Universidad de los Andes
Facultad de Educación

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ELIPSE HORIZONTAL CON CENTRO EN EL ORIGEN

YENCY NORELY DÍAZ, JANNETHE ROCÍO GÓMEZ, CARMEN YELITZA ORTIZ Y FERNANDO TORRES

BOGOTÁ, JUNIO DE 2018

En este documento, presentamos la unidad didáctica desarrollada por el grupo 5 de la quinta cohorte de la maestría en Educación Matemática de la Facultad de Educación de la Universidad de los Andes. El tema de la unidad didáctica es la elipse horizontal con centro en el origen del plano cartesiano. Implementamos la unidad didáctica en el grado décimo de educación media técnica de la Institución Educativa Rural Departamental Limoncitos. Este grado está conformado por 14 estudiantes en edades de 14 y 15 años. La institución se encuentra ubicada en el municipio de Pacho en el departamento de Cundinamarca y atiende estudiantes campesinos de estratos socioeconómicos 1 y 2, pertenecientes a familias reconstruidas. La mayoría de los estudiantes tiene un nivel académico bajo debido a que, por su entorno, no consideran el estudio como una oportunidad de vida. Para ellos, es costumbre recibir clases de forma tradicional. En esta población, identificamos dificultades para interpretar y traducir a lenguaje matemático problemas relacionados con las secciones cónicas, en especial con la elipse. Además, el tema está establecido para el tercer trimestre en el plan de área de matemáticas de la Institución Educativa Limoncitos, lo que implica que no sea estudiado con profundidad y se trabajen en su mayoría los procesos algebraicos de la ecuación de la elipse. Por esta razón, enfocamos la unidad didáctica en el tema elipse horizontal con centro en el origen del plano cartesiano para atender y minimizar esta problemática.

Consideramos que nuestra unidad didáctica posee varias virtudes: entre ellas, el lenguaje de fácil comprensión que usamos en las actividades para los estudiantes, el uso de recursos didácticos, la forma innovadora que proponemos para la implementación, el trabajo grupal requerido en algunas actividades, la interacción que fomenta la comunicación asertiva entre estudiantes y profesor, y el uso de la matemática en contextos reales. De esta forma, pretendemos que los estudiantes logren identificar la noción de lugar geométrico de la elipse y reconocer sus propiedades. También, buscamos que los estudiantes puedan resolver situaciones contextualizadas en las que intervenga la elipse horizontal con centro en el origen del plano cartesiano. Diseñamos la unidad didáctica para que cualquier profesor de matemáticas pueda adaptarla e implementarla con facilidad en su institución educativa a población estudiantil de grado décimo.

El tema aporta a los siguientes estándares básicos de competencias para los grados décimo y undécimo en el pensamiento espacial y sistemas geométricos: “resuelvo problemas en los que se usen las propiedades geométricas de figuras cónicas por medio de transformaciones de las representaciones algebraicas de esas figuras”, “identifico en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono”, “reconozco y describo curvas y/o lugares geométricos”, “identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y figuras cónicas” y “uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias” (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2006, p. 88). Igualmente, el tema elipse horizontal aporta al quinto derecho básico de aprendizaje para grado décimo: “explora y describe las propiedades de los lugares geométricos y de sus transformaciones a partir de diferentes representaciones” (MEN, 2016, p. 76).

1. Antes de implementar

En este apartado, presentamos el análisis previo a la implementación de las actividades que diseñamos para la unidad didáctica. Esta información corresponde al análisis de contenido y al análisis cognitivo. En este último, incluimos la estructura general de la unidad didáctica y los aspectos afectivos.

1. Articulación de los contenidos

Abordamos el análisis de contenido del tema elipse horizontal con centro en el origen del plano cartesiano a partir de los conceptos y procedimientos que lo caracterizan, algunas de las formas de representarlo y los contextos o fenómenos en los que se puede evidenciar y aplicar. A continuación, presentamos el mapa conceptual de la estructura de contenido del tema de nuestra unidad didáctica.

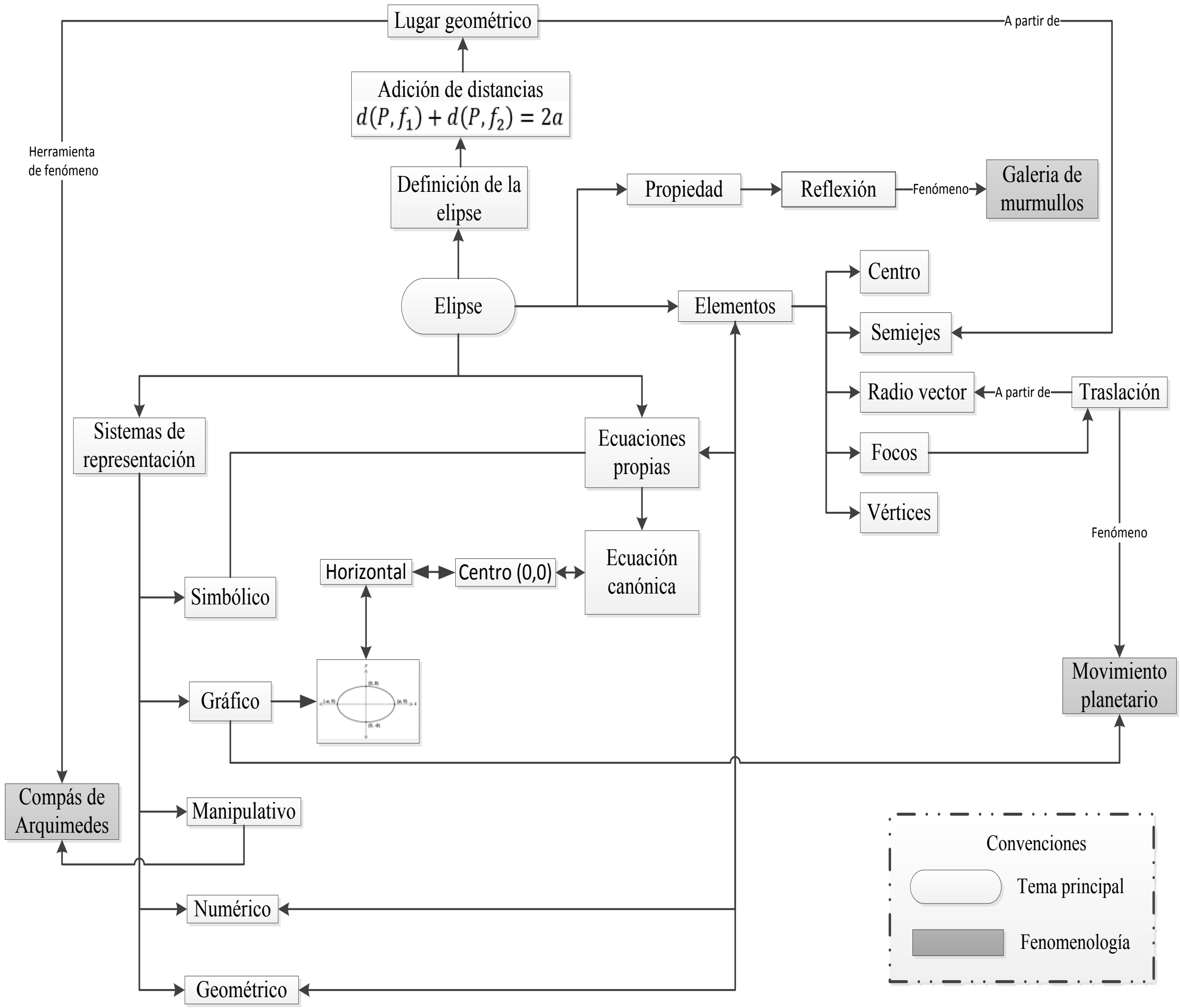


Figura 1. Mapa conceptual del tema

En el mapa, ubicamos la elipse como tema principal. En la parte superior, situamos el concepto de la elipse a partir de su lugar geométrico como la figura formada por todos los puntos de un plano tal que la adición de sus distancias a dos puntos fijos es constante $d(P, f_1) + d(P, f_2) = 2a$. Esta definición se puede comprobar mediante herramientas como el compás de Arquímedes. En la parte superior derecha del mapa, ubicamos la propiedad de la reflexión, que consiste en proyectar un rayo desde uno de los focos hacia cualquier punto del lugar geométrico, de tal forma que el rayo se refleja en el otro foco. Esta propiedad se evidencia en fenómenos como las galerías de murmullos. A la derecha del tema principal del mapa, mostramos otros conceptos que corresponden a algunos de los elementos de la elipse como el centro, los semiejes, los radios vectores, los focos y los vértices. Asociamos los radios vectores y los focos con la traslación que se presenta en fenómenos como el movimiento planetario. En la parte inferior izquierda del mapa, ubicamos los sistemas de representación. Estos sistemas son un grupo de reglas que permiten identificar y crear signos relacionados con el lugar geométrico de la elipse, sus elementos y características. Estos signos se pueden transformar en otros signos equivalentes que tienen algún tipo de relación entre ellos. Tuvimos en cuenta los sistemas de representación simbólico, gráfico, manipulativo, numérico y geométrico. El sistema de representación simbólico corresponde a la ecuación canónica de la elipse. El sistema de representación gráfico corresponde a la gráfica de la elipse en el plano cartesiano y lo relacionamos con el movimiento planetario, ya que brinda la posibilidad de visualizar e interpretar con facilidad este fenómeno. El sistema manipulativo hace referencia al uso de material manipulable que posee características de la elipse, como por ejemplo el compás de Arquímedes. El sistema numérico está relacionado con los valores que pueden tomar los elementos de la elipse. El sistema geométrico utiliza los datos de los elementos de la elipse para construirlos en cualquier plano. Es posible tomar elementos de un sistema de representación y convertirlo a otro. Por ejemplo, los parámetros a y b de la ecuación canónica (sistema de representación simbólico) pueden ser representados en un plano cartesiano como los semiejes de la elipse (sistema de representación gráfico); los valores de la ecuación canónica pueden usarse para establecer la medida de algunos elementos de la elipse, lo que permite pasar al sistema de representación numérico; y las medidas de los elementos de la elipse se pueden utilizar en un compás de Arquímedes (sistema de representación manipulativo) para construir el lugar geométrico de la elipse sobre un plano (sistema de representación geométrico).

2. Aspectos cognitivos

En este apartado, presentamos los aprendizajes que esperamos que adquieran los estudiantes en las dimensiones cognitiva y afectiva.

2.1. Expectativas de aprendizaje

Abordamos las expectativas de aprendizaje a partir de las capacidades matemáticas fundamentales y procesos matemáticos del marco PISA 2012 (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2013) y de los objetivos de aprendizaje que corresponden a los aprendizajes que esperamos adquieran los estudiantes. Incluimos los errores y dificultades que podrían surgir en el desarrollo de la unidad didáctica y los procedimientos que realizan los estudiantes para alcanzar los aprendizajes esperados. Por último, explicamos el esquema general de nuestra unidad didáctica.

Expectativas de aprendizaje de nivel superior

En el marco PISA 2012, las expectativas de aprendizaje de nivel superior están compuestas por las capacidades matemáticas fundamentales y los procesos matemáticos. Las capacidades matemáticas fundamentales corresponden a las acciones cognitivas más naturales de las matemáticas: comunicación, matematización, representación, razonamiento y argumentación, diseño de estrategias para resolver problemas, utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico y utilización de herramientas matemáticas. Estas capacidades se dan a partir de tres procesos matemáticos. El primero es formular, que se evidencia al traducir la información de un problema en contexto a un problema matemático. El segundo es emplear, que consiste en aplicar procedimientos en el problema matemático para obtener un resultado. El tercero es interpretar y evaluar, que relaciona los resultados obtenidos de un procedimiento con el contexto en el que se dio el problema.

Con nuestra unidad didáctica, esperamos contribuir a todas las capacidades matemáticas fundamentales en los tres procesos matemáticos: buscamos que los estudiantes puedan explicar los procedimientos que llevan a cabo al resolver un problema (comunicación); esperamos que los estudiantes puedan relacionar un problema en contexto con las matemáticas (matematización); queremos que los estudiantes usen distintas maneras de representar matemáticamente una situación dada (representación); esperamos que los estudiantes justifiquen cada proceso al solucionar un problema (razonamiento y argumentación); pretendemos que los estudiantes organicen la información de un problema y los pasos seguidos para su solución (diseño de estrategias para resolver problemas); queremos que los estudiantes manejen adecuadamente la simbología ya establecida de las matemáticas (utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico); incluimos recursos que les permitirán a los estudiantes encontrar relaciones matemáticas y establecer procedimientos de solución en una situación problema (utilización de herramientas matemáticas).

Conocimientos previos

Antes de enfrentarse a las actividades de la unidad didáctica, es necesario que los estudiantes tengan unos conocimientos previos que les permitan desarrollar las actividades sin mayor dificultad. Por ejemplo, los estudiantes deben diferenciar las secciones cónicas para poder identificar la forma de una elipse o determinar las coordenadas de un punto representado en el plano cartesiano. En el anexo 1[1], organizamos una lista de conocimientos previos que consideramos necesarios para nuestra unidad didáctica.

Objetivos de aprendizaje

Para nuestra unidad didáctica, establecimos tres objetivos con los que abordamos los conceptos y procedimientos, representaciones y fenómenos que mencionamos en el apartado sobre la articulación de los contenidos. En la tabla 1, presentamos los objetivos de aprendizaje.

Tabla 1

Objetivos de la unidad didáctica Elipse horizontal con centro en el origen

O	Descripción
1	Reconocer la noción de elipse a partir de su lugar geométrico
2	Identificar los elementos y propiedades que caracterizan el lugar geométrico de la elipse horizontal con centro en el origen
3	Interpretar y resolver situaciones contextualizadas en las que intervienen las propiedades y características de la elipse horizontal con centro en el origen

Nota. O: Objetivo

[11] Los anexos se pueden consultar en este enlace: http://funes.uniandes.edu.co/11771.

Con el primer objetivo, buscamos que los estudiantes reconozcan la definición del lugar geométrico de la elipse a partir del análisis de su construcción y verificación de esa definición. Con el segundo objetivo, pretendemos que los estudiantes identifiquen elementos de la elipse como centro, focos, vértices, semiejes y radios vectores a partir de su representación geométrica y gráfica, al utilizar herramientas como el compás de Arquímedes. Además, buscamos que relacionen los elementos con los parámetros de la ecuación canónica mediante el fenómeno de movimiento planetario. Para el tercer objetivo, queremos que los estudiantes interpreten la información presentada en un fenómeno como la galería de murmullos y utilicen los conocimientos adquiridos en los dos objetivos anteriores para resolver situaciones contextualizadas.

Criterios de logro

Cuando los estudiantes se enfrentan a las situaciones problema presentadas en las actividades de la unidad didáctica, ejecutan algunos procedimientos de forma organizada que llamamos criterios de logro. Redactamos los criterios de logro con un lenguaje comprensible para los estudiantes y los presentamos en el anexo 2. Las secuencias de criterios de logro conforman posibles estrategias que cada estudiante utiliza para dar solución a una situación problema.

Limitaciones de aprendizaje

Las limitaciones de aprendizaje corresponden a las dificultades y errores que los estudiantes pueden presentar al no conocer los procedimientos a realizar o ejecutarlos de manera incorrecta en el desarrollo de las actividades. Las dificultades son eventualidades que impiden la consecución de los objetivos de aprendizaje. Los errores son las manifestaciones observables que permiten evidenciar esas dificultades. Cada error está asociado a una dificultad.

Para nuestro tema, determinamos un listado de limitaciones asociadas a los conocimientos previos, como se puede apreciar en el anexo 3. Establecimos tres tipos de dificultades. La primera dificultad agrupa errores que tienen que ver con las características de figuras geométricas; por ejemplo, en un triángulo rectángulo, el estudiante puede considerar que un cateto es mayor a la hipotenusa. En la segunda dificultad, ubicamos los errores para establecer características del plano cartesiano; por ejemplo, el estudiante puede intercambiar los valores x y y al asignar la coordenada de un punto. La tercera dificultad incluye los errores para reconocer las propiedades de los conjuntos numéricos; por ejemplo, el estudiante puede ignorar los exponentes cuadrados al utilizar el teorema de Pitágoras.

Agregamos un listado de las limitaciones asociadas a los criterios de logro que afectan el alcance de los objetivos de nuestra unidad didáctica. El listado se encuentra en el anexo 4. Para estas limitaciones, determinamos cuatro dificultades. La primera contiene los errores que se pueden dar al representar geométrica o gráficamente una elipse horizontal; por ejemplo, ubicar los focos de la elipse sobre el eje normal. En la segunda dificultad, agregamos los errores para determinar las longitudes de algunos elementos de la elipse; por ejemplo, determinar que el centro de la elipse divide al eje mayor en segmentos diferentes. En la tercera dificultad, ubicamos los errores que afectan la interpretación de una situación real para identificar la representación geométrica de la elipse, como lo es confundir la información de un problema que involucra la elipse con características de otras formas geométricas. La cuarta dificultad contiene los errores que se pueden presentar al determinar equivalencias entre los sistemas de representación simbólico y gráfico. Por ejemplo, un estudiante puede asociar el parámetro b con el semieje mayor o asociar el parámetro a con el semieje menor.

2.2. Grafos de criterios de logro de los objetivos de aprendizaje

Para cada objetivo, previmos aquellas estrategias que los estudiantes podrían usar al enfrentarse a situaciones destinadas a la consecución de cada objetivo. Organizamos esas estrategias en grafos de criterios de logro. A continuación, presentamos los grafos de criterios de logro de cada objetivo.

En la figura 2, mostramos el grafo de criterios de logro del objetivo 1.

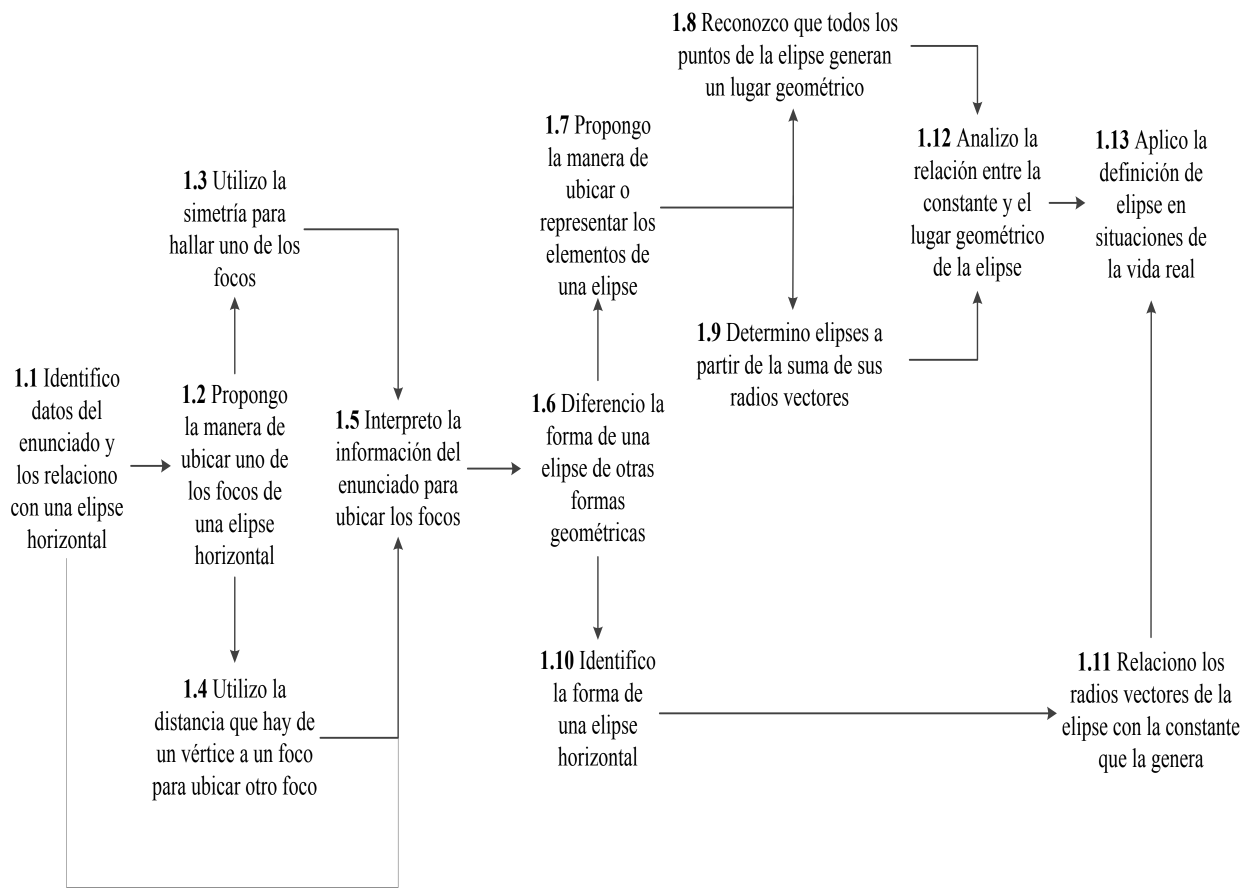


Figura 2. Grafo de criterios de logro del objetivo 1

Inicialmente, los estudiantes extraen información de una situación problema que les permite ubicar los focos de una elipse o escoger la manera de hacerlo, ya sea al utilizar la simetría con respecto al centro, o al recurrir a la distancia de un vértice horizontal a un foco. Esto los lleva a diferenciar la elipse de otras formas geométricas, bien sea al construirla o al identificarla. En caso de requerir la construcción de la elipse, presentamos dos estrategias. En la primera, los estudiantes reconocen todos los puntos de la elipse a partir del valor de la constante, y en la segunda, utilizan la suma de los radios vectores. En caso de identificar la forma de la elipse, los estudiantes prosiguen a vincular la medida de los radios vectores con la constante. Finalmente, es de esperar que los estudiantes relacionen la constante con el lugar geométrico de la elipse y la asocien con la situación presentada en el problema.

En la figura 3, presentamos el grafo de criterios de logro del segundo objetivo.

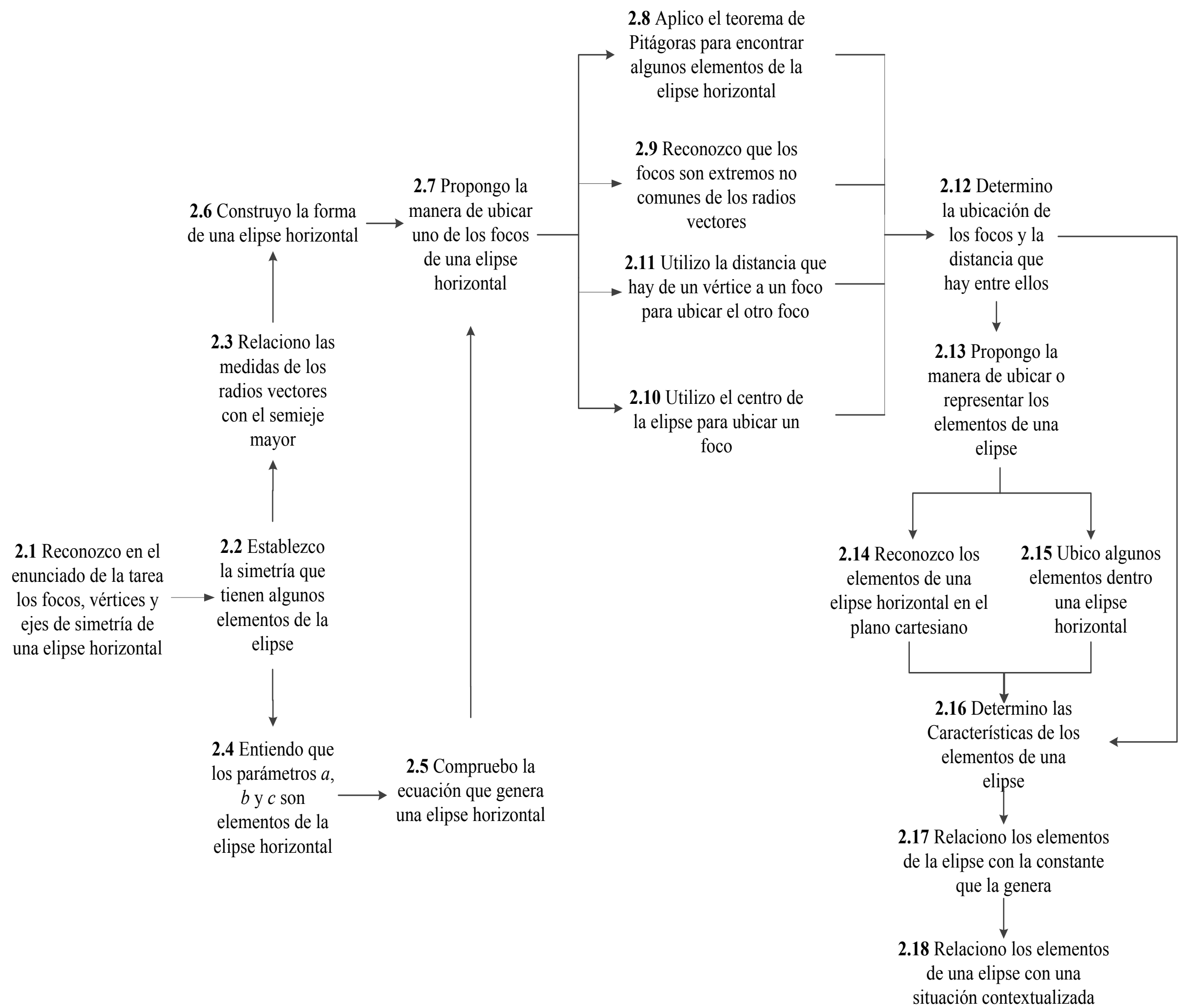


Figura 3. Grafo de criterios de logro del objetivo 2

Los estudiantes empiezan asociando los datos del enunciado con algunos elementos de la elipse como focos, vértices y ejes de simetría. Luego, determinan cuáles de estos elementos son simétricos. En seguida, pueden presentarse dos situaciones: que relacionen los radios vectores con el semieje mayor para construir el lugar geométrico de una elipse o que tomen los parámetros de la ecuación y los relacionen con los elementos de la elipse horizontal para comprobar que pertenece a la elipse. Luego, los estudiantes proponen una de cuatro maneras de ubicar los focos: utilizar el teorema de Pitágoras, usar los radios vectores, recurrir a los vértices horizontales o utilizar el centro de la elipse. Después de realizar una de las cuatro estrategias, hallan la distancia entre los focos. En ese momento, se presentan dos posibles situaciones: los estudiantes deben proponer la manera de representar los elementos o visualizar las características de una elipse ya construida. Para la primera situación, surgen dos estrategias que consisten en representar los elementos gráficamente o representarlos geométricamente. Después de construir o visualizar la representación de los elementos de la elipse, proceden a determinar las medidas de longitud de algunos de ellos y vincularlas con la constante que genera el lugar geométrico de la elipse. Finalmente, asocian los elementos y características con la situación contextualizada.

En la figura 4, presentamos el grafo de criterios de logro del tercer objetivo.

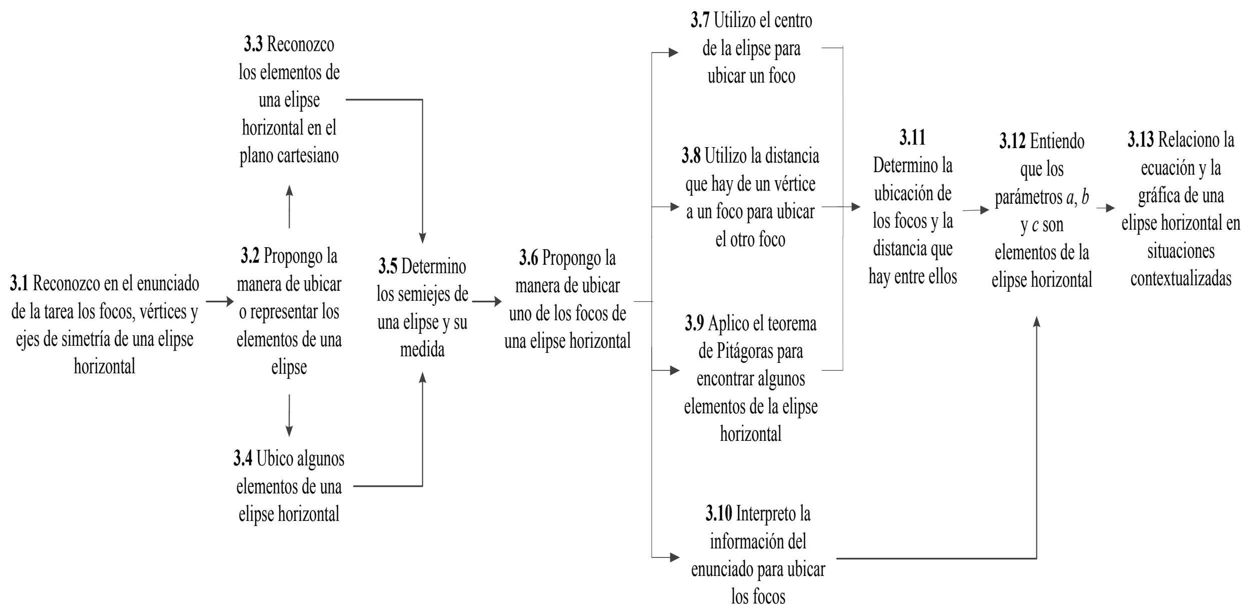


Figura 4. Grafo de criterios de logro del objetivo 3

Para la consecución de este objetivo, los estudiantes deberán aplicar estrategias ya utilizadas en los objetivos anteriores para dar solución a las situaciones problema. Como en los objetivos anteriores, los estudiantes identifican los elementos de la elipse. Esto les permite proponer una de dos estrategias para ubicar los elementos de la elipse. En la primera estrategia, reconocen y ubican elementos de la elipse en un plano cartesiano; es decir, realizan su representación gráfica. Para la segunda estrategia, representan esos elementos geométricamente. Cualquiera de las dos estrategias los lleva a hallar las medidas de los semiejes. Después, proponen una de cuatro posibles formas de ubicar los focos de la elipse: en la primera, utilizan el centro; en la segunda, requieren de la distancia entre un vértice y el foco más cercano; en la tercera, aplican el teorema de Pitágoras; y, en la cuarta, lo hacen a partir de la información del enunciado. Después de realizar alguna de las tres primeras estrategias, ubican los focos y hallan la distancia entre ellos. Luego de hallar esta distancia o de realizar la cuarta estrategia, los estudiantes pueden relacionar los parámetros a, b y c con las medidas de algunos elementos de la elipse como los semiejes. Para finalizar, establecen la relación entre la ecuación canónica de la elipse y su gráfica para dar solución al problema.

2.3. Esquema general de la unidad didáctica

Para esta unidad didáctica, llamamos tareas de aprendizaje a las actividades que realizamos para implementar en clase con los estudiantes para el alcance de los objetivos. La tarea diagnóstica y el examen son tareas de evaluación que permiten verificar los conocimientos que tiene los estudiantes antes y después de desarrollar las tareas de aprendizaje.

Diseñamos una tarea diagnóstica que evalúa los conocimientos previos que los estudiantes deben manejar antes de abordar las tareas de aprendizaje. Para la consecución de los tres objetivos de nuestra unidad didáctica, construimos dos tareas de aprendizaje por objetivo. Para el primer objetivo, diseñamos las tareas Construcción de una piscina y Mesa de billar. En la tarea Construcción de una piscina, buscamos que los estudiantes construyan el lugar geométrico de la elipse a partir de sus focos, radios vectores y constante. En la tarea Mesa de billar, pretendemos que, mediante una mesa de billar elíptica, los estudiantes relacionen la suma de los radios vectores con su constante. Las tareas del segundo objetivo se titulan Vitrales elípticos y Solsticios y equinoccios. En la primera, buscamos que los estudiantes manipulen un compás de Arquímedes para generar la elipse e identifiquen sus elementos y características. Con la segunda tarea para el segundo objetivo, queremos que los estudiantes utilicen GeoGebra para relacionar el movimiento planetario con las características de la elipse y asocien sus elementos con la ecuación canónica. Con las tareas para el tercer objetivo, Puente de arco y Galería de murmullos, pretendemos que los estudiantes solucionen problemas en contexto al relacionar la ecuación canónica de la elipse con su gráfica. Por último, construimos un examen que contiene una tarea de evaluación por objetivo. Estas tareas, evalúan el alcance de los objetivos. A continuación, presentamos en la tabla 2 el esquema general de la implementación de la unidad didáctica que contiene las sesiones requeridas para el alcance de cada objetivo, el tiempo y la descripción de cada sesión.

Tabla 2

Esquema general de la unidad didáctica

O	Sesión	Tarea	Tiempo (min)	Actividades
	1 a 3	Diagnóstica	180	Aplicación de la prueba y realimentación
1	4	T1.1 Construcción de una piscina	60	Desarrollo de la tarea T1.1
1	5	T1.2 Mesa de billar	60	Realimentación tarea T1.1 y Desarrollo de la tarea T1.2
2	6	T2.1 Vitrales elípticos	60	Realimentación tarea T1.2 y Desarrollo de la tarea T2.1
2	7	T2.2 Solsticios y equinoccios	60	Realimentación tarea T2.1 y Desarrollo de la tarea T2.2
3	8	T3.1 Puente de arco	60	Realimentación tarea T2.2 y Desarrollo de la tarea T3.1

Tabla 2
Esquema general de la unidad didáctica

3	9	T3.2 Galería de murmullos	60	Realimentación tarea T3.1 y Desarrollo de la tarea T3.2
1,2 y 3	10	Todas las tareas	60	Realimentación de la tarea T3.2 y preparación para el examen
1,2 y 3	11	Examen final	120	Aplicación del examen final
1,2 y 3	12	Examen final y cierre	60	Realimentación de los resultados del examen final y calificación de la unidad didáctica

Nota. O = Objetivo

Cada tarea de aprendizaje es requisito de la siguiente tarea, ya que los conocimientos adquiridos en cada una, permiten el alcance de las tareas posteriores. Por ejemplo en la tarea T2.1, los estudiantes ubican elementos de la elipse y determinan sus características. Esto permite que, en la tarea T2.2, logren relacionar esos elementos con los parámetros de la ecuación de la elipse horizontal con centro en el origen.

Cada sesión tiene una duración de 60 minutos a excepción de la sesión 11. La tarea diagnóstica puede implementarse en las dos primeras sesiones y realimentarse en la tercera sesión. La tarea T1.1 Construcción de una piscina requiere de 60 minutos y las demás tareas de 50 minutos. Proponemos que todas las tareas sean realimentadas durante los primeros 10 minutos de la siguiente sesión. En la sesión 10, luego de realimentar la última tarea, el profesor puede realizar un resumen de los aprendizajes esperados de las tareas implementadas, con el propósito de preparar a los estudiantes para el examen final. El examen final está previsto para ser implementado en una sesión de 120 minutos. La última sesión corresponde a la realimentación del examen final y la socialización de las notas para calificar la unidad didáctica.

2.4. Expectativas de tipo afectivo

Las expectativas afectivas están relacionadas con las actitudes que tomen los estudiantes al enfrentarse a situaciones problema. Generamos cinco expectativas que abordan las actitudes que esperamos que presenten los estudiantes al desarrollar las actividades propuestas en la unidad didáctica. A continuación, presentamos las expectativas de tipo afectivo, que además, se encuentran en el anexo 5.

Tabla 3
Listado de expectativas afectivas del tema Elipse horizontal

EA	Descripción
1	Desarrollar el interés por representar gráfica o geométricamente los elementos de la elipse
2	Desarrollar confianza en el uso de herramientas para la construcción del lugar geométrico de la elipse
3	Potenciar estrategias para la resolución de problemas que involucren la elipse
4	Promover en el estudiante el análisis y la argumentación para justificar el concepto del lugar geométrico de la elipse
5	Mejorar la autoestima del estudiante frente al uso de las matemáticas en la solución de problemas relacionados con la elipse

Nota. EA: expectativa afectiva.

Planteamos las expectativas afectivas teniendo en cuenta tres aspectos generales relacionados con la parte afectiva de los estudiantes durante su proceso de aprendizaje. La primera y cuarta expectativas tienen que ver con la búsqueda de la motivación e interés de los estudiantes en adquirir los conocimientos esperados. La segunda y quinta expectativas están relacionadas con fortalecer la autoestima y la confianza de los estudiantes al enfrentarse a una situación problema. La tercera expectativa está asociada al mejoramiento de las actitudes y hábitos de los estudiantes para fortalecer su aprendizaje.

Con las expectativas de tipo afectivo, queremos contribuir a la consecución de los tres objetivos de nuestra unidad didáctica. Con la primera expectativa, pretendemos que los estudiantes mejoren el interés para representar elementos de la elipse y contribuir a la capacidad matemática de representación. Con la segunda expectativa, buscamos que los estudiantes desarrollen confianza para construir el lugar geométrico de la elipse y aportar a la capacidad matemática de utilización de herramientas matemáticas. Con la tercera expectativa, queremos que los estudiantes fortalezcan habilidades en la solución de problemas y contribuir a la capacidad de diseño de estrategias para resolver problemas. Con la cuarta expectativa, pretendemos que los estudiantes justifiquen los procedimientos realizados para obtener el lugar geométrico de la elipse y aportar a la capacidad matemática de razonamiento y argumentación. Con la quinta expectativa, pretendemos que los estudiantes comprendan la utilidad de las matemáticas en distintos contextos y fortalecer la capacidad de matematización.

2. Tarea diagnóstica

En este apartado, presentamos la tarea diagnóstica que evalúa los conocimientos previos que se deben tener en cuenta para implementar las tareas de aprendizaje del tema elipse horizontal con centro en el origen del plano cartesiano. La tarea diagnóstica está compuesta por cuatro literales. Con el literal A, abordamos algunos conceptos como coordenadas, distancias y punto medio ubicados en el plano cartesiano. En el literal B, evaluamos la aplicación del teorema de Pitágoras, el despeje de ecuaciones y la sustitución de variables. Con el literal C, buscamos establecer si los estudiantes son capaces de identificar la forma de las cónicas. Por último, en el literal D, buscamos que los estudiantes puedan diferenciar elipses y elipsoides de otras figuras geométricas.

1. Descripción de la tarea diagnóstica

A continuación, presentamos los conceptos y procedimientos implicados en la tarea diagnóstica, los sistemas de representación que se activan, los contextos, los materiales o recursos que se utilizarán, la formulación de la tarea, el agrupamiento de los estudiantes, las interacciones previstas entre profesor y estudiantes y entre estudiantes, la temporalidad, los errores y ayudas, y las sugerencias metodológicas.

1.1. Propósito de la tarea diagnóstica

La meta de la tarea diagnóstica es evaluar los conocimientos previos necesarios para abordar las tareas de aprendizaje, por ejemplo, identificar las características de diversas figuras geométricas, establecer características del plano cartesiano y reconocer propiedades de los conjuntos numéricos.

1.2. Conceptos y procedimientos implicados en la tarea

Con la tarea diagnóstica, se puede verificar que los estudiantes aplican conocimientos como reconocer y ubicar coordenadas en el plano cartesiano, identificar las características de las rectas, diferenciar figuras geométricas y aplicar las propiedades de los conjuntos numéricos.

1.3. Sistemas de representación que se activan

El desarrollo de la tarea diagnóstica permite utilizar el sistema de representación simbólico, al realizar procedimientos con ecuaciones; el sistema de representación gráfico, al usar el plano cartesiano; el sistema de representación manipulativo, al identificar las cónicas en el cono de Apolonio; el sistema de representación numérico, al realizar operaciones con los números reales; y el sistema de representación geométrico, al identificar figuras geométricas en objetos reales.

1.4. Contextos en los que se sitúa la tarea

Para la tarea diagnóstica, utilizamos los contextos social y científico. En el literal A, manejamos el contexto social, ya que planteamos las preguntas con base en un sistema de transporte público. Los literales B al D se ubican en un contexto científico matemático, ya que los estudiantes desarrollan problemas propios de esta disciplina.

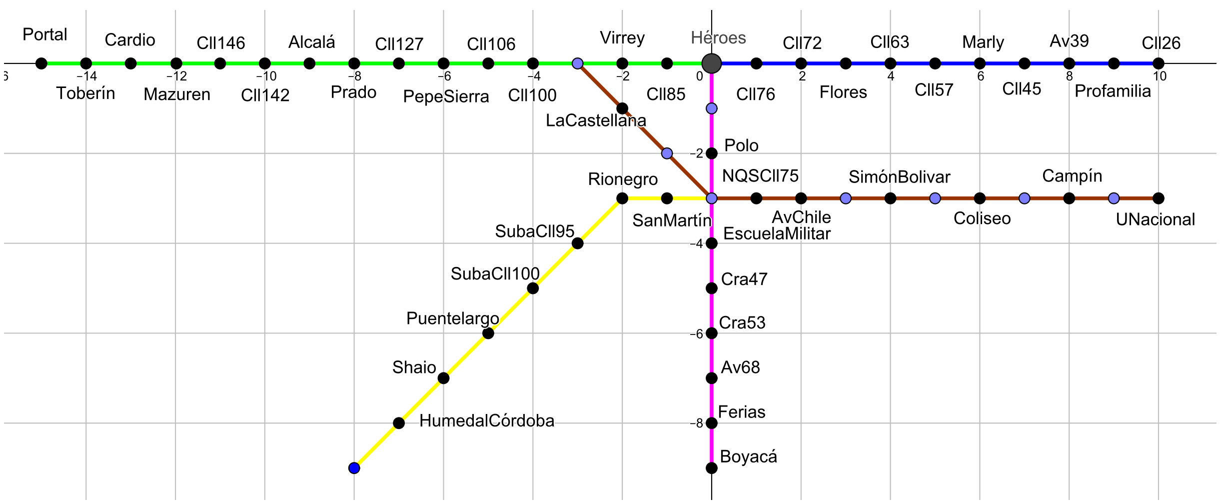
1.5. Materiales y recursos

Para la tarea diagnóstica, utilizamos un cono de Apolonio con el que los estudiantes identifican cada cónica al reproducir sus formas en un plano.

1.6. Formulación de la tarea

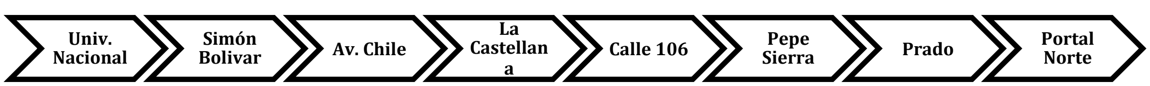
A continuación, presentamos la tarea diagnóstica para el tema de la elipse horizontal.

A. En la siguiente imagen se muestran algunos tramos del mapa del sistema de transporte TransMilenio de Bogotá, ubicado en un plano cartesiano.

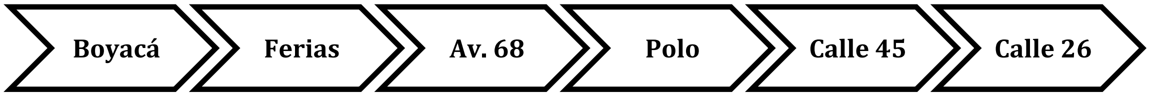


A continuación, podrás observar la información de algunas rutas.

Ruta B28

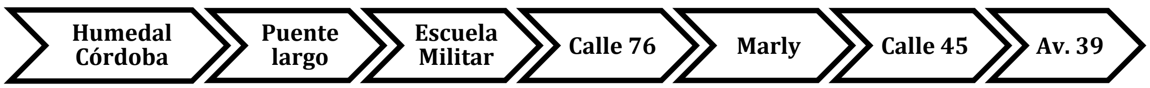


Ruta H20



Ruta B27

Ruta H15



Resuelve las siguientes situaciones.

1. Se desea construir una estación nueva en la coordenada $(5, -3)$ que se llamará *Los novios*. Ubica y marca en el mapa la posición de la nueva estación.

2. Teniendo en cuenta la ruta B28, identifica dos estaciones que tengan mayor distancia que la que hay entre las estaciones Pepe Sierra y Prado.

3. En la ruta H20, organiza de mayor a menor las distancias que hay entre cada parada y la siguiente. Indica en cada distancia la estación donde inicia y donde finaliza cada recorrido.

4. Si estás en la estación Humedal Córdoba y quieres ir hasta el Portal Norte, indica cuál debe ser tu recorrido utilizando las rutas B28, H20, B27 y H15.

5. ¿Cuáles son las coordenadas de las estaciones La Castellana, Av. 68 y Calle 106?

6. ¿Cuál es la estación que queda en el punto medio entre las estaciones Calle 45 y Flores? y ¿entre las estaciones Av Chile y Universidad Nacional?

7. Se observa que, cuando la ruta B27 hace sus paradas entre los paraderos Marly, Calle 63 y Flores, la suma de las distancias entre ellas es de tres unidades. Encuentra tres estaciones dentro de la misma ruta que mantengan la misma relación entre las distancias que las separan.

8. Escribe las coordenadas inicial y final de una persona que empieza su recorrido en la estación Calle 100 y lo termina en la estación Calle 63. ¿Qué diferencias observas en esas coordenadas?

9. Los administradores del sistema TransMilenio quieren implementar la nueva ruta 6, que se detiene en todas las estaciones desde la Boyacá hasta la Calle 26. Traza de otro color el recorrido de la ruta 6 y marca el lugar en que esta ruta forma un recorrido perpendicular a la ruta B28.

10. ¿En qué estación está ubicado el origen del plano cartesiano?

11. Si una unidad en el plano cartesiano equivale a 4 cuadras, ¿cuántas cuadras recorrió un bus de TransMilenio en cada una de las rutas B28, H20, B27, H15 y la ruta 6?

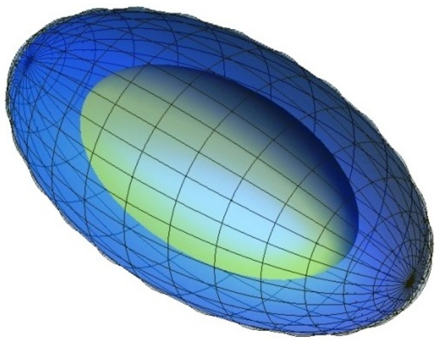
B. En un plano cartesiano, resuelve los siguientes puntos.

   1. Grafica un triángulo rectángulo cualquiera de modo que su ángulo recto coincida con el origen del plano cartesiano y halla el valor de la hipotenusa que forma. Luego, determina la ecuación de la recta que contiene la hipotenusa.

   2. En la función cuadrática $y = 2x^2 + 5x - 3$, reemplaza en x los siguientes valores $-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2$ y halla el vértice de la función. Luego, grafica la función.

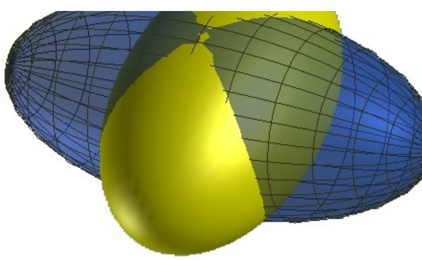
C. Utiliza el cono de Apolonio y calca las cónicas que se generan. Asígnales su respectivo nombre (circunferencia, parábola, elipse e hipérbola).

D. De las siguientes imágenes[2], selecciona cuáles se asemejan a elipsoides:_________________



a.

b.



c.

d.

e.

f.

[2] Imágenes tomadas de https://bit.ly/2HQsLhj; https://bit.ly/2lUM4pB; https://bit.ly/2lThVqs; https://bit.ly/2Gw7Uur; https://bit.ly/2k7rSTc. Todas estas figuras tienen permiso de reutilización.

1.7. Agrupamiento e interacciones

Sugerimos que los estudiantes desarrollen la tarea diagnóstica de forma individual y que no haya interacción entre estudiantes y profesor, ya que es una tarea de evaluación. Durante la sesión de realimentación, proponemos que el profesor socialice los resultados del desarrollo de la prueba e indague sobre las posibles causas de los errores en los que los estudiantes incurrieron.

1.8. Temporalidad

La implementación de la tarea diagnóstica requiere de dos sesiones de 60 minutos. En la primera sesión, los estudiantes realizan el literal A y, en la segunda sesión, desarrollan los literales B, C y D. Recomendamos que el profesor utilice otra sesión de 60 minutos para realimentar la tarea.

1.9. Errores en los que pueden incurrir los estudiantes y ayudas

En el desarrollo de la tarea diagnóstica, los estudiantes pueden incurrir en algunos errores relacionados con conocimientos previos (anexo 3). Para ello, el profesor proporcionará ayudas que les permitan a los estudiantes superar esos errores y lograr los conocimientos previos. Por ejemplo, si los estudiantes incurren en el error de considerar iguales las coordenadas de dos puntos diferentes del plano cartesiano, el profesor puede aclararles que todo punto diferente en el plano cartesiano tiene coordenadas distintas y puede mostrarles un ejemplo. En el anexo 6, proporcionamos un listado de ayudas asociadas a los errores de los conocimientos previos.

1.10. Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Antes de implementar la tarea diagnóstica, el profesor debe verificar que tiene la tarea impresa y el cono de Apolonio para hacerle entrega del material a los estudiantes. Es importante que, antes de iniciar la implementación de la tarea diagnóstica, el profesor explique a los estudiantes que el propósito de la tarea es indagar acerca de los conocimientos que deben tener antes de iniciar las tareas de aprendizaje de la unidad didáctica. Sugerimos que el profesor no intervenga en el desarrollo de la tarea, pero sí verifique que cada uno de los estudiantes la esté desarrollando. Para la realimentación de la tarea, el profesor puede solicitar la participación en el tablero de varios estudiantes que mostraron algunas dificultades. La intención es que los estudiantes identifiquen sus errores y de esta manera, el profesor pueda proporcionar las ayudas sugeridas. Si el profesor lo cree pertinente, puede considerar el interés que muestren los estudiantes en el desarrollo de la tarea diagnóstica para asignar una valoración cuantitativa a esta tarea, sin tener en cuenta si los procedimientos realizados son correctos o no.

3. Tareas de aprendizaje

En este apartado, describimos los elementos que caracterizan las tareas de aprendizaje pertenecientes a los tres objetivos de la unidad didáctica.

1. Tarea T1.1 Construcción de una piscina

La tarea T1.1 Construcción de una piscina presenta una situación problema de una familia. En ella, los estudiantes deben indagar algún procedimiento que permita construir el lugar geométrico de una elipse para dar forma a una piscina y presentar su propuesta a sus compañeros de clase. La intención de la tarea es introducir a los estudiantes en el tema de la elipse horizontal y que conozcan la metodología que se llevará a cabo en todas las actividades de la unidad didáctica.

1.1. Descripción de la tarea

A continuación, describimos los aspectos más relevantes que tuvimos en cuenta para estructurar la tarea.

Requisitos de la tarea

Para abordar esta tarea, los estudiantes deben analizar la información que se les presenta en un texto. Además, deben reconocer valores constantes, la forma de las secciones cónicas, y las características del lugar geométrico de la circunferencia y la parábola.

Aportes de la tarea a los objetivos de aprendizaje

La tarea permite construir la forma del lugar geométrico de la elipse a partir de los focos y su constante mediante diferentes estrategias de solución. De esta manera, la tarea contribuye al objetivo, pues los estudiantes determinan la noción del lugar geométrico de una elipse a partir de su construcción.

Conceptos y procedimientos implicados en la tarea

La tarea construcción de una piscina permite reconocer la noción de focos, radios vectores y la constante del lugar geométrico de la elipse. Para los focos, los estudiantes identifican que estos son dos puntos fijos. Para los radios vectores, establecen que son segmentos que comparten un extremo y los extremos no comunes son los focos. La suma de las distancias de estos segmentos es la constante de la elipse. Para el lugar geométrico, los estudiantes reconocen que los puntos comunes de los radios vectores generan la forma de la elipse.

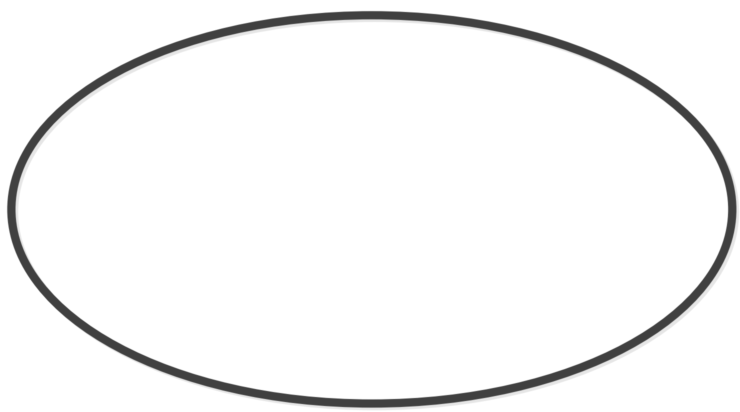
Sistemas de representación que se activan
El desarrollo de la tarea permite utilizar el sistema de representación manipulativo cuando los estudiantes utilizan una cinta métrica y la tiza para construir el lugar geométrico de la elipse. Además, se usa el sistema de representación geométrico al construir la elipse sobre un plano.

Contextos en los que se sitúa la tarea
Situamos la tarea en un contexto personal, ya que corresponde a desarrollar una actividad de interés familiar.

Materiales y recursos
La tarea requiere del uso de una cinta métrica (decámetro) que corresponde a la constante de la elipse y con ella los estudiantes pueden determinar su medida y los radios vectores. Además, proponemos el uso de una tiza para que los estudiantes puedan marcar en el piso la forma de la piscina.

Formulación de la tarea
Los estudiantes reciben de su profesor un documento con la siguiente información.

> *Construcción de una piscina*
>
> Pedro y sus dos hijas María y Juana, grafican en el piso del patio de su casa la forma que tendrá una piscina que desean construir. María y Juana se ubican a cierta distancia en los puntos donde se colocarán los desagües de la piscina. Ellas tendrán una cinta métrica no elástica atada a sus pies mientras su padre realiza un procedimiento que le ayuda a obtener la forma de la piscina que se muestra en la siguiente figura.



> En grupos de tres personas, diríjanse al patio del colegio y resuelvan los siguientes puntos.

1. Discutan en grupo sobre cuál pudo ser el procedimiento que realizó Pedro. Luego, con la cinta métrica y la tiza apliquen el procedimiento que dedujeron para dibujar en el piso del patio la figura obtenida por Pedro para el diseño de la piscina.

2. Describan los pasos que han seguido para dibujar la forma de la piscina.

3. Presenten ante sus compañeros del curso su propuesta para la construcción del diseño de la piscina.

4. ¿Cuál o cuáles figuras del diseño de la piscina propuestas por todos los grupos son similares a la que construyeron Pedro y sus hijas? y ¿cuáles no?

5. ¿Cuál fue el proceso seguido por los estudiantes que hicieron la figura similar a la construida por Pedro y sus hijas para el diseño de la piscina?

6. ¿Qué sucede con la gráfica del diseño de la piscina si Pedro reduce la longitud de la cinta métrica que se amarra a los pies de Juana y María? ¿Qué sucede si Pedro aumenta la longitud de la cinta métrica?

7. ¿Qué relación tiene la cinta métrica amarrada a los pies de Juana y María con la figura del diseño de la piscina?

Agrupamiento e interacción
Para esta tarea, se requieren grupos de mínimo cuatro estudiantes. Esto les permitirá asumir los roles necesarios para resolver los diferentes puntos de la tarea. Dos estudiantes se ubican en los focos: uno traza el lugar geométrico de la elipse y el otro se encarga de tomar los apuntes de los datos solicitados en la tarea. Para el agrupamiento de los estudiantes, recomendamos que, en cada grupo, haya estudiantes de diferente nivel de desempeño para promover el trabajo en equipo. Los estudiantes discutirán los procedimientos de solución de los tres primeros puntos al interior de cada grupo. Luego, presentarán su propuesta ante todo el curso para determinar el procedimiento apropiado para construir la piscina y darán continuidad a los siguientes numerales de la tarea en cada grupo. El profesor interactúa con los grupos durante la ejecución y orienta las conclusiones dadas durante la socialización.

Temporalidad
Inicialmente, se puede presentar a los estudiantes la tarea, entregar los materiales y conformar los grupos en 10 minutos. Luego, se desarrollan los numerales 1 al 3 en aproximadamente 20 minutos. Posteriormente, en 10 minutos se puede poner en común con todos los grupos los resultados obtenidos. El resto de la tarea se desarrolla y se pone en común en 20 minutos. En la siguiente sesión, sugerimos utilizar 10 minutos para hacer la respectiva realimentación.

1.2. Grafo de criterios de logro de la tarea
En la figura 5, presentamos el grafo de criterios de logro del objetivo 1. Encerramos con rectángulos los criterios de logro que conforman las estrategias de solución que los estudiantes pueden tomar para resolver la tarea T1.1 Construcción de una piscina. Además, ubicamos en cada criterio de logro, el código de los errores mostrados en el anexo 4 en los que podrían incurrir los estudiantes al desarrollar estos procedimientos.

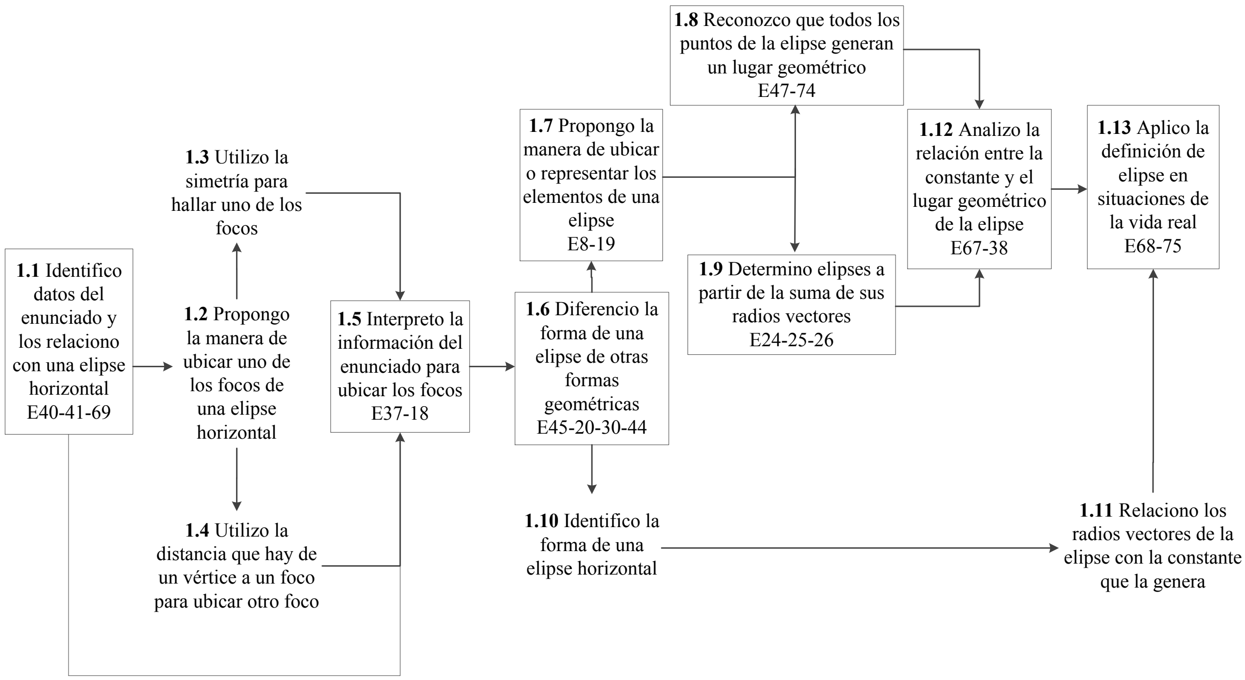


Figura 5. Grafo de criterios de logro de la tarea T1.1 Construcción de una piscina

En la tarea T1.1 Construcción de una piscina, los estudiantes relacionan los datos del enunciado con los focos y la constante de la elipse. Con esta información, ubican los focos de la elipse. Después, diferencian de otras figuras geométricas la representación geométrica dada en la formulación para proponer la manera de construir el lugar geométrico de la elipse. Se pueden presentar dos situaciones. En la primera, los estudiantes generan el lugar geométrico de la elipse con el valor de la constante y, en la segunda, pueden hallarlo con la suma de los radios vectores. Luego, establecen la relación entre la constante y el lugar geométrico de una elipse. Por último, los estudiantes identifican esta relación y la verifican en la situación en contexto.

1.3. Errores en los que puede incurrir el estudiante y ayudas

Cuando los estudiantes se enfrentan al desarrollo de la tarea, es posible que incurran en errores que les impidan realizar algún procedimiento de manera adecuada o que no puedan solucionar la tarea. El profesor puede intervenir al brindar ayudas para que los estudiantes superen esos errores. Presentamos las ayudas para esta tarea en la tabla 1 del anexo 7. Identificamos que los estudiantes pueden incurrir en errores como colocar puntos diferentes a la ubicación de los focos en el interior de la elipse. El profesor puede brindar una ayuda, al aclarar que los focos se encuentran ubicados sobre el eje mayor. También, podrían confundir la información de un problema que involucre la elipse con otras formas geométricas. La ayuda que proponemos para superar este error consiste en formular preguntas como ¿qué forma geométrica se está determinando? o ¿cuál es la diferencia con la forma de la piscina?

1.4. Actuación del profesor

Durante la implementación de la tarea, sugerimos que el profesor presente a los estudiantes la finalidad de la tarea, la manera en que se agruparán, los materiales y recursos que se utilizarán y la hoja impresa con la formulación de la tarea. También, sugerimos hacer una marca a la cinta métrica de cada grupo y aclarar que esta medida no se puede modificar hasta que el profesor lo indique. El profesor tendrá que verificar que todos los integrantes del grupo asuman un rol dentro del desarrollo de la tarea y brindar las ayudas respectivas cuando identifique que han incurrido en algún error, ya sea durante el desarrollo de la tarea, en la puesta en común o en la realimentación.

1.5. Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Durante la implementación de la tarea, el profesor debe estar al tanto de cada paso que realicen los grupos de estudiantes, con el fin de establecer si comprendieron adecuadamente las instrucciones de la tarea. El profesor debe verificar que la forma de la elipse que deben reproducir los estudiantes sea la correcta. Además, los grupos pueden realizar observaciones de las figuras de los otros compañeros para identificar similitudes y diferencias. También, el profesor debe estar al tanto del registro de la producción escrita de cada grupo, solicitado en el planteamiento de la tarea, ya que este es el recurso para valorar más adelante el logro del objetivo. Por último, sugerimos que el profesor realice una puesta en común sobre la manera en que cada grupo llevó a cabo el desarrollo de la tarea.

1.6. Evaluación

Para que el profesor pueda reconocer si los estudiantes alcanzaron la meta de la tarea, puede utilizar el grafo de criterios de logro y verificar si cada grupo de estudiantes logró desarrollar en mayor medida los procedimientos de los criterios de logro 1.1, 1.5, 1.12 y 1.13. También, para evaluar la tarea, es relevante revisar la producción escrita de cada grupo, pues allí deben estar los pasos que realizaron para proponer la solución al problema.

2. Tarea 1.2: Mesa de billar

En la tarea T1.2 Mesa de billar, presentamos a los estudiantes un juego con una mesa de billar de forma elíptica. Los grupos de estudiantes deben jugar en la mesa para hallar algunas características del lugar geométrico de la elipse. La intención de esta tarea es complementar lo aprendido con la tarea anterior para lograr el alcance del primer objetivo y dar herramientas a los estudiantes para desarrollar las demás tareas de la unidad didáctica.

2.1. Descripción de la tarea

A continuación, presentamos los elementos más representativos de la tarea.

Requisitos de la tarea

Para lograr el desarrollo de esta tarea, los estudiantes deben saber tomar medidas de segmentos y deben conocer la forma de una elipse y sus focos.

Aportes de la tarea a los objetivos de aprendizaje
Con esta tarea, los estudiantes pueden determinar la ubicación de los focos y sus características al identificar que se cumple la propiedad de la reflexión en el desplazamiento de los lanzamientos de una pelota de caucho sobre la mesa de billar. La tarea aporta al desarrollo del objetivo pues los estudiantes, al realizar el juego, identifican el lugar geométrico de la elipse y su relación con la constante que genera las distancias de la trayectoria de la pelota.

Conceptos y procedimientos implicados en la tarea
Con la tarea Mesa de billar, los estudiantes pueden identificar las características de algunos elementos de la elipse como los focos y radios vectores. Los estudiantes determinan un foco a partir del otro foco. También, establecen que los radios vectores son rayos que se generan al desplazar un objeto desde uno de los focos a cualquier punto del lugar geométrico y ese mismo rayo se refleja en el otro foco. Además, verifican la definición de lugar geométrico de la elipse a partir de la suma de los radios vectores.

Sistemas de representación que se activan
El desarrollo de la tarea implica el uso del sistema de representación manipulativo, al desarrollar el juego en la mesa de billar elíptica, y el sistema de representación numérico, al tomar medidas de algunos puntos a los focos y establecer la constante del lugar geométrico de la elipse.

Contextos
La tarea Mesa de billar se ubica en un contexto personal, ya que se usa un juego para resolver la tarea.

Materiales y recursos
La tarea requiere de una mesa de billar en forma elíptica construida en madera, una pelota de caucho y una regla. La pelota hace el papel de bola de billar, que se golpea desde uno de los focos para que rebote en el borde de la mesa y pase por el otro foco. Estos dos desplazamientos corresponden a los radios vectores. Los estudiantes utilizan la regla para medir los desplazamientos de la pelota en varios lanzamientos.

Recomendamos que la mesa de billar sea construida con anterioridad. En la figura 6, mostramos el ejemplo de una mesa de billar elíptica.

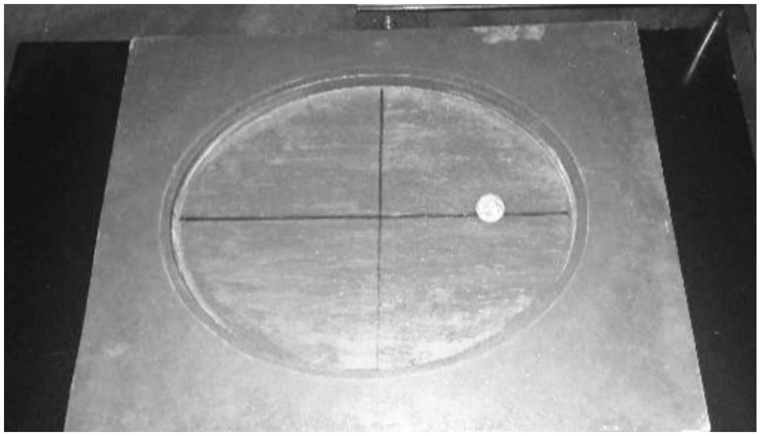


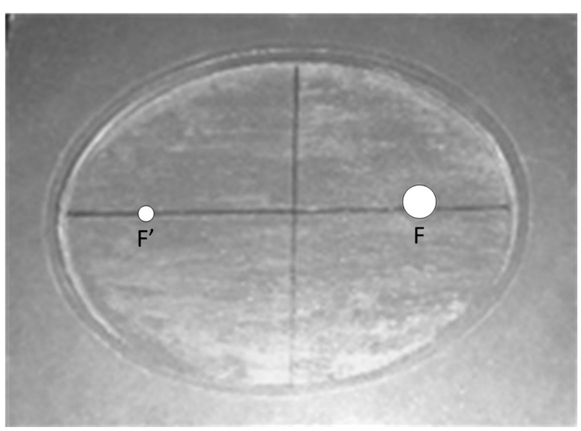
Figura 6. Mesa de billar elíptica

Se puede recurrir a un carpintero para que realice el corte elíptico con una caladora sobre una lámina de madera. El profesor debe brindarle al carpintero las instrucciones necesarias para que el corte cumpla con las características del lugar geométrico de la elipse o llevarle la figura del tamaño requerido. Luego, debe pegar la lámina cortada sobre una lámina completa, de modo que la mesa quede con borde en bajo relieve para que éste haga el papel de la banda, en donde debe rebotar la pelota de caucho. Finalmente, debe marcar los ejes de la elipse y generar el orificio en uno de los focos con una broca espada. Sugerimos usar pelotas de caucho, ya que es el material que permite realizar de mejor forma la trayectoria requerida para la tarea.

Formulación de la tarea

El profesor organizará los grupos de trabajo y entregará a los estudiantes una hoja con la instrucción de la tarea, al igual que los recursos requeridos.

> *Mesa de billar*
>
> Una mesa de billar elíptica como la que se muestra en la figura, tiene el siguiente funcionamiento. Si ponemos la bola de billar en el punto F de la mesa y la golpeamos en cualquier dirección, la bola rebotará en la banda una vez y caerá en el agujero F´. Es de aclarar que el golpe dado a la bola debe ser en su centro para no generar efectos que desvíen su trayectoria.



Utilicen la mini-mesa elíptica, una pelota de caucho que cumplirá el papel de bola de billar y una tiza para realizar marcaciones. Respondan los siguientes puntos.

1. Encuentren y marquen con la tiza el punto en el que es posible colocar la pelota para que, al lanzarla contra el borde de la mesa, rebote justo hacia el punto F' u orificio. Para encontrar el punto, utilicen características marcadas de la mesa y escriban la estrategia utilizada.

2. Realicen un lanzamiento directo desde el punto marcado hasta el orificio, ¿la distancia recorrida por la pelota en ese lanzamiento sería mayor o menor que un lanzamiento que toque la banda?

3. ¿Tiene que ver la información hallada en los puntos 1 y 2 con la forma de la mesa? Justifiquen su respuesta.

4. Con la tiza, marquen el punto de la banda donde toca la pelota en cinco lanzamientos acertados y midan los desplazamientos seguidos por la pelota. Registren estos resultados en la siguiente tabla. Tengan en cuenta que la Distancia 1 es la longitud del desplazamiento de la pelota desde el punto inicial hasta el golpe en la banda, y la Distancia 2 es la longitud de su desplazamiento desde el golpe en la banda hasta el orificio.

Tabla: *Registro de medidas*

Lanzamientos (L_i)	Distancia 1	Distancia 2	Suma de distancias
L_1			
L_2			
L_3			
L_4			
L_5			

5. ¿Qué relación existe entre las sumas de las distancias de todos los lanzamientos acertados?

6. Si se ampliara el tamaño de la mesa, ¿qué creen que ocurre con la suma de las distancias?

7. Teniendo en cuenta los resultados de las sumas de las distancias de la tabla del punto 4, ¿qué relación tienen las medidas de los desplazamientos de varios lanzamientos de la pelota con la forma del borde de la mesa?

8. ¿Por qué los lanzamientos acertados se logran únicamente desde el punto hallado en el numeral 1?

Agrupamiento e interacción

Los estudiantes pueden ser agrupados según el número de mesas de billar que se tengan disponibles para el desarrollo de la tarea. Además, recomendamos ubicar en cada grupo estudiantes que hayan obtenido diferentes niveles de desempeño en la tarea anterior. Esto permite que los estudiantes puedan relacionarse con otros compañeros y proponer estrategias de solución de la tarea. Los grupos pueden determinar sus propias reglas de juego, siempre y cuando puedan participar todos sus integrantes y realizar varios lanzamientos. El profesor estará atento a colaborar en los grupos que presenten algún tipo de duda o dificultad.

Temporalidad

El profesor puede iniciar con la presentación de la tarea, la entrega del material y la conformación de los grupos en 5 minutos. Luego, los estudiantes pueden desarrollar los numerales de la tarea en 30 minutos. En los 15 minutos restantes, es posible realizar la puesta en común de los resultados, las conclusiones y la entrega de la producción escrita de cada grupo al profesor. Para realimentar la tarea, sugerimos utilizar 10 minutos en la siguiente sesión.

2.2. Grafo de criterios de logro de la tarea

De la misma forma que presentamos el grafo de la primera tarea del objetivo 1, presentamos en la figura 7 el grafo del objetivo en el que aparecen encerrados en rectángulos los criterios de logro relacionados con esta tarea.

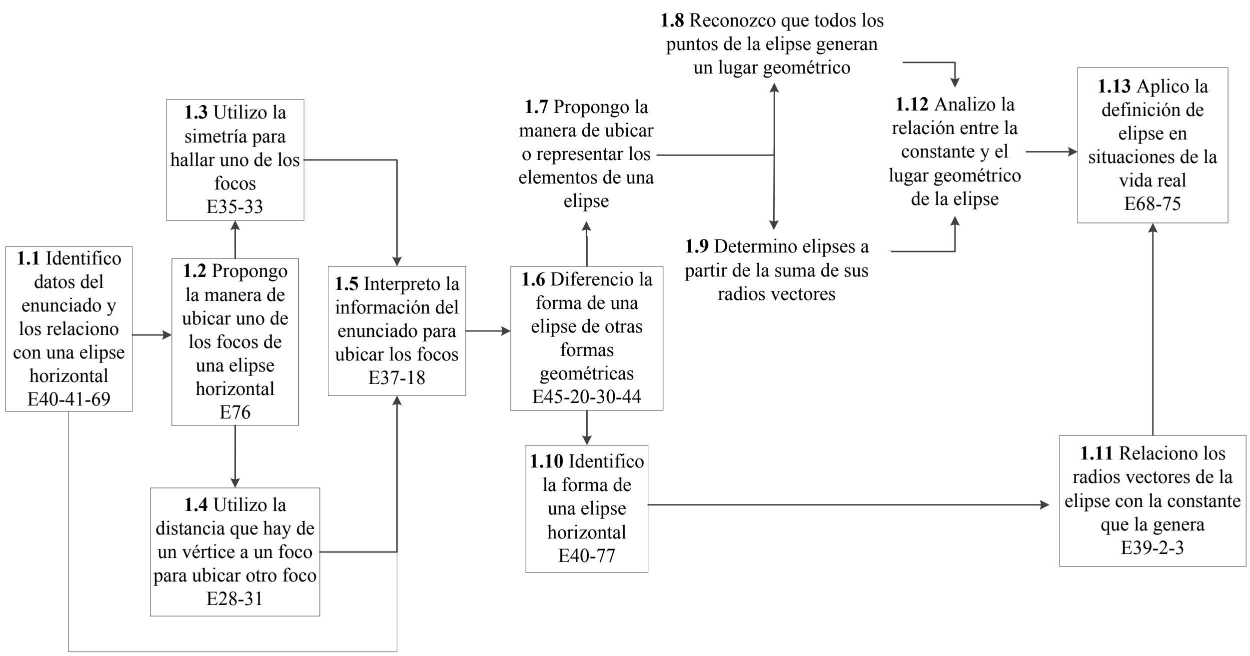


Figura 7. Grafo de criterios de logro de la tarea 1.2 Mesa de billar

En la tarea T1.2 Mesa de billar, los estudiantes reconocen datos del enunciado y su relación con una elipse horizontal. Los estudiantes deben hallar el punto donde se cumpla la propiedad de la mesa de billar descrita en la formulación. Pueden presentarse dos posibilidades: la primera, a partir de la simetría, y, la segunda, al usar la medida de la distancia del otro foco al vértice más cercano. Alguno de estos dos caminos permite la ubicación del foco con ayuda de la información del enunciado. Luego, los estudiantes pueden distinguir la forma elíptica de la mesa de billar de otras formas geométricas y reconocer que las características de la mesa de billar son de una elipse horizontal. Esto les permite asociar las distancias de los recorridos de la pelota con la constante que genera el lugar geométrico de la elipse. Por último, verifican que la situación presentada en el problema se cumple gracias a la definición de la elipse.

2.3. Errores en los que puede incurrir el estudiante y ayudas

En el desarrollo de la tarea, es probable que los grupos de estudiantes incurran en alguno de los errores mostrados en cada criterio de logro de la figura 7 y que se encuentran en el anexo 4. El profesor puede brindar las ayudas correspondientes para que los estudiantes superen las dificultades que se presenten en esta tarea (tabla 2 del anexo 7). Por ejemplo, es posible que los estudiantes establezcan resultados mayores o menores a la constante esperada de las sumas que realizan de los desplazamientos de la pelota. Para esto, el profesor puede solicitar a los estudiantes que tomen de nuevo las medidas y registren datos más precisos para realizar las sumas. Además, si los estudiantes posicionan de forma horizontal la línea más corta de la mesa, el profesor puede indicarles que coloquen horizontalmente la línea más larga para poder establecer las características de la elipse.

2.4. Actuación del profesor

Sugerimos que el profesor entregue a los grupos de estudiantes la hoja impresa con la formulación de la tarea, organice los grupos de acuerdo con el agrupamiento propuesto, asigne a cada grupo una mesa de billar y una pelota, y verifique que los estudiantes hallen la ubicación del otro foco a partir de las propiedades de la mesa sin quedarse únicamente en el ensayo y error. También, sugerimos revisar que los estudiantes realicen la producción escrita que se les pide en los numerales de la tarea para poder verificar la consecución del objetivo.

2.5. Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Antes de implementar la tarea, el profesor debe asegurarse que tiene el material que se requiere para la tarea. Sugerimos que realice algunos ensayos sobre las mesas que haya construido para verificar que cumplen con las características del lugar geométrico de la elipse. Al inicio del desarrollo de la tarea, el profesor debe sugerir a los estudiantes que golpeen la pelota en el centro con un golpe medianamente fuerte. Además, el profesor debe tener en cuenta los tiempos establecidos para el desarrollo de la tarea e identificar que los estudiantes realicen todos los numerales, ya que, al ser un juego, se puede desviar el propósito de la tarea.

2.6. Evaluación

El profesor puede verificar la producción escrita de los estudiantes para valorar si desarrollaron de manera adecuada los procedimientos que pedía la tarea. También puede dirigirse al grafo de criterios de logro del objetivo y revisar si los estudiantes requirieron de algún tipo de ayuda o lograron desarrollar en su totalidad los criterios de logro 1.5, 1.6 y 1.11.

3. Tarea T2.1 Vitrales elípticos

La tarea T2.1 Vitrales elípticos corresponde a la primera tarea del objetivo 2. Esta tarea se enmarca en una situación en la que un arquitecto debe decorar un centro comercial y ubicar vitrales de forma elíptica en algunas paredes. Los estudiantes construyen los vitrales en cartón paja para reconocer los elementos de la elipse. La construcción de los vitrales se hace con un compás de Arquímedes. La intención de esta tarea es permitir a los estudiantes el reconocimiento de los elementos que hacen parte de una elipse horizontal.

3.1. Descripción de la tarea

A continuación, mostramos los principales aspectos que estructuran la tarea.

Requisitos de la tarea

Para desarrollar la tarea, los estudiantes deben identificar el lugar geométrico de la elipse, saber que su constante se genera con la suma de los radios vectores y conocer los conceptos de perpendicularidad y ejes de simetría.

Aporte de la tarea a los objetivos de aprendizaje

La tarea aporta al objetivo 2, ya que permite construir el lugar geométrico de la elipse, establecer relaciones entre algunos elementos y determinar sus características.

Conceptos y procedimientos implicados en la tarea

La tarea permite reconocer conceptos como el centro, semiejes, radios vectores, focos, vértices y la constante de la elipse a partir de los siguientes procedimientos: los estudiantes podrán reconocer que los ejes se encuentran sobre dos rectas perpendiculares y el centro se determina como el punto de corte de los ejes; los vértices son los extremos de los ejes mayor y menor; los semiejes son la mitad de los ejes; los radios vectores son segmentos que van desde los focos a un punto del lugar geométrico de la elipse; los focos son extremos no comunes de los radios vectores; y la constante es la suma de los radios vectores.

Sistemas de representación que se activan

El desarrollo de la tarea implica el uso del sistema de representación manipulativo mediante el uso del compás de Arquímedes para generar la forma de una elipse horizontal; el sistema de representación numérico, al establecer valores numéricos a los elementos de la elipse; y los sistemas de representación geométrico y gráfico, al construir la elipse sobre un plano.

Contextos en los que se sitúa la tarea

Situamos la tarea en un contexto profesional porque presenta un problema en el que un arquitecto debe desarrollar una situación propia de su área.

Materiales y recursos

La tarea requiere del uso del compás de Arquímedes. Este material permite construir la elipse a partir de sus ejes. Sugerimos que el profesor construya con anterioridad este material. Se puede apoyar del video *How to make a router jif for making ellipes*[3] y de un carpintero para que corte las partes requeridas para la construcción del compás. En la figura 8, mostramos un ejemplo de un compás de Arquímedes armado.

[3] El video se encuentra en https://bit.ly/2rBhDtT

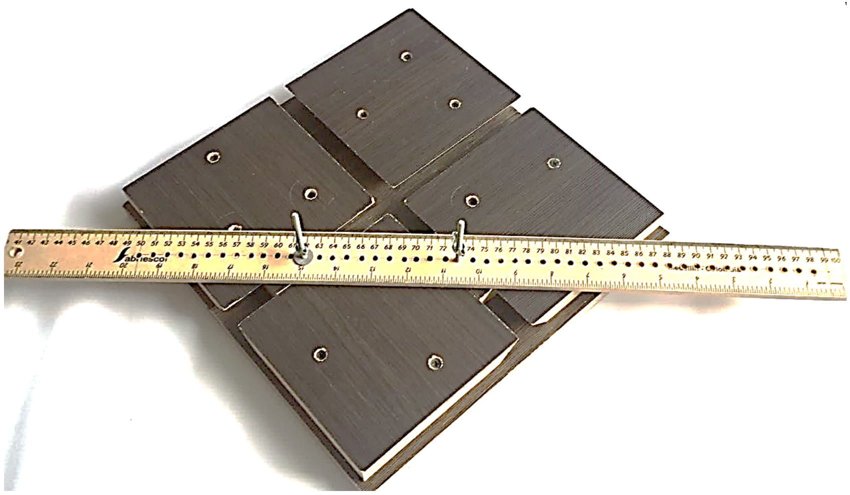


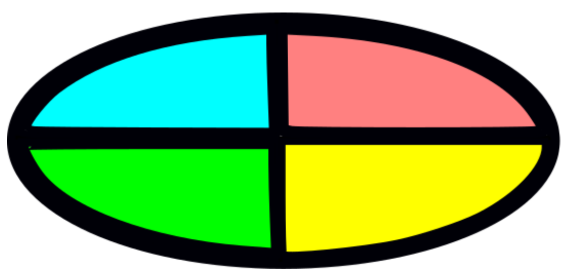
Figura 8. Compás de Arquímedes

También, la tarea requiere de una lámina gruesa, por ejemplo de cartón paja, que corresponde al plano en el que se construye la elipse; tres chinches que hacen las veces de focos y un punto del lugar geométrico; y una cuerda no elástica, como una cinta de agua, que tiene la medida del eje mayor y representa la cadena que se menciona en la tarea.

Formulación de la tarea

El profesor dará inicio a la tarea, organizará grupos de tres estudiantes y entregará una hoja con la siguiente información.

> *Vitrales elípticos*
>
> Un arquitecto decide decorar un centro comercial con vitrales horizontales de diferentes medidas. Para ello, pide a un vidriero que corte tres vidrios de modo que su forma sea elíptica pero tengan diferente tamaño. El arquitecto quiere pintar los vidrios de cuatro colores diferentes tales que dividan el vitral en cuatro partes exactamente iguales como se muestra en la figura.



> Para colgar los vitrales en la pared del centro comercial, el arquitecto le entrega al vidriero cadenas para que las corte de la misma longitud que el ancho de cada vitral, y así la puntilla donde se colgará, permanezca en el borde de cada vitral.
>
> Para realizar este trabajo, el vidriero utiliza un artefacto llamado compás de Arquímedes que le permitirá generar los vitrales elípticos.

Ubíquense en la mesa asignada por su profesor en los grupos establecidos y desarrollen las siguientes preguntas haciendo uso del compás de Arquímedes.

1. Tracen dos rectas perpendiculares sobre el cartón paja para determinar la forma en que quedaran divididos los vitrales.

2. Ubiquen el compás de Arquímedes, de modo que su centro coincida con la intersección de las rectas y sus divisiones coincidan con las rectas perpendiculares.

3. Elijan cualquier orificio en el brazo del compás de Arquímedes y tracen la elipse. Luego, recorten el vitral que se generó.

4. Marquen los puntos del vitral donde se deben ubicar los extremos de la cinta para que este quede completamente horizontal.

5. ¿Qué función cumplen las medidas del ancho y alto del vitral en la elipse trazada?

6. El arquitecto quiere colocar el logo del centro comercial en el centro de cada vitral, ¿de qué forma puede determinar el vidriero este punto?

7. Utilicen la cinta y los chinches para colgar el vitral en la pared. Luego de que el arquitecto ubicara los vitrales en la pared del centro comercial, un visitante mueve uno de los vitrales y observa que la puntilla que lo sostiene continúa ubicada en el borde del vitral ¿cuál podría ser la razón de este suceso? Verifiquen este caso con el vitral construido por el grupo.

Agrupamiento e interacción
Para esta tarea, recomendamos que el profesor organice grupos de trabajo de acuerdo con la cantidad de estudiantes y de materiales que disponga. Este agrupamiento permite compartir las distintas estrategias de solución que planteen los estudiantes al interior de cada grupo. Al finalizar el desarrollo de los numerales, todos los estudiantes observan los vitrales de cada grupo y comparten con su profesor estos resultados.

Temporalidad
El profesor puede iniciar con la presentación de la tarea, la conformación de los grupos de estudiantes y la entrega de materiales y recursos en un tiempo aproximado de 5 minutos. Luego, los estudiantes pueden desarrollar la tarea en 30 minutos y comunicar los resultados en 15 minutos. En la siguiente sesión, se pueden tomar los primeros 10 minutos para realimentar la tarea.

3.2. Grafo de criterios de logro de la tarea
En la figura 8, presentamos el grafo de criterios de logro del objetivo 2. Los criterios de logro, que conforman las estrategias de solución de la tarea T2.1 Vitrales elípticos, se encuentran entre rectángulos. En cada criterio, agregamos los errores en los que pueden incurrir los estudiantes y que pueden afectar el desarrollo de la tarea.

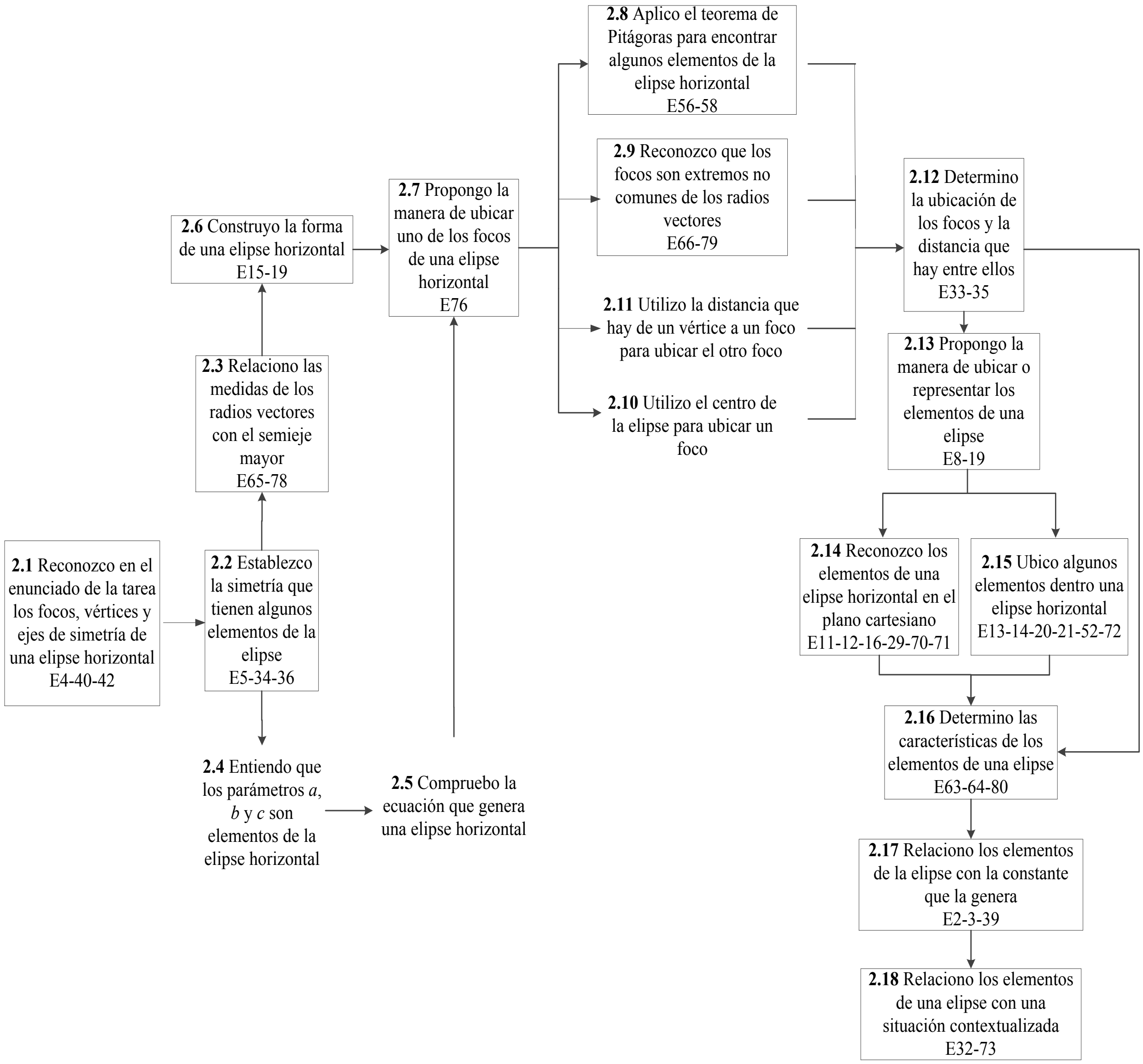


Figura 9. Grafo de criterios de logro de la tarea T2.1 Vitrales elípticos

En la tarea T2.1. Vitrales elípticos, los estudiantes inician relacionando la información del enunciado con elementos como los focos, vértices y ejes de simetría. Después, pueden identificar la simetría de algunos elementos para construir la forma de la elipse mediante el compás de Arquímedes. Luego, los estudiantes pueden proponer una estrategia para ubicar los focos, ya sea mediante el teorema de Pitágoras o al igualar las medidas de los radios vectores a partir del eje mayor. Posteriormente, pueden representar gráfica o geométricamente en un plano algunos elementos de la elipse, como el centro y los semiejes. Finalmente, los estudiantes pueden relacionar las medidas determinadas para algunos elementos con la constante que genera el lugar geométrico de la elipse y justificarlo a partir de la situación problema.

3.3. Errores en los que puede incurrir el estudiante y ayudas

Durante el desarrollo de la tarea, los estudiantes pueden incurrir en errores que les impidan identificar las relaciones que hay entre algunos elementos de la elipse (anexo 4). El profesor puede hacer uso de las ayudas que proponemos en la tabla 3 del anexo 7 para superar los errores. Por ejemplo, los estudiantes pueden suponer que los focos son extremos de un radio vector. En este caso el profesor puede preguntar a los estudiantes cuál es la función que cumplen los extremos no comunes de los radios vectores. Además, es posible que los estudiantes establezcan una desigualdad entre la constante y el eje mayor. Para ello, el profesor puede aclararles que esas dos medidas son iguales.

3.4. Actuación del profesor

El profesor debe observar constantemente a los estudiantes para confirmar que han descrito los procedimientos que llevaron a cabo para desarrollar la tarea. Recomendamos verificar si esos procedimientos son adecuados o requieren de alguna ayuda por parte del profesor quien debe propiciar que todos los grupos logren construir correctamente el vitral y que, al colgarlo, cumpla con los requerimientos de la tarea.

3.5. Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Antes de aplicar la tarea, sugerimos al profesor que conozca el manejo del compás de Arquímedes para que pueda explicar a los estudiantes su uso. También, debe tener organizado un espacio para colgar el producto de la actividad. Al inicio de la tarea, debe verificar que todos los grupos tengan los materiales completos, ya que esto permite optimizar el tiempo. Durante la implementación de la tarea, cada estudiante debe asumir un rol dentro del grupo de trabajo. Por ejemplo, puede haber dos personas que manipulen el compás de Arquímedes y otra que tome los apuntes. Para facilitar el correcto uso de los materiales, el profesor puede explicar que los chinches cumplen la función de las puntillas y la cinta la función de la cadena.

3.6. Evaluación

Para valorar el desempeño de los estudiantes, el profesor puede hacer uso del grafo de criterios de logro de la tarea e identificar si los estudiantes alcanzaron los criterios de logro 2.1, 2.6, 2.12, 2.13, 2.17 y 2.18 que son los de mayor aporte al logro del objetivo.

4. Tarea T2.2 Solsticios y equinoccios

La tarea T2.2 Solsticios y equinoccios es la segunda tarea del objetivo 2. Aquí, presentamos una situación sobre el movimiento de traslación de la Tierra. Hacemos uso de los puntos que representan los solsticios y equinoccios para que los estudiantes puedan identificar algunos elementos y relacionarlos con la órbita elíptica del planeta. La intención de la tarea es formalizar los conceptos de los elementos de la elipse y asociarlos con la ecuación canónica.

4.1. Descripción de la tarea

A continuación, mostramos los principales aspectos que estructuran la tarea T2.2 Solsticios y equinoccios.

Requisitos de la tarea
Para desarrollar la tarea, los estudiantes deben conocer movimientos planetarios, reconocer algunos elementos como focos y lugar geométrico de la elipse, mover puntos en el programa GeoGebra, determinar medidas de segmentos y reemplazar coordenadas de un punto en una ecuación.

Aporte de la tarea a los objetivos de aprendizaje
La tarea aporta al desarrollo del objetivo, ya que permite relacionar el lugar geométrico de la elipse con su ecuación canónica. Los estudiantes identifican las características de los elementos de la elipse y las asocian con los parámetros de la ecuación canónica a partir del movimiento planetario.

Conceptos y procedimientos implicados en la tarea
La tarea permite reconocer los vértices como puntos del lugar geométrico de la elipse, los ejes como segmentos perpendiculares cuyos extremos son los vértices, el centro como intersección de los ejes de simetría y los semiejes como las distancias de los vértices al centro. Además, permite asociar los semiejes con los parámetros a y b de la ecuación canónica y comprobar que esta se cumple para cualquier punto del lugar geométrico.

Sistemas de representación que se activan
La tarea involucra el uso del sistema de representación gráfico, ya que el movimiento de la Tierra se representa sobre un plano cartesiano; el sistema de representación numérico, al utilizar las longitudes de segmentos y coordenadas de puntos correspondientes a elementos de la elipse; y el sistema de representación simbólico, al relacionar el movimiento planetario con su ecuación canónica.

Contextos en los que se sitúa la tarea
Ubicamos la tarea en un contexto científico, ya que los movimientos planetarios, como la traslación, corresponden a un suceso natural que puede ser modelado con las matemáticas.

Materiales y recursos
La tarea requiere el uso del aplicativo en GeoGebra llamado Solsticios y equinoccios[4], que se puede utilizar en un computador o tableta. El aplicativo permite determinar las coordenadas de la Tierra en diferentes posiciones y diferenciar algunos elementos de la elipse a partir de sus medidas.

Formulación de la tarea
El profesor entrega a los estudiantes una hoja con las instrucciones de la tarea y en los computadores o tabletas, el aplicativo en GeoGebra con gráfica que se muestra en la figura 10.

[4] El aplicativo se encuentra en https://bit.ly/2winAS4

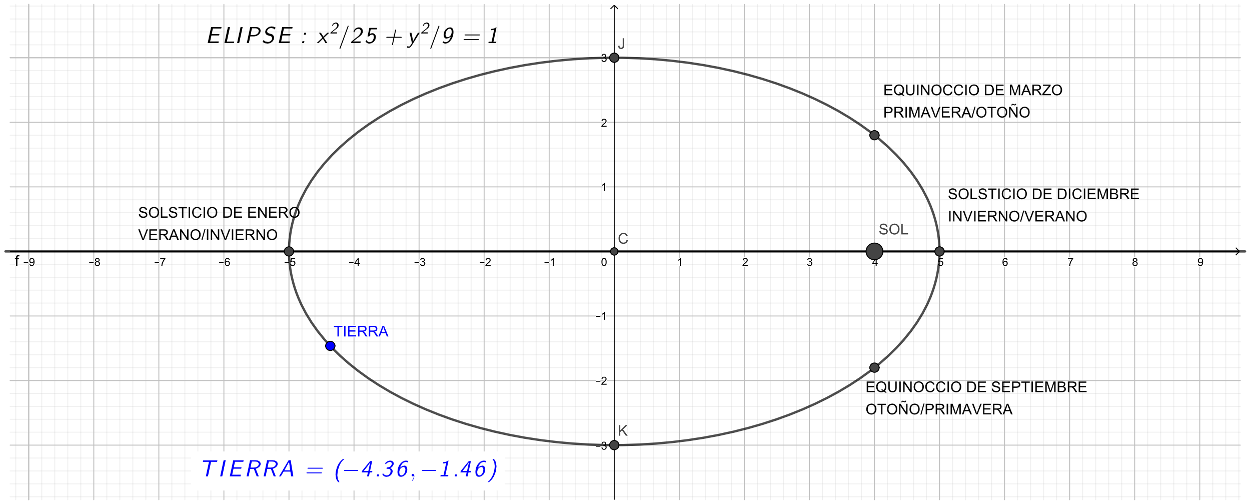


Figura 10. Pantalla del aplicativo Solsticios y equinoccios

Solsticios y equinoccios

En la traslación de la Tierra alrededor del sol, se determinan cuatro posiciones que establecen las estaciones climáticas. Estas posiciones son llamadas solsticios y equinoccios. Los solsticios determinan las estaciones de invierno y verano. Los equinoccios determinan la primavera y el otoño. El sol se encuentra sobre la línea de los solsticios. En la figura mostrada en el aplicativo "Solsticios y equinoccios" en GeoGebra, puedes apreciar las posiciones de la Tierra a una escala reducida. Si mueves el punto TIERRA, podrás observar sus coordenadas en la parte inferior de la pantalla.

De acuerdo con la información anterior, responde los siguientes puntos.

1. Además de los solsticios y equinoccios, ¿qué otros puntos marcados en la gráfica, corresponden a posiciones de la Tierra? En el aplicativo, mueve la Tierra sobre esos puntos para determinar sus coordenadas.

2. ¿Cuáles son las coordenadas del punto de la gráfica que corresponde al corte de la línea que une las posiciones anteriores con la línea de los solsticios?, ¿qué característica tiene ese punto?

3. Determina la distancia que hay del centro de la trayectoria a la Tierra, cuando se encuentra ubicada en los puntos K, J y los solsticios.

4. La ecuación que determina el movimiento elíptico de la Tierra alrededor del sol es $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$, y aparece en la pantalla del aplicativo con el título Elipse. ¿Cómo relacionas las medidas que hallaste en el numeral 3 con la ecuación mostrada en el aplicativo?

5. En el aplicativo, ubica la Tierra en un punto cualquiera de la trayectoria elíptica., reemplaza sus coordenadas (dadas en color azul) en la ecuación, para verificar la igualdad.

6. ¿Lo anterior se cumple para todas las posiciones de la Tierra?, ¿por qué?

7. Ubica el punto que, junto con el sol, genera la forma elíptica de la trayectoria de la Tierra. Luego, traza y mide los segmentos que unen estos puntos con el punto de la Tierra. Con esas medidas, halla la constante de la trayectoria.

8. Determina la distancia que hay entre los solsticios. ¿Esta medida se relaciona con el valor de la constante que genera la órbita elíptica de la Tierra? Justifica tu respuesta.

Agrupamiento e interacción
Recomendamos que los estudiantes desarrollen la tarea de forma individual. Sin embargo, el profesor puede modificar este agrupamiento de acuerdo con la cantidad de equipos disponibles para los estudiantes. El trabajo individual permitirá que cada estudiante proponga diferentes formas de solución y obtenga conclusiones propias del desarrollo de la tarea. Con esta información, los estudiantes podrán socializar las experiencias obtenidas y concluir, de forma grupal, la relación entre los elementos de la elipse y su ecuación canónica. Esta tarea requiere comunicación permanente entre el estudiante y el profesor. El profesor debe orientar al estudiante para solucionar la tarea de forma correcta.

Temporalidad
El desarrollo de esta tarea se inicia en aproximadamente 5 minutos con la socialización de la intencionalidad de la tarea, la entrega de la formulación de la tarea y los equipos con el aplicativo. Luego, en un tiempo de 30 minutos, los estudiantes resuelven la tarea. Posteriormente, se comunican los resultados y las conclusiones de la tarea en 15 minutos. Sugerimos que, en la siguiente sesión, se realice la realimentación de la tarea en un tiempo estimado de 10 minutos.

4.2. Grafo de criterios de logro de la tarea
En la figura 11, presentamos el grafo de criterios de logro del objetivo 2, en el que enmarcamos con rectángulos los criterios de logro que conforman la tarea T2.2 Solsticios y equinoccios.

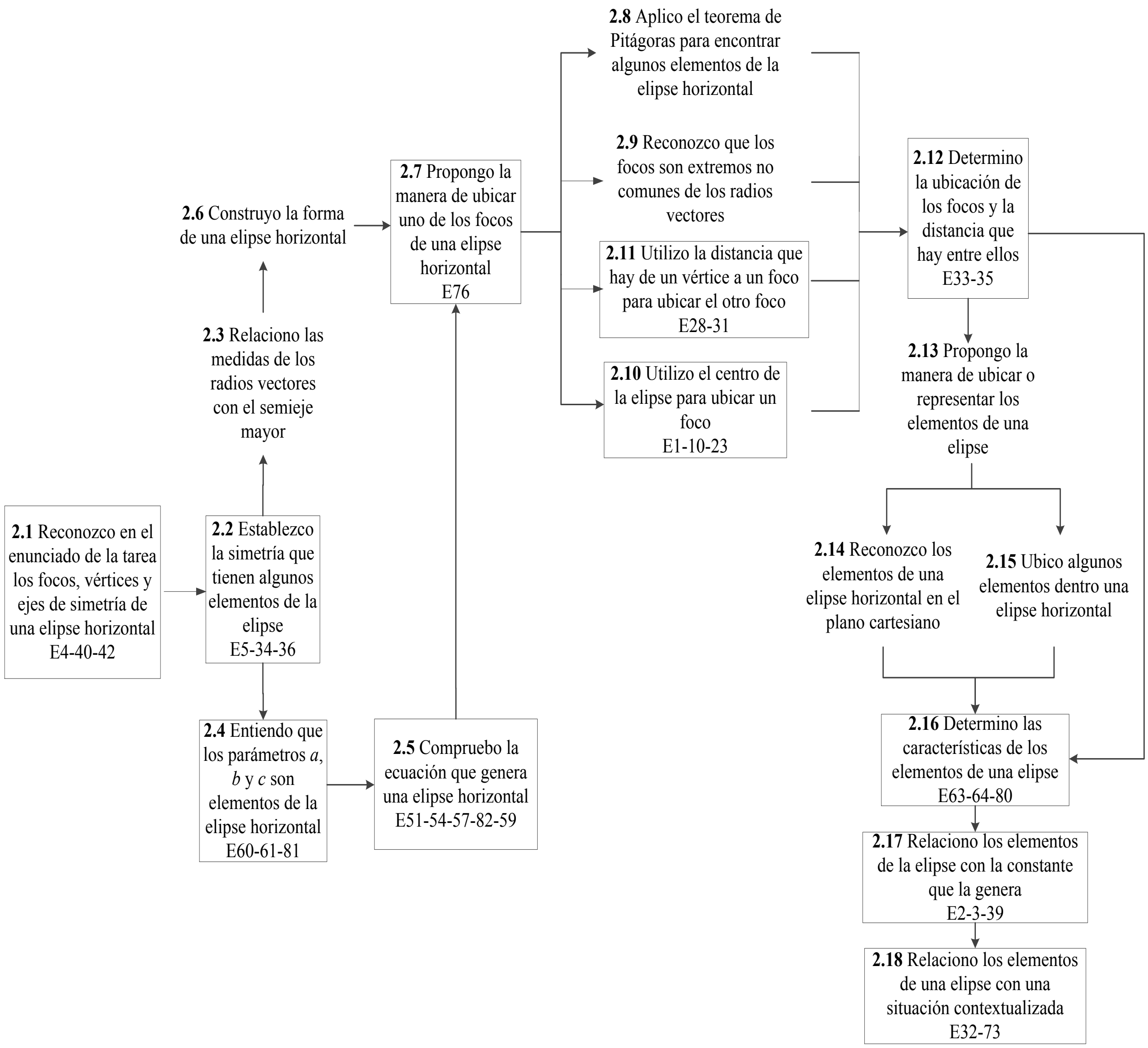


Figura 11. Grafo de criterios de logro de la tarea T2.2 Solsticios y equinoccios

En la tarea T2.2 Solsticios y equinoccios, los estudiantes empiezan relacionando la información del enunciado de la tarea con los elementos de la elipse. Luego, determinan características de los elementos a partir de su simetría y los relacionan con los parámetros de la ecuación canónica. Esto permite que los estudiantes determinen y comprueben la ecuación canónica asociada a la elipse horizontal que se muestra en la situación. Luego, los estudiantes eligen entre dos maneras de ubicar el otro foco de la elipse (a partir de la distancia al vértice más cercano o al centro de la elipse), con lo que puede identificar la medida que hay entre los focos. Luego, determinan características de otros elementos de la elipse para relacionarlos con la constante de la elipse. Finalmente, asocian esta información con el contexto de la tarea.

4.3. Errores en los que puede incurrir el estudiante y ayudas

Al desarrollar la tarea Solsticios y equinoccios, los estudiantes pueden incurrir en algunos errores que aparecen en cada criterio de logro de la figura 11 y en el anexo 4. Por ejemplo, es posible que el estudiante confunda el eje principal con el eje secundario o confunda las coordenadas de un punto en el plano cartesiano. El profesor puede proporcionar las ayudas pertinentes que permitan superar los errores. Por ejemplo, para el primer caso, el profesor puede aclarar que el eje principal es la línea de los solsticios y, en el segundo caso, el profesor puede recordarles la manera de determinar la coordenada de un punto en el plano cartesiano. Las ayudas para esta tarea se encuentran en la tabla 4 del anexo 7.

4.4. Actuación del profesor

Durante la implementación de la tarea, recomendamos que el profesor permanezca en constante revisión del desarrollo de sus numerales, confirme que los estudiantes usan correctamente el aplicativo y extraen la información adecuada y verifique que las justificaciones solicitadas en cada numeral permiten visualizar si los estudiantes relacionan los elementos de la elipse con el movimiento planetario. En caso de observar que las justificaciones son incorrectas, el profesor debe guiar al estudiante a que identifique el error en el que incurrió y lo pueda corregir.

4.5. Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Recomendamos que el profesor verifique con anterioridad si tiene instalado el programa GeoGebra en los equipos que utilizará para implementar la tarea y que el aplicativo funcione correctamente. También, debe estar seguro que los estudiantes han interactuado anteriormente con el programa. Además, durante la implementación debe revisar que los estudiantes usen correctamente el aplicativo e identifiquen la información que les brinda.

4.6. Evaluación

Para que el profesor valore el desarrollo de la tarea, puede hacer uso del grafo de criterios de logro e identificar si los estudiantes desarrollaron los procedimientos que tienen que ver con los criterios del logro 2.1, 2.4, 2.12, 2.17 y 2.18.

5. Tarea T3.1 Puente de arco

La tarea T3.1 Puente de arco corresponde a la primera tarea del objetivo 3. Esta tarea presenta una situación problema en la que se debe determinar algunas medidas de la base de un puente que tiene forma semielíptica. Esta tarea contribuye al logro del objetivo, ya que los estudiantes deben utilizar los conceptos desarrollados en las tareas anteriores para solucionar un problema dado en una situación real.

5.1. Descripción de la tarea

A continuación, mostramos los principales aspectos que estructuran la tarea T3.1 Puente de arco.

Requisitos de la tarea
Para implementar esta tarea, los estudiantes deben conocer la simetría que tienen algunos elementos de la elipse y sus características, identificar la relación que hay entre esos elementos y la ecuación canónica, saber utilizar el plano cartesiano para ubicar puntos, y representar grandes distancias en escalas menores.

Aporte de la tarea a los objetivos de aprendizaje
La tarea posibilita que los estudiantes puedan aplicar los conceptos y procedimientos para representar y solucionar problemas de la vida real relacionados con las propiedades de la elipse horizontal.

Conceptos y procedimientos implicados en la tarea
Para el desarrollo de esta tarea, los estudiantes aplican conceptos de algunos elementos de la elipse como el centro, semiejes, radios vectores, focos y vértices para representar una situación problema, y a partir de ellos, determinar la ecuación canónica de la elipse. Con la ecuación, puede despejar variables y hallar las coordenadas de puntos del lugar geométrico de la elipse.

Sistemas de representación que se activan
El desarrollo de la tarea requiere del uso de los sistemas de representación geométrico o gráfico, al representar la situación en un plano; el sistema de representación numérico, al usar las medidas de algunos elementos; y el sistema de representación simbólico, al utilizar la ecuación canónica para establecer algunos valores solicitados en el problema.

Contextos en los que se sitúa la tarea
Situamos la tarea en un contexto profesional, al representar un problema relacionado con la ingeniería.

Materiales y recursos
El profesor debe proporcionar a los estudiantes la formulación de la tarea impresa y una hoja para graficar. Además, los estudiantes deben tener implementos básicos como regla, lápiz, borrador y esfero.

Formulación de la tarea
El profesor entrega las instrucciones de la tarea a los estudiantes agrupados en parejas.

> *Puente de arco*
>
> El arco de un túnel con forma de semielipse tiene una altura máxima de 45 metros y la mayor distancia horizontal es de 150 metros.
>
> 1. Representen la gráfica del arco del túnel, de tal forma que el punto donde la altura es perpendicular a la base sea el centro de la base de la semielipse.
>
> 2. Comparen la gráfica obtenida con otro grupo de compañeros y socialicen con su profesor las similitudes y diferencias entre sus gráficas.

3. ¿Cuáles son los valores en el puente correspondientes a los parámetros a y b o semiejes de la elipse?

4. Determinen la ubicación de los focos y la distancia que hay entre ellos.

5. Encuentren la distancia a la que se deben colocar dos soportes verticales, de manera que dividan la base en tres espacios iguales y ubíquenlos en el gráfico. ¿Los soportes verticales se ubican en el mismo sitio de los focos?

6. Usen la ecuación de la elipse horizontal $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ para determinar la ecuación que representa la elipse a la que pertenece la forma del arco.

7. Determinen la altura de los dos soportes verticales y escriban el procedimiento realizado.

Agrupamiento e interacción
Para esta tarea, recomendamos al profesor que organice a los estudiantes por parejas para que puedan compartir las posibles soluciones, colaborarse mutuamente y poder superar las dificultades que se les pueda presentar. Sugerimos que el profesor se mantenga al tanto de los procedimientos que realizan las parejas de estudiantes en la representación de la base del puente y en la producción escrita. Esto le permitirá brindar cualquier tipo de ayuda cuando alguna pareja incurra en algún error.

Temporalidad
Inicialmente, el profesor puede mencionar la intención de la tarea, organizar las parejas y entregar los recursos en un tiempo de 5 minutos. Luego, la tarea puede desarrollarse durante un tiempo aproximado de 30 minutos. Finalmente, se puede llevar a cabo la puesta en común de los resultados de la tarea y la entrega de la producción escrita en 15 minutos. Recomendamos usar en la siguiente sesión aproximadamente 10 minutos para la realimentación de la tarea.

5.2. Grafo de criterios de logro de la tarea
En la figura 12, presentamos el grafo de criterios de logro del objetivo 3. Allí, encerramos con rectángulos los criterios de logro correspondientes a la tarea Puente de arco y en cada uno de ellos, ubicamos los códigos de los errores que aparecen en el anexo 4.

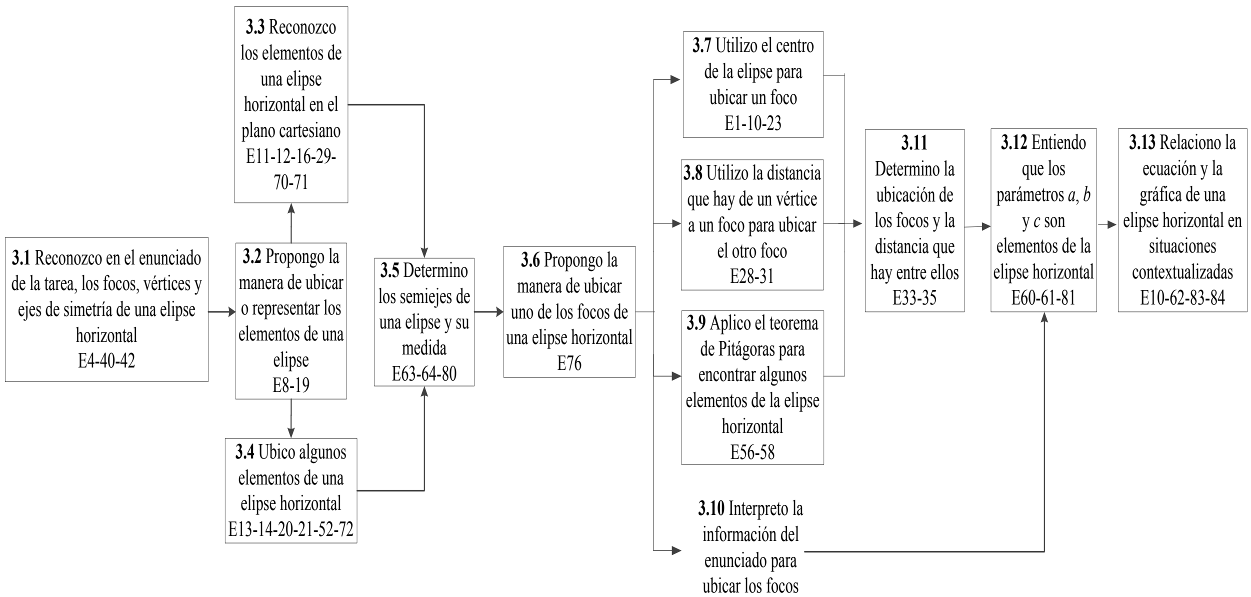


Figura 12. Grafo de criterios de logro de la tarea T3.1 Puente de arco

Inicialmente, los estudiantes relacionan la información de la situación con los elementos de la elipse. Aquí, los estudiantes eligen la forma de representar esos elementos, ya sea gráfica o geométricamente, lo que les permite hallar la medida de los semiejes. Luego, plantean una de tres formas para hallar los focos: a partir del centro, con la distancia del vértice más cercano a un foco o con el teorema de Pitágoras. Enseguida, hallan la distancia focal. Posteriormente, relacionan las medidas de los elementos con los parámetros de la ecuación canónica y hallan la altura de los parales que se solicitan en la situación problema.

5.3. Errores en los que puede incurrir el estudiante y ayudas

Cuando los estudiantes desarrollen la tarea Puente de arco, ellos pueden incurrir en algunos errores como no tener en cuenta las propiedades de las igualdades al despejar una variable en una ecuación. El profesor puede intervenir brindándoles las ayudas que les permitan superar el error, como explicar la manera de despejar variables en ecuaciones mediante algunos ejemplos. Las ayudas para esta tarea están en la tabla 5 del anexo 7.

5.4. Actuación del profesor

Sugerimos que el profesor se mueva por el aula constantemente y observe la producción escrita y los gráficos de cada pareja, para que pueda verificar si los estudiantes están desarrollando correctamente cada numeral y están utilizando una escala adecuada para la gráfica.

5.5. Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

El profesor puede decidir si proporciona a los estudiantes hojas cuadriculadas o milimetradas para realizar la gráfica. Es importante que el profesor centre su atención en el momento en que los estudiantes despejan la variable en la ecuación canónica, pues, sin este proceso, ellos no podrían culminar la tarea.

5.6. Evaluación

El profesor puede tener en cuenta el desarrollo de los criterios de logro del grafo de la tarea para valorarla. En particular, los criterios 3.1, 3.11, 3.12 y 3.13 pueden ayudarle a verificar el cumplimiento de la tarea.

6. Tarea T3.2 Galería de murmullos

La tarea T3.2 Galería de murmullos corresponde a la segunda tarea del objetivo 3 y es la última tarea de aprendizaje de la unidad didáctica. En ella, presentamos una situación dada al interior de una galería de murmullos en la que se cumple la propiedad de la reflexión. El techo de la galería tiene forma de semielipsoide, lo que permite la comunicación entre dos personas ubicadas en los focos, ya que el sonido emitido desde un foco se propaga en el otro foco y no permite que las personas que se encuentren en otro lugar de la galería escuchen el sonido. La intención de esta tarea es concluir el logro del objetivo 3 al aplicar los conocimientos adquiridos en los objetivos anteriores.

6.1. Descripción de la tarea

A continuación, mostramos los principales elementos que estructuran la tarea.

Requisitos de la tarea

La tarea requiere que el estudiante identifique los elementos de la elipse (los parámetros a y b de la ecuación canónica) y que pueda reemplazar valores numéricos en una ecuación para despejar una incógnita.

Aporte de la tarea a los objetivos de aprendizaje

La tarea permite verificar cómo se cumplen las propiedades del lugar geométrico de la elipse en situaciones reales. La tarea pide utilizar las características de los elementos de la elipse y su ecuación canónica para comprobar la propiedad de la reflexión que se evidencia en una galería de murmullos.

Conceptos y procedimientos implicados en la tarea

Para el desarrollo de la tarea, es necesario tener en cuenta las características de los elementos de la elipse y su relación con los parámetros *a y b* para construir la ecuación canónica. Esto permite comprobar la propiedad de la reflexión y justificar que todos los puntos del lugar geométrico de la elipse se cumplen en la ecuación.

Sistemas de representación que se activan

El desarrollo de la tarea requiere del uso del sistema de representación numérico, al asignar valores determinados a los elementos de la elipse; el sistema de representación simbólico, al utilizar la ecuación canónica de la elipse; y los sistemas de representación geométrico y gráfico, al representar sobre un plano los elementos de la elipse.

Contextos en los que se sitúa la tarea

Situamos la tarea en un contexto profesional, ya que la galería de murmullos hace parte de construcciones arquitectónicas.

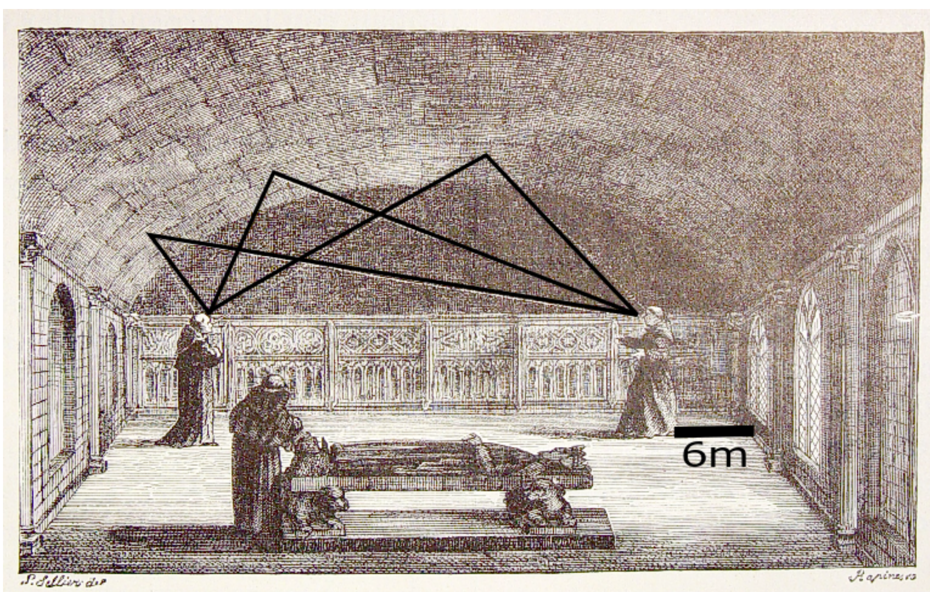
Materiales y recursos

Para el desarrollo de esta tarea, el profesor debe proporcionar a los estudiantes únicamente la formulación impresa de la tarea y verificar que los estudiantes tengan los útiles escolares comunes como lápiz, esfero, borrador y regla.

Formulación de la tarea

El profesor entrega a los estudiantes la hoja con las instrucciones de la tarea.

> *Galería de murmullos*
>
> Dos amigos se encuentran dentro de una galería de murmullos, que es una sala con techo en forma de semielipsoide, lo que permite que se pueda murmurar desde un foco y ser escuchado perfectamente en el otro foco. Los amigos están ubicados sobre los focos a una distancia de 100 metros, conversando entre ellos sin que nadie más los escuche. La siguiente figura ilustra este suceso.



Galería de Murmullos[5]

> Uno de los amigos se encuentra a 6 metros de la pared más cercana. Responde las siguientes preguntas.

[5] Imagen con permiso de reutilización con modificaciones de https://bit.ly/2lceEiD

1. Representa las medidas dadas en la situación sobre la imagen de la galería.

2. Determina el ancho que debe tener el piso de la galería.

3. ¿Cuál es la altura máxima del techo de la galería?

4. Utiliza las medidas obtenidas para hallar la ecuación de la elipse que corresponde a la forma del techo de la galería de murmullos (recuerda que la ecuación es de la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$).

5. Comprueba que la ecuación obtenida se cumple para cualquier punto del techo de la galería. Justifica tu respuesta.

Agrupamiento e interacción
Proponemos que esta tarea se desarrolle de forma individual para que el profesor observe cómo cada estudiante aplica los conocimientos adquiridos y pueda dar sus posibles soluciones y conclusiones acerca de la situación planteada. El profesor tendrá una comunicación permanente con cada estudiante durante el desarrollo de la tarea, de modo que pueda hacer seguimiento a su proceso y brindarle las explicaciones pertinentes. Esto permitirá que el estudiante verifique la propiedad de la reflexión de la elipse y la relación de la ecuación con el lugar geométrico de la elipse.

Temporalidad
Al inicio, el profesor explica el propósito de la tarea y entrega la formulación durante 5 minutos. Los estudiantes pueden desarrollar la tarea en aproximadamente 30 minutos. Luego, el profesor escoge algunos estudiantes para que presenten sus resultados de la tarea y se determinen las conclusiones finales en los 15 minutos restantes. En la siguiente sesión, se realiza la realimentación de la tarea en 10 minutos. En los 50 minutos restantes, el profesor puede realizar un resumen de todas las tareas de los tres objetivos, de modo que se solucionen algunas dudas de los estudiantes y se preparen para el examen final.

6.2. Grafo de criterios de logro de la tarea
En la figura 13, presentamos el grafo de criterios de logro del objetivo 3. Enmarcamos con rectángulos los criterios de logro que conforman los procedimientos para la tarea T3.2 Galería de murmullos.

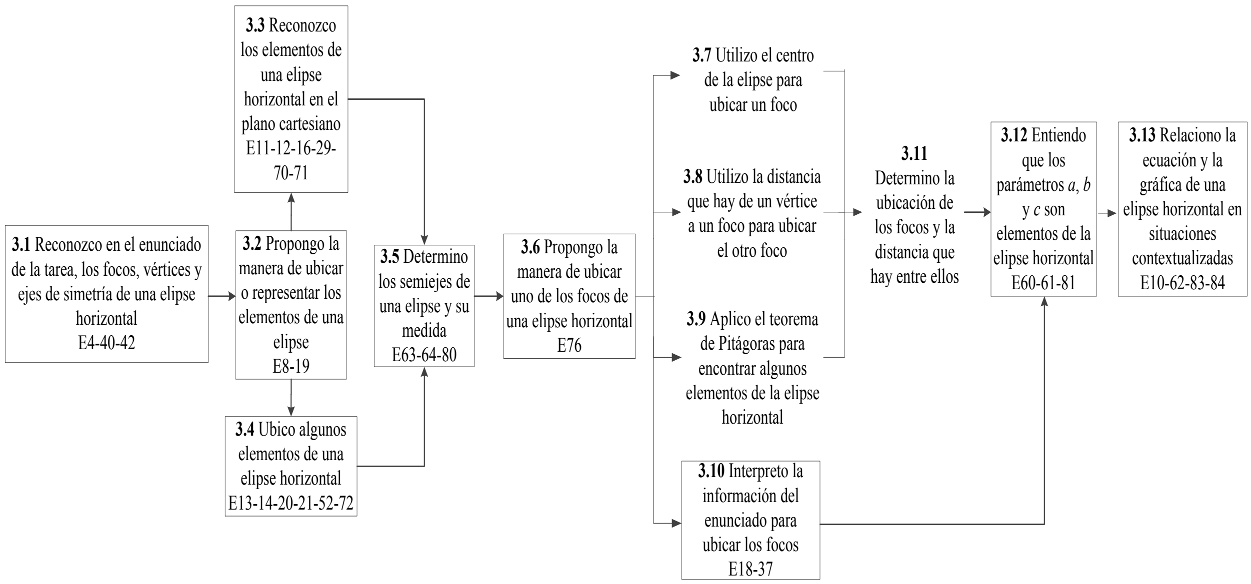


Figura 13. Grafo de criterios de logro de la tarea T3.2 Galería de murmullos

Inicialmente, los estudiantes identifican los elementos de la elipse que aparecen en el enunciado y la imagen de la formulación. Luego, deciden la manera de complementar la imagen de la situación, al representar los elementos de la elipse en un plano cartesiano o en otro plano. Posteriormente, extraen de la gráfica las medidas de los semiejes y la ubicación de los focos. Esto les permite construir la ecuación canónica de la elipse y comprobar que se cumple para todos los puntos del lugar geométrico de la elipse, con lo que pueden justificar la propiedad de la reflexión.

6.3. Errores en los que puede incurrir el estudiante y ayudas

En la figura 13, incluimos el código de algunos errores que se encuentran en el anexo 4 y que podrían afectar el alcance de los criterios de logro relacionados con esta tarea. Cuando los estudiantes incurran en alguno de esos errores, el profesor puede brindar alguna de las ayudas que proporcionamos en la tabla 6 del anexo 7. Por ejemplo, si los estudiantes utilizan una ecuación diferente a la ecuación canónica, el profesor puede recordarles cuál es la ecuación propia del lugar geométrico de la elipse.

6.4. Actuación del profesor

El profesor debe estar pendiente del trabajo de todos los estudiantes y procurar identificar los errores que se presenten con mayor frecuencia. Además de las ayudas brindadas en el proceso, el profesor puede incluir una reflexión sobre esos errores en la puesta en común.

6.5. Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Al inicio de la implementación de la tarea, el profesor puede aclarar a los estudiantes la intención de desarrollar la tarea de forma individual e indicarles que no duden en comunicarle sus dudas o inquietudes durante la sesión. Puede proponerles que escriban las dudas en una hoja para presentárselas al profesor cuando llegue a revisar su avance en la tarea.

6.6. Evaluación

En esta tarea, recomendamos que el profesor se apoye en el grafo de criterios de logro, y que ponga mayor atención al desarrollo de los criterios de logro 3.1, 3.3, 3.4, 3.12 y 3.13 para verificar que se cumplió el propósito de la tarea.

En el anexo 8, incluimos la tarea diagnóstica y las tareas de aprendizaje. Las tareas de aprendizaje se encuentran descritas con mayor detalle a partir de siete elementos: requisitos, metas, formulación, materiales y recursos, agrupamiento, interacción y temporalidad.

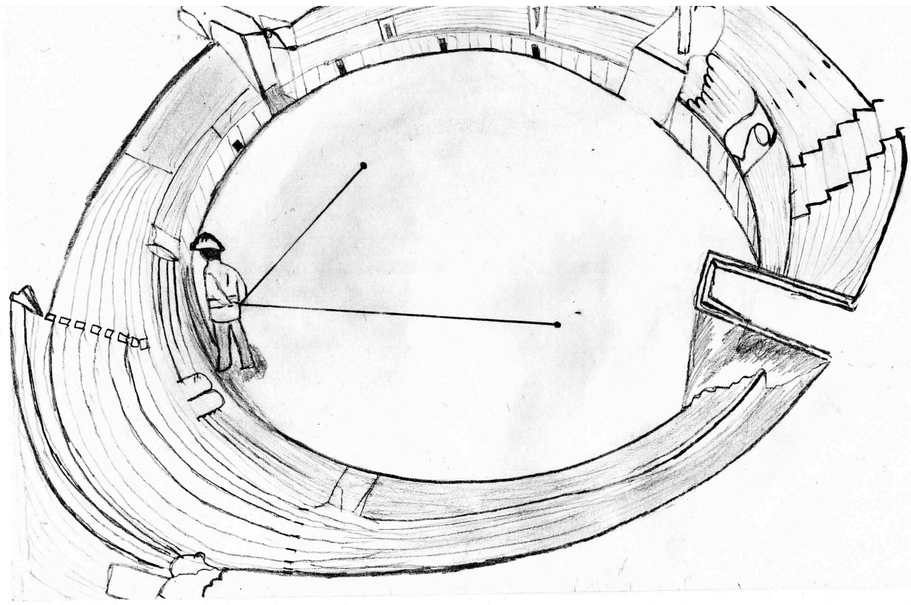
4. Examen final

A continuación, presentamos las tareas de evaluación que conforman el examen final de la unidad didáctica. El propósito del examen es evaluar el alcance de los tres objetivos. Para ello, presentamos una tarea de evaluación para cada objetivo: Coliseo romano, El satélite y Eris. En la primera, los estudiantes deben utilizar un aplicativo en GeoGebra para determinar las medidas de los radios vectores de una elipse y relacionarlos con la constante que genera el lugar geométrico de la forma elíptica del coliseo. En la segunda, los estudiantes representan elementos de la órbita elíptica de un satélite a partir de su ecuación. En la tercera, los estudiantes justifican el movimiento del planeta Eris sobre una órbita elíptica a partir de la gráfica y la ecuación canónica. Los estudiantes deben desarrollar el examen final de forma individual. El profesor debe proporcionar la hoja impresa con la formulación del examen para cada estudiante y tener dispuesto el espacio con los equipos que contengan el aplicativo para la primera tarea. Recomendamos que el examen se desarrolle en un tiempo aproximado de 120 minutos.

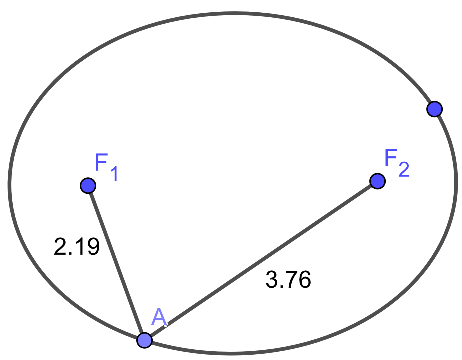
1. Tarea de evaluación del primer objetivo

Con esta tarea, pretendemos evaluar el alcance del primer objetivo de la unidad didáctica.

> *Coliseo Romano*
>
> Un arquitecto quiere construir una réplica del ruedo elíptico del coliseo romano que mantenga sus características. Para ello, visita el coliseo y observa que hay dos estacas clavadas al interior del ruedo. El arquitecto decide utilizar dos cintas métricas atadas a las estacas para verificar que el coliseo tiene forma de elipse y, así, poder construir la réplica (ver la figura).



Luego, el arquitecto generó un aplicativo en el programa GeoGebra, en el que se representan las medidas que tomó con las cintas métricas, como se muestra en la siguiente figura.



Los puntos F_1 y F_2 representan el lugar en el que se encuentran las estacas, y el punto A representa al arquitecto que camina por el borde del ruedo.

Utiliza el aplicativo para situar al arquitecto en tres lugares diferentes del borde del ruedo (A_1, A_2, A_3). En la siguiente tabla, registra y suma las distancias que aparecen en la pantalla del aplicativo para cada uno de los puntos donde ubicaste al arquitecto.

Registro de medidas

Posición del arquitecto	Distancia hasta F_1	Distancia hasta F_2	Suma de distancias
A_1			
A_2			
A_3			

De acuerdo con los resultados de la tabla anterior, responde las siguientes preguntas.

1. ¿Qué puedes afirmar al comparar los resultados de las sumas obtenidas para cada posición del arquitecto?

2. ¿Qué crees que debe ocurrir con las longitudes de las cintas métricas para que el arquitecto permanezca en el borde del ruedo?

3. Si el arquitecto desea ampliar o reducir el tamaño de la réplica del ruedo del coliseo, pero mantener su forma, ¿qué elementos utilizados para hacer la forma elíptica del ruedo propones que deberían cambiar y cuáles deben mantenerse?

4. Con lo anterior, escribe una conclusión que defina la manera de construir figuras que tengan la forma del ruedo del coliseo romano.

2. TAREA DE EVALUACIÓN DEL SEGUNDO OBJETIVO

Con esta tarea, evaluamos el cumplimiento de la mayoría de criterios de logro pertenecientes al segundo objetivo.

El satélite

Un transbordador espacial llevó un satélite de comunicaciones al espacio. El satélite recorre una órbita elíptica alrededor de la Tierra. La máxima distancia horizontal entre el satélite y la Tierra es de 800 km. La expresión que determina la posición del satélite en su órbita es $\frac{x^2}{250000} + \frac{y^2}{160000} = 1$. Con la información anterior, responde las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál es la distancia más larga desde el satélite hasta el centro de la trayectoria elíptica? ¿Cuál es la distancia más corta?

2. Representa las medidas anteriores en una hoja milimetrada de forma que 1 centímetro equivalga a 50 kilómetros de la gráfica. Nombra V_1 a la posición del satélite cuando se encuentra en la máxima distancia a la Tierra y V_2 a su posición más cercana a la Tierra.

3. Ubica el otro foco (F) para que el satélite mantenga la misma trayectoria.

4. Representa gráficamente el movimiento del satélite. Ten en cuenta que V_3 y V_4 son las posiciones más cercanas del satélite al centro de la trayectoria elíptica.

5. Utiliza las distancias que hay desde alguna de las posiciones V_1, V_2, V_3 y V_4 a la Tierra y al punto F, para determinar la constante de la elipse.

6. Halla las distancias entre las posiciones V_1 y V_2, y entre V_3 y V_4. ¿Qué podrías concluir al comparar estas distancias con la constante del lugar geométrico de la elipse?

3. TAREA DE EVALUACIÓN DEL TERCER OBJETIVO

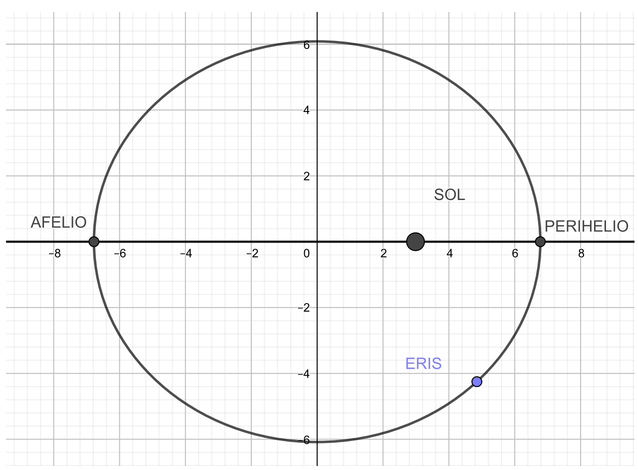
Esta tarea mide el alcance del tercer objetivo.

Eris

Hasta 2005, si te hubieras preguntado ¿cuántos planetas hay en el sistema solar?, habrías dicho que nueve: Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Neptuno y Plutón. No había motivos para poner en duda esa clasificación. Y todo habría seguido así de no ser por la aparición de un planeta enano que, a priori, parecía más grande que Plutón: Eris. Su descubrimiento fue tan importante que provocó que se reconsiderara la definición de planeta y se creara la definición de *planeta enano*.

Se sabe que una Unidad Astronómica (UA) es la distancia promedio de la Tierra al sol. En la órbita de Eris, la longitud del sol al perihelio (punto más cercano del planeta al sol) es de 37.91 UA y la longitud del sol al afelio (punto más lejano del planeta al sol) es de 97.65 UA.[6]

Un científico hace la siguiente gráfica que muestra la órbita del planeta Eris en una escala de 1 cm por cada 10 UA. Con esta gráfica, quiere comprobar que Eris se mueve en la misma forma que los demás planetas del sistema solar.



1. Determina la longitud del sol al perihelio y al afelio en centímetros.

2. El sol es uno de los focos que determina la trayectoria elíptica de Eris. Ubica el otro foco. ¿Cómo lo hiciste?

[6] Modificado de https://bit.ly/2IcxMB1

3. Ubica en la gráfica el punto medio (P) entre el afelio y el perihelio. ¿Cuál es la distancia de este punto al perihelio? ¿Cuál es su distancia a un punto del planeta sobre el eje y? ¿Cuál es su distancia al sol?

4. ¿Qué relación tiene la longitud que hallaste en el primer numeral con la forma de la órbita del planeta?

5. Determina la ecuación de la trayectoria elíptica del planeta Eris. Recuerda que la ecuación canónica de la elipse horizontal es de la forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

6. Con base en los puntos anteriores, ¿qué tuvo que hacer el científico para comprobar que el planeta Eris se mueve sobre la órbita mostrada en la gráfica que realizó?

3.2. Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Antes de implementar el examen, el profesor debe construir el aplicativo que se requiere para la primera tarea de evaluación en GeoGebra. Con la pantalla totalmente en blanco, el profesor debe construir una elipse con el botón Elipse, nombrar los focos como F_1 y F_2 y ocultar el punto que queda en el lugar geométrico con el ícono Mostrar/ocultar objeto. Luego, debe colocar un punto sobre el lugar geométrico de la elipse con el botón Punto en objeto, verificar que ese punto se pueda arrastrar sin modificar el tamaño de la elipse y nombrarlo A. Luego, debe trazar los segmentos que unen el punto A con los focos mediante el botón Segmento. Por último, debe hallar las longitudes de esos segmentos con el botón Distancia o longitud. También, debe asegurarse que el aplicativo funcione en todos los equipos.

3.3. Rúbrica del examen final

A continuación, mostramos el diseño de una rúbrica con la que el profesor puede valorar el alcance de los tres objetivos de la unidad didáctica. Para ello, tuvimos en cuenta los cuatro niveles de desempeño de la escala que establece el Ministerio de Educación Nacional (superior, alto, básico y bajo) establecida en el decreto 1290 del 2009. El profesor puede asignarle a cada nivel de desempeño la escala numérica que corresponda a su institución educativa. En el nivel superior, indicamos los criterios de logro que aportan en mayor medida al cumplimiento del objetivo y que se activan en el desarrollo de la tarea de evaluación. En el nivel alto, indicamos algunos criterios de logro que se pueden activar y algunos errores en los que puede incurrir el estudiante pero que no son relevantes para el desarrollo apropiado de la tarea de evaluación. En el nivel medio, mencionamos los criterios de logro que podrían activarse, y los errores que dificultan determinar las características de una elipse horizontal. En el nivel bajo, relacionamos los errores que impiden el alcance de cada objetivo.

Tabla 4

Niveles de logro e indicadores para los objetivos de la unidad didáctica elipse horizontal

Nivel de logro	Indicadores
	Objetivo 1
Superior (S)	El estudiante desarrolla todos los numerales de la tarea y activa los criterios de logro 1.1-1.6-1.9-1.10-1.11-1.12-1.13 y no incurre en los errores previstos para esos criterios. Establece datos del enunciado, aplica la definición de lugar geométrico para generar una elipse, e identifica sus elementos, para relacionarlos en situaciones de la vida real.
Alto (A)	El estudiante soluciona todos los numerales de la tarea de evaluación, al activar la mayoría de los criterios de logro 1.1-1.9-1.10-1.11-1.12-1.13. Determina los datos del enunciado, identifica los elementos de una elipse horizontal, establece la relación de la suma de los radios vectores con la constante que genera el lugar geométrico de la elipse y aplica la definición de lugar geométrico de la elipse en situaciones contextualizadas. Sin embargo, incurre en el error E40, al evitar la activación del criterio 1.12, que tiene que ver con reconocer la forma geométrica de la elipse, pues establece que la forma del ruedo del coliseo romano es una forma geométrica diferente a la elipse.
Básico (Bs)	El estudiante activa los criterios de logro 1.9-1.10-1.13, al identificar algunos datos del enunciado y establecer algunos elementos de la elipse. Incurre en al menos uno de los errores E2-3-45-38. Confunde elementos de la elipse con los de otras formas geométricas. Puede determinar inadecuadamente la constante y desconocer la relación entre la constante y el tamaño de la elipse. Como consecuencia, no puede activar los criterios 1.1-1.6-1.12.
Bajo (Bj)	El estudiante no resuelve la tarea completamente, ya que no hay activación total de los criterios de logro del objetivo. Incurre en al menos uno de los errores E41-30-44-24-25-26-67-77-39-68-75, al desconocer la función de los focos de la elipse, realizar procedimientos que caracterizan otra forma geométrica, hacer operaciones inadecuadas entre números reales que no le permiten obtener la constante esperada y/o no relacionar las características de la elipse con la forma del coliseo romano.

Tabla 4

Niveles de logro e indicadores para los objetivos de la unidad didáctica elipse horizontal

Nivel de logro	Indicadores
	Objetivo 2
Superior (S)	El estudiante desarrolla todos los numerales de la tarea, activa los criterios de logro CdL2.1-2.4-2.5-2.6-2.7-2.10-2.11-2.12-2.13-2.14-2.15-2.16-2.17 y no incurre en los errores previstos para esos criterios. Puede establecer y ubicar los elementos de una elipse, relacionarlos con los parámetros a, b y c, representar una elipse horizontal, establecer su lugar geométrico y asociarlo con situaciones contextualizadas.
Alto (A)	El estudiante soluciona todos los numerales de la tarea de evaluación, al activar los criterios de logro 2.1-2.4-2.5-2.6-2.7-2.10-2.13-2.15-2.16-2.17. Puede establecer los elementos de la elipse y relacionarlos adecuadamente con su lugar geométrico, pero incurre en al menos uno de los errores E33-28-29, que no le impiden establecer los elementos de la elipse porque corresponden a la toma imprecisa de medidas.
Básico (Bs)	El estudiante soluciona la tarea con dificultad y activa los criterios de logro 2.4-2.5-2.6-2.13-2.16, en los que identifica los elementos de la elipse. El estudiante incurre en al menos uno de los errores E40-4-60-61-81-76-10-16-11-70-71-20-72-15-2, al invertir la ubicación de algunos elementos de la elipse y construirla de forma vertical.
Bajo (Bj)	El estudiante no resuelve la tarea completa y esto no le permite activar la mayoría de criterios de logro. Incurre en al menos uno de los errores E42-51-54-57-52-82-23-1-31-35-8-19-12-14-21-13-63-64-69-3. No establece adecuadamente la ubicación de los elementos de la elipse ni extrae la información de la ecuación canónica, lo que le impide construir la elipse.

Tabla 4
Niveles de logro e indicadores para los objetivos de la unidad didáctica elipse horizontal

Nivel de logro	Indicadores
	Objetivo 3
Superior (S)	El estudiante desarrolla todos los numerales de la tarea y activa los criterios de logro CdL3.1-3.2-3.3-3.4-3.5-3.6-3.7-3.8-3.9-3.10-3.12-3.13 y no incurre en los errores previstos para esos criterios. Identifica, del enunciado de la tarea, los elementos de la elipse y construye gráficamente una elipse horizontal, al ubicar todos sus elementos. Además, relaciona la ecuación canónica de la elipse con los parámetros a, b y c y asocia la solución de la tarea con la situación planteada en ella.
Alto (A)	El estudiante soluciona todos los numerales de la tarea de evaluación y activa los criterios de logro 3.1-3.2-3.4-3.5-3.7-3.9-3.10-3.12-3.13, identifica y ubica de manera adecuada los elementos de una elipse horizontal, pero incurre en al menos uno de los errores E29-76-28-33. No aprecia la importancia de los focos al ubicarlos y/o toma medidas imprecisas de algunos elementos, aunque esto no le impide resolver correctamente la tarea de evaluación.
Básico (Bs)	El estudiante soluciona la tarea con dificultad y activa criterios de logro del objetivo al identificar los elementos de la elipse, pero, incurre en al menos uno de los errores E40-4-16-11-70-71-20-14-21-13-72-80-10-60-61, ya que intercambia la ubicación de algunos elementos de la elipse, lo que lo lleva a construir la gráfica y ecuación de una elipse vertical.
Bajo (Bj)	El estudiante no resuelve la tarea completa, al incurrir en al menos uno de los errores E42-8-19-12-63-64-23-1-31-18-35-85-86, lo que le impide identificar los elementos en la órbita elíptica del planeta Eris y generar la ecuación canónica de la trayectoria.

En el anexo 8, incluimos el examen final junto con su rúbrica. En el anexo 9, incluimos la formulación de la tarea diagnóstica, las tareas de aprendizaje y el examen final para imprimir.

5. Conclusiones

El trabajo que presentamos en esta unidad didáctica ha sido el producto de un ciclo de análisis didáctico sobre el tema elipse horizontal con centro en el origen que realizamos durante dos años. Inicialmente, analizamos el currículo colombiano y lo relacionamos con el marco PISA 2012. Luego, nos centramos en los contextos y procesos pedagógicos de la Institución Educativa Rural Departamental Limoncitos, en la que decidimos implementar la unidad didáctica. Con ello, elegimos el tema central de la unidad didáctica e iniciamos el análisis de contenido. En este análisis, determinamos la estructura conceptual del tema, los sistemas de representación y la fenomenología, lo que nos permitió pensar en qué aspectos del tema trabajaríamos. Continuamos con el análisis cognitivo, en el que establecimos las expectativas de aprendizaje (los objetivos, las expectativas de nivel superior y las expectativas afectivas) para nuestra unidad didáctica. Esto nos dio paso a proponer las tareas de aprendizaje dentro del análisis de instrucción para el alcance de los objetivos. Posteriormente, implementamos las tareas de aprendizaje en la institución y usamos unos instrumentos de recolección de información que llamamos diarios del estudiante y diarios del profesor. Luego, utilizamos un programa en el que organizamos toda la información recolectada de las producciones escritas y de los diarios. Con esta información, evaluamos la implementación. Esto nos permitió identificar las fortalezas y debilidades de la propuesta para realizar las mejoras con las que esperamos potenciar las fortalezas y superar las debilidades.

En este trabajo, sintetizamos el producto de todo el proceso anterior. Iniciamos mostrando un análisis previo que ubica al profesor en los contenidos relacionados con la elipse horizontal y los propósitos de aprendizaje de la unidad didáctica. Luego, presentamos la tarea diagnóstica con la que se evalúan los saberes previos que deben tener los estudiantes para desarrollar las actividades de la unidad didáctica. Después, describimos en detalle las tareas de aprendizaje propuestas para el alcance de los objetivos de la unidad didáctica. Por último, incluimos el examen final con su respectiva rúbrica, para que el profesor pueda evaluar el desempeño de los estudiantes y los aprendizajes logrados con la unidad didáctica. Destacamos de nuestra unidad didáctica el agrupamiento e interacción de las tareas que permiten la comunicación asertiva entre estudiantes y el profesor, el uso de un lenguaje accesible para los estudiantes, los materiales y recursos didácticos requeridos que aumentan el interés de los estudiantes para resolver las tareas y el uso de distintos contextos en la formulación de las tareas que muestra la aplicabilidad de las matemáticas.

Gracias a este trabajo, hemos llegado a algunas conclusiones que presentamos a continuación. Reconocemos la importancia de tener en cuenta varios aspectos para la planificación de una clase, entre ellos, realizar el análisis de contenido, el análisis cognitivo y el análisis de instrucción de un tema de las matemáticas en concreto. También, le damos importancia a la implementación con el análisis de actuación porque nos permite evidenciar si las tareas previstas aportaron al aprendizaje de los estudiantes. Valoramos el hecho de identificar fortalezas y debilidades de la unidad didáctica, ya que nos brinda una oportunidad para planificar de mejor manera una sesión de clase y buscar herramientas que permitan facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje. Durante la construcción de la unidad didáctica, comprendimos que el diseño de una clase debe hacerse pensando en los estudiantes, y debe tener en cuenta las variables que intervienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje como el contexto social y personal, el nivel académico, los intereses o gustos de los estudiantes y los aspectos afectivos. Identificamos que los estudiantes se enfrentan de diferentes formas a un problema. Esto nos llevó a pensar en diferentes estrategias de solución en la planeación de las tareas y a evitar guiar a los estudiantes por una sola opción de solución. Como parte del diseño, pensamos en las dificultades y errores que se les podrían presentar a los estudiantes. Esto nos dio la oportunidad de plantear posibles ayudas para solucionar estas dificultades. Finalmente, consideramos que el trabajo realizado influye positivamente en nuestra vida laboral, ya que nos brinda herramientas para mejorar nuestra labor como docentes del área de matemáticas.

Agradecemos al Ministerio de Educación Nacional por su apoyo financiero a través del programa Becas para la Excelencia Docente, a Pedro Gómez director de la Maestría en Educación Matemática por brindarnos su sabiduría, a Paola Castro por su dedicación como coordinadora de la quinta cohorte de MAD y a nuestro tutor Fernando Torres por estar siempre dispuesto a mejorar nuestro proceso de formación durante la maestría.

6. LISTADO DE ANEXOS

A continuación, presentamos el listado de anexos que apoyan la segunda parte del informe final de la unidad didáctica Elipse horizontal con centro en el origen. Estos anexos se pueden consultar en este enlace: http://funes.uniandes.edu.co/11771.

Anexo 1. Conocimientos previos que corresponden a aquellos conocimientos que los estudiantes deben tener antes de enfrentarse a las actividades de la unidad didáctica.

Anexo 2. Criterios de logro son los procedimientos organizados que permiten la consecución de los objetivos

Anexo 3. Limitaciones de los conocimientos previos que corresponden a las dificultades y errores asociados a los conocimientos previos.

Anexo 4. Limitaciones de aprendizaje de los criterios de logro que corresponden a las dificultades y errores que impiden la consecución de los objetivos.

Anexo 5. Listado de expectativas afectivas correspondientes a las actitudes que esperamos que presenten los estudiantes al desarrollar las actividades propuestas en la unidad didáctica.

Anexo 6. Ayudas que permiten superar errores asociados a los conocimientos previos

Anexo 7. Ayudas que permiten superar errores asociados a los criterios de logro

Anexo 8. Fichas de las tareas en las que se incluye la tarea diagnostica, los elementos de las tareas de aprendizaje y el examen final.

Anexo 9. Tareas para imprimir: tareas de aprendizaje y de evaluación listas para ser impresas.

7. REFERENCIAS

Gómez, P., Mora, M., Velasco, C., (2017). *Apuntes sobre análisis de instrucción*. Módulo IV de MAD 5. Documento no publicado (Documentación). Bogotá: Universidad de los Andes.

González, M, Gómez, P., (2016). *Apuntes sobre análisis cognitivo*. Módulo III de MAD 5. Documento no publicado (Documentación). Bogotá: Universidad de los Andes.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2009). *Decreto 1290 de 2009. Por el cual se reglamenta la evaluación del aprendizaje y promoción de los estudiantes de los niveles de educación básica y media.* Bogotá: Autor. Disponible en https://bit.ly/2K2blMh

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: MEN.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2015). *Derechos básicos de aprendizaje*. Bogotá: Autor.

Ministerio de Educación Cultura y Deporte. (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: matemáticas, lectura y ciencias*. Descargado de http://bit.ly/2JbJTer