NÚMEROS RACIONALES NEGATIVOS. INTERPRETACIONES FORMULADAS POR DOCENTES EN FORMACIÓN

Gil Arturo Saavedra Mercado, Aurora Gallardo Cabello, Esmeralda Ivonne Espinoza Martínez.
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (México)
gsaavedra@cinvestav.mx, agallardo@cinvestav.mx, iv2nne@yahoo.com.mx

Palabras clave: fracción, decimal, negativo, significado

Key words: fraction, decimal, negative, meaning

RESUMEN: En el presente artículo se aborda una temática poco estudiada dentro de la matemática educativa: los conceptos de números racionales en su representación tanto fraccionaria como decimal y su conjugación con la negatividad. Nuestro marco teórico contempla los estudios sobre fracciones realizados por Kieren, fracciones y razones abordados por Freudenthal, decimales desarrollados por Ávila y fracciones negativas analizados por Saavedra y Gallardo. El objetivo principal es conocer los significados que los docentes en formación poseen para cada uno de los conceptos mencionados, reconociendo que cada uno de ellos representa de manera aislada, una tarea compleja dentro del aula. No debe ignorarse el entramado trayecto que la negatividad ha tenido dentro de las matemáticas.

ABSTRACT: This article deals with a subject little studied within educational mathematics: concepts of rational numbers, fractional representation both decimal and conjugation with negativity. Our theoretical framework includes studies on fractions by Kieren, fractions and ratios addressed by Freudenthal, decimals developed by Avila and negative fractions by Saavedra and Gallardo. Our main objective is to know the meanings held by teachers in training for each of the above concepts, recognizing that each of them represents in an isolated manner, a complex task in the classroom. The network path that negativity has had within mathematics should not ignore.

INTRODUCCIÓN

El trabajo se centra en la interpretación que los docentes en formación manifiestan al desarrollar actividades sobre números racionales en sus representaciones fraccionarias y decimales, y a su vez, asociados a la negatividad. Estos conceptos matemáticos representan por sí mismos, una parte compleja en el estudio de las matemáticas escolares, por ello resulta muy interesante estudiar sus vínculos durante el trabajo en el aula y la movilización de estos conocimientos al poner en marcha la enseñanza de los mismos.

La conveniencia de realizar el presente estudio se manifiesta también, por la proximidad temporal en que los estudiantes normalistas se enfrentarán a situaciones de enseñanza ante grupos de secundaria, a manera de prácticas profesionales e incluso como docentes encargados de grupo. Resulta entonces importante reflexionar sobre el conocimiento que los docentes en formación poseen sobre estos conceptos.

Para quienes se dedican a la labor educativa, no es desconocida la complejidad para el tratamiento de las fracciones y los decimales. La cuestión de la negatividad no es diferente, la historia advierte la clandestinidad de los números negativos y las vicisitudes que hubieron de pasar para formar parte de nuestros conceptos matemáticos actuales (Gallardo, 1994, 2002). Recordemos la categoría de la negatividad acuñada por Lizcano (1993), quien hace referencia a los antecedentes históricos de los números negativos y aclara que éstos no podrían considerarse aún como los enteros de hoy, y es necesario mantener voluntariamente impreciso el término de negatividad para poder ampliar paulatinamente su campo de referencia y ser así aceptadas sus diversas construcciones en las distintas culturas.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Estudios recientes han puesto de manifiesto un escaso tratamiento de los números racionales en la forma de expresión fraccionaria (Saavedra, 2011), como decimal (Ávila, 2008). Se ha encontrado evidencia sobre la nimia comprensión que de estos números tienen docentes y alumnos (Fazio y Siegler, 2010). Vamvakoussi y Vosniadou (2010) afirman que comprender fracciones es esencial para el aprendizaje de álgebra, geometría y otros ámbitos de la matemática escolar.

Brousseau (1980), menciona que existen razonamientos intuitivos guiados por modelos erróneos prevalecientes desde la educación primaria hasta la universidad al trabajar con números decimales. Dicha aseveración también puede ser extendida a las fracciones debido a su equivocada asociación a las reglas de los números naturales.

Ávila (2008) realizó un estudio con docentes de educación primaria, para determinar el grado de conocimiento que poseen sobre los decimales y la vinculación con su manera de enseñar las matemáticas en el aula. En su estudio, se advierte que los docentes no comprenden el concepto de número decimal, asociándole propiedades de los naturales, argumentando que son números “naturales con punto”. Una situación similar prevalece para las fracciones.

Nos hemos planteado entonces, las siguientes preguntas de investigación:

¿Qué sentidos de negatividad en las fracciones y los decimales reconocen los docentes en formación de telesecundaria?

¿Cómo influyen los conceptos de fracciones y decimales negativos en el trabajo escolar desarrollado por los docentes en formación, al impartir clases sobre dichos tópicos?

MARCO TEÓRICO

Para Kieren (1983, 1988) los números racionales representan un sistema sofisticado de conocimiento para modelar situaciones reales, y son uno de los ejemplos más importantes del concepto matemático de campo. Para él, la construcción de la fracción comprende el control de operadores aditivos y multiplicativos; es un proceso que incluye experiencias matemáticas y contenidos del pensamiento tales como la identificación de partes y formación de equivalencias usando una variedad de imágenes y madurando desde lo metafórico hasta el uso del lenguaje formal. El tema de Fracciones está dotado de múltiples constructos, a saber: cociente, medida, operador, razón y la relación parte-todo (Kieren, 1983, 1984, 1988).

Así mismo, Freudenthal (1983) identifica didácticamente a las fracciones como números racionales, cuando éstas surgen de un modo muy concreto, adoptando el sentido de "fracturadores", "comparadores" y "operadores multiplicativos". Denomina fracción a las distintas expresiones del mismo número racional (por ejemplo, el número racional $\frac{1}{2}$ puede estar representado por las fracciones $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8},$ etc.). Este autor hace hincapié en la polifacética sobrevivencia de las fracciones a nivel del lenguaje cotidiano. Aclara también la conveniencia al denominar Razón a un par ordenado de números de la forma $\frac{p}{q}$ (igual que las fracciones), vinculados a la proporcionalidad, con la anotación de que si se le interpretara como un cociente, es decir, p dividido por q, se pierde el sentido ligado a la función que la ha originado, a pesar de conservar el mismo valor numérico, pues el significado de razón es hablar sobre la relación entre magnitudes, independientemente del tamaño de las mismas.

Por otra parte, el número decimal tiene aplicación en la vida cotidiana y son útiles en otros contextos de proporcionalidad, por ejemplo en los porcentajes (Block y Mendoza, 2010): conversiones de moneda, cálculo de costos, etc. Al referirse a los decimales, Brousseau (1980) menciona que en las matemáticas escolares, se encuentran obstáculos del tipo didáctico, epistemológico e histórico.

Con respecto a la negatividad, Gallardo (1994, 2002) realizó un estudio mostrando evidencias de que los negativos constituyen un obstáculo para la enseñanza del álgebra escolar. Una de sus conclusiones exhibe que la extensión del dominio numérico de los números naturales a los enteros se convierte en un elemento crucial para lograr la competencia algebraica en la resolución de problemas y ecuaciones.

Además, esta autora advirtió que los estudiantes dotaban de sentidos intermedios al entero, a saber: número sustractivo, número signado, número relativo y número aislado en la resolución de tareas aritmético – algebraicas antes de lograr la extensión del dominio de los números naturales a los enteros. Así mismo, el trabajo realizado por Saavedra (2011), muestra que es posible ampliar el dominio a los números fraccionarios y es concebible realizar la extensión hacia los números decimales.

Lo anterior pone de manifiesto la relevancia del estudio de las fracciones y los decimales, y más aún su asociación a la negatividad, pues nos enfrentamos a obstáculos o momentos de ruptura, y es precisamente hacia estos puntos coyunturales donde pretendemos que los profesores en formación (normalistas) se enfrenten.

MÉTODO

Para responder a las interrogantes, es necesario recurrir a una investigación de corte cualitativo sobre los procesos cognitivos de los sujetos durante la adquisición de conceptos matemáticos y su puesta en práctica al momento de transmitirlos.

Dado que se plantea el estudio de fenómenos específicos bajo una perspectiva local, es necesario recurrir a un constructo teórico que explique los hallazgos empíricos del tema abordado. Nos apoyamos en los Modelos Teóricos Locales (MTL) de Filloy (1999), para comprender los procesos de significado y sentido en la actividad matemática escolar. Este autor acuña el término “Sistema Matemático de Signos” (SMS) que describe las producciones de los estudiantes en entrevista clínica o en situación de aula. El carácter Local del MTL, se debe al hecho de que explica el proceso de enseñanza aprendizaje de un contenido matemático concreto en un momento histórico determinado y con un grupo de personas específico, como es el caso de nuestro estudio.

Nuestra población corresponde a un grupo de 8 docentes en formación que se encuentran en el séptimo semestre de la Normal Superior y al mismo tiempo realizan prácticas en las escuelas secundarias.

Se utilizan los siguientes instrumentos metodológicos:

• Cuestionario Exploratorio: Se consideran 15 ítems cuyo contenido favorece el trabajo con números decimales y fracciones, a la vez que en algunos de ellos se vinculan estos conceptos al trabajo con la negatividad. Nos apoyamos en la resolución de ecuaciones simultáneas, desarrollo de porcentajes, comparación de cantidades numéricas expresadas como fracciones y decimales positivos y negativos, problemas de enunciado verbal históricos y del presente, ejercicios referidos a contextos escolares distintos a las matemáticas tales como cinemática y de la vida cotidiana.

• Entrevista Individual Videograbada: Realizada a 2 normalistas seleccionados según sus respuestas en el cuestionario exploratorio y las actividades desarrolladas durante las prácticas en un grupo de secundaria, con el fin de realizar un estudio en profundidad.

La validación de los resultados recabados se analiza mediante el método de Triangulación. Se llevará a cabo considerando la toma de datos del cuestionario inicial, la información recabada durante la entrevista videograbada y mediante un cuestionario final a los docentes entrevistados (Cohen y Manion, 1990).

Ejemplos de los ejercicios planteados en el estudio

Resuelve la siguiente ecuación.

$$6x^2 + x - 1 = 0$$

En este ejercicio se presenta una solución positiva y una negativa, ambas dentro del conjunto de los números racionales. Se visualiza el significado asignado a la fracción al resolver la ecuación, en este caso cociente. Se observa también el nivel de aceptación de los números negativos que los docentes en formación poseen: el de número aislado. Llama la atención el hecho de que cuando encuentran como solución un número fraccionario, tienden a “convertirlo” a su expresión decimal para realizar la comprobación de la misma.

Un ejercicio muy peculiar por su contenido y desarrollo, es uno tomado de los textos de Chuquet (1484), adaptado en las cuestiones monetarias al contexto actual:

“Un comerciante ha comprado cierto número de manzanas a un precio tal que, si vende 3 por un peso, gana 15 pesos; y si vende 4 por un peso, gana 14 pesos. ¿Cuántas manzanas compró y cuánto pagó por ellas?”

Resulta interesante la solución presentada por “Alma”, una de las entrevistadas. Para resolverlo, ella plantea un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, de la siguiente manera:

$$\frac{x}{3} - y = 15$$

$$\frac{x}{4} - y = 14$$

Donde la *x* representa el número de manzanas, la *y* representa el pago por las manzanas.

Al resolver el sistema, encuentra las siguientes soluciones:

$x=12$ y, $y=-11$

Lo interesante, es que “Alma” al encontrar estas soluciones, realiza casi de manera automática la comprobación de resultados y parece totalmente sorprendida por el hecho de que su resultado $y=-11$ sea correcto. Permanece un tanto incrédula hasta que realiza un interpretación adicional

> *“lo que pasa es que, al que se llevó las manzanas a vender le debían dinero y se lo pagaron además de darle las manzanas. O sea que, no pago nada por llevarse las manzanas, sino que le dieron las manzanas y también 11 pesos”*.

Esto nos lleva a considerar una situación similar a la planteada por Chuquet en el Siglo XV, quien consideró necesaria una interpretación adicional de los valores encontrados, porque en su época no se aceptaban las soluciones negativas en problemas de enunciado verbal.

CONCLUSIONES

Para la interpretación de la negatividad, tanto en fracciones como en decimales, los niveles de aceptación hallados son el de número sustractivo y el de número aislado predominantemente, aunque también aparece en menor medida el nivel de aceptación como número relativo cuando realizan comparaciones para determinar valores mayores o menores. Se observa en el estudio que pueden prescindir de la conversión para comparar cantidades, cuando se les presentan números expresados como fracción o decimal, ya que las asocian al mismo número racional. Esto último representa una concepción más formal del número racional, pues logran vincular un número a sus representaciones fraccionaria o decimal.

El significado más frecuente que asignan a la fracción es el de cociente, dado que precisan realizar la conversión para validar la cantidad numérica y asignarle algún sentido. También se observa el uso de la fracción como operador, lo cual les posibilita el poder manejar la cantidad en forma de fracción común y realizar operaciones que se extienden del dominio aditivo al multiplicativo, por ejemplo al resolver la ecuación cuadrática.

Además los decimales son utilizados como una escritura complementaria a los naturales "agregándoles un punto y la parte decimal" tal como lo describen Ávila y García (2008).

La movilización de los racionales negativos se percibe fuera de los ámbitos escolares cuando resuelven situaciones en las cuales se involucra el concepto de porcentaje, al cual interpretan unas veces como fracción y otras como decimal. En estos casos prescinden del algoritmo tradicional de porcentaje y utilizan el número racional que representa la cantidad solicitada, sea que incluya un incremento o un descuento hecho en el que además se presenta el nivel de número sustractivo de los negativos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ávila, A. (2008). Los profesores y los decimales. Conocimientos y creencias de un contenido de saber cuasi invisible. *Educación Matemática 20 (2)*, 5-33.

Ávila, A. y García S. (2008). *Los números decimales: más que una escritura*. México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Block, D. y Mendoza, T. (2010). El porcentaje: lugar de encuentro de las razones, fracciones y decimales en las matemáticas escolares. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13 (1)*, 177-190.

Brousseau, G. (1980). Problèmes de l'enseignement des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques 1 (1)*, 11-59.

Chuquet, N. (1484). *Triparty en la science des nombres*. Ms. Bibl. Nationale, Fonds Française. Appendice, núm. XLIII, pp. 427/fol. 159r-v

Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de Investigación Educativa*. Madrid: La Muralla.

Fazio, L. y Siegler, R. (2010). *Enseñanza de las fracciones*. Suiza: Academia Internacional de la Educación y la Oficina Internacional de Educación (UNESCO).

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Holland: Reidel Publishing Company.

Gallardo, A. (1994). *El estatus de los números negativos en la resolución de ecuaciones algebraicas*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Gallardo, A. (2002). The extension of the natural – number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics 49*, 171-192.

Kieren, T. (1983). Partitioning, equivalence and the construction of Rational Number Ideas. *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education*, 506-508.

Kieren, T. (1984). Mathematical Knowledge Building: The Mathematics Teacher as Consulting Architect. *35th International Congress on Mathematical Education*, 187-194

Kieren, T. (1988). Personal knowledge- of rational numbers: Its intuitive and formal development. *Number Concepts and Operations in the Middle Grades, Reston, National Council of Teachers of Mathematics 2*, 162-181.

Lizcano, E. (1993). Imaginario colectivo y creación matemática. Barcelona: Gedisa.

Saavedra, G. (2011). *Estudio de las fracciones negativas en educación básica*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Vamvakoussi, X.; Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and instruction, 28(2)*, 181-209.