeta Archivos T2.1, encontrarán un archivo llamado Elementos del prisma, en el que ustedes podrán modificar las medidas que quieran, de tal manera que puedan encontrar un prisma exactamente igual al $Prisma_{ABCDEF}$. Modifiquen los valores en los recuadros, hasta que uno de los dos prismas quede idéntico (misma forma y tamaño), mediante la herramienta de medición para obtener las medidas que ustedes consideran que se necesitan.
- Seleccionen las medidas que debe decirle Fernando a su tío para obtener el prisma del molde. Márquelas con una X.

AB	AC	BC	DE
EF	DF	AD	BE
CF	AG	BH	CI

- Usen las medidas que encontraron para comprobar que el volumen del prisma que construyó el tío de Fernando, es el mismo volumen del $Prisma_{ABCDEF}$.

2. Con los integrantes del grupo, preparen una explicación para los compañeros que justifique su propuesta.

6.4. Conceptos y procedimientos

Al abordar esta tarea, los estudiantes emplean los conceptos relacionados con los componentes y dimensiones de un prisma triangular. Ellos deben tener la noción de congruencia de sólidos y entender que dos sólidos son congruentes si tienen la misma forma y tamaño. En relación con los procedimientos, deben aplicar las fórmulas para calcular el volumen de un prisma triangular, para verificar si las medidas encontradas dan el volumen inicial, y deben conocer las propiedades de la igualdad, para resolver ecuaciones que se basan en las fórmulas del volumen.

6.5. Sistemas de representación

Al abordar esta tarea, el estudiante emplea el sistema de representación ejecutable, cuando manipula los prismas triangulares en los archivos de la aplicación Geogebra; el simbólico, al usar expresiones algebraicas con base en las fórmulas del volumen de un prisma triangular; y el geométrico, al observar las representaciones tridimensionales de los prismas triangulares en la aplicación GeoGebra.

6.6. Contextos

Consideramos que el contexto de esta tarea es social, pues los estudiantes están ante una situación que involucra a la comunidad para la cual se diseñó la unidad didáctica.

6.7. Materiales y recursos

Los estudiantes deben tener a su disposición las fotocopias de la formulación de la tarea, calculadora y computadores con la aplicación GeoGebra. Sugerimos al docente no hacer uso de la aplicación en dispositivos móviles, porque el archivo pierde la configuración y no se muestra adecuadamente. El docente tiene acceso a la carpeta con el archivo para la tarea en el anexo 9.

6.8. Agrupamiento e interacción

Los estudiantes estarán organizados en grupos de tres. La interacción se dará principalmente entre los estudiantes, pues consideramos que es importante que ellos lleguen a conclusiones, aunque no sean completamente correctas, y en la puesta en común comparen sus respuestas con las de sus compañeros. La interacción con el docente se da cuando hay evidencia de un error y él debe hacer uso de las ayudas correspondientes. El listado de ayudas se puede consultar en el anexo 8.

6.9. Temporalidad

Diseñamos la actividad para ser implementada en una sesión de 120 minutos. Inicialmente, el docente debe hacer la realimentación de las tareas del objetivo 1. Luego, el docente presenta el objetivo 2, su grafo de criterios de logro y la tarea 2.1 Molde por teléfono. Después, los estudiantes desarrollan la tarea. Para terminar la sesión de clase, el docente pide a los grupos que presenten el trabajo realizado.

6.10. Errores en los que puede incurrir un estudiante

Al abordar la tarea, el estudiante puede incurrir en errores relacionados con aspectos geométricos como señalar incorrectamente las componentes del prisma dado su volumen (error 7), no reconocer que la base y las caras laterales comparten algunas medidas (error 8) y confundir las unidades de área con las unidades de longitud (error 9). El estudiante puede incurrir en errores relacionados con aspectos aritméticos como calcular de manera incorrecta el área de la base del prisma (error 14), obtener resultados numéricos sin relacionarlos con algún requerimiento de la tarea (error 22) o sacar conclusiones incorrectas a partir de los resultados obtenidos (error 27). Al tener evidencia de estos u otros errores, el docente debe hacer uso de las ayudas propuestas en el anexo 8.

6.11. Grafo de criterios de logro

En la figura 9, presentamos el grafo de criterios de logro de la tarea, con base en el grafo de criterios de logro del objetivo 2 (figura 5). Resaltamos en el grafo de criterios de logro las posibilidades que tiene un estudiante para resolver la tarea.

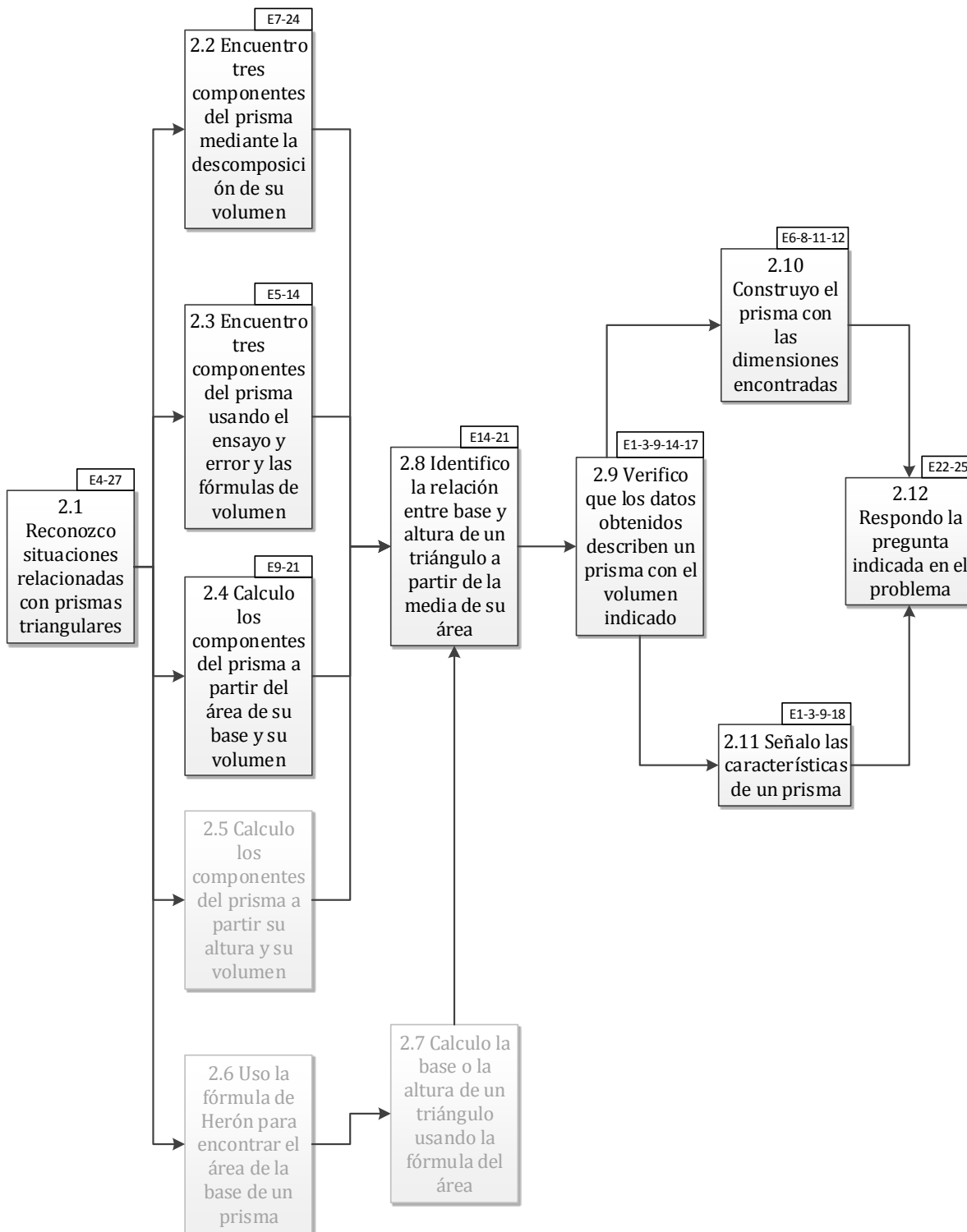


Figura 9. Grafo de criterios de logro de la tarea 2.1 Molde por teléfono

En la figura 9, presentamos las formas con las que el estudiante puede dar solución a la tarea. Inicialmente, el estudiante se apropia de la situación. Luego, hace uso de las estrategias para calcular las longitudes del prisma que contiene un volumen dado por ensayo y error, con la descomposición del volumen, por medio de una ecuación o al señalar las longitudes de los datos del problema. Después, selecciona la altura del prisma triangular y realiza un listado con los datos del prisma. A continuación, verifica que el volumen dado coincide con el volumen del prisma descrito mediante las longitudes obtenidas. Para finalizar, responde la pregunta de la tarea.

6.12. Sugerencias metodológicas

El docente debe verificar que los computadores de la institución cuentan con la aplicación GeoGebra. Sugerimos que confirme que los archivos de la tarea funcionan correctamente en los computadores. En esta tarea, no se hace necesario el planteamiento de ecuaciones, por lo que sugerimos al docente no forzar a que los estudiantes a plantearlas. Para esta tarea, el estudiante debe reconocer que existen un grupo de medidas que describen un prisma que contiene un volumen dado. Por consiguiente, es válido si un grupo resuelve la tarea por el método de ensayo y error, al reemplazar medidas al azar hasta encontrar las respuestas que pide la tarea.

6.13. Evaluación

Durante la implementación de la tarea, el docente debe observar en qué criterios de logro hubo más estudiantes que incurrieron en errores. Sugerimos que el docente centre su mirada en los criterios de logro relacionados con la obtención de las longitudes que definen la base del prisma y en la verificación del volumen del prisma descrito.

7. TAREA 2.2 PROCEDIMIENTOS

Diseñamos la tarea 2.2 Procedimientos para contribuir al objetivo 2. En esta tarea, el estudiante debe realizar los procedimientos aritméticos para resolver ecuaciones que se basan en las fórmulas de volumen. Buscamos que el estudiante pueda reconocer que el planteamiento de una ecuación es un método más preciso para obtener las medidas que describen un prisma con un volumen determinado, en comparación con el procedimiento de ensayo y error que pudo haber utilizado en la tarea 2.1 Molde por teléfono.

7.1. Requisitos

Para abordar esta tarea, los estudiantes deben dominar los conocimientos previos y los conocimientos adquiridos con las tareas anteriores. Los estudiantes deben reconocer la diferencia entre unidades de medida de longitud, área y volumen.

7.2. Metas

Con esta tarea, pretendemos que el estudiante reconozca los procedimientos aritméticos y algebraicos necesarios para encontrar las medidas de un prisma, dado su volumen. Por eso, a partir de las fórmulas del volumen, puede reconocer que plantear ecuaciones es un método de solución

más preciso. También, puede observar que, dado el volumen de un prisma, existen diferentes prismas que contienen ese volumen y que no son iguales en forma y tamaño.

7.3. Formulación

A continuación, presentamos la formulación de la tarea, que el docente debe entregar en una fotocopia de manera individual. El material para imprimir de la tarea se encuentra en el anexo 6.

Tarea 2.2 Procedimientos

3. Andrés es un estudiante que le gusta encontrar argumentos matemáticos a partir de procedimientos aritméticos. Al escuchar a Fernando hablar con su tío sobre el molde del prisma triangular, decidió plantear algunas ecuaciones a partir de datos dados, para definir las medidas de un prisma cuyo volumen es 40cm^3 . Los procedimientos que usó se explican a continuación.

Procedimiento 1

$$40\text{cm}^3 = \frac{b \times h \times H}{2}$$

Andrés usa números para la base (b) y la altura (h) y, mediante el despeje de la ecuación, calcula la altura del prisma.

Procedimiento 2

$$40\text{cm}^3 = \frac{b \times h \times H}{2}$$

Andrés usa números para la altura (h) y la altura del prisma (H) y calcula la base del prisma y el valor de b .

Procedimiento 3

$$40\text{cm}^3 = \sqrt{s \times (s - l_1) \times (s - l_2) \times (s - l_3)} \times H$$

Andrés usa números para el semiperímetro (s), dos de los lados y la altura del prisma (H) y calcula la medida del tercer lado, al despejar la ecuación.

Procedimiento 4

Andrés descompone el 40cm^3 en factores primos, y escoge tres medidas con las que, al ingresarlas en alguna de las fórmulas para calcular el volumen, se obtenga el volumen inicial.

- Escoja uno de los procedimientos realizados por Andrés y explique cuál es la medida del prisma que se obtiene al resolver la ecuación.
- Reúnase con un compañero y comparen las respuestas que obtuvieron. No importa que hayan usado procedimientos diferentes.
- Construyan un prisma a partir de las medidas que se obtuvieron con alguno de los procedimientos seleccionados.
- Verifiquen que las medidas obtenidas definen un prisma con 40cm^3 .

- e) Prepare el molde y la explicación de lo que realizó con su compañero, para presentar los resultados con los compañeros.

7.4. Conceptos y procedimientos

Al abordar esta tarea, el estudiante emplea conceptos geométricos que definen un prisma triangular y su construcción. Por otro lado, en relación con los procedimientos, debe usar las propiedades de la igualdad para resolver ecuaciones y aplicar los procedimientos que permiten la construcción de un prisma y de triángulos y paralelogramos.

7.5. Sistemas de representación

Al abordar esta tarea, los estudiantes emplean el sistema de representación geométrico, al construir los prismas a partir de las medidas obtenidas, y el simbólico, al usar el lenguaje algebraico para resolver las ecuaciones con base en las fórmulas del volumen de prismas triangulares.

7.6. Contextos

Consideramos que el contexto de esta tarea es social, pues los estudiantes están ante una situación que involucra a la comunidad para la cual se diseñó la unidad didáctica.

7.7. Materiales y recursos

Los estudiantes deben tener a su disposición las fotocopias de la formulación de la tarea, calculadora y aquellos elementos necesarios para construir el prisma, como cartón cartulina, tijeras y cinta. Además, deben contar con compás, transportador y regla.

7.8. Agrupamiento e interacción

Los estudiantes trabajarán inicialmente de forma individual y luego formarán parejas para contrastar los resultados obtenidos. Posteriormente, los estudiantes deben construir un prisma con los datos que encontraron para socializar y comparar sus prismas con los de otras parejas. La interacción se hará principalmente entre los estudiantes, y el docente interactúa con ellos cuando verifique que han incurrido en un error, caso en el que usará las ayudas que describimos en el anexo 8.

7.9. Temporalidad

Diseñamos la tarea para ser implementada en una sesión de 120 minutos. Inicialmente, el docente hará la realimentación de la tarea 2.1 Molde por teléfono. Luego, los estudiantes deben iniciar el trabajo individual, al escoger y desarrollar uno de los procedimientos descritos en la formulación. Después, conformarán parejas para comparar y compartir los resultados obtenidos. Cada pareja debe seleccionar uno de los procedimientos y construir un prisma con las medidas obtenidas. Por último, presentarán sus resultados y el docente hará el cierre de la sesión de clase.

7.10. Errores en los que puede incurrir un estudiante

Al abordar esta tarea, el estudiante puede incurrir en errores relacionados con la solución de las ecuaciones planteadas. Él puede resolver ecuaciones sin tener en cuenta las variables del área de la base (error 19) o las variables del volumen (error 20). También, el estudiante puede usar de

forma incorrecta las propiedades de la igualdad (error 21) y obtener resultados que no concuerdan con los datos suministrados (error 22). Si el docente observa que un estudiante incurre en estos u otros errores, debe usar el listado de ayudas que describimos en el anexo 8.

7.11. Grafo de criterios de logro

En la figura 10, presentamos el grafo de criterios de logro de la tarea, con base en el grafo de criterios de logro del objetivo 2 (figura 5). Resaltamos en el grafo de criterios de logro las posibilidades que tiene un estudiante para resolver la tarea.

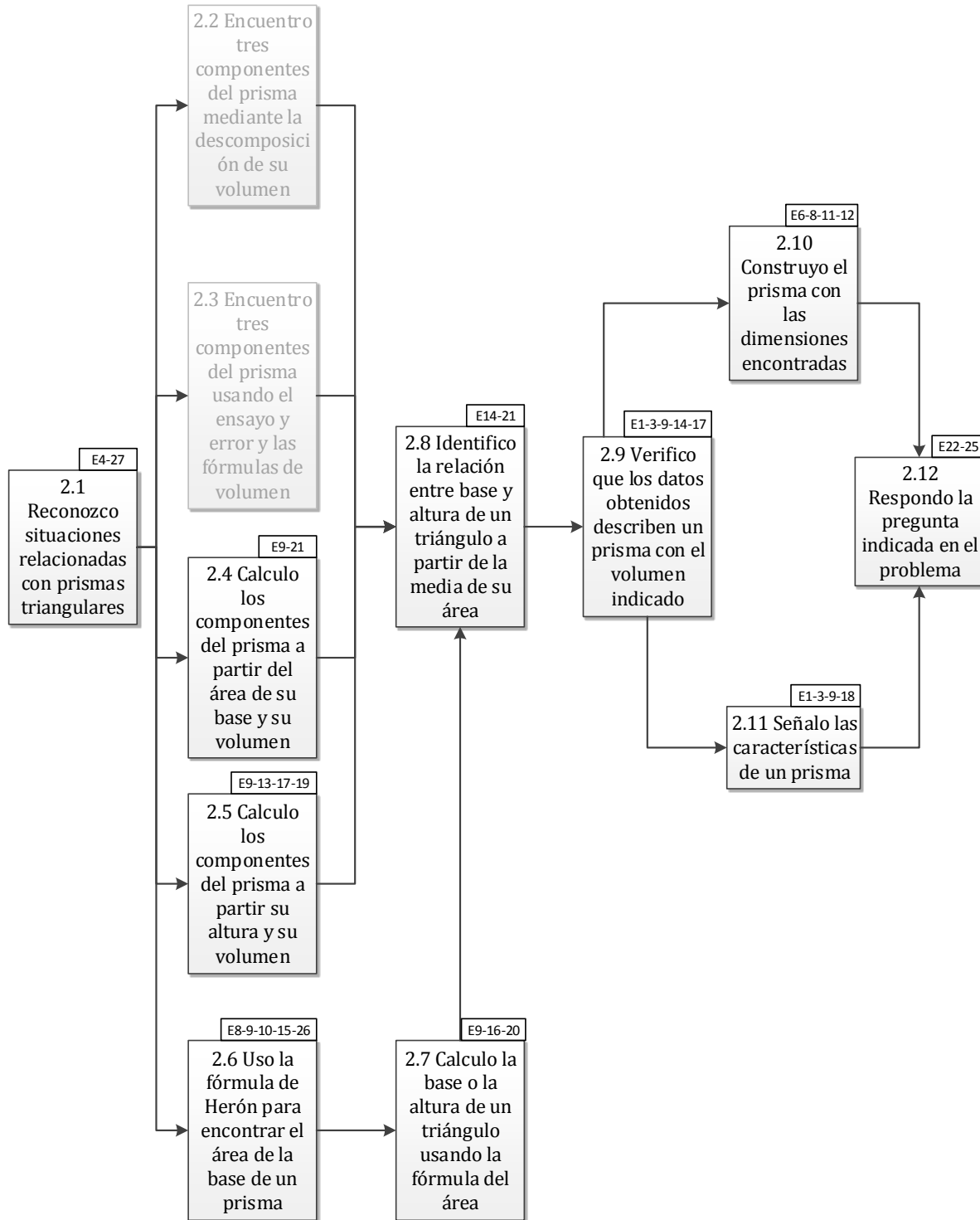


Figura 10. Grafo de criterios de logro de la tarea 2.2 Procedimientos

En la figura 10, presentamos las formas que pueden usar los estudiantes para dar solución a la tarea. Destacamos que el estudiante debe relacionar la situación con el volumen de prismas y escoger una opción para calcular las medidas con base en una ecuación. En esta tarea, el estudiante no tiene la opción de escoger medidas al azar y reemplazarlas. Además, debe verificar que las medidas obtenidas definen el prisma con el volumen dado y, por último, deben construir el prisma triangular.

7.12. Sugerencias metodológicas

El docente debe verificar que los estudiantes cuentan con las herramientas para realizar la solución de las ecuaciones (calculadora) y para construir los prismas triangulares (regla, compás, transportador, cartón cartulina). Además, el docente debe pasar por los grupos para identificar si los estudiantes han resuelto las ecuaciones y los procedimientos descritos en la formulación de manera correcta. También, el docente debe sugerir a los estudiantes que verifiquen si las medidas obtenidas definen un prisma con el volumen inicialmente dado. En esta tarea, el docente debe hacer el cierre de las tareas de aprendizaje.

7.13. Evaluación

Durante la implementación de la tarea, el docente debe observar en qué criterios de logro hubo más estudiantes que incurrieron en errores. Sugerimos que el docente centre su mirada en los criterios de logro relacionados con el planteamiento de las ecuaciones, la verificación del volumen del prisma y su construcción.

8. EXAMEN FINAL

A continuación, presentamos la descripción del examen final, con el que pretendemos evaluar la consecución de los dos objetivos de aprendizaje. El primer objetivo es evaluado con los numerales 1, 2 y 3, y el segundo con los numerales 4 y 5. Para describir el examen final, presentamos su formulación, la rúbrica de evaluación con base en los criterios de logro para cada uno de los objetivos y algunas sugerencias para su implementación.

8.1. Formulación

A continuación, presentamos la formulación del examen final, que el docente debe entregar en una fotocopia de manera individual. El material para imprimir se puede consultar en el anexo 6.

Examen final

En la carpeta examen final, encontrará los archivos necesarios para resolver los numerales 1, 2 y 3. Estos archivos están contruidos en la aplicación GeoGebra.

1. Abra el archivo *examenfinal1* y tenga en cuenta la siguiente información:

$$AC = 4cm$$

$$AB = 3cm$$

$$BC = 5cm$$

$$BE = 3cm$$

$$AG = 2.4cm$$

Andrés, un estudiante de la IED José María Obando del municipio de El Rosal, afirma que el volumen del prisma del archivo *examenfinal1*, se puede encontrar al calcular el área de la base con la fórmula de Herón, o con la fórmula del área de un triángulo. Seleccione las medidas necesarias para calcular el volumen del prisma. Aplique los dos procedimientos e indique si Andrés tiene razón. Realice los procedimientos correspondientes en los espacios destinados.

Procedimiento 1.

Escriba la medida de los lados de la base del prisma _____

Escriba la medida del área de la base del prisma _____

Procedimiento para el cálculo del área de la base

Escriba la medida de la altura del prisma _____

Escriba la medida del volumen del prisma _____

Procedimiento para el cálculo del volumen del prisma

Procedimiento 2

Escriba la medida de la base del triángulo _____

Escriba la medida de la altura del triángulo _____

Escriba la medida de la altura del prisma _____

Procedimiento para el cálculo del área de la base

Escriba la medida del volumen del prisma _____

Procedimiento para el cálculo del volumen del prisma

Responda si Andrés tenía razón en su apreciación sobre el cálculo del volumen del prisma de la figura en el archivo *examenfinal1*.

2. Abra el archivo *examenfinal2* y observe la figura que allí se muestra. Use la siguiente información.

$$EG = 3\text{ cm}$$

$$EC = 3,61\text{ cm}$$

De las siguientes medidas del prisma, seleccione aquellas que son necesarias para calcular su volumen (escriba una X al frente de la medida). Luego use la herramienta de longitud de GeoGebra para obtenerlas y realice el procedimiento para calcular el volumen del prisma.

AB	BC	BD	EG	FE
AC	AF	EC	DF	ED

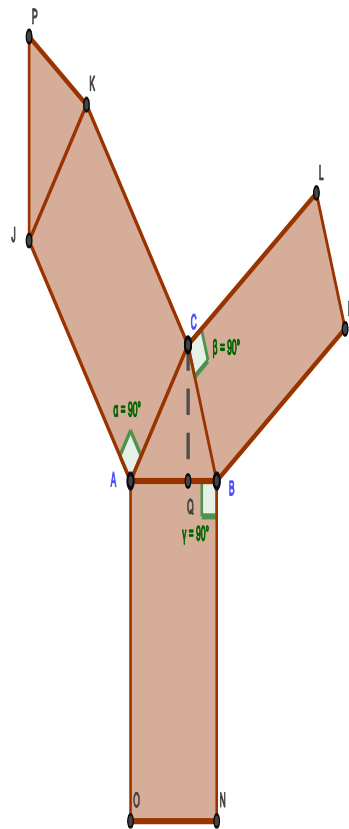
Procedimiento para el cálculo del volumen del prisma

Volumen del prisma es _____

3. Abra el archivo *examenfinal3* y calcule el volumen del prisma. Para ello, use las medidas del triángulo formado por el corte entre el prisma y el plano (ΔGHI). Con las herramientas de la aplicación GeoGebra, seleccione las medidas necesarias para calcular el volumen del prisma. Describa el proceso paso a paso.

Procedimiento para el cálculo del volumen del prisma

4. Use la siguiente figura, en la que se muestra el desarrollo plano de un prisma triangular, para responder las preguntas planteadas



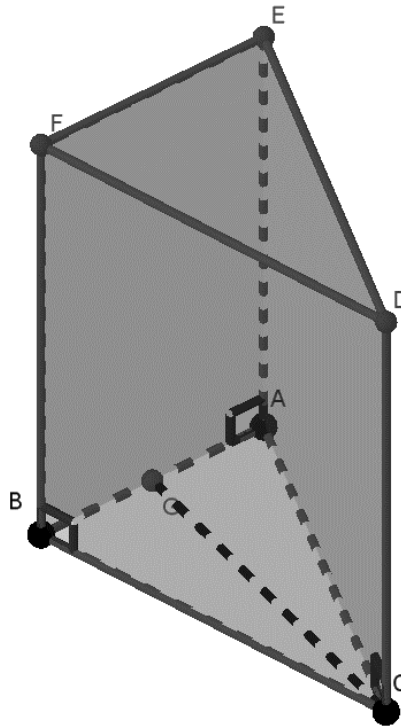
- a) Si el volumen del prisma es de 15cm^3 y se tienen las medidas $AB = 3\text{cm}$ y $CQ = 2\text{cm}$, identifique cuál de los segmentos hace falta para obtener el volumen definido. Realice el procedimiento en el siguiente espacio.

Medida del segmento _____ es _____
Procedimiento de verificación

- b) Si el volumen del prisma es de 20cm^3 y $AJ = 10\text{cm}$, ¿cuáles segmentos se deben medir para obtener el anterior volumen? ¿Cuáles podrían ser sus medidas?

Los segmentos que se deben medir son _____ y _____; sus medidas pueden ser _____ y _____ respectivamente
Procedimiento de verificación

5. Use la siguiente figura, en la que se muestra un prisma en su representación tridimensional, para responder las siguientes preguntas.



- a) Si el volumen del prisma es 12cm^3 y el área de la base es 6cm^2 , ¿cuáles son los segmentos que se deben medir para obtener dicho volumen? ¿Cuáles pueden ser las medidas de esos segmentos?

Los segmentos que se deben medir son _____, _____ y _____; sus medidas pueden ser _____, _____ y _____ respectivamente.
Procedimiento de verificación

- b) Si el volumen del prisma es 18cm^3 , identifique las medidas correspondientes a un prisma que ocupe ese volumen.

Las medidas que deben tomarse son las de los segmentos _____, _____, _____, y _____; las cuales son _____, _____, _____ y _____ respectivamente.
Procedimiento de verificación

8.2. Rúbrica de evaluación

Para evaluar y calificar el examen final, diseñamos una rúbrica para cada objetivo. La rúbrica tiene como propósito relacionar los desempeños de la escala de valoración nacional del MEN con los criterios de logros y los errores asociados a ellos. El docente tiene la posibilidad de definir el nivel de desempeño de un estudiante en el examen final. Además, la rúbrica le permite diseñar el plan de mejora para superar las dificultades y errores en los que hayan incurrido los estudiantes que quedaron en desempeño bajo. A continuación, presentamos la rúbrica de evaluación para el objetivo 1 (tabla 2) y para el objetivo 2 (tabla 3).

Tabla 2
Niveles de desempeño e indicadores para el objetivo 1

Nivel de desempeño	Indicadores	Calificación
Superior	El estudiante responde correctamente todas las preguntas de la tarea, al realizar los procedimientos con los que obtuvo los resultados numéricos. Activa los criterios de logro CdL1.2, CdL1.3, CdL1.4, CdL1.5, CdL1.6, CdL1.7, CdL1.8, CdL1.9, CdL1.10, CdL1.11, CdL1.12 y CdL1.13.	9.0 – 10
Alto	El estudiante realiza la descripción y el desarrollo de las tareas, pero presenta dificultad en los criterios de logro finales, como el CdL1.11, CdL1.12, CdL1.13 y CdL1.14. Incorre en los errores E22, E5, E7, E17, E25 o E27.	7.5 – 8.9
Básico	El estudiante describe los componentes de un prisma triangular con dificultad, al mostrar inconvenientes en la activación de los criterios de logro CdL1.8, CdL1.9 y CdL1.10. Incorre en errores como E18 o E9.	6.0 – 7.4
Bajo	El estudiante presenta dificultad en obtener los datos de los enunciados y de las figuras, y/o de utilizarlos para encontrar el área de la base de un prisma triangular. No activa los criterios de logro CdL1.1, CdL1.2, CdL1.3, CdL1.4, CdL1.5, CdL1.6 y CdL1.7. Incorre en los errores como E4, E6, E1, E10, E15, E13, E26 o E28.	Menos de 6.0

Diseñamos los numerales 1, 2 y 3 para evaluar la consecución del objetivo 1. En la tabla 2, describimos cada uno de los desempeños de la escala nacional a partir de los criterios de logro y los errores en los que puede incurrir un estudiante. El docente asignará el desempeño superior a aquellos estudiantes que no tuvieron ninguna dificultad en resolver las situaciones planteadas. Asignará el desempeño alto a aquellos estudiantes que tienen dificultad en los criterios de logro iniciales o finales. Asignará el desempeño básico a aquellos estudiantes que tienen dificultad en identificar la altura del prisma en las situaciones dadas. Por último, asignará el desempeño bajo a

aquellos estudiantes que tuvieron dificultad en los criterios de logro relacionados con el cálculo del área de la base del prisma. Definimos estos desempeños, con base en la estructura matemática y el grafo de criterios de logro para el objetivo 1, en el que le damos más importancia a los métodos de cálculo del área de la base del prisma. A continuación, presentamos la tabla 3, con la rúbrica para la valoración de los numerales del examen final, que diseñamos para el objetivo 2.

Tabla 3
Niveles de logro e indicadores para el objetivo O2

Nivel de desempeño	Indicadores	Calificación
Superior	El estudiante responde correctamente todas las preguntas de la tarea, al realizar los procedimientos con los que obtuvo los resultados numéricos. Activa los criterios de logro CdL2.2, CdL2.3, CdL2.4, CdL2.5, CdL2.6, CdL2.7, CdL2.8, CdL2.9, CdL2.10 y CdL2.11.	9.0 – 10
Alto	El estudiante realiza la descripción y el desarrollo de las tareas, pero presenta dificultad en los criterios de logro finales como el CdL2.12 y CdL2.11. Incurre en los errores E22, E9, E18 o E27.	7.5 – 8.9
Básico	El estudiante presenta dificultad en describir los componentes del prisma triangular a partir de su volumen únicamente. Esto implica que no activa los criterios de logro CdL2.2 y CdL2.3 e incurre en errores como E7 o E5. El estudiante presenta dificultad en verificar que los componentes que encontró, corresponden al prisma con el volumen dado. Es decir, no activa el criterio de logro CdL2.9 e incurre en el error E17.	6.0 – 7.4
Bajo	El estudiante presenta dificultad en obtener los datos de los enunciados y de las figuras, y/o de utilizarlos para encontrar otros componentes del prisma triangular. Esto implica que no activa los criterios de logro CdL2.4, CdL2.5, CdL2.6, CdL2.7 y CdL2.8. Incurre en los errores como E21, E19, E10, E15, E20, E13, E26 o E28.	Menos de 6.0

Diseñamos los numerales 4 y 5 para evaluar la consecución del objetivo 2. En la tabla 3, describimos cada uno de los desempeños de la escala nacional a partir de los criterios de logro y los errores en los que puede incurrir un estudiante. El docente asignará el desempeño superior a aquellos estudiantes que no tuvieron dificultad en resolver las situaciones dadas. Asignará el desempeño alto a aquellos estudiantes que tienen dificultad en relacionar los datos numéricos con la situación o que tienen dificultad en verificar que las medidas obtenidas describen un pris-

ma con el volumen dado. Asignará el desempeño básico a aquellos estudiantes que tienen dificultad en usar la descomposición o el ensayo y error para encontrar las medidas de un prisma dado su volumen. Por último, asignará el desempeño bajo a aquellos estudiantes que presentan dificultad para plantear y resolver ecuaciones con base en las fórmulas del volumen. A partir de la estructura matemática, consideramos que el estudiante, al final de la unidad didáctica, debe ser capaz de plantear y resolver ecuaciones con base en las fórmulas del volumen, para calcular medidas desconocidas de un prisma del que se tiene su volumen.

8.3. Sugerencias metodológicas

El docente debe tener en cuenta que, para la implementación del examen final, debe contar con computadores para que los estudiantes manipulen los archivos de los numerales 1, 2 y 3. Por lo tanto, el docente debe verificar que la aplicación GeoGebra se encuentre instalada y que los archivos funcionan correctamente. Los archivos para los tres primeros numerales se encuentran en el anexo 11. Por otro lado, al ser una tarea de evaluación, consideramos importante que su solución se realice de manera individual y que el docente les indique a sus estudiantes que lleven una ficha en cartulina con el listado de fórmulas para calcular el volumen de los prismas triangulares.

9. CONCLUSIONES

En este documento, describimos inicialmente lo que el docente debe tener en cuenta antes de llevar las tareas de aprendizaje a los estudiantes. Para esto, en el apartado Antes de implementar, presentamos las previsiones que hicimos en relación con el análisis de contenido: describimos la estructura conceptual, los sistemas de representación y los fenómenos. En el análisis cognitivo, describimos las previsiones en relación de las expectativas de nivel superior, objetivos y de tipo afectivo que esperamos que se desarrollen con la unidad didáctica.

En el apartado Tarea diagnóstica, presentamos la primera tarea de evaluación, con la que el docente evaluará los conocimientos previos, que son necesarios para abordar las tareas de aprendizaje. La tarea diagnóstica proporciona información para que, el docente diseñe una actividad anterior a la implementación, de tal manera que los estudiantes alcancen los conocimientos previos.

En los apartados Tarea 1.1 Fórmulas, Tarea 1.2 Velas y Tarea 1.3 Columnas para puente, presentamos las tareas de aprendizaje que aportan a la consecución del objetivo 1. Con esas tareas, los estudiantes aprenden a calcular el volumen de prismas triangulares de diferentes formas, mediante fórmulas, medición de la capacidad o transformación de las características de los prismas triangulares.

En los apartados Tarea 2.1 Molde por teléfono y Tarea 2.2 Procedimientos, presentamos las tareas que aportan a la consecución del objetivo 2. Con estas tareas, el estudiante reconoce cómo describir un prisma a partir de su volumen, al identificar las medidas que definen un prisma con un volumen dado. También, puede reconocer que existen infinitos prismas triangulares que tienen el mismo volumen, pero no la misma forma.

En el apartado Examen final, presentamos la segunda tarea de evaluación, con la que el docente evalúa la consecución de los dos objetivos. El examen final permite identificar las dificultades presentadas por los estudiantes individualmente, para diseñar un plan de mejora.

Esta unidad didáctica aporta a cambiar la forma en la que se enseña la geometría en algunas instituciones del país, debido a que el estudiante no recibe fórmulas como recetas. Por el contrario, las tareas de la unidad didáctica permiten que él haga una relación entre los componentes y el volumen de los prismas triangulares. La unidad didáctica permite que el docente elimine la visión de que algunos temas de las matemáticas escolares son más triviales que otros, y que su aprendizaje es sencillo. El docente reconoce desde el principio los conceptos y procedimientos involucrados en el tema y lo que busca que sus estudiantes aprendan. Esto permite que el diseño de las tareas tenga una finalidad clara.

Por otro lado, consideramos que los contextos utilizados en las tareas de aprendizaje son cercanos a los estudiantes, sin dejar de lado la formalidad de los contenidos matemáticos implicados. Esto mejora la disposición que tienen los estudiantes para resolver las tareas y permite que se reten a responder las preguntas de acuerdo con resultados obtenidos.

En relación con las aplicaciones utilizadas, consideramos valioso el uso de la aplicación GeoGebra, ya que permite que los estudiantes observen los prismas triangulares y puedan realizar relaciones que no se pueden observar en el tablero o que requieren de un gran número de representaciones. El uso de la aplicación motiva a los estudiantes a abordar las tareas.

10. LISTADO DE ANEXOS

A continuación, presentamos el listado de anexos que acompañan este documento. Estos anexos se pueden consultar en este enlace: <http://funes.uniandes.edu.co/11769>.

Anexo 1. Dificultades y errores. Presentamos la tabla con las tres dificultades y los errores que se categorizan en cada una de ellas.

Anexo 2. Criterios de logro. Presentamos la tabla con los criterios de logro de cada uno de los objetivos de aprendizaje.

Anexo 3. Conocimientos previos. Relacionamos los conocimientos previos y sus errores en la implementación la unidad didáctica.

Anexo 4. Tarea diagnóstica para imprimir. Presentamos la formulación de la tarea diagnóstica para imprimir.

Anexo 5. Fichas de tareas de aprendizaje. Presentamos los elementos de las tareas de aprendizaje de acuerdo con las definiciones presentadas en Gómez et al (2017).

Anexo 6. Tareas de aprendizaje imprimibles. Presentamos las formulaciones de las tareas de aprendizaje y los moldes con los tamaños exactos, para imprimir.

Anexo 7. Archivos para la tarea 1.1 Fórmula. Presentamos un archivo comprimido con los archivos necesarios para implementar la tarea 1.1 Fórmulas.

Anexo 8. Ayudas. Presentamos las ayudas para superar los errores en los que pueden incurrir los estudiantes al resolver las tareas de aprendizaje.

Anexo 9. Archivos para la tarea 2.1 Molde por teléfono. Presentamos los archivos necesarios para implementar la tarea 2.1 Molde por teléfono.

Anexo 10. Examen final para imprimir. Presentamos la formulación del examen final para imprimir

Anexo 11. Archivos del examen final. Presentamos los archivos necesarios para aplicar el examen final.

11. REFERENCIAS

- Cañadas, M., Gómez, P., Pinzón, A. (2016). *Módulo 2: Apuntes sobre análisis de contenido*. Documento no publicado. Bogotá. Universidad de los Andes.
- Gómez, P. (2018). *Módulo 8: Apuntes sobre compartir el trabajo con los colegas*. Bogotá. Universidad de los Andes.
- Gómez, P., Mora, M., Velasco, C. (2017). *Módulo 4: Apuntes sobre análisis de instrucción*. Documento no publicado. Bogotá. Universidad de los Andes.
- Gómez, P., Romero, I., (2017). *Módulo 5: Apuntes sobre análisis de actuación*. Documento no publicado. Bogotá. Universidad de los Andes.
- González, M., Gómez, P., (2017). *Módulo 3: Apuntes sobre análisis cognitivo*. Documento no publicado. Bogotá. Universidad de los Andes.
- Guerrero, A. (2002). *Notas de clase, Geometría en el plano y en el espacio*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: MEN.
- MEN. (2015). *Derechos básicos de aprendizaje*. Bogotá: MEN.
- Ministerio de Educación Cultura y Deporte. (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: matemáticas, lectura y ciencias*. Recuperado de <http://bit.ly/2JbJTer>.