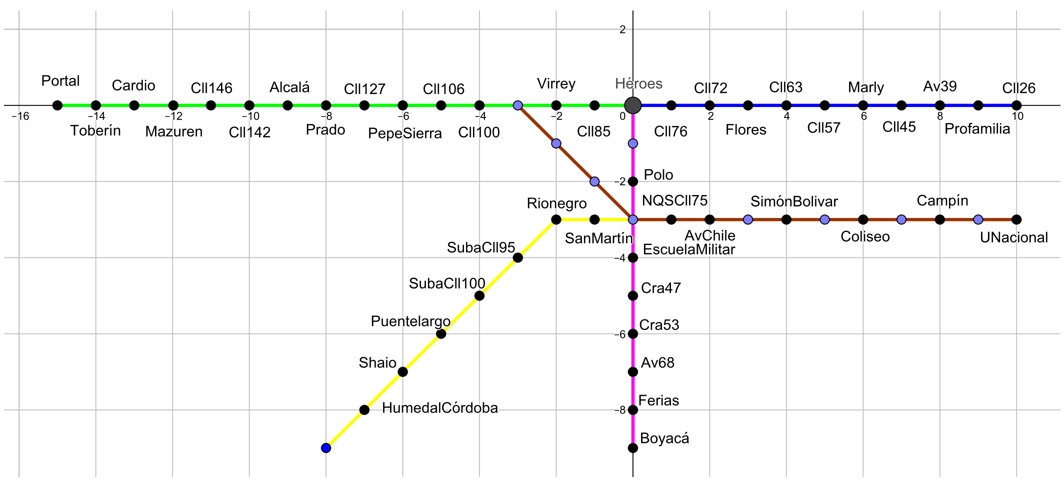
1. ANEXO 8. FICHAS DE LAS TAREAS

En este anexo, presentamos el listado de las fichas de la tarea diagnóstica, las tareas de aprendizaje y el examen final de la unidad didáctica.

1. TAREA DIAGNÓSTICA

A continuación, presentamos la tarea diagnóstica para el tema de la elipse horizontal.

A. En la siguiente imagen se muestran algunos tramos del mapa del sistema de transporte TransMilenio de Bogotá, ubicado en un plano cartesiano.



A continuación, podrás observar la información de algunas rutas.

Ruta B28

Ruta H20

Boyacá	Ferias	Av. 68	Polo	Calle 45	Calle 26

Ruta B27

Marly	Calle 63	Flores	Calle 72	Calle 76	Calle 85	Virrey	Portal Norte

Ruta H15

Humedal Córdoba	Puente largo	Escuela Militar	Calle 76	Marly	Calle 45	Av. 39

Resuelve las siguientes situaciones.

1. Se desea construir una estación nueva en la coordenada (5,-3) que se llamará *Los novios*. Ubica y marca en el mapa la posición de la nueva estación.

2. Teniendo en cuenta la ruta B28, identifica dos estaciones que tengan mayor distancia que la que hay entre las estaciones Pepe Sierra y Prado.

3. Para la ruta H20, organiza de mayor a menor las paradas entre estaciones de acuerdo con la distancia entre ellas.

4. Si estás en la estación Humedal Córdoba y quieres ir hasta el Portal Norte, indica cuál debe ser tu recorrido utilizando las rutas B28, H20, B27 y H15.

5. ¿Cuáles son las coordenadas de las estaciones La Castellana, Av. 68 y Calle 106?

6. ¿Cuál es la estación que queda en el punto medio entre las estaciones Calle 45 y Flores? y ¿entre las estaciones Av Chile y Universidad Nacional?

7. Se observa que, cuando la ruta B27 hace sus paradas entre los paraderos en Marly, Calle 63 y Flores, la suma de las distancias entre ellas es de tres unidades. Encuentra tres estaciones dentro de la misma ruta que mantengan la misma relación entre las distancias que las separan.

8. Escribe las coordenadas inicial y final de una persona que empieza su recorrido en la estación Calle 100 y lo termina en la estación Calle 63. ¿Qué diferencias observas en esas coordenadas?

9. Los administradores del sistema TransMilenio quieren implementar la nueva ruta 6, que se detiene en todas las estaciones desde la Boyacá hasta la Calle 26. Traza de otro color el recorrido de la ruta 6 y marca el lugar en que esta ruta forma un recorrido perpendicular a la ruta B28.

10. ¿En qué estación está ubicado el origen del plano cartesiano?

11. Si una unidad en el plano cartesiano equivale a 4 cuadras, ¿cuántas cuadras recorrió un bus de TransMilenio en cada una de las rutas B28, H20, B27, H15 y la ruta 6?

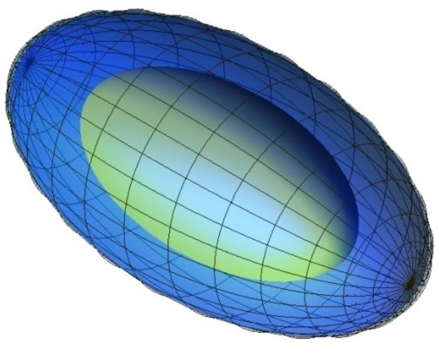
B. En un plano cartesiano, resuelve los siguientes puntos.

1. Grafica un triángulo rectángulo cualquiera de modo que su ángulo recto coincida con el origen del plano cartesiano y halla el valor de la hipotenusa que forma. Luego, determina la ecuación de la recta que contiene la hipotenusa.

2. En la función cuadrática $y = 2x^2 + 5x - 3$, reemplaza en x los siguientes valores $-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2$ y halla el vértice de la función. Luego, grafica la función.

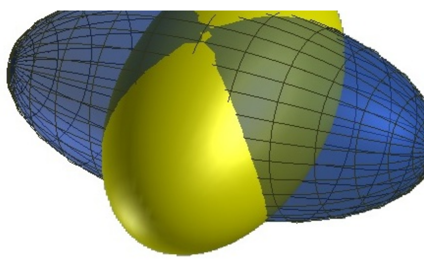
C. Utiliza el cono de Apolonio y calca las cónicas que se generan. Asígnales su respectivo nombre (circunferencia, parábola, elipse e hipérbola).

D. De las siguientes imágenes[1], selecciona cuáles se asemejan a elipsoides:_________________



a.

b.



c.

d.

[1] Imágenes tomadas de https://bit.ly/2HQsLhj; https://bit.ly/2lUM4pB; https://bit.ly/2lThVqs; https://bit.ly/2Gw7Uur; https://bit.ly/2k7rSTc. Todas estas figuras tienen permiso de reutilización.

e. 

f. 

A continuación, presentamos en la tabla 1 la temporalidad para la tarea diagnóstica.

Tabla 1
Temporalidad de la tarea diagnóstica

Sesión	Tarea	Tiempo (min)	Actividades
1	Diagnóstica	60	Aplicación del literal A
2	Diagnóstica	60	Aplicación de literales B, C y D
3	Diagnóstica	60	Realimentación de la prueba diagnóstica

2. Tareas de aprendizaje del objetivo 1

A continuación, describimos los elementos correspondientes a la ficha de las tareas de aprendizaje del objetivo O1.

2.1. Tarea de aprendizaje: T1.1 Construcción de una piscina

A continuación, describimos los siete elementos de la primer tarea del objetivo 1.

Requisitos

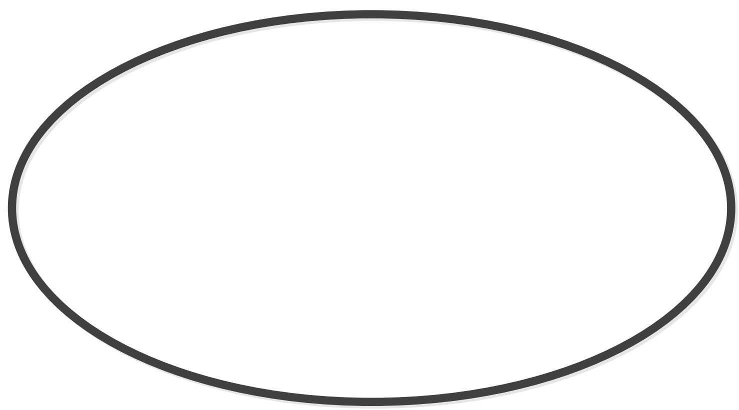
Para abordar esta tarea, los estudiantes de grado décimo deben extraer información del enunciado, reconocer las formas de los cortes de un cono y tener conocimiento de algunos lugares geométricos como la circunferencia y la parábola. Además, deben haber realizado figuras en un plano.

Metas

Con esta tarea, pretendemos que el estudiante relacione la construcción de la elipse con la constante que determina su lugar geométrico. Además, queremos contribuir en mayor medida con el desarrollo de las capacidades matemáticas fundamentales de representación, diseño de estrategias para resolver problemas, el razonamiento y argumentación y la utilización de herramientas matemáticas en los tres procesos matemáticos de formular, interpretar y emplear. De igual manera, buscamos fortalecer todas las expectativas de tipo afectivo, aunque en mayor medida a la segunda y cuarta expectativa. Estas metas permiten que el estudiante supere errores como considerar que los focos no son puntos fijos o que confunda la medida de la constante de la elipse con otro elemento.

Formulación de la tarea matemática escolar

Los estudiantes reciben de su profesor un documento con la siguiente información:

> *Construcción de una piscina*
>
> Pedro y sus dos hijas María y Juana, grafican en el piso del patio de su casa la forma que tendrá una piscina que desean construir. María y Juana, se ubican a cierta distancia en los puntos donde se colocarán los desagües de la piscina. Ellas tendrán una cinta métrica no elástica atada a sus pies mientras su padre realiza un procedimiento que le ayuda a obtener la forma de la piscina que se muestra en la siguiente figura.
>
> 
>
> En grupos de tres personas, diríjanse al patio del colegio y resuelvan los siguientes puntos.
>
> 1. Discutan en grupo sobre cuál pudo ser el procedimiento que realizó Pedro. Luego, con la cinta métrica y la tiza apliquen el procedimiento que dedujeron para dibujar en el piso del patio la figura obtenida por Pedro para el diseño de la piscina.
>
> 2. Describan los pasos que han seguido para dibujar la forma de la piscina
>
> ____
> ____
> ____
>
> 3. Presenten ante sus compañeros del curso su propuesta para la construcción del diseño de la piscina.
>
> 4. ¿Cuál o cuáles figuras del diseño de la piscina propuestas por todos los grupos son similares a la que construyeron Pedro y sus hijas? y ¿cuáles no?
>
> ____
> ____
> ____

5. ¿Cuál fue el proceso seguido por los estudiantes que hicieron la figura similar a la construida por Pedro y sus hijas para el diseño de la piscina?

6. ¿Qué sucede con la gráfica del diseño de la piscina si Pedro reduce la longitud de la cinta métrica que se amarra a los pies de Juana y María? ¿Qué sucede si Pedro aumenta la longitud de la cinta métrica?

7. ¿Qué relación tiene la cinta métrica amarrada a los pies de Juana y María con la figura del diseño de la piscina?

Materiales y recursos

Los estudiantes tendrán una cinta métrica y una tiza, implementos necesarios para desarrollar la tarea en el piso del patio de recreo. Dichos recursos se pueden conseguir fácilmente y son de sencillo manejo tanto para el profesor como para el estudiante, lo cual no implica tiempo adicional para aprender su uso. Con respecto a la eficacia, el uso del recurso contribuye a las metas porque permite relacionar la forma del lugar geométrico de la elipse con la constante que la genera. La manipulación del recurso les permite descubrir y lograr la finalidad de la tarea a partir de la búsqueda de estrategias. Por el planteamiento de la tarea, el recurso permite identificar los errores y tomar otra ruta para su correcto desarrollo. Allí, se presenta interacción entre los integrantes del grupo y el profesor. También, permite desarrollar la confianza en el estudiante para llevar a cabo la tarea. La tabla 2 resume lo anterior.

Tabla 2
Pertinencia de los materiales y recursos

	Eficiencia				Eficacia							
	Acc	PrepP	PrepE	T	C	Afectivo						
MoR	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Cinta métrica	✓				✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Tiza	✓				✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓

Nota. MoR = material o recurso; Acc = acceso; PrepP = preparación profesor; PrepE = preparación estudiantes; T = tiempo; C = cognitivo (metas).

Agrupamiento
En esta tarea, el profesor puede organizar grupos de cuatro estudiantes o más. Esto les permitirá tomar distintas funciones en el grupo para la construcción solicitada en la tarea. Luego de resolver la tarea hasta el numeral 3, el grupo completo socializará los resultados obtenidos y con la conclusión definida, cada grupo formado inicialmente, procede a resolver los demás numerales.

Interacción y comunicación en clase
Con el desarrollo de esta tarea, se fomenta la comunicación entre los integrantes de cada grupo. Estos grupos son creados por el profesor, de tal manera que haya estudiantes de distinto nivel de desempeño para que puedan interactuar, ayudarse y aprender a trabajar en equipo, y así poder indagar por la manera de usar los recursos y determinar la estrategia de reproducir lo hecho por Pedro en la construcción de la forma que tendrá la piscina. Del mismo modo, existe comunicación entre todos los estudiantes y la docente al presentar la propuesta de cada grupo para determinar el procedimiento apropiado para la construcción de la forma de la piscina. El profesor también interactúa con los estudiantes durante el desarrollo de la tarea, al atender los requerimientos que puede presentar cada grupo y al guiar las conclusiones dadas en la socialización. Durante dicha interacción, el docente proporcionará distintas ayudas como las que mostramos en la en la tabla 1 del anexo 7, que permitan superar los errores en los que podrían incurrir los estudiantes al desarrollar esta tarea. Por ejemplo, si el estudiante confunde los focos con el centro, el docente puede aclarar la manera en la que deben ubicarse los dos estudiantes que están atados a la cinta métrica.

Temporalidad de la tarea matemática escolar
Esta tarea presenta las siguientes etapas. Inicialmente, se presenta la intensión de la tarea, se organizan los grupos, se entrega el material y se realiza el desplazamiento hacia el patio en un tiempo aproximado de 10 minutos. La siguiente etapa, consiste en desarrollar la tarea hasta el punto 3 durante 20 minutos. En la posterior etapa, cada grupo presenta a todo el curso su propuesta de solución y junto con el docente se concluirá el proceso apropiado para responder los numerales 4 y 5, esto en un tiempo de 10 minutos. Posteriormente, los grupos regresan a sus lugares, esta vez con una cinta más larga y una más corta a la que tenían inicialmente para dar respuesta a la pregunta 6 y 7 para lo que estimamos un tiempo de 10 minutos. Luego, se realiza socialización del desarrollo de la tarea y entrega de los escritos al profesor en 10 minutos. La realimentación de la tarea se realizará durante 10 minutos en la sesión 2. En la tabla 3, organizamos la temporalidad de las sesiones de la tarea T1.1.

Tabla 3
Temporalidad de la tarea T1.1

Objetivo	Tarea	Tiempo (min)	Actividades
		Sesión 4	
	T1.1: Construcción	10	Presentación de la tarea, entrega de material y disposición de los grupos

	de una piscina		
		20	Desarrollo de la tarea hasta numeral 3
		10	Socialización y desarrollo de numerales 4 y 5
		10	Desarrollo de numerales 6 y 7
		10	Socialización de resultados de la tarea y entrega de escritos
		Sesión 5	
1	T1.1	10	Realimentación tarea T1.1

Grafo de criterios de logro de la tarea T1.1
A continuación, mostramos en la figura 1 el grafo de criterios de logro de la tarea que describimos en este sub-apartado.

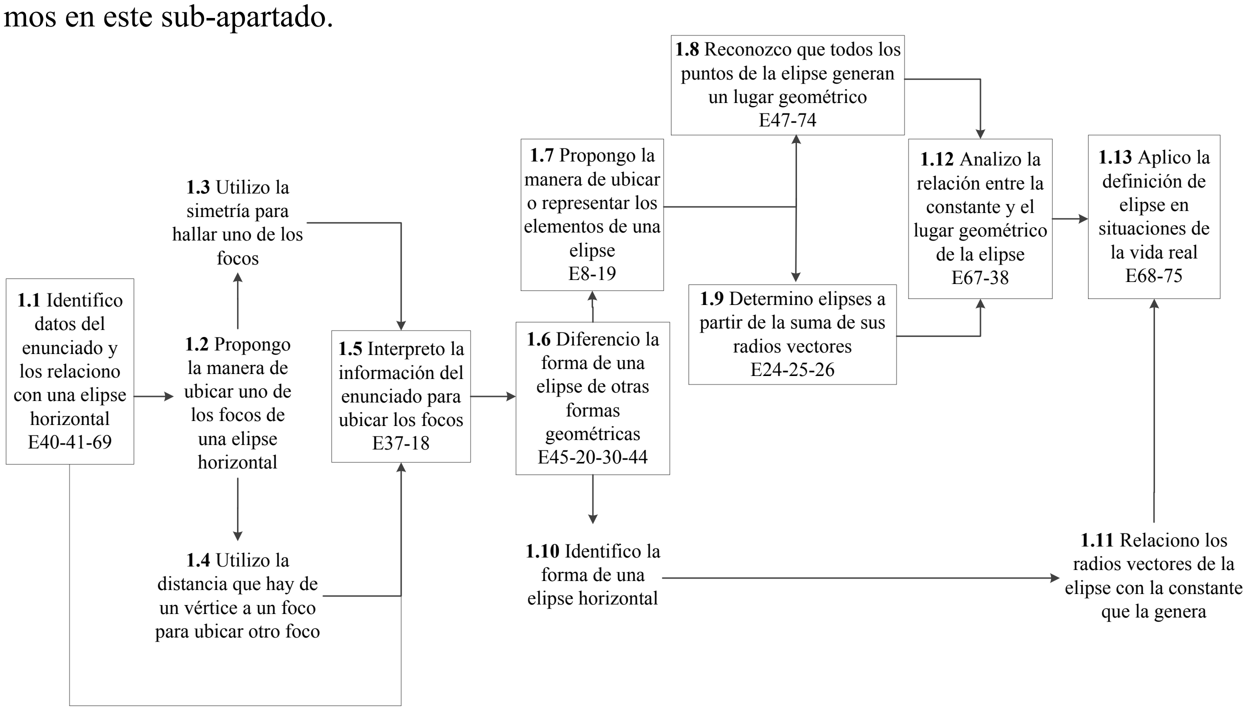


Figura 1. Grafo de criterios de logro de la tarea 1.1 construcción de una piscina

2.1. Tarea de aprendizaje: T1.2 Mesa de billar

A continuación, describimos los siete elementos de la segunda tarea del objetivo 1.

Requisitos
Los estudiantes, al abordar esta tarea, saben que al golpear un objeto esférico, éste se mueve en línea recta y si choca con otro objeto, rebotará. Además, reconoce tanto los focos como la forma

del lugar geométrico de la elipse y realiza procesos de medición de distancias trazadas por la trayectoria de un objeto.

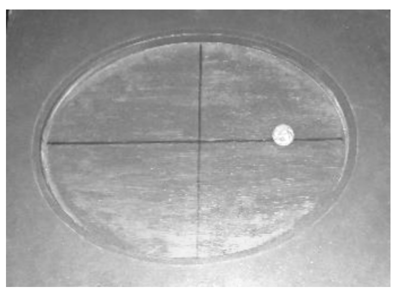
Metas

Con esta tarea, pretendemos que el estudiante relacione las medidas del movimiento de una pelota de caucho sobre la mesa de billar, con la forma del lugar geométrico de la elipse. Buscamos fortalecer las capacidades fundamentales de razonamiento y argumentación, comunicación, diseño de estrategias y utilización de herramientas matemáticas mediante los procesos de formular, emplear e interpretar. Además, queremos desarrollar la motivación del estudiante por definir el lugar geométrico de la elipse. Pretendemos superar los errores asociados a esta tarea como, por ejemplo, cuando el estudiante establece medidas diferentes a las de la simetría entre los focos o a las que hay entre un foco y el vértice más cercano.

Formulación de la tarea matemática escolar

El profesor entregará a los estudiantes una hoja con la instrucción de la tarea, al igual que los recursos requeridos.

> *Mesa de billar*
>
> Una mesa de billar elíptica como la que se muestra en la figura, tiene el siguiente funcionamiento. Si ponemos la bola de billar en el punto F de la mesa y la golpeamos en cualquier dirección, la bola rebotará en la banda una vez y caerá en el agujero F´. Es de aclarar que el golpe dado a la bola debe ser en su centro para no generar efectos que desvíen su trayectoria.



> Utilicen la mini-mesa elíptica, una pelota de caucho que cumplirá el papel de bola de billar y una tiza para realizar marcaciones. Respondan los siguientes puntos.
>
> 1. Encuentren y marquen con la tiza el punto en el que es posible colocar la pelota para que, al lanzarla contra el borde de la mesa, rebote justo hacia el punto F' u orificio. Para encontrar el punto, utilicen características marcadas de la mesa y escriban la estrategia utilizada.
>
> ____
> ____
> ____
>
> 2. Realiza un lanzamiento directo desde el punto marcado hasta el orificio, ¿la distancia recorrida por la pelota en ese lanzamiento sería mayor o menor que un lanzamiento que toque la banda?

3. ¿Tiene que ver la información hallada en los puntos 1 y 2 con la forma de la mesa? Justifiquen su respuesta

4. Con la tiza, marquen el punto de la banda donde toca la pelota en cinco lanzamientos acertados y midan los desplazamientos seguidos por la pelota. Registren estos resultados en la siguiente tabla, teniendo en cuenta que la Distancia 1 es la longitud del desplazamiento de la pelota desde el punto inicial hasta el golpe en la banda, y la Distancia 2 es la longitud de su desplazamiento desde el golpe en la banda hasta el orificio.

Tabla: *Registro de medidas*

LANZAMIENTOS (L_i)	DISTANCIA 1	DISTANCIA 2	SUMA DE DISTANCIAS
L_1			
L_2			
L_3			
L_4			
L_5			

5. ¿Qué relación existe entre las sumas de las distancias de todos los lanzamientos acertados?

6. Si se ampliara el tamaño de la mesa, ¿qué creen que ocurre con la suma de las distancias?

7. Teniendo en cuenta los resultados de las sumas de las distancias de la tabla del punto 4, ¿qué relación tienen las medidas de los desplazamientos de varios lanzamientos de la pelota con la forma del borde de la mesa?

8. ¿Por qué los lanzamientos acertados se logran únicamente desde el punto hallado en el numeral 1?

____
____
____

Materiales y recursos

Para el desarrollo de esta tarea, el profesor entregará a cada grupo una réplica de una mesa de billar elíptica que tendrá marcados sus ejes de simetría, y una pelota de caucho que hará el papel de la bola de billar. Los profesores y estudiantes tienen fácil acceso a dicho recurso, el cual saben manipular, y la instrucción para su uso es clara, por lo que no se requiere de tiempo adicional. El uso del recurso permite que los estudiantes reafirmen la relación entre la constante y el lugar geométrico de la elipse, teniendo en cuenta las medidas de la trayectoria de la pelota, al verificar que, con la suma de dos distancias se obtiene dicha constante. Teniendo en cuenta el funcionamiento de la mesa de billar, los estudiantes deberán determinar la contante a partir del desplazamiento de la pelota desde el punto de partida encontrado hasta el orificio que se localiza en la mesa. Para esto, necesitarán una regla para tomar las medidas de las distancias. Además, pueden observar los errores si ubican la pelota en un punto en el que no se cumpla la funcionalidad de la mesa. Con esto, los estudiantes respetarán las hipótesis dadas por sus compañeros para descubrir cómo pueden acertar siempre en los lanzamientos. Por otro lado, el hecho de que el recurso sea un juego popular, centra la atención y curiosidad de los estudiantes y los motiva a desarrollar la tarea propuesta. La tabla 4 resume lo descrito anteriormente.

Tabla 4
Pertinencia de los materiales y recursos

	Eficiencia				Eficacia							
	Acc	PrepP	PrepE	T	C	Afectivo						
MoR	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Mesa de billar	?	?			?	?	?	?	?	?	?	?
Pelota de caucho	?	?			?	?	?	?	?	?	?	?
Regla	?	?			?	?	?	?	?	?	?	?

Nota. MoR = material o recurso; Acc = acceso; PrepP = preparación profesor; PrepE = preparación estudiantes; T = tiempo; C = cognitivo (metas).

Agrupamiento

El profesor formará grupos de trabajo según la cantidad de mesas de billar que se tengan. Además, en cada grupo ubicará estudiantes que hayan obtenido diferentes niveles de desempeño en la tarea anterior, lo que les permitirá interactuar y proponer estrategias de solución mediante varios intentos en el juego, discutir la posición correcta de la pelota, resolver dudas, superar dificultades y decidir la manera como resolverán la tarea.

Interacción y comunicación en clase

Cada grupo tiene libertad de establecer las normas con las que van a desarrollar el juego, y con ello, llegar a acuerdos y resolver lo propuesto en la tarea. Cabe citar que los grupos serán generados por el profesor de tal manera que puedan trabajar junto a compañeros distintos los de la tarea anterior, con el propósito de que puedan interactuar y aprendan a comunicarse con todos los integrantes del grado. El profesor estará atento a las dudas e inquietudes durante su desarrollo, lo cual le permitirá observar la actuación de los estudiantes en cada grupo y proporcionar las ayudas necesarias que permitan superar distintos errores, como lo mostramos en la tabla 2 del anexo 7. Por ejemplo, en caso de tomar medidas erróneas de la trayectoria de la canica, el docente puede proponer que revisen y repitan los procedimientos de medición. Al finalizar, estudiantes y profesores socializarán los resultados de la tarea. Esta interacción permitirá llegar a la conclusión final de la tarea y verificar los resultados.

Temporalidad de la tarea matemática escolar

El desarrollo de la tarea requiere de tres etapas. Inicialmente, el profesor presentará la tarea, formará los grupos y entregará los recursos necesarios para realizar la tarea, en un tiempo de 5 minutos. Luego, dará un tiempo de 30 minutos para desarrollar la tarea. Seguido, los grupos harán las exposiciones, socializarán los resultados y los entregarán en un tiempo de 15 minutos. La tarea será realimentada en la siguiente clase durante los primeros10 minutos. En la tabla 5, organizamos la temporalidad de las sesiones de la tarea T1.2.

Tabla 5

Temporalidad de la tarea T1.2

Objetivo	Tarea	Tiempo (min)	Actividades
		Sesión 5	
1	1.2	5	Presentación de la tarea, entrega de material y disposición de los grupos
		30	Desarrollo de la tarea
		15	Exposición de resultados, conclusiones finales y entrega de escritos de la tarea
		Sesión 6	
1	1.2	10	Realimentación tarea T1.2

Grafo de criterios de logro de la tarea T1.2

A continuación, mostramos en la figura 2 el grafo de criterios de logro de la tarea que describimos en este sub-apartado.

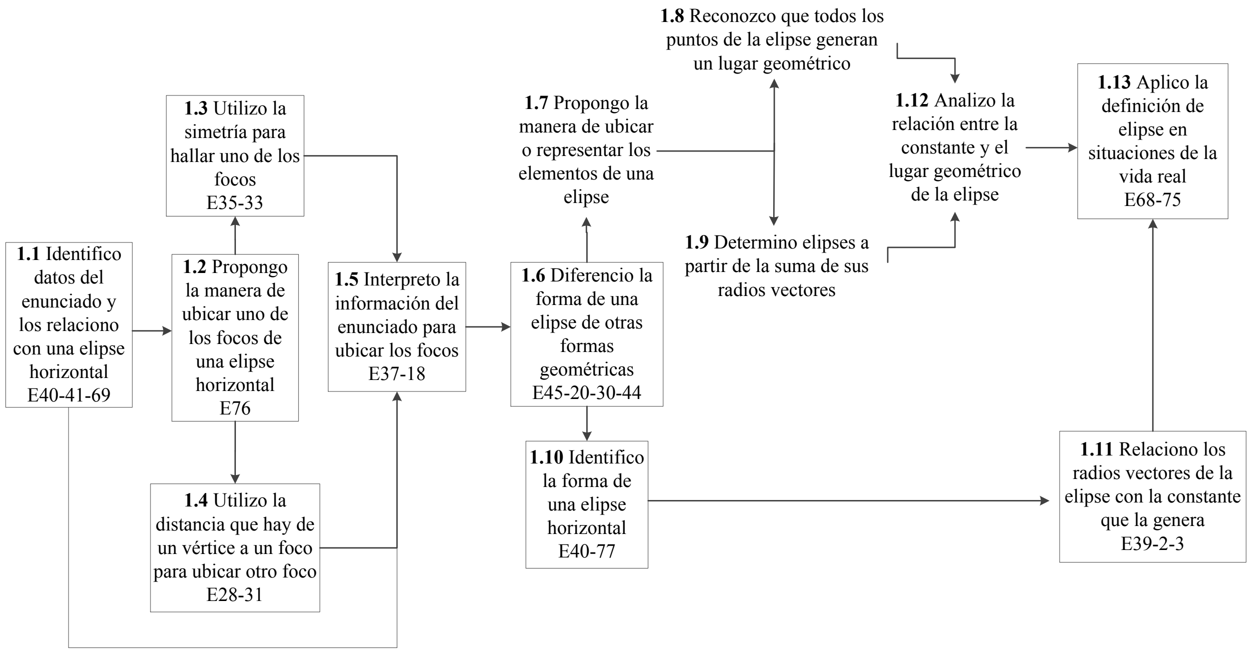


Figura 2. Grafo de criterios de logro de la tarea 1.2 mesa de billar

3. Tareas de aprendizaje del objetivo 2

A continuación, describimos los elementos correspondientes a la ficha de las tareas de aprendizaje del objetivo O2.

3.1. Tarea de aprendizaje: T2.1 Vitrales elípticos

A continuación, describimos los siete elementos de la primera tarea del objetivo 2.

Requisitos

Para el desarrollo de esta tarea, se requiere que el estudiante identifique que el lugar geométrico de la elipse está determinado por una relación matemática. Además, que conozca propiedades de las rectas como la perpendicularidad y simetría.

Metas

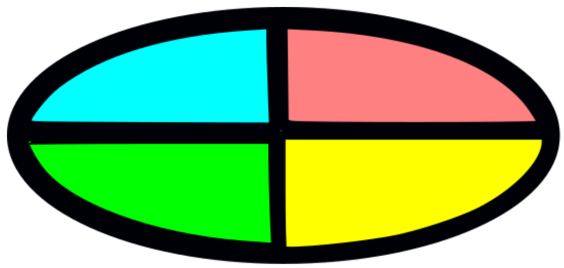
Con esta tarea, buscamos que los estudiantes reconozcan los elementos de la elipse y determinen las características de cada uno de ellos. Además, queremos reforzar las capacidades matemáticas fundamentales de representación y uso de lenguaje simbólico, la comunicación, el razonamiento y argumentación, utilización de herramientas matemáticas y diseño de estrategias para resolver problemas, en los procesos de emplear e interpretar. Al igual, queremos generar interés por representar los elementos de la elipse. Buscamos que los estudiantes no incurran en errores como confundir los parámetros de la elipse o que asuman que la distancia entre los focos es variable.

Formulación de la tarea matemática escolar

El profesor dará inicio a la tarea, organizando grupos de tres estudiantes y entregando una hoja con la siguiente información.

Vitrales elípticos

Un arquitecto decide decorar un centro comercial con vitrales horizontales de diferentes medidas. Para ello, pide a un vidriero que corte tres vidrios de modo que su forma sea elíptica pero tengan diferente tamaño. El arquitecto quiere pintar los vidrios de cuatro colores diferentes tales que dividan el vitral en cuatro partes exactamente iguales como se muestra en la figura.



Para colgar los vitrales en la pared del centro comercial, el arquitecto le entrega al vidriero cadenas para que las corte de la misma longitud que el ancho de cada vitral, y así la puntilla donde se colgará, permanezca en el borde de cada vitral.

Para realizar este trabajo, el vidriero utiliza un artefacto llamado compás de Arquímedes que le permitirá generar los vitrales elípticos.

Ubíquense en la mesa asignada por su profesor en los grupos establecidos y desarrollen las siguientes preguntas haciendo uso del compás de Arquímedes.

1. Tracen dos rectas perpendiculares sobre el cartón paja para determinar la forma en que quedaran divididos los vitrales.

2. Ubiquen el compás de Arquímedes, de modo que su centro coincida con la intersección de las rectas y sus divisiones coincidan con las rectas perpendiculares.

3. Elijan cualquier orificio en cada brazo del compás de Arquímedes y tracen la elipse. Luego, recorten el vitral que se generó.

4. Marquen los puntos del vitral donde se deben ubicar los extremos de la cinta para que éste quede completamente horizontal.

5. ¿Qué función cumplen las medidas del ancho y alto del vitral en la elipse trazada?

____

____

____

6. El arquitecto quiere colocar el logo del centro comercial en el centro de cada vitral, ¿de qué forma puede determinar el vidriero este punto?

7. Utilicen la cinta y los chinches para colgar el vitral en la pared. Luego de que el arquitecto ubicara los vitrales en la pared del centro comercial, un visitante mueve uno de los vitrales y observa que la puntilla que lo sostiene continúa ubicada en el borde del vitral ¿cuál podría ser la razón de este suceso? Verifiquen este caso con el vitral construido por el grupo.

Materiales y recursos

El material requerido para esta tarea es un elipsógrafo llamado compás de Arquímedes por grupo que el profesor debe construir con anterioridad. El compás de Arquímedes le permite al estudiante construir el lugar geométrico de una elipse que hará el papel de vitral en la tarea. Además, generamos curiosidad e interés en el estudiante por resolver la tarea al observar la utilidad del material. Para desarrollar la tarea se requiere de un elipsógrafo por grupo. También incluimos el cartón paja sobre el que los estudiantes trazarán la elipse, tres chinches que harán la función de focos y punto del lugar geométrico, y el hilo que representa a los radios vectores y la constante. La utilidad de dichos recursos permitirá a los estudiantes desarrollar los puntos 6 y 7, generará curiosidad e interés por determinar las conclusiones de la tarea, y no requieren de preparación para su uso. En la tabla 6, resumimos lo anterior.

Tabla 6

Pertinencia de los materiales y recursos

	Eficiencia				Eficacia							
	Acc	PrepP	PrepE	T	C	Afectivo						
MoR	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Compás de Arquímedes	⍰	⍰	⍰	⍰	⍰	⍰	⍰	⍰	⍰	⍰	⍰	⍰
Cartón paja	⍰				⍰			⍰	⍰		⍰	⍰
Chinches	⍰				⍰	⍰	⍰	⍰	⍰	⍰	⍰	⍰
Hilo	⍰				⍰	⍰	⍰	⍰	⍰	⍰	⍰	⍰

Nota. MoR = material o recurso; Acc = acceso; PrepP = preparación profesor; PrepE = preparación estudiantes; T = tiempo; C = cognitivo (metas)

Agrupamiento

El profesor deberá organizar grupos de aproximadamente tres o cuatro estudiantes que permanecerán juntos durante el desarrollo de los puntos de la tarea. Esta agrupación es favorable para los estudiantes, ya que compartirán sus puntos de vista y determinarán las estrategias para resolver cada uno de los puntos de la tarea.

Interacción y comunicación en clase
Al interior de cada grupo, los estudiantes darán alternativas de solución de la tarea, entre ellos resolverán inquietudes y decidirán los procesos adecuados para solucionar cada punto. El profesor conformará los grupos para que estudiantes con bajo nivel académico puedan interactuar con otros jóvenes que tienen buen desempeño en el área de matemáticas. También, habrá constante comunicación con el profesor, quien verificará el cumplimiento de la tarea en cada grupo, atenderá aquellas situaciones en las que se presenten errores en cada proceso y utilizará ayudas como preguntas o explicaciones, que presentamos en la tabla 3 del anexo 7, por ejemplo, si los estudiantes ubican lo ancho y alto del vitral con un ángulo diferente al de 90°, el docente guiará al estudiante mediante preguntas que le recuerden qué ángulo forman las rectas perpendiculares. Igualmente, el grupo completo hará una puesta en común de la solución de la tarea, al presentar sus argumentos y conclusiones de la misma.

Temporalidad de la tarea matemática escolar
Para el desarrollo de la tarea, los estudiantes disponen de 60 minutos, distribuidos en los siguientes momentos. En primer lugar, se presenta la tarea, se conforman grupos de tres estudiantes y el profesor entregará las instrucciones en una hoja en un tiempo de 5 minutos. El grupo debe realizar la totalidad de los puntos de la tarea, para lo que tendrán un tiempo de 30 minutos. Se realizará una exposición en la que cada grupo observará el resultado de sus compañeros, entregarán el desarrollo de la tarea y compartirán sus experiencias y conclusiones durante 15 minutos. En la siguiente sesión de clase, se llevará a cabo la realimentación de la tarea durante 10 minutos. En la tabla 7, organizamos la temporalidad de las sesiones de la tarea T2.1.

Tabla 7
Temporalidad de la tarea T2.1

Objetivo	Tarea	Tiempo (min)	Actividades
		Sesión 6	
2	T2.1	5	Presentación de la tarea y entrega de material
		30	Desarrollo de la tarea
		15	Socialización de resultados y entrega de escritos de la tarea
		Sesión 7	
2	T2.1	10	Realimentación tarea T2.1

Grafo de criterios de logro de la tarea T2.1
A continuación, presentamos en la figura 3 el grafo de criterios de logro de la tarea que describimos en este sub-apartado

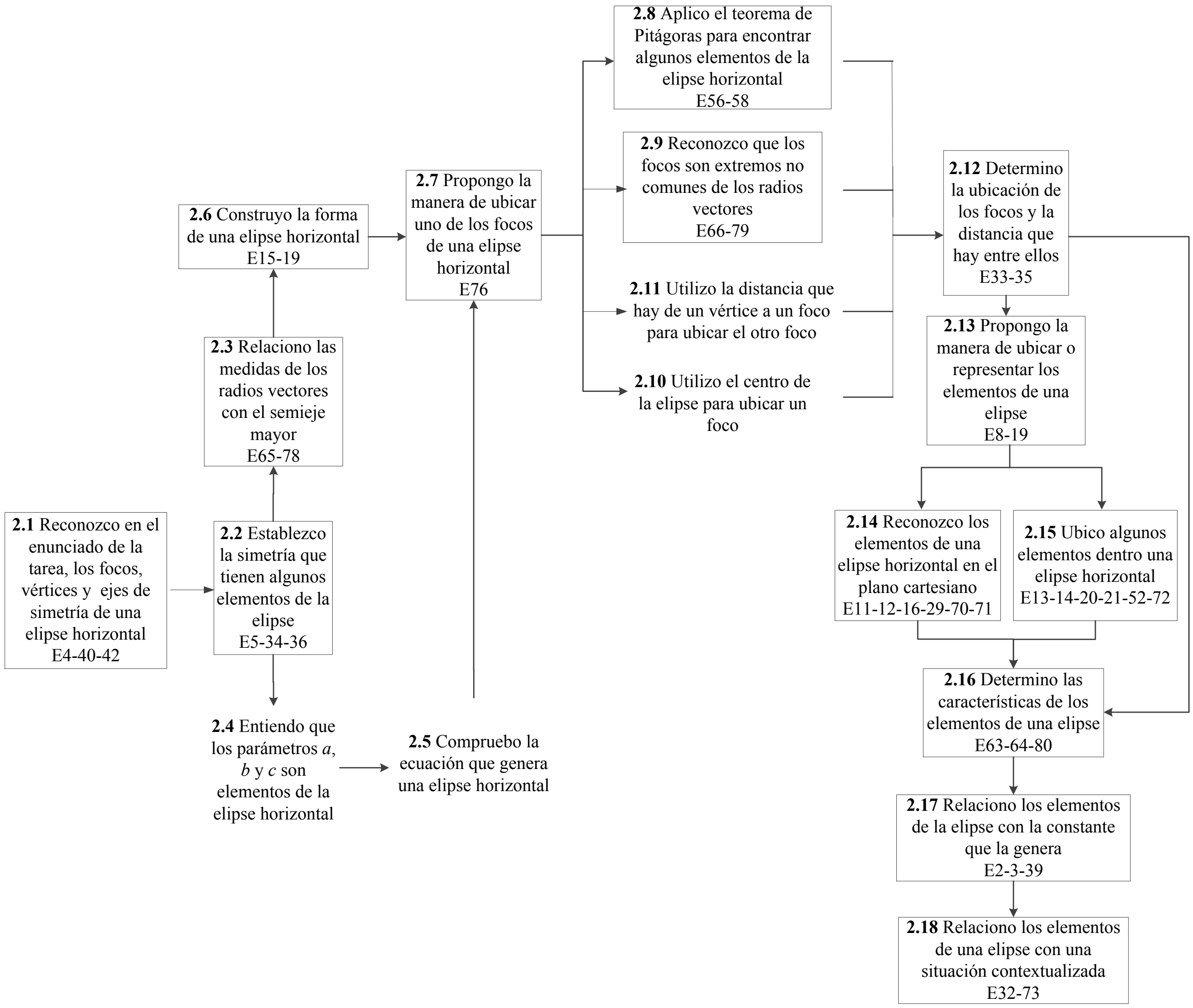


Figura 3. Grafo de criterios de logro de la tarea T2.1 vitrales elípticos

3.2. Tarea de aprendizaje: T2.2 Solsticios y equinoccios

A continuación, describimos los siete elementos de la segunda tarea del objetivo 2.

Requisitos

Para esta tarea, se requiere que el estudiante conozca que el movimiento planetario es sobre órbitas elípticas. También, deberá conocer el programa Geogebra para determinar puntos en el plano y hallar distancias de segmentos, reemplazar coordenadas de un punto en una ecuación y reconocer cada uno de los elementos que caracterizan la elipse horizontal.

Metas

Con esta tarea, pretendemos que el estudiante reconozca las características de los elementos de la elipse en contextos reales y los asocia con contextos matemáticos. En cuanto a las capacidades matemáticas fundamentales, fortalecemos con esta tarea la matematización, comunicación, el razonamiento y argumentación y la utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico a partir de los procesos de emplear e interpretar. También buscamos mejorar la actitud del estudiante frente a situaciones contextualizadas. Buscamos que el estudiante no incurra en errores como cambiar los valores de las variables x y y o determinar que las distancias de los vértices a los focos es diferente.

Formulación de la tarea matemática escolar

El profesor entrega a los estudiantes una hoja con las instrucciones de la tarea y en el aplicativo en Geogebra, la gráfica que se muestra a continuación.

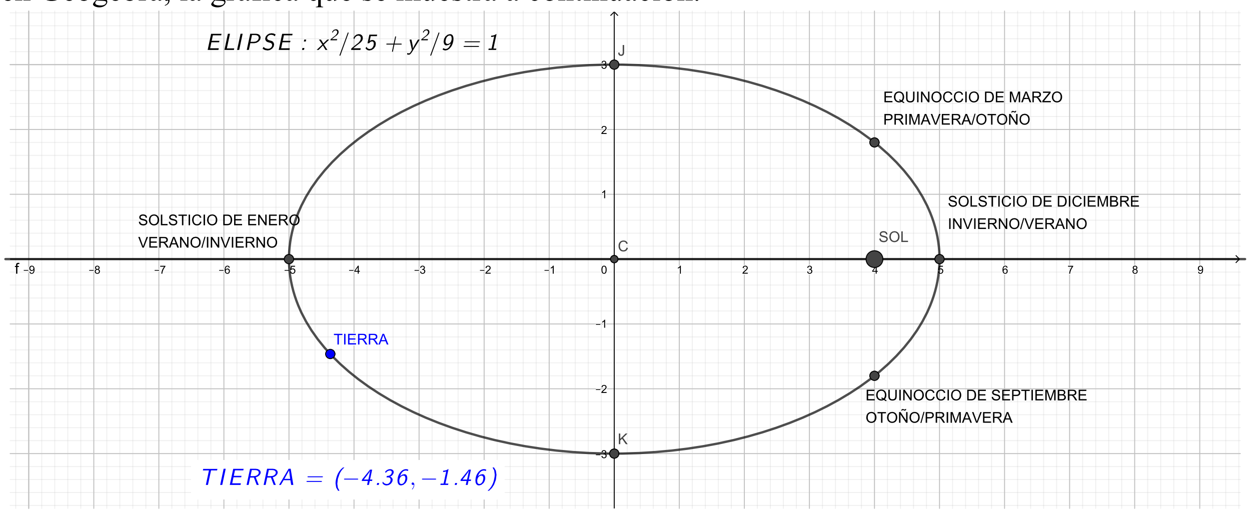


Figura 4. Pantalla del aplicativo Solsticios y equinoccios

Solsticios y equinoccios

En la traslación de la tierra alrededor del sol, se determinan cuatro posiciones que establecen las estaciones climáticas. Estas posiciones son llamadas solsticios y equinoccios. Los solsticios determinan las estaciones de invierno y verano. Los equinoccios determinan la primavera y el otoño. El sol se encuentra sobre la línea de los solsticios. En la figura mostrada en el aplicativo "solsticios y equinoccios" en GeoGebra, puedes apreciar las posiciones de la tierra a una escala reducida. Si mueves el punto TIERRA, podrás observar sus coordenadas en la parte inferior de la pantalla.

De acuerdo con la información anterior, responde los siguientes puntos.

1. Además de los solsticios y equinoccios, ¿qué otros puntos marcados en la gráfica, corresponden a posiciones de la tierra? En el aplicativo, mueve la tierra sobre esos puntos para determinar sus coordenadas.

____

____

____

2. ¿Cuáles son las coordenadas del punto de la gráfica que corresponde al corte de la línea que une las posiciones anteriores con la línea de los solsticios?

____

¿Qué característica tiene ese punto?

____
____

3. Determina la distancia que hay del centro de la trayectoria a la tierra, cuando ésta se encuentra ubicada en los puntos K, J y los solsticios.

____
____
____

4. La ecuación que determina el movimiento elíptico de la tierra alrededor del sol es $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$, y aparece en la pantalla del aplicativo con el título Elipse. ¿Cómo relacionas las medidas que hallaste en el numeral 3 con la ecuación mostrada en el aplicativo?

____
____
____

5. En el aplicativo, ubica la tierra en un punto cualquiera de la trayectoria elíptica., reemplaza sus coordenadas (dadas en color azul) en la ecuación, para verificar la igualdad. Para ello, utiliza el siguiente espacio.

____
____
____
____
____

6. ¿Lo anterior se cumple para todas las posiciones de la tierra?, ¿Por qué?

____
____
____

7. Ubica el punto que, junto con el sol, generan la forma elíptica de la trayectoria de la tierra. Luego, traza y mide los segmentos que unen estos puntos con el punto de la Tierra. Con esas medidas, halla la constante de la trayectoria.

____
____

8. Determina la distancia que hay entre los solsticios. ¿Esta medida se relaciona con el valor de la constante que genera la órbita elíptica de la tierra? Justifica tu respuesta.
____
____
____

Materiales y recursos

El estudiante podrá manipular el aplicativo en Geogebra llamado Solsticios y equinoccios[2], en el que aparecerá la gráfica de la situación y la ecuación de la elipse. Cada estudiante deberá tener una tableta con el aplicativo, con el que podrá determinar las medidas de algunos elementos relacionados con la elipse y las coordenadas de puntos de la elipse, además, le permitirá analizar los resultados de las medidas al compararlas entre sí. El estudiante le da importancia al recurso por ser un implemento tecnológico de gran utilidad. En la tabla 8, presentamos el resumen de lo anterior.

Tabla 8

Pertinencia de los materiales y recursos

	Eficiencia				Eficacia							
	Acc	PrepP	PrepE	T	C	Afectivo						
MoR	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Aplicativo en Geogebra	✓				✓	✓		✓	✓		✓	✓

Nota. MoR = material o recurso; Acc = acceso; PrepP = preparación profesor; PrepE = preparación estudiantes; T = tiempo; C = cognitivo (metas).

Agrupamiento

Esta tarea se desarrollará de forma individual, lo que permitirá que cada estudiante genere sus propuestas de solución, verifique sus procesos y determine sus propias conclusiones frente a la situación propuesta. Al finalizar, el grupo completo socializará las conclusiones, de modo que los estudiantes reconozcan sus errores y presenten sus argumentos basados en su experiencia durante la tarea.

Interacción y comunicación en clase

En esta tarea, habrá constante comunicación entre el estudiante y el profesor, quienes compartirán información que conduzca al estudiante a solucionar correctamente la tarea. En dicha interacción, el docente proporcionará al estudiante ayudas como las que mostramos en la tabla 4 del anexo7, con las que pretendemos que el estudiante supere los errores que se presenten, por ejemplo, si el estudiante confunde la forma elíptica de la órbita con otra figura geométrica, el profesor puede proporcionar preguntas sobre la forma de la órbita.

Temporalidad de la tarea matemática escolar

Para el desarrollo de esta tarea, se requiere de 60 minutos divididos en las siguientes etapas. Inicialmente, el profesor socializa la intensión de la tarea y hace entrega de la instrucción de la tarea en una hoja a cada estudiante, junto con el equipo que tiene el aplicativo abierto en el programa

[2]El aplicativo se encuentra en https://bit.ly/2winAS4

GeoGebra, para esto se requieren 5 minutos. Luego, se da un tiempo de 30 minutos para resolver la tarea. Posteriormente, los estudiantes entregan los resultados del desarrollo de la tarea, se socializan y determinan las conclusiones en un tiempo de 15 minutos. En la siguiente sesión, se realiza la realimentación de esta tarea durante 10 minutos. En la tabla 9, organizamos la temporalidad de las sesiones de la tarea T2.2.

Tabla 9
Temporalidad de la tarea 2.2

Objetivo	Tarea	Tiempo (min)	Actividades
		Sesión 7	
	T2.2	5	Presentación de la tarea y entrega de material
		30	Desarrollo de la tarea
		15	Socialización de resultados y entrega de escritos de la tarea
		Sesión 8	
2	T2.2	10	Realimentación tarea T2.2

Grafo de criterios de logro de la tarea T2.2
A continuación, mostramos en la figura 5 el grafo de criterios de logro de la tarea que describimos en este sub-apartado.

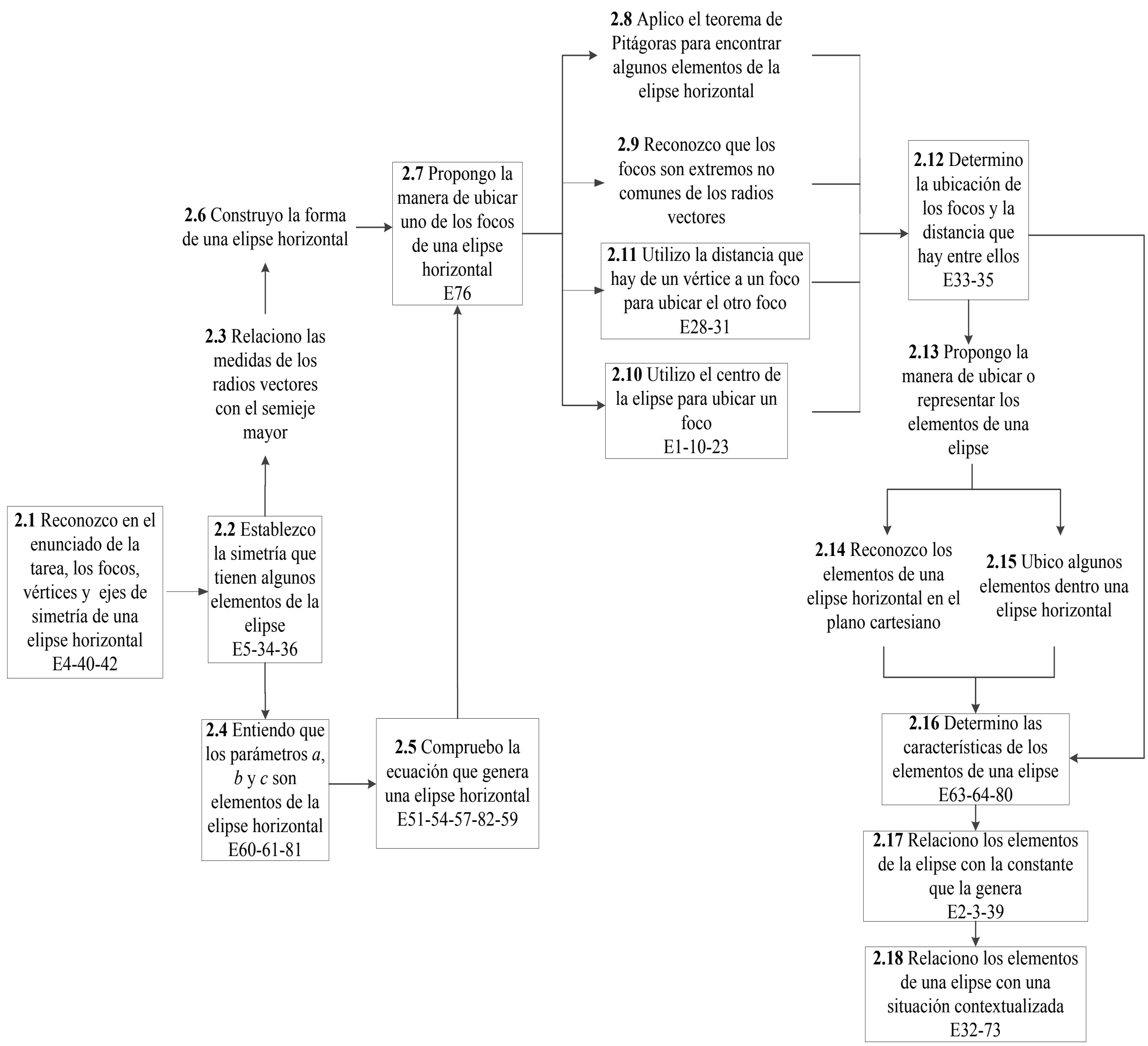


Figura 5. Grafo de criterios de logro de la tarea T2.2 Solsticios y equinoccios

4. Tareas de aprendizaje del objetivo 3

A continuación, describimos los elementos correspondientes a la ficha de las tareas de aprendizaje del objetivo O3.

4.1. Tarea de aprendizaje: T3.1 Puente de Arco[3]

A continuación, describimos los siete elementos de la primera tarea del objetivo 3.

Requisitos

Para el desarrollo de esta tarea, se requiere que el estudiante identifique la simetría en algunas figuras geométricas, así como la relación entre los parámetros de la ecuación canónica de una elipse horizontal y las características del plano cartesiano.

Metas

Con el desarrollo de esta tarea se espera que el estudiante aplique la definición de lugar geométrico de la elipse para solucionar problemas en contexto. Además, pretendemos fortalecer las capacidades matemáticas fundamentales de matematización, razonamiento y argumentación, diseño de estrategias, representación y utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico, a partir de los procesos de formular, emplear e interpretar. También, buscamos desarrollar habilidades en los estudiantes para resolver problemas que involucren la elipse. Pretendemos superar errores como, por ejemplo, considerar que el centro de la elipse divide a los ejes en segmentos diferente o intercambiar valores de las variables de la ecuación canónica de la elipse.

Formulación de la tarea matemática escolar

El profesor entrega a los estudiantes agrupados en parejas las instrucciones de la tarea en hojas.

> *Puente de arco*
>
> El arco de un túnel con forma de semielipse tiene una altura máxima de 45 metros y la mayor distancia horizontal es de 150 metros.
>
> 1. Representen la gráfica del arco del túnel, de tal forma que el punto donde la altura es perpendicular a la base sea el centro de la base de la semielipse.
>
> 2. Comparen la gráfica obtenida con otro grupo de compañeros y socialicen con su profesor las similitudes y diferencias entre sus gráficas.
>
> 3. ¿Cuáles son los valores en el puente correspondientes a los parámetros *a* y *b* o semiejes de la elipse?
>
> ____
>
> ____
>
> 4. Determinen la ubicación de los focos y la distancia que hay entre ellos. ________________
>
> 5. Encuentren la distancia a la que se deben colocar dos soportes verticales, de manera que dividan la base en tres espacios iguales y ubíquenlos en el gráfico. ¿Los soportes verticales se ubican en el mismo sitio de los focos?

[3] Adaptado de gauss.acatlan.unam.mx/mod/url/view.php?id=436

6. Haciendo uso de la ecuación de la elipse horizontal $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, determinen la ecuación que representa la elipse a la que pertenece la forma del arco.

7. Determinen la altura de los dos soportes verticales y escriban el procedimiento realizado.

Materiales y recursos
Para desarrollar esta tarea el estudiante requiere únicamente de la formulación de la tarea y el lápiz o esfero, implementos que son de uso cotidiano para el estudiante, y le permiten tener a la mano la instrucción de la tarea y registrar la solución de cada punto de la tarea.

Agrupamiento
Durante todo el tiempo del desarrollo de esta tarea los estudiantes se organizarán en parejas. De esta manera, fomentamos el trabajo colaborativo, ya que, los estudiantes podrán expresar y compartir sus posibles soluciones, así como solventar dificultades con el desarrollo de la tarea.

Interacción y comunicación en clase
Los estudiantes se ayudarán mutuamente en la compresión y análisis de la situación planteada y contrastarán sus opiniones para generar una sola forma en que resolverán el problema. El profesor guía a cada grupo en la comprobación de la veracidad de la respuesta y proporcionará ayudas como las que presentamos en la tabla 5 del anexo 7, para afrontar los errores en los que los estudiantes puedan incurrir, por ejemplo, si asocian inadecuadamente las medidas de los semiejes con los parámetros a y b, el profesor abordará al grupo completo con preguntas con las que indague por cuál semieje se asocia correctamente con cada uno de los parámetros a y b.

Temporalidad de la tarea matemática escolar
El tiempo que se requiere para desarrollar esta tarea es de 60 minutos. Inicialmente, se presenta la tarea, se organizan los grupos y se entrega la guía por parte del docente, para lo que se requiere de 5 minutos. El profesor dará un tiempo de 30 minutos para que los estudiantes resuelvan la tarea, tiempo en el que el profesor observará y guiará los procesos de los estudiantes. Para finalizar, se realizará una puesta en común para presentar los resultados y determinar las conclusiones y se hará entrega de los resultados de la tarea al profesor, el tiempo que estimamos en esta última etapa es de 15 minutos. En la próxima sesión, se tomarán 10 minutos para llevar a cabo la realimentación de esta tarea. En la tabla 10, organizamos la temporalidad de las sesiones de la tarea T3.1.

Tabla 10
Temporalidad de la tarea T3.1

Objetivo	Tarea	Tiempo (min)	Actividades
		Sesión 8	
3	T3.1	5	Presentación de la tarea y entrega de material
		30	Desarrollo de la tarea
		15	Socialización de resultados y entrega de escritos de la tarea
		Sesión 9	
3	T3.1	10	Realimentación tarea T3.1

Grafo de criterios de logro de la tarea T3.1
A continuación, mostramos en la figura 6 el grafo de criterios de logro de la tarea que describimos en este sub-apartado.

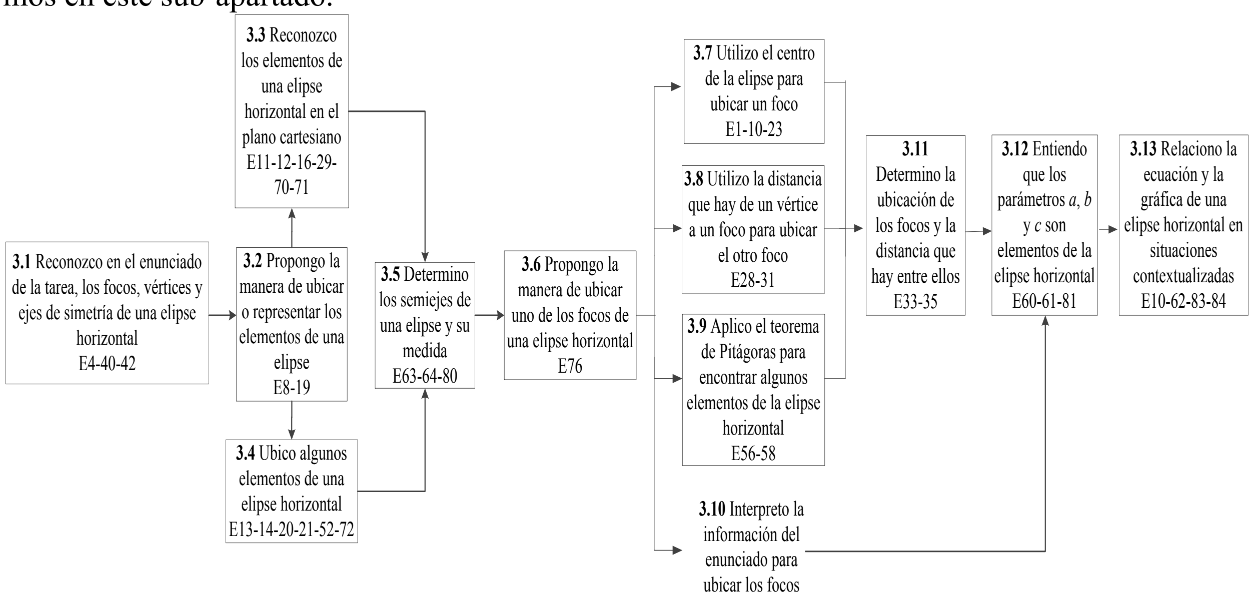


Figura 6. Grafo de criterios de logro de la tarea T3.1 puente de arco

4.2. Tarea de aprendizaje: T3.2 Galería de murmullos

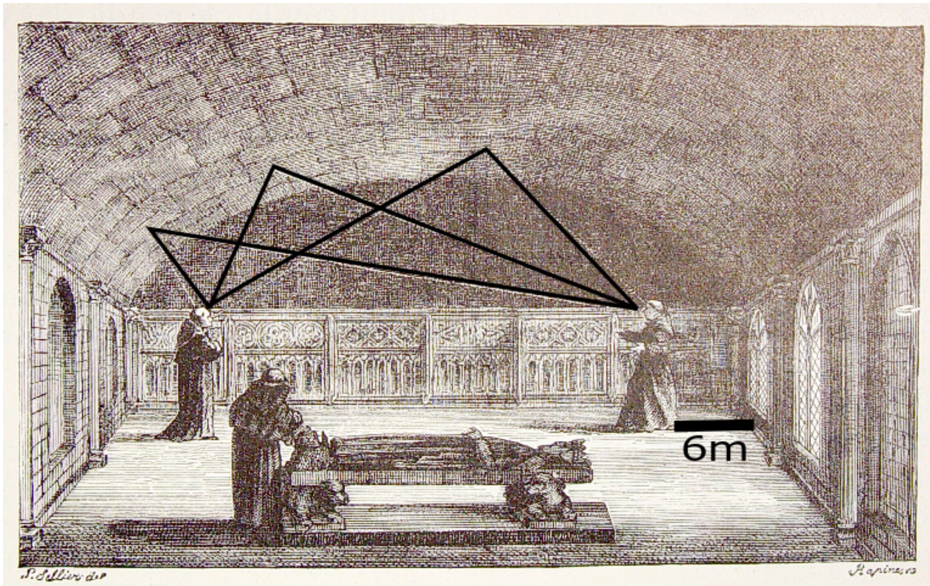
A continuación, describimos los siete elementos de la segunda tarea del objetivo 3

Requisitos
Para que el estudiante pueda desarrollar esta tarea, se requiere que identifique los elementos y propiedades de la elipse, los parámetros y variables de la ecuación canónica de la elipse horizontal, y determine coordenadas de un punto a partir de una ecuación con dos variables.

Metas
Esperamos que los estudiantes conozcan otras características de la elipse a partir de la propiedad de la reflexión en una galería de murmullos y observen su utilidad en la solución de problemas en contexto. Además, pretendemos fortalecer las capacidades matemáticas fundamentales de matematización, representación, razonamiento y argumentación, diseño de estrategias y utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico, mediante los procesos de formular y emplear. También, buscamos desarrollar habilidades en los estudiantes para resolver problemas que involucren la elipse. Además, pretendemos superar errores asociados a esta tarea, por ejemplo, determinar la distancia entre los focos, diferente a la distancia entre los amigos mencionados en la situación o confundir la medida de elementos de la elipse.

Formulación de la tarea matemática escolar
El profesor entrega a cada uno de los estudiantes las instrucciones de la tarea en hojas.

> *Galería de murmullos*
>
> Dos amigos se encuentran dentro de una galería de murmullos, que es una sala con techo en forma de semielipsoide, lo que permite que se pueda murmurar desde un foco y ser escuchado perfectamente en el otro foco. Los amigos están ubicados sobre los focos a una distancia de 100 metros, conversando entre ellos sin que nadie más los escuche. La siguiente figura ilustra este suceso.



Galería de Murmullos[4]

Sabiendo que uno de los amigos se encuentra a 6 metros de la pared más cercana, responde las siguientes preguntas.

1. Representa las medidas dadas en la situación sobre la imagen de la galería.

2. Determina el ancho que debe tener el piso de la galería.

___

___

3. ¿Cuál es la altura máxima del techo de la galería?

___

___

4. Utiliza las medidas obtenidas para hallar la ecuación de la elipse que corresponde a la forma del techo de la galería de murmullos (recuerda que la ecuación es de la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$).

___

___

5. Comprueba que la ecuación obtenida se cumple para cualquier punto del techo de la galería. Justifica tu respuesta.

___

___

[4] Imagen con permiso de reutilización con modificaciones de https://bit.ly/2lceEiD

Materiales y recursos
El estudiante requiere únicamente de los útiles escolares como lápiz, esfero, borrador y regla y la formulación de la tarea para el desarrollo de la tarea, recursos comunes en la labor cotidiana de cada estudiante para el desarrollo de sus tareas.

Agrupamiento
El estudiante desarrollará los puntos de esta tarea de forma individual para aplicar los conocimientos adquiridos en las tareas anteriores y así poder justificar propiedades de la elipse al resolver un problema en contexto. Esta forma de agrupación también le permite al estudiante realizar su propio análisis de la situación y realizar sus propias propuestas de solución. La conclusión de la tarea se realizará con todo el grupo.

Interacción y comunicación en clase
Teniendo en cuenta que gran parte del desarrollo de la tarea es de forma individual, la interacción será estudiante-profesor, ya que el profesor estará al tanto del desarrollo de la tarea, verificará que los estudiantes realicen adecuadamente cada punto de la situación planteada, indagará por los procesos realizados por el estudiante y dará ayudas a los estudiantes como las que mostramos en la tabla 6 del anexo 7, asociadas a los errores en los que pueden incurrir los estudiantes con el desarrollo de esta tarea., por ejemplo, si el estudiante ubica el eje mayor sobre el eje normal, el profesor puede indicar al estudiante la manera de colocar e ancho de la galería.

Temporalidad de la tarea matemática escolar
Para la realización de la tarea, el estudiante requiere de un tiempo de 60 minutos. Inicialmente, el docente presenta la tarea y su formulación, en 5 minutos. Luego, los estudiantes resolverán los puntos dados en la formulación, mientras que el profesor verificará con cada estudiante la consecución de los puntos con su adecuado desarrollo y solución de dudas, estimamos para esta etapa un tiempo de 30 minutos. El profesor puede escoger algunos estudiantes para que presenten sus resultados ante todo el grupo y así determinar las conclusiones de la tarea, lo que requiere dedicarle 15 minutos de la clase. En una sesión extra, proponemos llevar a cabo la realimentación de la tarea T3.2 en 10 minutos y en los 50 minutos restantes hacer un refuerzo de todas las tareas de los tres objetivos para preparar a los estudiantes para el examen final. En la tabla 11, organizamos la temporalidad de las sesiones de la tarea T3.2.

Tabla 11
Temporalidad de la tarea T3.2

Objetivo	Tarea	Tiempo (min)	Actividades
			Sesión 9
	T3.2	5	Presentación de la tarea y entrega de material
		30	Desarrollo de la tarea
		15	Socialización de resultados y entrega de escritos de la tarea
			Sesión 10
3	T3.2	60	Realimentación tarea T3.2 y preparación para el examen

Grafo de criterios de logro de la tarea T3.2

A continuación, mostramos en la figura 7 el grafo de criterios de logro de la tarea que describimos en este sub-apartado.

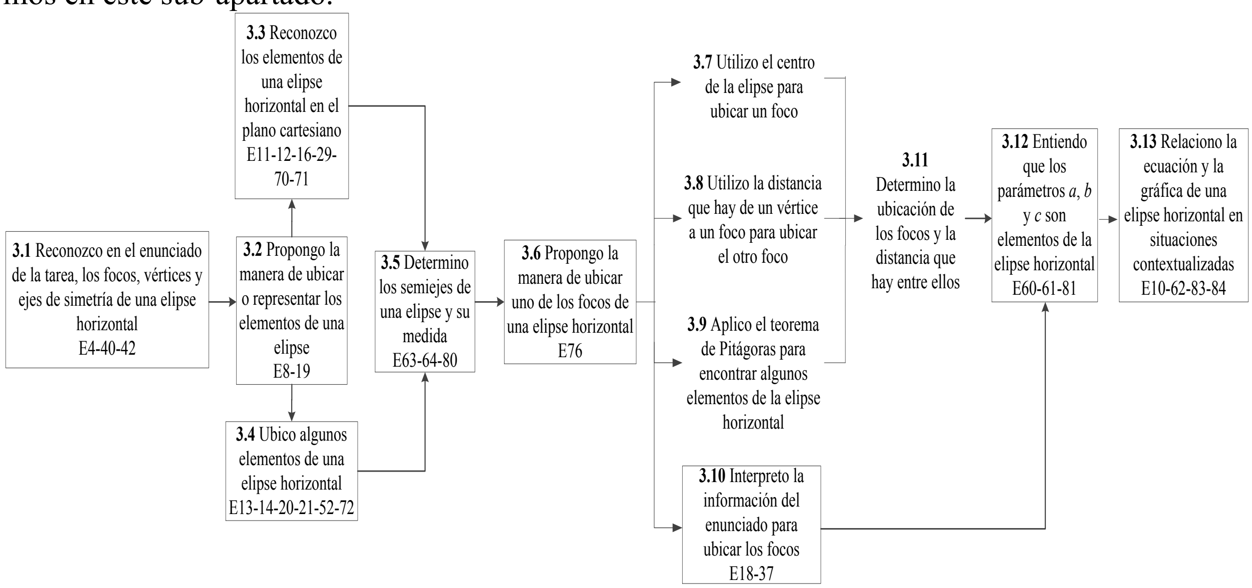


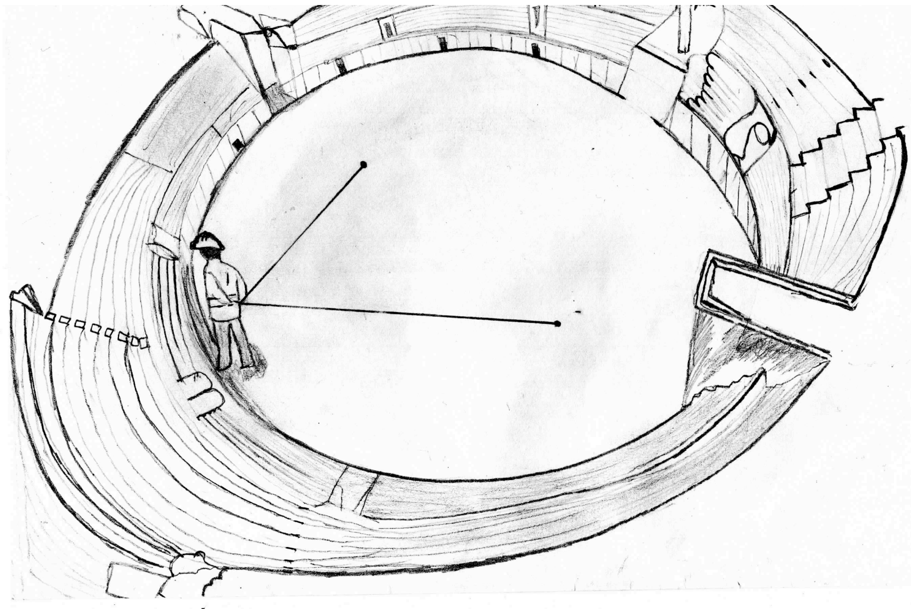
Figura 7. Grafo de criterios de logro de la tarea T3.2 Galería de murmullos

5. Examen final

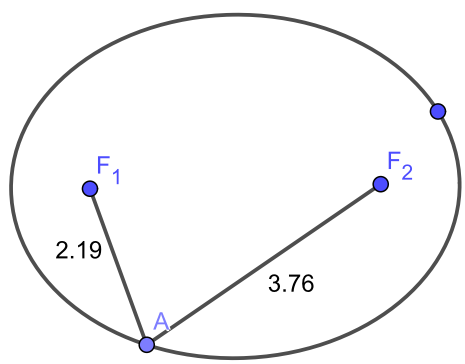
A continuación, presentamos el examen final de la unidad didáctica.

Tarea de evaluación 1: Coliseo romano

Un arquitecto quiere construir una réplica del ruedo elíptico del coliseo romano que mantenga sus características. Para ello, visita el coliseo y observa que hay dos estacas clavadas al interior del ruedo. El arquitecto decide utilizar dos cintas métricas atadas a las estacas para verificar que el coliseo tiene forma de elipse y, así, poder construir la réplica (ver la figura).



Luego, el arquitecto generó un aplicativo en el programa GeoGebra, en el que representa las medidas que tomó con las cintas métricas, como se muestra en la siguiente figura.



Los puntos F_1 y F_2 representan el lugar en el que se encuentran las estacas y el punto A representa al arquitecto quien camina por el borde del ruedo.

Utiliza el aplicativo para situar al arquitecto en tres lugares diferentes del borde el ruedo (A_1, A_2, A_3). En la siguiente tabla, registra y suma las distancias que aparecen en la pantalla del aplicativo para cada uno de los puntos donde ubicaste al arquitecto.

Registro de medidas

POSICIÓN DEL ARQUITECTO	DISTANCIA HASTA F_1	DISTANCIA HASTA F_2	SUMA DE DISTANCIAS
A_1			
A_2			
A_3			

De acuerdo con los resultados de la tabla anterior, responde las siguientes preguntas.

1. ¿Qué puedes afirmar al comparar los resultados de las sumas obtenidas para cada posición del arquitecto?

____
____
____

2. ¿Qué crees que debe ocurrir con las longitudes de las cintas métricas para que el arquitecto permanezca en el borde del ruedo?

____
____
____

3. Si el arquitecto desea ampliar o reducir el tamaño de la réplica del ruedo del coliseo, pero mantener su forma, ¿qué elementos utilizados para hacer la forma elíptica del ruedo propones que deberían cambiar y cuáles deben mantenerse?

____
____
____

4. Con lo anterior, escribe una conclusión que defina la manera de construir figuras que tengan la forma del ruedo del coliseo romano.

____
____
____

Tarea de evaluación 2. El satélite

Un transbordador espacial llevó un satélite de comunicaciones al espacio. El satélite recorre una órbita elíptica alrededor de la tierra. La máxima distancia horizontal entre el satélite y la Tierra es de 800 km. La expresión que determina la posición del satélite en su órbita es $\frac{x^2}{250000} + \frac{y^2}{160000} = 1$. Con la información anterior, responde las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál es la distancia más larga desde el satélite hasta el centro de la trayectoria elíptica?, ¿y cuál es la distancia más corta?

2. Representa las medidas anteriores en una hoja milimetrada de forma que 1 centímetro equivalga a 50 kilómetros de la gráfica. Nombra V_1 a la posición del satélite cuando se encuentra en la máxima distancia a la Tierra y V_2 a su posición más cercana a la Tierra.

3. Ubica el otro foco (F) para que el satélite mantenga la misma trayectoria.

4. Representa gráficamente el movimiento del satélite. Ten en cuenta que V_3 y V_4 son las posiciones más cercanas del satélite al centro de la trayectoria elíptica.

5. Utiliza las distancias que hay desde alguna de las posiciones V_1, V_2, V_3 y V_4 a la tierra y al punto F, para determinar la constante de la elipse.

6. Halla las distancias entre las posiciones V_1 y V_2, y entre V_3 y V_4. ¿Qué podrías concluir al comparar estas distancias con la constante del lugar geométrico de la elipse?

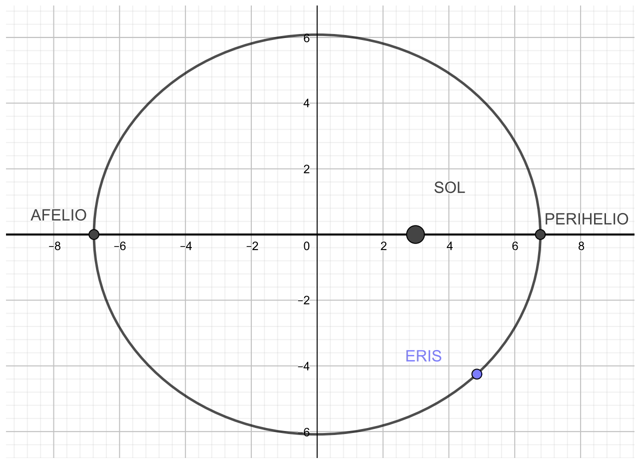
Tarea de evaluación 3: Eris

Hasta 2005, si te hubieras preguntado ¿cuántos planetas hay en el sistema solar?, habrías dicho que nueve: Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Neptuno y Plutón. No había motivos para poner en duda esa clasificación. Y todo habría seguido así de no ser por la aparición de un planeta enano que, a priori, parecía más grande que Plutón: Eris. Su descubrimiento fue tan importante que provocó que se reconsiderara la definición de planeta y se creara la definición de *planeta enano*.

Se sabe que una Unidad Astronómica (UA) es la distancia promedio de la Tierra al Sol. En la órbita de Eris, la longitud del sol al perihelio (punto más cercano del planeta al sol) es de 37.91 UA y la longitud del sol al afelio (punto más lejano del planeta al sol) es de 97.65 UA.[5]

Un científico hace la siguiente gráfica que muestra la órbita del planeta Eris en una escala de 1 cm por cada 10 UA. Con esta gráfica, quiere comprobar que Eris se mueve en la misma forma que los demás planetas del sistema solar.

[5] Modificado de https://bit.ly/2IcxMB1



1. Determina la longitud del sol al perihelio y al afelio en centímetros.

2. El sol es uno de los focos que determina la trayectoria elíptica de Eris, ubica el otro foco. ¿Cómo lo hiciste?

3. Ubica en la gráfica el punto medio (P) entre el afelio y el perihelio. ¿Cuál es la distancia de este punto al perihelio? ¿cuál es su distancia a un punto del planeta sobre el eje y? y ¿cuál es su distancia al sol?

4. ¿Qué relación tiene la longitud que hallaste en el primer numeral con la forma de la órbita del planeta?

5. Determina la ecuación de la trayectoria elíptica del planeta Eris. Recuerda que la ecuación canónica de la elipse horizontal es de la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

6. Teniendo en cuenta los puntos anteriores, responde ¿qué tuvo que hacer el científico para comprobar que el planeta Eris se mueve sobre la órbita mostrada en la gráfica que realizó?

5.2. Rúbrica del examen final

A continuación, mostramos el diseño de una rúbrica con la que el profesor puede valorar el alcance de los tres objetivos de la unidad didáctica. Para ello, tuvimos en cuenta los cuatro niveles de desempeño de la escala que establece el Ministerio de Educación Nacional (superior, alto, básico y bajo) establecida en el decreto 1290 del 2009. El profesor puede asignarle a cada nivel de desempeño la escala numérica que corresponda a su institución educativa. En el nivel superior, indicamos los criterios de logro que aportan en mayor medida al cumplimiento del objetivo y que se activan en el desarrollo de la tarea de evaluación. En el nivel alto, indicamos algunos criterios de logro que se pueden activar y algunos errores en los que puede incurrir el estudiante pero que no son relevantes para el desarrollo apropiado de la tarea de evaluación. En el nivel medio, mencionamos los criterios de logro que podrían activarse, y los errores que dificultan determinar las características de una elipse horizontal. En el nivel bajo, relacionamos los errores que impiden el alcance de cada objetivo.

Tabla 12

Niveles de logro e indicadores para los objetivos de la unidad didáctica elipse horizontal

Nivel de logro	Indicadores
Objetivo 1	
Superior (S)	El estudiante desarrolla todos los numerales de la tarea y activa los criterios de logro 1.1-1.6-1.9-1.10-1.11-1.12-1.13 y no incurre en los errores previstos para esos criterios. Establece datos del enunciado, aplica la definición de lugar geométrico para generar una elipse, e identifica sus elementos, para relacionarlos en situaciones de la vida real.
Alto (A)	El estudiante soluciona todos los numerales de la tarea de evaluación, al activar la mayoría de las capacidades relacionadas con los criterios de logro 1.1-1.9-1.10-1.11-1.12-1.13. Determina los datos del enunciado, identifica los elementos de una elipse horizontal, establece la relación de la suma de los radios vectores con la constante que genera el lugar geométrico de la elipse y aplica la definición de lugar geométrico de la elipse en situaciones contextualizadas. Sin embargo, incurre en el error E40, al evitar la activación del criterio 1.12, que tiene que ver con reconocer la forma geométrica de la elipse, pues establece que la forma del ruedo del coliseo romano es una forma geométrica diferente a la elipse.
Básico (Bs)	El estudiante activa los criterios de logro 1.9-1.10-1.13, al

	identificar algunos datos del enunciado y establecer algunos elementos de la elipse. Incurre en al menos uno de los errores E2-3-45-38. Confunde elementos de la elipse con los de otras formas geométricas, puede determinar inadecuadamente la constante y desconocer la relación entre la constante y el tamaño de la elipse. Con lo anterior, no puede activar los criterios 1.1-1.6-1.12.
Bajo (Bj)	El estudiante no resuelve la tarea completamente, ya que no hay activación total de los criterios de logro del objetivo. Incurre en al menos uno de los errores E41-30-44-24-25-26-67-77-39-68-75, al desconocer la función de los focos de la elipse, realizar procedimientos que caracterizan otra forma geométrica, hacer operaciones inadecuadas entre números reales que no le permiten obtener la constante esperada y/o no relacionar las características de la elipse con la forma de la pista de atletismo.

Nivel de logro Objetivo 2	Indicadores
Superior (S)	El estudiante desarrolla todos los numerales de la tarea, activa los criterios de logro CdL2.1-2.4-2.5-2.6-2.7-2.10-2.11-2.12-2.13-2.14-2.15-2.16-2.17 y no incurre en los errores previstos para esos criterios. Puede establecer y ubicar los elementos de una elipse, relacionarlos con los parámetros a, b y c, representar una elipse horizontal, establecer su lugar geométrico y asociarlo con situaciones contextualizadas.
Alto (A)	El estudiante soluciona todos los numerales de la tarea de evaluación, al activar los criterios de logro 2.1-2.4-2.5-2.6-2.7-2.10-2.13-2.15-2.16-2.17. Puede establecer los elementos de la elipse y relacionarlos adecuadamente con su lugar geométrico, pero incurre en al menos uno de los errores E33-28-29, que no le impiden establecer los elementos de la elipse porque corresponden a la toma imprecisa de medidas.
Básico (Bs)	El estudiante soluciona la tarea con dificultad y activa los criterios de logro 2.4-2.5-2.6-2.13-2.16, en los que identifica los elementos de la elipse. El estudiante puede que incurra en al menos uno de los errores E40-4-60-61-81-76-10-16-11-70-71-20-72-15-2, al invertir la ubicación de algunos elementos de la elipse y construirla de forma vertical.
Bajo (Bj)	El estudiante no resuelve la tarea completa y esto no le permite

	realizar activaciones de la mayoría de criterios de logro. Incurre en al menos uno de los errores E42-51-54-57-52-82-23-1-31-35-8-19-12-14-21-13-63-64-69-3, no establece adecuadamente la ubicación de los elementos de la elipse ni extrae la información de la ecuación canónica, lo que le impide construir la elipse.

Nivel de logro Objetivo 3	Indicadores
Superior (S)	El estudiante desarrolla todos los numerales de la tarea y activa los criterios de logro CdL3.1-3.2-3.3-3.4-3.5-3.6-3.7-3.8-3.9-3.10-3.12-3.13 y no incurre en los errores previstos para esos criterios. Identifica del enunciado de la tarea los elementos de la elipse y construye gráficamente una elipse horizontal, al ubicar todos sus elementos. Además, relaciona la ecuación canónica de la elipse con los parámetros *a*, *b* y *c* y asocia la solución de la tarea con la situación planteada en ella.
Alto (A)	El estudiante soluciona todos los numerales de la tarea de evaluación y activa los criterios de logro 3.1-3.2-3.4-3.5-3.7-3.9-3.10-3.12-3.13, identifica y ubica de manera adecuada los elementos de una elipse horizontal, pero incurre en al menos uno de los errores E29-76-28-33. No aprecia la importancia de los focos al ubicarlos y/o toma medidas imprecisas de algunos elementos, aunque esto no le impide resolver correctamente la tarea de evaluación.
Básico (Bs)	El estudiante soluciona la tarea con dificultad y activa criterios de logro del objetivo al identificar los elementos de la elipse, pero, incurre en al menos uno de los errores E40-4-16-11-70-71-20-14-21-13-72-80-10-60-61, ya que, intercambia la ubicación de algunos elementos de la elipse, lo que lo lleva a construir la gráfica y ecuación de una elipse vertical.
Bajo (Bj)	El estudiante no resuelve la tarea completa, al incurrir en al menos uno de los errores E42-8-19-12-63-64-23-1-31-18-35-85-86, lo que le impide identificar los elementos en la órbita elíptica del planeta Eris y generar la ecuación canónica de la trayectoria.