

TIPOS DE TAREAS DE MODELACIÓN PARA LA CLASE DE MATEMÁTICA

Jhony Alexander Villa-Ochoa¹
Alexander Castrillón-Yepes²
Jonathan Sánchez-Cardona³

Resumen: Este artículo presenta una tipología de tareas de modelación que emergió después de analizar parte de las propuestas reportadas en el campo de la modelación matemática. El análisis se centra en la referencia que los enunciados ofrecen acerca de los contextos y la realidad, así como de los propósitos, alcances y limitaciones que se reportan cuando se implementan las tareas. La tipología ofrece cuatro categorías y, algunas de ellas, poseen subcategorías que ilustran características de las tareas que pueden disponerse para la modelación matemática en el aula. Además, en cada categoría se presentan posibilidades y limitaciones que pueden aportar en la toma de decisiones frente a la elección del tipo de tareas, tanto para el trabajo matemático en el aula como para la investigación.

Palabras clave: Modelación matemática; tipos de tareas de modelación; autenticidad.

TYPES OF MODELING TASK FOR THE MATHEMATICS CLASS

Abstract: This article presents a typology of modelling tasks that arose from analyzing some proposals reported in mathematical modelling. The analysis is focused on the reference that the statements provide about the contexts and reality, as well as the purposes, scope and limitations that emerge when the tasks are implemented. This typology provides four categories and their respective subcategories to illustrate characteristics of the tasks, which would take into account for the mathematical modelling in the classroom. In addition, each category provides some possibilities and limitations that would contribute to decision-making regarding the task-type choice for both, mathematical activity in the classroom and research.

Keywords: Mathematical Modelling; Task Types of Modelling; Authenticity.

¹ Profesor de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, Medellín-Colombia. Coordinador de la Red Colombiana de Modelación en Educación Matemática-RECOMEM y del Grupo de Investigación MATHEMA-FIEM. Contacto: jhony.villa@udea.edu.co

² Estudiante de Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia. Integrante de la RECOMEM y del Grupo MATHEMA-FIEM. Contacto: alexander.castrillon@udea.edu.co

³ Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas. Estudiante de Maestría en Educación (área de Educación Matemática) de la Universidad de Antioquia. Integrante de la RECOMEM y del Grupo MATHEMA-FIEM. Contacto: jonathan.sanchezc@udea.edu.co

La modelación matemática en el debate internacional

En la Educación Matemática existe un creciente interés por la investigación acerca de la modelación y las aplicaciones matemáticas, así como por su integración en los currículos escolares (v.g. books' ICTMA series). El interés se fundamenta en la presencia de los modelos y la modelación en diversas actividades sociales, su conexión con la tecnología y la preparación de los estudiantes en actitudes y competencias matemáticas, para el ejercicio de una ciudadanía responsable y para la participación en los desarrollos de la sociedad.^{4, 5}

En la cotidianidad escolar, se argumenta el uso de la modelación matemática porque puede constituirse en un ambiente para promover una participación de los estudiantes en actividades necesarias para el aprendizaje del discurso matemático escolar⁶. También posibilita la motivación por el estudio de las matemáticas y la constitución de una imagen adecuada de las matemáticas en relación con su rol en la sociedad y la cultura⁷; asimismo, además del conocimiento matemático, también promueve la producción de conocimientos de los contextos en los cuales se da la actividad de modelación⁸. Estos propósitos son solo una muestra de los alcances que la investigación reporta sobre la modelación. Otras posibilidades de este proceso pueden consultarse en los trabajos de Bassanezi⁹; Blum y colaboradores¹⁰ y Villa-Ochoa¹¹.

⁴ BLUM, Werner. Can Modelling Be Taught and Learnt? Some Answers from Empirical Research. In: KAISER, G. et al. (Eds.). Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. Dordrecht: Springer Netherlands, v.1, 2011. p.15-30.

⁵ BASSANEZI, Rodney Carlos. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. Editora Contexto, 2002.

⁶ PARRA-ZAPATA, Mónica Marcela; VILLA-OCHOA, Jhony Alexander. Interacciones y contribuciones. Modos de participación de estudiantes de quinto grado en ambientes de modelación matemática. *Actualidades Investigativas en Educación*, v. 16, n. 3, p. 1-27, 2016.

⁷ NISS, Mogens. Aims and scope of applications and modelling in mathematics curricula. *Applications and modelling in learning and teaching mathematics*, 1989, p. 22-31.

⁸ VILLA-OCHOA, Jhony Alexander; BERRÍO, Mario Jesús. Mathematical Modelling and Culture: An Empirical Study. In: STILLMAN, G; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. (Eds.). *Mathematical Modelling in Education Research and Practice*. Springer International Publishing, 2015. p. 241-250.

⁹ Idem

¹⁰ BLUM, Werner, et al. (Eds). *Modelling and applications in mathematics education*. New York: Springer, 2007. ISBN 978-0-387-29820-7.

Tipos de tareas de modelación para la clase de matemáticas

| Jhony Alexander Villa-Ochoa
| Alexander Castrillón-Yepes
| Jonathan Sánchez-Cardona

Los propósitos y alcances anteriores no deben verse como características de las tareas de modelación, sino más como criterios u orientaciones a elegir para orientar el trabajo matemático en el aula¹². Así, los alcances y posibilidades que se atribuyen a la modelación están en correspondencia con el tipo de tarea que se diseña y el ambiente de aprendizaje en el cual se integra. Al ofrecer a los profesores un panorama amplio sobre la diversidad de tareas de modelación, sus alcances y posibilidades de inclusión en el aula, se puede contribuir a la integración de la modelación en la cotidianidad escolar; ya que, a pesar de la relevancia de la modelación matemática, su integración en los planes de estudios y la vida escolar se convierte en un desafío en muchos países¹³.

La investigación sobre el tipo de tareas, situaciones y sus alcances es pertinente no solo para la comunidad de investigadores, sino también para los profesores de matemáticas. Al respecto Parra-Zapata y Villa-Ochoa¹⁴ argumentan que en la literatura se encuentra que las diferentes maneras de hacer modelación generan diferentes posibilidades y formas de producir matemática en la clase de matemáticas. En otras palabras, cada manera de hacer modelación se materializa en una tarea o situación y en un ambiente de clase.

Existe una variedad de tareas para desarrollar modelación en la cotidianidad escolar. Para Schunn¹⁵ el diseño del tipo de tarea que se utiliza en clase debe relacionarse estrechamente con los objetivos que se proponen para la clase y las características de los estudiantes; sin embargo, esta elección puede ser compleja¹⁶. En coherencia con estos planteamientos, en este artículo se analizan tareas de modelación matemática que se presentan en investigaciones

¹¹ VILLA-OCHOA, Jhony Alexander. Modelación matemática a partir de problemas de enunciados verbales: un estudio de caso con profesores de matemáticas. *Magis. Revista Internacional de Investigación en Educación*, v. 8, n. 16, 2015.

¹² MAASS, Katja. Classification scheme for modelling tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik*, v. 31, n. 2, p. 285-311, 2010.

¹³ KAISER, Gabriele. Mathematical Modelling and Applications in Education. In: Stephen Lerman (Ed). *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer Netherlands, 2014, p. 396-404.

¹⁴ Idem.

¹⁵ SCHUNN, Christian. Engineering educational design. *The Educational Designer*, v.1.1. 2008.

¹⁶ MAAS, Op. Cit.

sobre modelación en ámbito de la Educación Matemática, a partir de las características observadas se propone una tipología para ellas. Para alcanzar este propósito, se delimita una comprensión de tareas de modelación como un conjunto de textos, enunciados, situaciones, orientaciones o indicaciones que se organizan para “dar vida” a la modelación en la cotidianidad escolar. El siguiente apartado ofrece un panorama sobre algunas comprensiones de la modelación matemática.

Modelación Matemática: Comprensiones y perspectivas

Con el fin de facilitar un lenguaje fluido, en este artículo se usará el término modelación para referirse a modelación matemática en Educación Matemática. En una comprensión amplia, este término se asocia con el establecimiento de relaciones entre las matemáticas y el mundo extramatemático^{17, 18}. En la literatura internacional existe una visión, en cierto modo generalizada, de la modelación como un proceso que se centra en la obtención y validación de modelos matemáticos a partir de un dominio extramatemático.

La modelación se comprende como una práctica de articulación entre dos entes, uno llamado modelo que sirve para actuar en otro llamado lo modelado¹⁹. La intervención del *ente modelador* sobre el *ente modelado* es diversa. Por ejemplo, Arrieta Vera y Díaz Moreno²⁰ señalan que esa intervención puede hacerse para la predicción, el diagnóstico o la evaluación. Por otra parte, en lugar de ente, Lesh y Caylor²¹ utilizan el término sistema; para estos autores, la modelación es una forma de actuar, diseñar, abordar y pensar en un sistema (en este caso matemático) los elementos que se hacen conscientes de otro sistema

¹⁷ BLUM et al (2007), Op. Cit.

¹⁸ BLUM (2011), Op Cit.

¹⁹ ARRIETA VERA, Jaime; DÍAZ MORENO, Leonora. Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, v. 18, n 1, p. 19-48. 2015. Doi: 10.12802/relime.13.1811

²⁰ Idem.

²¹ LESH, Richard; CAYLOR, Beth. Introduction to the special issue: Modeling as application versus modeling as a way to create mathematics. *International Journal of computers for mathematical Learning*, v. 12, n. 3, p. 173-194, 2007.

Tipos de tareas de modelación para la clase de matemáticas

| Jhony Alexander Villa-Ochoa
| Alexander Castrillón-Yepes
| Jonathan Sánchez-Cardona

(modelado). El sistema modelado puede ser existente en el mundo o puede ser creado aunque no ocurra naturalmente.

Un aspecto que permite diferenciar el tipo de tarea y los procesos llevados a cabo en la modelación es la noción de “realidad”²². En la investigación internacional, los *entes modelados* no tienen que articularse de forma necesaria a fenómenos extramatemáticos, por tanto, situaciones y fenómenos de la misma matemática pueden ser susceptibles de ser modelados^{23, 24}. En las actuaciones entre los dos entes o sistemas también se consideran la construcción y el uso de modelos matemáticos; estos modelos pueden usarse para la comprensión de situaciones extra-matemáticas, lo que sugiere una alternativa pedagógica para la enseñanza de las matemáticas²⁵.

En la cotidianidad escolar, la modelación se considera como un ambiente de aprendizaje asociado con el estudio, la problematización y la investigación de problemas no matemáticos por medio de las matemáticas²⁶. Este tipo de ambientes no solo se constituyen con el fin de aprender matemáticas o desarrollar habilidades inherentes a ellas; también permiten comprender de forma crítica situaciones del mundo circundante por medio de las matemáticas y ofrecer la oportunidad de representar, analizar, modelar y tomar decisiones respecto a la situación que se le atribuye²⁷. Además de alternativa pedagógica y *medio* para la enseñanza de las matemáticas, la modelación también puede

²² VILLA-OCHOA, Jhony, A. GONZALEZ-GOMEZ, Difariney; CARMONA-MESA, Jaime, Andrés. Modelación y Tecnología en el Estudio de la Tasa de Variación Instantánea en Matemáticas, *Formación Universitaria*, v. 11, n.2. p. 25-34, 2018. <http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062018000200025>

²³ ARCAVI, A. Modelling with graphical representations. *For the learning Mathematics*, v. 28, n. 2, p. 2-10. 2008.

²⁴ BOSCH, Mariana. et al. La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. *Educación Matemática*. v. 18, n. 2, p. 37-74, 2006.

²⁵ VERTUAN, Rodolfo Eduardo; ALMEIDA, Lourdes Maria. Práticas de Monitoramento Cognitivo em Atividades de Modelagem Matemática. *Boletim de Educação Matemática*, v. 30, n. 56, p. 1070-1091, 2016.

²⁶ BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem Matemática na sala de aula. *Perspectiva, Erechim (RS)*, v. 27, n. 98, p. 65-74, 2003.

²⁷ ARAÚJO, Jussara. Ser crítico em projetos de modelagem em uma perspectiva crítica de educação matemática. *Bolema - Boletim de educação matemática*, v. 26, n. 43, 2012. Doi:10.1590/S0103-636X2012000300005

comprenderse como *objeto* de enseñanza y aprendizaje; en términos de Julie y Mudaly²⁸, en este caso la modelación puede considerarse como un contenido.

Bien sea como *medio* o como *objeto*, la modelación “cobra vida” en el ámbito escolar a través de tareas específicas que se configuran para atender las necesidades de formación de los estudiantes en su contexto educativo. Su configuración involucra descripciones, textos y orientaciones para el desarrollo de prácticas acordes con el ambiente de aprendizaje que se diseñe. De acuerdo con Barbosa²⁹ son diversos los aspectos que hacen que las prácticas de aula tengan una naturaleza diferente, aunque no disjunta, de la actividad de los profesionales en matemática aplicada.

En esta comprensión, la modelación puede asumirse como una actividad escolar que tiene dos características principales. La primera de ellas indica que la actividad tiene que ser un problema (no un ejercicio) para los estudiantes. La segunda precisa que la actividad debe extraerse de contextos cotidianos para los estudiantes o de otras ciencias que no son solo matemáticas³⁰. En una interpretación de esta comprensión se puede observar una dimensión pragmática y crítica en la que los estudiantes se deben involucrar en situaciones *auténticas* de la cultura y la sociedad a la que pertenecen, y reconocer las prácticas, usos y roles *auténticos* que las comunidades hacen de las matemáticas y de la modelación.

La diversidad de enfoques y orientaciones de la modelación apoyan la idea de que no existe una comprensión homogénea de los modelos y la modelación, ni de las maneras en que se presentan en la cotidianidad escolar. Esta diversidad de comprensiones ha motivado el surgimiento de criterios para valorar la investigación en el campo. Así, por ejemplo, Kaiser y colaboradores³¹

²⁸ JULIE, Cyril; MUDALY, Vimolan. Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa. In: Werner BLUM et al. (Eds.). *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study*. Springer US, 2007. p. 503-510.

²⁹ BARBOSA, Jonei Cerqueira. A “contextualização” e a Modelagem na educação matemática do ensino médio. *Encontro Nacional de Educação Matemática*, v. 8, p. 1-8, 2004.

³⁰ BARBOSA, Jonei Cerqueira. Mathematical modelling in classroom: a socio-critical and discursive perspective. *ZDM*, v. 38, n. 3, p. 293-301, 2006.

³¹ KAISER, Gabriele, et al. Report from the working group modelling and applications-Differentiating perspectives and delineating commonalities. In: PITTA-PANTAZI, D.; PHILIPPOU, G.

Tipos de tareas de modelación para la clase de matemáticas

| Jhony Alexander Villa-Ochoa

| Alexander Castrillón-Yepes

| Jonathan Sánchez-Cardona

presentan una clasificación de las investigaciones en modelación atendiendo a criterios de tipo epistemológico y relativos a otras perspectivas al interior de la Educación Matemática, entre ellas, estos investigadores destacan la Realística, Educativa, Contextual, Sociocrítica, Eliciting (elicitación), Epistemológica y una meta-perspectiva denominada Cognitiva. Por su parte, Doerr y Pratt³² presentan una organización diferente de las investigaciones en modelación que atiende a criterios epistemológicos y psicológicos. Con base en los criterios epistemológicos, estos investigadores sugieren dos categorías, una para quienes conciben las matemáticas como aspecto separado del mundo a ser modelado y otra para quienes comprenden la modelación como un proceso cíclico e iterativo. En el marco de perspectivas psicológicas, estos autores señalan que las investigaciones se focalizan hacia temas que se relacionan con la naturaleza de las actividades de los aprendices cuando se comprometen con tareas de modelación.

La preocupación por la diversidad de comprensiones de la modelación también ha llamado la atención de otros investigadores acerca de la naturaleza de las tareas que se implementan en el aula. En el siguiente apartado se ofrece un panorama de estudios que han desarrollado perspectivas y clasificaciones de las tareas de modelación.

Clasificaciones de tareas de modelación en Educación Matemática

Diferentes autores han llamado la atención sobre la diversidad de tipos de tareas que se encuentran en la literatura acerca de la modelación^{33, 34}. En su estudio, Maass³⁵ reconoció que existen clasificaciones de las tareas que atienden

(Eds.). *Proceedings of the fifth congress of the European society for research in mathematics education*. 2007. p. 2035-2041.

³² DOERR, Helen; PRATT, Dave. The learning of mathematics and mathematical modeling. In: KATHLEEN HEID, M.; BLUM, G. W. (Eds.). *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Research syntheses*. USA: Information Age Publishing, 2008. p.259-285.

³³ BARBOSA (2004), Op. Cit.

³⁴ MAASS, Op. Cit.

³⁵ Idem.

a criterios como el interés que el estudiante puede prestar en el contexto, el nivel de complejidad, tareas de enseñanza o evaluación, las intenciones didácticas y la naturaleza de la relación con la realidad. Esta autora señala que para una integración de los modelos y la modelación en la formación en matemática se necesita una clasificación integral y sistemática de las tareas de modelación; asimismo, sugiere que una clasificación de este tipo puede, por un lado, apoyar el desarrollo de tareas, por otro lado, dar a los profesores una visión general de las tareas de modelación y apoyarlos en la selección de ellas para sus propias clases.

Maass³⁶ desarrolló un esquema de clasificación para tareas de modelación. Este esquema se considera un insumo para el diseño de aquellas que se propongan atender a los objetivos predefinidos en un grupo particular de estudiantes. El esquema propuesto por Maass³⁷ ofrece un conjunto de nueve características que pueden generar el mismo número de clasificaciones; por ejemplo, un profesor o investigador puede centrarse en la característica *naturaleza de la relación con la realidad* (característica tres), con base en esta característica puede encontrar una clasificación de las tareas en las siguientes cinco categorías: (i) auténtico (Sí/No), (ii) realidad cercana (Sí/No); (iii) incrustado (embedded) (Sí/No), (iv) intencionalmente artificial (Sí/No); (v) Fantasiado (Sí/No). Para cada categoría en cada característica, la autora ofrece una descripción que delimita su comprensión en la literatura.

En una perspectiva diferente, Barbosa³⁸ centra su atención en la participación del profesor y los estudiantes en los ambientes de aprendizaje. Con estos criterios el autor clasifica las tareas de modelación en tres “casos”. En el primero de ellos, el profesor presenta a los estudiantes un problema relatado con datos cuantitativos y cualitativos el cual debe ser resuelto por los estudiantes; en este caso, los alumnos no requieren salir del aula para dar solución al problema, pues el profesor propicia la información necesaria para resolverlo. En el segundo

³⁶ Ibid

³⁷ Idem

³⁸ BARBOSA, 2003, Op. Cit.

Tipos de tareas de modelación para la clase de matemáticas

| Jhony Alexander Villa-Ochoa
| Alexander Castrillón-Yepes
| Jonathan Sánchez-Cardona

caso, el profesor formula un problema inicial y los estudiantes que enfrentan su resolución deben salir del aula para recolectar los datos y emprender otras acciones; en este caso tienen mayor participación y responsabilidad en el resto del proceso. En el tercer caso se presentan proyectos desarrollados a partir de temas no matemáticos que pueden ser propuestos por el profesor o los estudiantes, de tal forma que la responsabilidad y liderazgo del proyecto recaen principalmente en estos últimos. Este caso es visible en la tradición brasileña de modelación.

Los aspectos anteriormente expuestos ponen de relieve una serie de características a través de las cuales se pueden diseñar y elegir tareas de modelación. El esquema de tareas de modelación propuesto por Maass³⁹ ofrece una amplia gama de criterios para valorar las tareas; sin embargo, la manera en que se puede presentar la tarea acorde al contexto y al ambiente de clase no se encuentra lo suficientemente desarrollada en su trabajo; además en este esquema no es explícito, por ejemplo, cómo se configuran las tareas para que atiendan a la diversidad de propósitos y necesidades de formación de los estudiantes en relación con las matemáticas y su realidad. Por su parte, los casos propuestos por Barbosa⁴⁰ ponen de relieve aspectos relacionados con las actuaciones de los participantes (profesores y estudiantes) en el ámbito escolar; a pesar de ello, no es explícito en la naturaleza de los contextos y en el tipo de tarea que puede estructurarse para responder a los múltiples propósitos de la modelación.

A continuación, se presenta una clasificación alternativa de las tareas o situaciones que se reportan en la literatura. Esta clasificación no pretende generalizar, más allá de ello, ofrece criterios adicionales para que los profesores e investigadores tomen decisiones informadas acordes con su perspectiva de enseñanza o de investigación en Educación Matemática.

³⁹ Idem

⁴⁰ BARBOSA (2004), Op. Cit.

Tareas de modelación matemática. Una comprensión alternativa

La clasificación que se presenta en este artículo es el resultado de cerca de diez años de investigación de integrantes de la Red Colombiana de Modelación en Educación Matemática. Esta Red congrega a profesores e investigadores que buscan mejorar las condiciones para integrar la modelación en sus prácticas escolares. Los integrantes de esta Red han desarrollado en sus investigaciones materiales curriculares que atienden a necesidades de los profesores y de los contextos escolares en los cuales actúan, y han valorado de manera crítica las propuestas que se presentan en reportes de investigación de personas reconocidas en el campo.

La clasificación de las tareas se ha discutido con los expertos investigadores de la Red y en diferentes eventos académicos. También ha sido material de discusión a lo largo de los últimos cuatro años en cursos de modelación matemática que se han diseñado en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas en la Universidad de Antioquia. Como resultado de la discusión en estos espacios, la clasificación se ha ido ampliando hasta el estado que se presenta en este artículo.

Conforme se mencionó anteriormente, para construir esta clasificación la atención se centró en las maneras en que se presentan las tareas en los reportes de investigación, es decir, se analizaron los enunciados con los que se presenta la tarea; en ellos se identificó el contexto que se involucra para así reconocer la *referencia* que se hace de la “realidad”. La atención también se centró en las orientaciones que los autores reportan al implementar de forma empírica sus tareas en el aula y en los alcances y limitaciones respectivas. En los casos en que fue posible, se buscó información adicional sobre la participación de los estudiantes y los profesores en el diseño de las tareas o en su desarrollo.

La clasificación está compuesta por cuatro categorías amplias, a saber: (i) enunciados verbales, (ii) construcción de representaciones, (ii) modelación a través de proyectos, y (iv) uso y análisis de modelos. De algunas de ellas se derivan subcategorías como se observa en la siguiente figura (Fig. 1).

Tipos de tareas de modelación para la clase de matemáticas

| Jhony Alexander Villa-Ochoa
| Alexander Castrillón-Yepes
| Jonathan Sánchez-Cardona

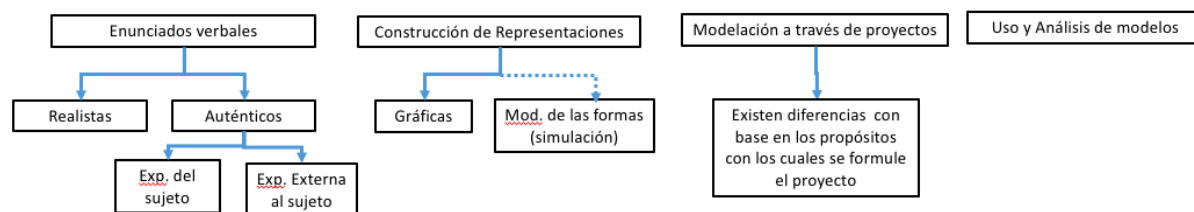


Fig. 1. Categorías y subcategorías de una clasificación alternativa de tareas de modelación.

A continuación, se presentarán descripciones y ejemplos a la luz de la literatura en investigación en el campo.

Enunciados verbales (Word Problems).

Los problemas verbales son textos en los que se describe una situación más o menos familiar y se plantea una pregunta cuantitativa que se puede resolver con la ayuda de las matemáticas^{41, 42, 43}. Para Verschaffel y colaboradores⁴⁴ tradicionalmente los *word problems* (problemas verbales) se han usado como vehículo típico para la introducción de problemas de modelación y aplicación en el aula de matemáticas, incluso para la resolución de problemas. Para Beswick⁴⁵, términos como "auténtico", "vida real" y "situado" se utilizan en la literatura y reflejan diferentes grados de diferenciación de las presentaciones de problemas que se basan completamente en símbolos matemáticos. La autora también afirma que el término "vida real" puede describir problemas verbales en los que las matemáticas se presentan en una oración simple que proporciona información mínima del contexto real (poco auténtico); mientras que términos como "auténtico" y "situado" tienden a usarse para transmitir una relación más fuerte con la experiencia del sujeto en un contexto

⁴¹ VERSCHAFFEL, Lieven, et al. Reconceptualising word problems as exercises in mathematical modelling. *Journal für Mathematik-Didaktik*, v. 31, n 1, p. 9-29, 2010.

⁴² MAASS, Op. Cit.

⁴³ VILLA-OCHOA (2015). Op. Cit.

⁴⁴ Idem

⁴⁵ BESWICK, Kim. Putting context in context: An examination of the evidence for the benefits of 'contextualised' tasks. *International journal of science and mathematics education*, v. 9, n 2, p. 367-390, 2011.

particular. A continuación, se presentan categorías amplias y disjuntas de tareas de modelación que se estructuran como enunciados verbales.

a. Enunciados verbales realistas.

Conforme se ha mencionado en otras clasificaciones⁴⁶, este tipo de tareas pueden incrustar o evocar aspectos realistas o imaginados sin que vinculen de forma necesaria contextos cercanos a la experiencia cotidiana del estudiante. A manera de ejemplo, el Ministerio de Educación Nacional⁴⁷ ha sugerido una tarea de este tipo, como un ejemplo de modelación en el currículo de matemáticas. El enunciado de la tarea es “Una familia de cuatro (4) personas ha invitado a tres (3) amigos a comer a su casa. ¿Cuántos puestos se pondrán en la mesa?” (p. 78). En la visión que expresa el MEN se espera que los estudiantes construyan la expresión $3 + 4 = ?$ como un modelo que satisface el enunciado.

Otro ejemplo de tareas realistas puede encontrarse en Sahin, Yenmez y Erbas⁴⁸. Estos autores sugieren una tarea en un contexto médico en la que los estudiantes evoquen un sistema de emergencias de un hospital y lleven el control de la presión sanguínea de un paciente. La tarea incluye una tabla con datos y proponen que analicen su variación para interpretar el cambio en la presión sanguínea del paciente. Para los autores, este tipo de tareas es útil para una aproximación conceptual al concepto de derivada.

- *Visión de modelación:* En perspectivas pragmáticas y críticas pocas veces se reconocen estos enunciados como tareas de modelación; en parte porque el principal énfasis (a veces el único) se encuentra en develar una estructura matemática subyacente en el enunciado. En palabras de Lesh y Caylor⁴⁹, en una mirada general sobre la modelación, este tipo de enunciados involucra dos sistemas, uno de ellos el matemático y el otro el imaginado; los

⁴⁶ MAASS, Op. Cit.

⁴⁷ COLOMBIA, MEN. *Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio, 1998.

⁴⁸ SAHIN, Zulal; YENMEZ, Arzu Aydogan; ERBAS, AyhanKursat. Relational Understanding of the Derivative Concept through Mathematical Modeling: A Case Study. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, v. 11, n. 1, 2015. doi.org/10.12973/eurasia.2015.1149a

⁴⁹ Ibid.

Tipos de tareas de modelación para la clase de matemáticas

| Jhony Alexander Villa-Ochoa

| Alexander Castrillón-Yepes

| Jonathan Sánchez-Cardona

modelos matemáticos aparecen en representación de las condiciones del enunciado para responder a las preguntas planteadas.

La noción de realidad o contexto en este tipo de tareas se reduce a una construcción evocada o imaginada por parte del sujeto que las resuelve. Se limita la complejidad que puede presentarse en un contexto particular cuando ocurre en la experiencia cotidiana o en la experiencia profesional de los sujetos. La simplificación de tal complejidad hace que este tipo de tareas pueda utilizarse en el aula para ajustarse a prácticas que se interesan en ilustrar potenciales “aplicaciones” de las matemáticas y para satisfacer las demandas de currículos rígidos en tiempos y en el desarrollo de temáticas⁵⁰. Este tipo de tareas se formulan por los profesores; la participación del estudiante se reduce a resolver la tarea. A pesar de ello, estas tareas pueden integrarse en ambientes que promueva una participación más activa de los estudiantes cuando se promueve la discusión sobre los usos y contextos evocados en la tarea; también en el cuestionamiento de la idealización de la situación y en la identificación de las condiciones del contexto “real” que simplificaron o aislaron. Estos ambientes pueden promover otras acciones de modelación en tareas enriquecidas que pueden resultar cuando se incluyen esas nuevas condiciones.

- *Los alcances y limitaciones en el aula:* Para Verschafeld y colaboradores⁵¹, este tipo de tareas aporta a la formación matemática de los estudiantes. En particular involucra la comprensión de los elementos clave del enunciado/problema, la construcción de un modelo matemático a partir de tales elementos y las relaciones provenientes del enunciado, trabajar con modelos matemáticos para derivar resultados matemáticos, interpretar los resultados que se desprenden de un ejercicio de cálculo, evaluar si el resultado matemático se interpreta de manera adecuada y razonable, y comunicar la solución del problema original en el mundo real. Para Sahin, Yenmez y Erbas⁵², el diseño de

⁵⁰ VILLA-OCHOA (2015). Op cit.

⁵¹ Ibid

⁵² Ibid

este tipo de tareas de modelación que requieren abordar las grandes ideas subyacentes a un concepto, se considera una guía valiosa para observar y comprender las formas de pensar de los estudiantes. Estas tareas están orientadas a la enseñanza o evaluación de un contenido y, en función de ello, se preparan tareas que ilustran o evocan la presencia del contenido y de sus propiedades.

En los últimos 20 años, muchos estudiosos han sostenido, en diversas formas, que la práctica tradicional de problemas de matemáticas en la escuela no fomenta en los estudiantes, de hecho inhibe, una disposición genuina hacia modelos matemáticos y hacia la solución de problemas⁵³. Esta práctica (tradicional) puede ser cuestionada pues comúnmente agota estos enunciados verbales en estereotipos que, en lugar de una conexión con la experiencia de los estudiantes, “disfraza” un contenido matemático a través de un vestido de palabras. Aunque las tareas de modelación *como enunciados verbales* pueden involucrar un contexto ficticio, guardan una relación con las del caso 1 expuesto por Barbosa⁵⁴ pues la información está contenida para que los estudiantes resuelvan los cuestionamientos o problemas. Villa-Ochoa⁵⁵ informó que estas tareas son uno de los principales recursos, y a veces el único, que utilizan algunos profesores para ejemplificar las conexiones de las matemáticas con la “realidad”. Para este autor, los enunciados verbales muchas veces se reducen a problemas rutinarios presentados en enunciados y se justifica su uso en la necesidad de ‘desarrollar la habilidad’ para establecer traducciones entre el lenguaje natural y el lenguaje simbólico-matemático, o como una manera de conservar el *status quo* en currículos con características rígidas y centrados en el desarrollo de contenidos.

⁵³ VERSCHAFELD et al. (2010). Op. Cit.

⁵⁴ BARBOSA (2003). Op. Cit.

⁵⁵ VILLA-OCHOA (2015). Op. Cit.

b. Problemas auténticos presentados como enunciados verbales

Como una reacción a la pérdida de sentido y a las limitaciones que representan los enunciados verbales estereotipados, Bonotto⁵⁶ argumenta sobre la necesidad de trascender hacia enunciados que involucren vínculos más fuertes entre las matemáticas y el conocimiento extraescolar (auténticos). Esta autora propone para ello (i) cambiar el tipo de actividad destinada a crear interacción entre el mundo real y las matemáticas hacia situaciones problemáticas menos estereotipadas, (ii) cambiar las concepciones de los estudiantes, sus creencias y actitudes hacia las matemáticas (incluso de los profesores), y (iii) el cambio de cultura escolar mediante la creación de nuevas normas socio-matemáticas. En este artículo el término *Authentic Word Problems* o problemas auténticos presentados como enunciados verbales se refiere a textos que incluyen alguna de las características de la autenticidad; por ejemplo, autenticidad de contexto, de actividad o proceso y de impacto (ver, por ejemplo: Barab y colegas⁵⁷) y autenticidad de personal y de valor (Strobel y colegas⁵⁸).

A manera de ejemplo, se puede utilizar la experiencia de los estudiantes con los operadores celulares para generar enunciados de problemas que puedan estudiarse a través de las matemáticas. Por ejemplo, en marzo de 2015, una empresa de telefonía celular en Colombia envió el siguiente mensaje a sus suscriptores: “*Hoy habla 15 minutos a Tigo hasta las 11:59 PM Por solo \$1200. Envía TIGO al 2555*”. Este texto puede convertirse en insumo para estudiar relaciones entre funciones a través de la comparación entre los planes que tienen los usuarios y el promocionado a través del mensaje; así mismo, puede posibilitar el estudio de funciones por tramo, parte entera y la resolución de sistemas de

⁵⁶ BONOTTO, Cinzia. How to replace word problems with activities of realistic mathematical modelling. In: BLUM, Werner, et al. (Eds.). *Modelling and applications in mathematics education*, The 14th ICMI Study. New York, Springer, 2007, p. 185-192.

⁵⁷ BARAB, Sasha A.; SQUIRE, Kurt D.; DUEBER, William. A co-evolutionary model for supporting the emergence of authenticity. *Educational technology research and development*, v. 48, n. 2, p. 37-62, 2000.

⁵⁸ STROBEL, Johannes, et al. The role of authenticity in design-based learning environments: The case of engineering education. *Computers & Education*, v. 64, p. 143-152, 2013. doi.10.1016/j.compedu.2012.11.026

ecuaciones. Los enunciados que se derivan de la experiencia del sujeto atienden a características de autenticidad de contextos y personal⁵⁹, ⁶⁰. Además, los resultados pueden orientar la toma de decisiones de los estudiantes y generar un impacto en el consumo de este tipo de servicios (Autenticidad de impacto⁶¹).

Otro ejemplo del tipo de enunciados que se discute en este apartado puede extraerse del estudio de Blum y Borromeo-Ferri (2009)⁶². En su texto, estos autores propusieron a sus estudiantes el siguiente enunciado: *En un centro deportivo en las Filipinas, Florentino Anonuevo Jr. pule un par de zapatos. Los zapatos, según el Libro Guinness Récords, son el par más grande del mundo, con un ancho de 2,37 m y una altura de 5,29 m. Aproximadamente, ¿qué tan alto sería un gigante que se ajustaría a estos zapatos? Explique su solución* (Original en inglés). Este es un texto que enuncia un problema en un contexto auténtico; sin embargo, con excepción de los estudiantes que hayan visitado el centro deportivo, no representa autenticidad personal.

- *Visión de modelación:* En cualquiera de los dos ejemplos está presente una visión de la modelación como construcción de modelos a partir de un ente o dominio extramatemático; sin embargo, la manera en que se construye y se valida el modelo puede diferir de acuerdo con el tipo de problema que se plantee y los alcances que se delimiten para el proceso. En algunas tareas, por ejemplo, la presentada por Blum y Borromeo-Ferri⁶³, la modelación puede inscribirse en el recorrido por alguno de los denominados ciclos de modelación de Perrenet y Zwaneveld⁶⁴. No obstante, este proceso adquiere diferentes matices y direcciones dependiendo de las características de autenticidad e interés de los estudiantes. A diferencia del tipo de tarea anterior, el diseño de estos enunciados sugiere la identificación de situaciones en contexto que sean susceptibles de ser modeladas. Conforme Vázquez, Romo, Romo-Vázquez y

⁵⁹ BARAB et al. Op. Cit

⁶⁰ STROBEL et al., 2013. Op. Cit.

⁶¹ BARAB et al. Op. Cit.

⁶² BLUM, Werner; BORROMEIO FERRI, Rita. Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of mathematical modelling and application*, v. 1, n. 1, p. 45-58, 2009.

⁶³ Idem

⁶⁴ PERRENET, Jacob; ZWANEVELD, Bert. The many faces of the mathematical modeling cycle. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, v. 1, n. 6, p. 3-21, 2012.

Tipos de tareas de modelación para la clase de matemáticas

| Jhony Alexander Villa-Ochoa
| Alexander Castrillón-Yepes
| Jonathan Sánchez-Cardona

Trigueros⁶⁵, la enseñanza de las matemáticas en algunas profesiones requiere de un enfoque con un sentido que va del uso que se hace en las profesiones hacia la enseñanza y no al revés. Este tipo de tareas puede asociarse con las tareas auténticas referidas en Maass⁶⁶ y con los casos 1 y 2 expuestos por Barbosa⁶⁷. Con una orientación especial, estas tareas podrían orientar un desarrollo de proyectos del caso 3, es decir, proyectos que pueden conducir un proceso de estudio e indagación más amplio. Si este fuera el caso, este tipo de tareas se ubicaría en el desarrollo de proyectos de modelación que se presentará más adelante.

- *Alcances y limitaciones en el aula:* Al igual que el anterior tipo de tarea, los enunciados auténticos proporcionan condiciones para que los estudiantes se involucren en la producción de representaciones matemáticas de situaciones en contexto y obtengan una imagen más amplia de las relaciones entre las matemáticas y la experiencia cotidiana. En este sentido, trasciende la idea de “realidad” como situaciones o tareas re-vestidas, imaginadas o que evocan un contexto potencialmente posible. Este tipo de tareas también puede ajustarse a currículos orientados al desarrollo de contenidos y con limitación de tiempo y espacio para el desarrollo de tareas matemáticas.

El llamado a que las tareas de modelación tengan un componente auténtico ha estado presente en varias perspectivas de la modelación (por ejemplo, Bonotto⁶⁸; Kaiser y Schwarz⁶⁹; Muñoz Mesa y colaboradores⁷⁰). Las tareas auténticas de enunciados verbales en la literatura se han enfocado principalmente en la autenticidad de contexto, es decir, que el contexto de la tarea provenga o evoque una situación semejante a la que ocurre en la

⁶⁵ VÁZQUEZ, Rita, et al. La separación ciega de fuentes: un puente entre el álgebra lineal y el análisis de señales. *Educación matemática*, v. 28, n. 2, p. 31-57, 2016.

⁶⁶ Ibid.

⁶⁷ BARBOSA (2003) Op. Cit.

⁶⁸ Ibid.

⁶⁹ KAISER, Gabriele; SCHWARZ, Björn. Authentic modelling problems in mathematics education—examples and experiences. *Journal für Mathematik-Didaktik*, v. 31, n. 1, p. 51-76, 2010.

⁷⁰ MUÑOZ MESA, Lina María, et al. Contextos auténticos y la producción de modelos matemáticos escolares. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, n. 42, p. 48-67, 2014.

experiencia cercana de los sujetos o de alguna profesión, y en la autenticidad de actividad o proceso, es decir, que refleje las acciones o actividades que ocurren en la realidad o que desarrollan los profesionales en un campo específico^{71, 72}. Sin embargo, dado que estas tareas se formulan a través de enunciados cortos, no siempre es posible recrear en ellos otros aspectos de la autenticidad, por ejemplo, autenticidad de impacto, autenticidad personal y autenticidad de valor. Para Strobel y colaboradores⁷³, estas características de la autenticidad requieren de proyectos cercanos a la propia vida de los estudiantes y que se interesen por responder preguntas personales o satisfacer la comunidad. Este tipo de proyectos involucra procesos más complejos y demanda más tiempo para su desarrollo.

Construcción de Representaciones.

Si bien la construcción de representaciones es una actividad inherente a la mayoría de las visiones sobre modelación, también es cierto que esta actividad se puede presentar con mayor o menor énfasis dependiendo de los propósitos de la clase y de las visiones que el profesor tenga sobre las matemáticas y su enseñanza. En la literatura pueden reconocerse al menos dos tipos de tareas que se enfocan en la modelación, principalmente, como producción de representaciones.

a. Representaciones gráficas.

La construcción de representaciones gráficas de una situación o fenómeno dentro de las matemáticas puede considerarse como una forma de hacer modelación. Arcavi⁷⁴ sostiene que en lugar de discutir el vínculo entre dos prácticas aparentemente disímiles (prácticas escolares y el mundo profesional), se pueden fortalecer procesos dentro de las mismas matemáticas. Para el autor, este tipo de prácticas apoyan el propósito de aprender un contenido matemático y utilizar

⁷¹ NISS, Mogens (ed.). *Investigations into assessment in mathematics education: an ICMI study*. Springer Science & Business Media, 1992.

⁷² BARAB et al., 2000

⁷³ Ibid.

⁷⁴ Ibid

Tipos de tareas de modelación para la clase de matemáticas

| Jhony Alexander Villa-Ochoa

| Alexander Castrillón-Yepes

| Jonathan Sánchez-Cardona

herramientas útiles de una manera significativa, incluso cuando las prácticas profesionales "reales" aún no están incorporadas de forma plena. Villa-Ochoa y colaboradores⁷⁵ diseñaron una tarea en la que propusieron estudiar la variación del área de un rectángulo inscrito en un cuadrado (ver Fig 2.). En el marco de una perspectiva variacional, los autores informaron las acciones que los estudiantes realizaron para determinar variables, relaciones entre ellas, y la construcción de expresiones algebraicas y gráficas que representaran esas relaciones entre las variables.

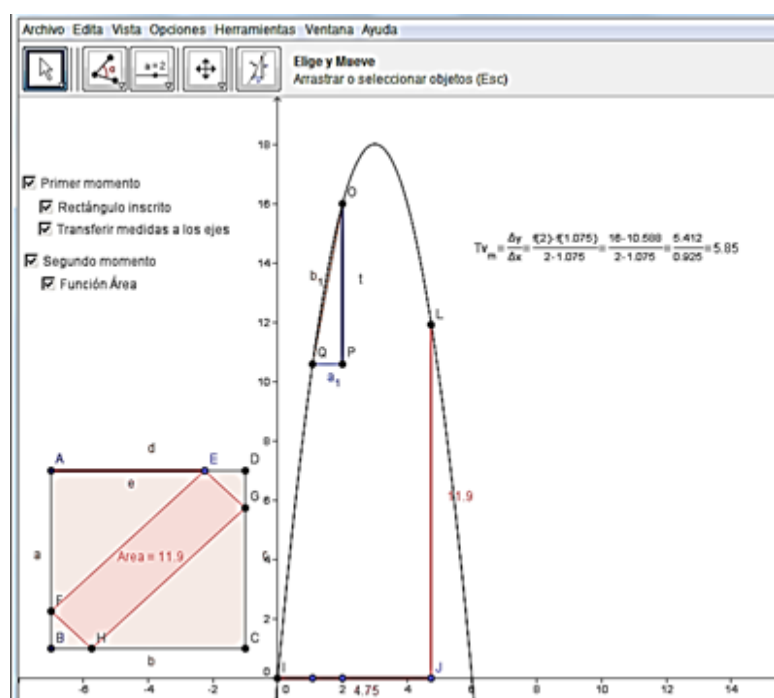


Fig. 2. Imagen de una situación de modelación de la variación a través de gráficas (Villa-Ochoa et al⁷⁶).

Otro ejemplo de tareas de modelación en la cual se parte de un contexto propio de la geometría se encuentra en Morales y Rosas⁷⁷. El diseño propuesto por estas autoras concibe la modelación como una práctica. En la tarea se ofrece a los estudiantes un conjunto de figuras a través de las cuales ponen en juego el

⁷⁵ VILLA-OCHOA et al., (2018). Op Cit.

⁷⁶ VILLA-OCHOA et al. 2018. Op. Cit

⁷⁷ MORALES, Astrid; ROSAS, Lorena. Una propuesta para el desarrollo de modelos geométricos en las Educadoras de Párulos: El caso del polígono. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, v. 42, n 2, p. 247-267, 2016. doi.org/10.4067/S0718-07052016000200014

aspecto de la variación de los elementos de los polígonos (medidas de lados y medida de ángulos). De esta forma, esperan promover los argumentos gráficos que surgen del uso de las figuras geométricas y resignificar los polígonos a través de la variación.

- *Visión de modelación:* En este tipo de tareas la modelación se refiere a traducciones entre dos ámbitos al interior de las matemáticas. Al igual que los demás tipos de tareas, los estudiantes pueden identificar cantidades variables y constantes, centrar la atención en las que consideren relevantes y construir otras representaciones que modelen la relación entre estas cantidades. Para Arcavi⁷⁸, esta actividad se centra en estudiar un fenómeno matemático mediante el uso de medios matemáticos distintos de los del propio fenómeno. En una perspectiva de la modelación como proceso que se involucra en el estudio de fenómenos de un dominio extramatemático a través de un dominio matemático, este tipo de tareas no podría considerarse como tareas de modelación matemática.

- *Los alcances y limitaciones en el aula:* Estas situaciones pueden valorarse porque promueven experiencias para el estudio de un fenómeno (matemático) y, a partir de este, el desarrollo de habilidades para construir representaciones e interpretar resultados. En este tipo de tareas los estudiantes, además de manipular representaciones, también pueden realizar razonamientos, conjeturas y otras acciones. En el ejemplo propuesto por Villa-Ochoa y colegas⁷⁹ se observa que los estudiantes producen significados matemáticos de la función cuadrática y razón de cambio (promedio e instantánea). Sin embargo, en esta experiencia, esos significados fueron insuficientes para una comprensión más profunda de la derivada. Para Arcavi⁸⁰ este tipo de tareas permite la visualización de los cambios de área de las figuras, lo que a su vez permite familiarizarse con las variables e incluso formular hipótesis de los resultados esperados.

Si bien en este tipo de tareas se ponen de relieve acciones y habilidades que se involucran también en otras maneras de modelar, se presentan

⁷⁸ ARCAVI (2008) Op. Cit. p. 2.

⁷⁹ VILLA-OCHOA et al. (2018)

⁸⁰ Idem

limitaciones en relación con la ausencia de un contexto extramatemático. En este sentido, la discusión sobre los aportes y las limitaciones que ofrecen los contextos carece de sentido. Para ampliar dichos aportes y limitaciones, el lector se podrá referir a Beswick⁸¹ y Almuna Salgado⁸².

b. Modelación/simulación de formas.

En la literatura puede reconocerse un conjunto de tareas que se enfocan en la reproducción de cierto tipo de comportamientos y formas a partir del uso de dispositivos electrónicos^{83,84,85}. La modelación de las formas ha sido interpretada por Zapata-Grajales, Cano-Velásquez y Villa-Ochoa⁸⁶ a partir de dos usos; el primero de ellos se relaciona con la construcción de modelos matemáticos geométricos para representar objetos, por ejemplo, para replicar la forma de objetos tales como ventanas, sillas, partes del cuerpo, representaciones tridimensionales, etc. El segundo uso tiene que ver con el análisis geométrico de modelos ya construidos (aplicación de modelos), esto significa, usar modelos matemáticos geométricos para estudiar otros con características similares. Por ejemplo, para simular el movimiento de un ventilador u otro objeto en un software de geometría dinámica.

- *Visión de modelación:* Al igual que en la categoría anterior, también está la disputa por reconocer este tipo de tareas como tareas de modelación.

⁸¹ Idem

⁸² ALMUNA SALGADO, Felipe J. "The Role of Context and Context Familiarity on Mathematics Problems." *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, v.20, n. 3, p. 265–292, 2017. Doi: 10.12802/relime.17.2031

⁸³ MEIER, Melissa; GRAVINA, Maria Alice. Modelagem no GeoGebra e o desenvolvimento do pensamento geométrico no Ensino Fundamental. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, v. 1, n. 1, p. 250-264, 2012.

⁸⁴ GUTIÉRREZ, Rafael E.; PRIETO, Juan Luis; ORTIZ BUITRAGO, José. Matematización y trabajo matemático en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *Educación Matemática*, v. 29, n. 2, p. 37-68, 2017. doi.org/10.24844/EM2902.02

⁸⁵ ZAPATA-GRAJALES, Fabio N.; CANO-VELÁSQUEZ, Natalia A.; VILLA-OCHOA, Jhony Alexander. Art and Geometry of Plants: Experience in Mathematical Modelling through Projects. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, v. 14, n. 2, p 585-603, 2017. Doi:10.12973/ejmste/76958

⁸⁶ Idem

Algunos autores denominan a este tipo de tareas como de modelación (sin el adjetivo matemático, por ejemplo, Meier y Gravina⁸⁷) y otros como modelación geométrica (por ejemplo, Zapata-Grajales y colaboradores⁸⁸). En cualquier caso, estas tareas sugieren una conexión entre dos entes o sistemas. Sin embargo, en ocasiones, se usa uno de ellos, para representar o simular (a veces en apariencia) el comportamiento, la forma o el movimiento del otro, sin que ello implique una comprensión de las variables y demás condiciones que se dan en cada sistema. Por tanto, no necesariamente se ofrece un estudio o modelación de las leyes que gobiernan el movimiento en el fenómeno modelado. Por el contrario, otros trabajos señalan que los fenómenos representados con un software pueden asociarse a lo que en la literatura también se conoce como modelación computacional; a partir de este tipo de modelación se establecen mecanismos que permiten explicar propiedades físicas de los objetos, como el cambio de posición de las partículas⁸⁹.

- *Alcances y limitaciones en el aula:* Algunos autores defienden estas tareas pues a través de ellas se promueve el desarrollo de habilidades que caracterizan el razonamiento matemático (establecer relaciones y conjeturas, resolver problemas⁹⁰ y otros subprocesos de las matemáticas como analizar y construir. Estas situaciones también se defienden porque a través del proceso de “replicación” se posibilitan conexiones con el arte⁹¹. Si bien este tipo de tareas promueve el desarrollo de habilidades matemáticas, también es cierto que cuando se agota la modelación solo en este tipo de tareas, se pueden producir imágenes estereotipadas del rol funcional de las matemáticas, esto es, de los usos y contribuciones que las matemáticas tienen en la sociedad y la cultura.

⁸⁷ Idem

⁸⁸ Idem

⁸⁹ GUTIÉRREZ; PRIETO; ORTIZ BUITRAGO, 2017, Op. Cit.

⁹⁰ GRAVINA, Maria Alice; CONTIERO, Lucas. Modelagem com o Geogebra: uma possibilidade para a educação interdisciplinar? *Novas tecnologias na educação*, v. 9, n. 1. p. 1-10, 2011.

⁹¹ ZAPATA-GRAJALEZ, CANO-VELASQUEZ; VILLA-OCHOA, 2018, Op. Cit.

Modelación a través de proyectos

Los proyectos de modelación se diferencian de manera sustancial de las anteriores tareas pues los proyectos representan una tarea abierta que posibilita desarrollar procesos amplios de indagación y resolución de problemas. Varios propósitos se pueden identificar en los proyectos de modelación; por ejemplo, proyectos como *medio* para enseñar un contenido, o para promover el desarrollo de capacidades de los estudiantes, para establecer relaciones entre las matemáticas y otras disciplinas y para el desarrollo de reflexiones y visiones críticas sobre el rol de las matemáticas en la sociedad^{92, 93}. También se pueden identificar dos diferencias según el tema o problema del proyecto sea elegido por el profesor o por el estudiante.

No existe una correspondencia entre los propósitos del proyecto y la manera en que se elige el tema. Por ejemplo, Vélez, Orrego y López⁹⁴ eligieron un contexto auténtico cercano a los estudiantes y a partir de éste, analizaron el problema de optimizar el consumo de energía prepago en una comunidad. Por su parte, Muñoz Mesa y sus colegas⁹⁵ propusieron a los estudiantes desarrollar un proyecto en el que hicieron una comparación de los medios de transporte de su ciudad y, a partir de condiciones particulares, buscaron maneras óptimas de transportarse. En ambos casos, estos proyectos, el contexto y el problema fueron propuestos por el profesor con el fin de promover el estudio de relaciones lineales (ecuaciones y funciones). Estos contenidos fueron emergiendo a medida que resolvían los problemas planteados.

⁹² FERNÁNDEZ, Jorge Villarreal, et al. El desarrollo de habilidades investigativas a partir de resolución de problemas. Las matemáticas y el estado nutricional de los estudiantes. *Revista Lasallista de Investigación*, v. 14, n. 1, p. 162-169, 2017.

⁹³ ARAÚJO, J. L. Uma abordagem sócio-crítica da modelagem matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. *Alexandria Revista de Educação em Ciências e Tecnologia, Florianópolis*, v. 2, n. 2, p. 55-68, 2009.

⁹⁴ VÉLEZ, José Luis Bossio; ORREGO, Sandra Milena; LÓPEZ, Carlos Mario. Activation of Student Prior Knowledge to Build Linear Models in the Context of Modelling Pre-paid Electricity Consumption. In: STILLMAN, G; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. (Eds.). *Mathematical Modelling in Education Research and Practice*. Springer International Publishing, 2015. p. 317-326.

⁹⁵ *Ibid.*

Existen otros casos en el que el contexto o tema es elegido por el profesor; sin embargo, el propósito del proyecto no es para la enseñanza de un contenido. Por ejemplo, en Araújo y Martins⁹⁶, las autoras utilizaron una situación de protesta de los estudiantes en la universidad, para promover reflexiones sobre la idea de empoderamiento sociopolítico por medio de las matemáticas; por su parte, Camelo Bustos, Perilla Triana y Mancera Ortiz⁹⁷ desarrollaron un proyecto para estudiar los programas de telefonía móvil en Colombia, este proyecto se desarrolló con estudiantes de bajos recursos con el propósito de integrar las problemáticas cercanas a los estudiantes con el aprendizaje de conceptos matemáticos, sin embargo, más allá de ello, buscaron que los estudiantes reflexionaran sobre las implicaciones y responsabilidades sociales que surgen al comprender los soportes matemáticos de los fenómenos sociales.

- *Visión de modelación:* La modelación vista como el desarrollo de proyectos recrea parte de la actividad de los profesionales en matemática aplicada, quienes trabajan en colaboración con otros profesionales para resolver situaciones relevantes en un fenómeno y una comunidad. Al menos dos consideraciones sobre la modelación se pueden poner de relieve; en primer lugar, está presente la noción de modelación como una interacción entre dos dominios (entes), uno de ellos está dado por las condiciones del contexto o fenómeno que se quiere estudiar y el otro por los conocimientos matemáticos y de otras disciplinas que emergen como una manera de responder a los problemas planteados. En segundo lugar, se resalta que los proyectos de modelación no siempre atienden a la misma intencionalidad. En parte, esta intencionalidad marca la diferencia entre los tipos de procesos y la manera en que “cobran vida” en el aula.

⁹⁶ ARAÚJO, Jussara De Loiola, and MARTINS, Danielle Alves. “A Oficina de Modelagem #OcupaICEx: Empoderamento Por Meio Da Matemática.” *Revista Paranaense de Educação Matemática* v.6, n. 12, p. 109–129, 2017. http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/viewFile/1600/pdf_236.

⁹⁷ CAMELO BUSTOS, Francisco; PERILLA TRIANA, Wilson; MANCERA ORTIZ, Gabriel. Prácticas de modelación matemática desde una perspectiva socio crítica con estudiantes de grado undécimo. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, v.9, n.2, p. 67–84, 2016.

Tipos de tareas de modelación para la clase de matemáticas

| Jhony Alexander Villa-Ochoa
| Alexander Castrillón-Yepes
| Jonathan Sánchez-Cardona

Los proyectos que se preocupan por ser un *medio* para la enseñanza de un contenido centran principalmente su atención en aspectos cognitivos y metacognitivos como, por ejemplo: elementos conceptuales, procedimentales, autorreguladores, de comunicación⁹⁸. En función de ello, la modelación puede alinearse con la noción de ciclo de modelación⁹⁹ en la cual se describen subprocesos que orientan las acciones de los estudiantes. Por otro lado, la modelación puede proponerse con el objetivo de desarrollar reflexiones críticas y sociopolíticas sobre las situaciones de la sociedad^{100, 101} o para generar articulaciones entre diferentes áreas o disciplinas¹⁰²; en estos casos la modelación puede cobrar vida en ambientes a través de los cuales los procesos emergen como respuesta a las necesidades que se planteen por los sujetos que se involucran; según Rendón-Mesa¹⁰³ en este tipo de proyectos son diversas las maneras en que se pueden describir los procesos de modelación (no solo mediante un único ciclo) y ello depende de la manera en que se responda a las necesidades que se identifican en un contexto particular, de los cuestionamientos que el profesor plantee a las elaboraciones de los estudiantes, del apoyo que ofrezcan los expertos en temáticas y de las relaciones que se establezcan entre las disciplinas.

- *Alcances y limitaciones en el aula.* La modelación a través de proyectos ha sido defendida porque ofrece situaciones concretas a través de las cuales los estudiantes organizan e interpretan información y datos; describen relaciones

⁹⁸ ARAVENA, María; CAAMAÑO, Carlos; GIMÉNEZ, Joaquín. Modelos matemáticos a través de proyectos. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, v. 11, n. 1, p. 49-92, 2008.

⁹⁹ PERRENET; ZWANEVELD. Op. Cit.

¹⁰⁰ ARAÚJO, Jussara De Loiola, and MARTINS, Danielle Alves. "A Oficina de Modelagem #OcupaICEx: Empoderamento Por Meio Da Matemática." *Revista Paranaense de Educação Matemática* 6, no. 12 (2017): 109-129. http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/viewFile/1600/pdf_236.

¹⁰¹ CAMELO BUSTOS et al. Op. Cit.

¹⁰² RENDON-MESA, Paula Andrea. "Articulación Entre La Matemática Y El Campo de Acción de La Ingeniería de Diseño de Producto: Aportes de La Modelación Matemática." 2016. Tesis de Doctorado (Doctorado en Educación) Universidad de Antioquia.

¹⁰³ Idem.

DOSSIÊ PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: NOVAS PERSPECTIVAS PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM

matemáticas; enfrenta problemas con soluciones múltiples; reconocen la aplicabilidad de conceptos y procesos matemáticos; analizan e interpretan problemas a través de las matemáticas; comprenden nuevas ideas entre otros¹⁰⁴. Para Aravena y sus colaboradores¹⁰⁵, otra de las bondades que justifica los proyectos es que ayudan a desarrollar la creatividad pues exigen del estudiante flexibilidad, imaginación, capacidad de riesgo, autonomía en la toma de decisiones, capacidad de síntesis y coherencia en la organización del pensamiento reflexivo frente a situaciones nuevas. Los procesos de argumentación, razonamiento y de colaboración también pueden valorarse en algunas de las propuestas de modelación a través de proyectos¹⁰⁶.

La investigación sobre proyectos de modelación ha estado inscrita en diferentes perspectivas; por ejemplo, quienes se enfocan en una perspectiva socio-crítica han encontrado en los proyectos una posibilidad para que los estudiantes amplíen su visión sobre los roles de las matemáticas en la sociedad, prepararlos para participar en la democracia de forma responsable, y producir conocimientos matemáticos y del contexto social y cultural en el que se inscribe el proyecto¹⁰⁷. En un enfoque orientado al aprendizaje de un contenido y en una visión más pragmática, los proyectos de modelación se valoran por el aporte al establecimiento de significados y relaciones conceptuales de los contenidos matemáticos, así como el aporte al desarrollo de habilidades y competencias matemáticas¹⁰⁸.

En los proyectos de modelación también se pueden reconocer características del aprendizaje auténtico; por ejemplo, autenticidad de contexto, de proceso/actividades¹⁰⁹. Sin embargo, cuando la temática o el problema es elegido por el profesor, no siempre el proyecto logra un empoderamiento de los estudiantes para la realización del proyecto pues el problema elegido no necesariamente puede atender a sus necesidades personales o de la comunidad

¹⁰⁴ ARAVENA et al. Op Cit. p. 53

¹⁰⁵ Idem.

¹⁰⁶ RENDON-MESA, 2016, Op. Cit.

¹⁰⁷ RENDON-MESA, 2016, Op. Cit.

¹⁰⁸ ARAVENA et al. 2008. Op. Cit.

¹⁰⁹ STROBEL et al. 2014. Op. Cit.

Tipos de tareas de modelación para la clase de matemáticas

| Jhony Alexander Villa-Ochoa
| Alexander Castrillón-Yepes
| Jonathan Sánchez-Cardona

en la que habita; en ese sentido, la autenticidad personal y de valor no siempre es un alcance de los proyectos cuyo tema es elegido por el profesor.

A pesar de los alcances mencionados anteriormente, no es claro hasta qué punto los propósitos con los cuales se formula los proyectos en las aulas pueden condicionar la manera en la que se desarrollan; incluso, en qué medida pueden reducirse a procesos esquemáticos y lineales para atender la meta propuesta. Este “afán” de atender al propósito del proyecto puede dejar de lado otros conocimientos y aprendizajes que pueden ser relevantes en la formación de los estudiantes tanto en el ámbito matemático como en otras ciencias y en el mismo contexto^{110, 111},

Por su naturaleza, el desarrollo de proyectos puede desbordar aquellos currículos con características rígidas, pues requieren de amplios espacios y tiempos para la toma de datos, confrontación con expertos, la toma de decisiones, entre otros. En ocasiones, cuando los temas se eligen con base en los intereses de los estudiantes, el contenido matemático emerge acorde con los fenómenos objeto de estudio y el problema que haya sido delimitado; este aspecto impone fuertes desafíos a los profesores frente a la manera en que deben orientar y apoyar el desarrollo del proyecto de sus estudiantes. Este tipo de tareas exige que los profesores se involucren en ambientes que requieren de conocimientos más allá del matemático, por tanto, el profesor debe articularse en un trabajo interdisciplinario con otros profesores y profesionales. Si bien existen perspectivas bajo las cuales se considera que cualquier acto de pensamiento es un acto interdisciplinario¹¹², también es cierto que, en las matemáticas escolares, y en particular, en la modelación matemática, no siempre se utilizan contextos que valoren la producción de conocimientos de las disciplinas que intervienen¹¹³.

¹¹⁰ RENDON-MESA, 2016.

¹¹¹ VILLA-OCHOA Y BERRIO, 2015. Op Cit.

¹¹² MARQUES, Marcos Aurelio. “Interdisciplinaridade e Poder em Michel Foucault: Encontro com a Geografia.” *Espaco Plural* v.16, n. 32, p. 204–223, 2015.

¹¹³ VILLA-OCHOA y BERRÍO, 2015. Op. Cit.

Uso y análisis de modelos.

La literatura en modelación ofrece diferentes comprensiones sobre el término modelo, entre ellas, sistema, estructura, representación o idealización de una “realidad” observada posible¹¹⁴. Para Mesa¹¹⁵ existe una dialéctica entre la modelación y las comprensiones sobre el modelo matemático; cualquier comprensión sobre la naturaleza de los modelos tendrá implicaciones sobre las maneras en que se concibe la modelación al interior de la Educación Matemática. Ejemplos de tareas sobre usos y análisis de modelos pueden encontrarse en la formación de niños de primaria (Índice de Masa Corporal, Parra-Zapata y colaboradores¹¹⁶), en la formación de futuros profesores de matemáticas (Crecimiento Fetal, Villa-Ochoa¹¹⁷); en la formación de ingenieros (Porcentaje de deshidratación de Alimentos, Sepúlveda¹¹⁸) y en la formación de Biólogos (Reproducción de la Malaria, Soares¹¹⁹).

De modo particular, Villa-Ochoa¹²⁰ diseñó un ambiente para analizar el modelo del crecimiento fetal y lo estructuró en tres momentos. En el primero, denominado ¿Qué nos dice el modelo?, el autor proporcionó a los estudiantes el modelo y promovió en ellos su lectura e interpretación a través de aspectos matemáticos y del fenómeno; frente a los aspectos matemáticos emergieron discusiones sobre usos de las funciones exponencial, cuadrática y cúbica. El segundo momento se denominó “El fenómeno de estudio más allá de las matemáticas”, en él los estudiantes consultaron y analizaron aspectos de

¹¹⁴ VILLA-OCHOA, Jhony. *Aspectos de la modelación matemática en el aula de clase. El análisis de modelos como un ejemplo*. In ARRIETA, Jaime y DIAZ, Leonora (Coords). *Investigaciones Latinoamericanas en modelación Matemática Educativa*, Barcelona: Gedisa, 2016, p. 109-138.

¹¹⁵ MESA, Yadira. *El modelo matemático como noción, concepto y categoría: reflexión desde la filosofía al campo de la modelación en educación matemática*. Tesis de maestría (no publicada), Maestría en Educación. Universidad de Antioquia, Medellín.

¹¹⁶ PARRA-ZAPATA, Mónica Marcela, et al. *El Índice de masa corporal: una experiencia de modelación y uso de modelos matemáticos para el aula de clase*. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, v.92. p. 21-33, 2016.

¹¹⁷ VILLA-OCHOA, 2016. Op. Cit.

¹¹⁸ SEPULVEDA, Edwin. *Uso y análisis de modelos matemáticos en la formación de profesionales en alimentos*. 2016. Tesis de maestría (no publicada), Maestría en Educación. Universidad de Antioquia, Medellín

¹¹⁹ SOARES, Débora da Silva. *Uma Abordagem Pedagógica Baseada na Análise de Modelos para Alunos de Biologia: qual o papel do software?* Teses Doctoral, 2012. Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP.

¹²⁰ VILLA-OCHOA, 2016. Op. Cit.

Tipos de tareas de modelación para la clase de matemáticas

| Jhony Alexander Villa-Ochoa

| Alexander Castrillón-Yepes

| Jonathan Sánchez-Cardona

crecimiento del feto y de la manera en que el modelo fue construido. Dado que los sujetos que participaron en el estudio eran futuros profesores, el tercer momento proporcionó una reflexión y la proyección de acciones que integraron el estudio de modelos para la enseñanza de las matemáticas.

- *Visión de modelación:* Si bien es cierto que las tareas de uso y análisis de modelos proporcionan una experiencia para estudiar las matemáticas a partir de modelos ya construidos, también es cierto que incorporan diversas acciones que forman parte de la modelación matemática, entre ellas, el trabajo matemático, la confrontación del modelo con datos extraídos del contexto particular del estudiante, la proyección de la manera en que fue construido, incluso, en algunas ocasiones, el reconocimiento de las limitaciones de los modelos y elaboración de conjeturas sobre posibles ampliaciones o extensiones del mismo.

- *Los alcances y limitaciones en el aula:* Los ambientes que involucran tareas de uso y análisis de modelos pueden proporcionar experiencias auténticas para que los estudiantes conozcan y cuestionen sus usos en diferentes prácticas cotidianas, sociales y profesionales. Según Christiansen¹²¹:

el uso de modelos en la argumentación política es una espada de doble filo: en el debate político, los modelos han servido, en alguna medida, para enfocar las discusiones, porque son manifestaciones de la gravedad del problema, pero también promueven una transformación que aparta la atención de los asuntos fundamentales (p. 34).

En ese sentido, el reconocimiento de esos usos en la clase de matemática también puede contribuir a la formación matemática y política de los estudiantes.

En el estudio de Villa-Ochoa¹²², los estudiantes (futuros profesores) se involucraron en actividades de indagación, consulta de aspectos propios del fenómeno y de las matemáticas misma; y construyeron nuevos significados sobre contenidos matemáticos relacionados en el modelo analizado. Otras acciones que

¹²¹ CHRISTIANSEN, Iben. Reflexiones críticas sobre modelos matemáticos en la clase: ¿sueño o realidad? *Revista EMA*, v. 5, n. 1, p. 29-50, 1999.

¹²² Villa-Ochoa, 2016, Op. Cit.

se pueden evidenciar en tareas de análisis de modelos son: el estudio de un fenómeno, estudio de las hipótesis (conjeturas) consideradas para la elaboración del modelo, comprensión de los aspectos que el modelo dice sobre el fenómeno y análisis de las limitaciones del modelo¹²³.

Al igual que en los proyectos de modelación, este tipo de tareas exige que los profesores y estudiantes se involucren en ambientes que requieren de conocimientos más allá del matemático, es decir, requieren de un trabajo interdisciplinario. Para Ceolim y Caldeira¹²⁴ este es uno de los factores que hacen que la modelación y, en este caso, el uso de modelos esté llegando poco y de manera tímida a la cotidianidad escolar.

Consideraciones finales

En la primera parte de este artículo se presentó un conjunto de posibilidades que la investigación internacional le atribuye a la modelación matemática. Sin embargo, para que la implementación de la modelación en la cotidianidad escolar pueda apuntar a esas posibilidades se requiere la conjunción de varias condiciones, entre ellas, el ambiente de aprendizaje y el tipo de tarea que se diseña para tal fin.

La correspondencia entre el tipo de tarea y los alcances que se le atribuyen hizo que los esfuerzos en este artículo se concentraran en reconocer la manera en que la modelación matemática podría “cobrar forma” en la cotidianidad escolar. Para ello, la atención se enfocó en los enunciados, en la autenticidad de los contextos y prácticas que se involucran en las tareas, y en los alcances y limitaciones que ofrecen para el trabajo matemático en el aula.

Se ofreció una clasificación en cuatro amplias categorías que a su vez contenían otras subcategorías según atendieran a criterios como: autenticidad

¹²³ JAVARONI, Sueli Liberatti; SOARES, Débora. Modelagem Matemática e Análise de Modelos Matemáticos na Educação Matemática/Mathematical Modeling and Analysis of Mathematical Models in Mathematics Education. *Acta Scientiae*, v. 14, n. 2, p. 260-275, 2012.

¹²⁴ CEOLIM, Amauri Jersi; CALDEIRA, Ademir Donizeti. Obstáculos e Dificuldades Apresentados por Professores de Matemática Recém-Formados ao Utilizarem Modelagem Matemática em suas Aulas na Educação Básica. *Bolema - Boletim de Educação Matemática*, v.31, n.58, p.760-776, 2017. Disponible en: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n58a12>.

Tipos de tareas de modelación para la clase de matemáticas

|Jhony Alexander Villa-Ochoa

|Alexander Castrillón-Yepes

|Jonathan Sánchez-Cardona

del contexto, propósitos (orientados a la enseñanza de las matemáticas, desarrollo de habilidades y competencias o aprendizaje de la modelación). Esta clasificación no pretende agotar la discusión sobre el tipo de tareas de modelación, por el contrario, ofrece insumos y criterios alternativos para apoyar la toma de decisiones sobre las tareas que se pueden usar en la investigación y en la cotidianidad escolar, de tal manera que se guarde coherencia con los propósitos y alcances declarados para la clase de matemáticas.

Tres aspectos importantes se resaltan en este trabajo. El primer aspecto tiene que ver con la noción de autenticidad. Si bien es cierto que desde hace más de 20 años se viene enfatizando en la necesidad de que mayor parte de las tareas relacionadas con la realidad sean auténticas, también es cierto que los esfuerzos en la literatura se han enfocado en integrar criterios de autenticidad de contextos y de actividad o proceso (Véase los ejemplos en Kaiser y Schwarz¹²⁵ y de Muñoz Mesa et al.¹²⁶). Los resultados de investigaciones como las de Araújo¹²⁷ y Villa-Ochoa y Berrio¹²⁸ muestran que cuando se desarrollan proyectos de modelación acordes con un tema de interés de los estudiantes, ellos pueden empoderarse del desarrollo de dichos proyectos. Siguiendo a Strobel y sus colaboradores¹²⁹ la realización de este tipo de proyectos integra otras dimensiones de la autenticidad, por ejemplo, (a) autenticidad personal (los proyectos están cerca de la vida de los estudiantes, es decir, historias de vida de su vecindario, biodiversidad en el bosque cercano) y autenticidad de valor (los proyectos responden preguntas personales o satisfacen necesidades personales o comunitarias).

Los proyectos de modelación que se desarrollan a partir del interés de los estudiantes tienen una dirección contraria a las tareas que son diseñadas por expertos (profesores e investigadores); mientras estas últimas se preparan con el

¹²⁵ Idem.

¹²⁶ Idem

¹²⁷ Idem

¹²⁸ Idem

¹²⁹ Idem

fin de atender al desarrollo de contenidos y habilidades, las primeras, con una orientación adecuada, pueden atender a intereses personales y comunitarios. Maass ¹³⁰ se apoyó en los trabajos de otros investigadores para señalar en su esquema de clasificación, que los contextos que se involucran en las tareas no representan una característica propia de ellas mismas, puesto que el interés y las consideraciones del contexto como relevante o no, dependen más del estudiante que de la tarea misma. Al respecto, este artículo pone en discusión esta afirmación, pues si bien es cierta en las tareas cuando se diseñan en la dirección experto - estudiante; no siempre la dirección cambia y se tienen en cuenta los intereses y necesidades de los estudiantes o de sus comunidades

El segundo aspecto tiene que ver con la naturaleza de las tareas de modelación. En todas las tareas presentadas en este artículo se puede observar cierta interrelación entre dos dominios (también llamados entes o sistemas). Bajo este criterio, *la modelación* adquiere diferentes usos y énfasis con base en las características de las tareas que se integren en los ambientes de clase. Conforme se mencionó en la segunda sección de este artículo, más allá de la articulación o conexión entre dos dominios, otro aspecto relevante en la modelación son las acciones que se realizan entre ellos. De esa manera, si las acciones, actuaciones, diseños, formas de abordar y pensar un sistema a través del otro¹³¹ se consideran como aspectos relevantes y diferenciadores de la modelación, entonces se entraría en un ámbito en el que se requiere hablar de múltiples modelaciones. En ese caso, la caracterización de la comprensión de modelación y del tipo de tarea que se usa sería una condición ineludible para cualquier investigador en el campo, pues dependiendo del tipo de tarea (tipo de modelación) que elija, serán los ambientes de clase y los alcances que pueda poner en consideración.

El tercer aspecto tiene que ver con que cada uno de los tipos de tareas de modelación considerados en este artículo son igualmente válidos y pertinentes para el aula. En otras palabras, cada tipo de tarea presenta oportunidades y limitaciones para el trabajo matemático escolar. Esto hace que acorde con las

¹³⁰ Idem

¹³¹ LESH Y CAYLOR, 2007. Op Cit.

Tipos de tareas de modelación para la clase de matemáticas

| Jhony Alexander Villa-Ochoa

| Alexander Castrillón-Yepes

| Jonathan Sánchez-Cardona

condiciones contextuales y de aula, el profesor pueda elegir uno u otro tipo de tareas; sin embargo, no quiere decir que la actividad matemática en el aula se agote solo en un único tipo. Por el contrario, se presenta una mayor riqueza en la medida en que articulan varios tipos de tarea en correspondencia con los propósitos que se declaran para la clase. De ese modo, vale la pena resaltar que, en la cotidianidad escolar, más allá de la denominación que reciban las tareas, se debe prestar atención a criterios para determinar su uso en correspondencia con los propósitos de la clase y de la formación matemática.

Agradecimientos

Aunque no sean responsables de las afirmaciones hechas en este artículo, queremos agradecer a Paula Rendón-Mesa y Mónica Parra-Zapata, integrantes de la Red Colombiana de Modelación en Educación Matemática, por las discusiones y aportes hechos a las versiones previas de este documento, y por contribuir en su refinamiento a través de sus experiencias en el curso de modelación matemática que ellas ofrecen en el Programa de Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas, en la Universidad de Antioquia, en Medellín Colombia. También agradecemos a Jussara de Loiola Araújo (UFMG) por los comentarios a una versión previa de este documento.

Recebido em: 27/11/2017

Aprovado em: 11/04/2018