ERRORES QUE PRESENTAN ESTUDIANTES DE UNDÉCIMO, EN EL USO DEL LENGUAJE ALGEBRAICO

SANDRA PATRICIA MORALES NIÑO

Cód. 1993240020

C.C. 52'343.872 de Bogotá

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D.C.

2017

ERRORES QUE PRESENTAN ESTUDIANTES DE UNDÉCIMO, EN EL USO DEL LENGUAJE ALGEBRAICO

Trabajo de grado asociado al interés profesional del estudiante

Para optar por el título de
Licenciado en Matemáticas

Sandra Patricia Morales Niño
Cód. 1993240020

Asesor de Tesis
Lyda Constanza Mora Mendieta
Profesora Departamento de Matemáticas

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
2017

Nota de Aceptación

____

____

____

____

Presidente del Jurado

____

Jurado

____

Jurado

Bogotá, D. C., 23 de enero de 2017

AGRADECIMIENTOS

Expreso mi agradecimiento…

En primer lugar a Dios… cada día de mi vida ha sido y será una bendición, motivo suficiente para agradecerle.

A mi padre (Q.P.D.) quien me alentó en la elección de esta profesión, me formó y fue mi gran ejemplo de compromiso y disciplina.

A mis hijos por su comprensión, a mi madre y a mi hermana Carolina por su apoyo incondicional.

Al docente y amigo Orlando Heredia por su amistad, por su interés, por su acompañamiento en este proceso, por informarme sobre esta oportunidad de grado y por estar tan pendiente de mí.

A la profesora Lyda Constanza Mora Mendieta, quien como asesora del presente trabajo de grado, me apoyó a culminar y hacer el cierre de esta etapa de mi vida con su buena disposición, compromiso y sus pertinentes sugerencias y observaciones.

A la docente y amiga Sandra Milena Barbosa por su amistad, por brindarme la oportunidad de aplicar la prueba en la institución donde labora; así como, de apoyar para que la institución aprobará la aplicación de la misma y por disponer siempre de su tiempo para alentarme y apoyarme en la culminación de este proyecto.

Al profesor y amigo Oscar Charry por su amistad, por apoyarme y guiarme en el planteamiento, organización y consecución del anteproyecto; sin él no habría podido dar inicio al cumplimiento de este sueño.

Al colegio INEM Francisco de Paula Santander de Bogotá por abrirme sus puertas y permitir aplicar la prueba que dio la base para identificar y clasificar los errores que se describen en este estudio.

A la docente Johana Torres, docente de la Universidad Pedagógica Nacional, quien me apoyo en el planteamiento y delimitación del problema de investigación.

A mis profesores a quienes recuerdo con cariño, fueron los que me formaron y guiaron en esta hermosa profesión.

A todas las personas que participaron en la propuesta, elaboración, reglamentación y puesta en marcha del proyecto de amnistía académica por motivo de los sesenta años de la Universidad Pedagógica Nacional. Fue una gran oportunidad. ¡¡¡Muchas gracias!!!

A quienes iluminan mi rostro,

cuando logran ver su grandeza,

reconociendo su humanidad

y su infinidad de posibilidades.

A aquellos que me han permitido

ver en su rostro,

el esplendor de un

"EUREKA"

Mis estudiantes…

	FORMATO
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN – RAE

Código: FOR020GIB	**Versión: 01**
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	**Páginas**

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Errores que presentan estudiantes de undécimo, en el uso del lenguaje algebraico.
Autor(es)	Morales Niño, Sandra Patricia.
Director	Profesora Lyda Constanza Mora Mendieta
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2016. 101 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional.
Palabras Claves	ERRORES, TIPOLOGÍA, MATEMÁTICAS, PROCESOS ALGEBRAICOS, ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA.

2. Descripción
En este trabajo de grado se describen y se cuantifican los errores que presentan un grupo de estudiantes, en el uso del lenguaje algebraico al dar solución a algunos problemas de aplicación planteados en una prueba escrita. Los estudiantes se encontraban cursando grado 11° en el colegio INEM Francisco de Paula Santander de Bogotá. En el trabajo se describen algunas tipologías de los errores que surgen al estudiar el álgebra escolar y especialmente en el uso del lenguaje algebraico, dadas por algunos expertos en el tema; a partir de ellas se plantean siete (7) posibilidades de error, llamadas unidades de análisis, con las que se identifican, clasifican y se describen los

errores encontrados en las pruebas resueltas por los estudiantes. Finalmente, se dan las conclusiones a partir del trabajo desarrollado.

3. Fuentes

Alcalá, M. (2002). *La construcción del lenguaje matemático*. España: Editorial Graó Colección Biblioteca de Uno.

Astolfi, J. P. (1999). *El "error", un medio para enseñar*. Serie Práctica (Lectura 18, Unidad 9). Sevilla, España.

Cerdán, F. (2010). Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraico: un catálogo de errores. PNA, 4(3), p. 99-110.

Esquinas, A. (2009). Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico: Del símbolo a la formalización algebraica: Aplicación a la práctica docente (Tesis Doctoral). Universidad Complutense de Madrid, España.

Franchi, L.; Rincon, A. H. (2004). *Tipología de errores en área de la geometría plana.* Revista Educere Investigación Arbitrada. ISSN: 1316-4910. (Año 8, No. 24), p. 63 – 71.

González, A., González, F. (2014). Historia social de la educación matemática en Iberoamérica: Consideraciones históricas y didácticas relacionadas con el símbolo algebraico de igualdad. Revista Iberoamericana de educación Matemática. (13), p. 181 – 198.

Palarea, M. M. (1998). La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años (Tesis Doctoral). Universidad de la laguna, España.

Ponte, J. P. (2004). *Problemas e investigaciones en la actividad matemática d los alumnos.* La actividad matemática en el aula. Grupo de investigación DIF. Departamento de educación y Centro de investigación en Educación. Universidad de Lisboa, Barcelona: Graó, p. 25-34.

Rodríguez, S. (2015). Traducción entre los sistemas de representación simbólico y verbal: Un estudio con alumnado que inicia su formación algebraica en secundaria (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, España.

Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores

cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. PNA 2(2), 61-74.

4. Contenidos
El trabajo de grado inicia con la presentación donde se da una visión general de lo que incluye el documento; luego el planteamiento del problema, donde se encuentra la justificación y los objetivos. Seguidamente se presenta el marco de referencia en el que se define lenguaje algebraico, se muestra el error desde los modelos educativos para hacer una revisión de cómo se ha percibido este tema, luego se hace una descripción de los trabajos en categorización y tipificación de errores específicamente en el lenguaje algebraico. Posteriormente, se puntualiza en lo que se entiende por problema. Luego se encuentra la metodología organizada en tres etapas; además, se presenta la tipificación de errores escogida para el trabajo, la identificación y descripción de los variados errores encontrados junto a su respectiva ejemplificación y finalmente las conclusiones y a los aprendizajes alcanzados.
5. Metodología
El presente estudio es de naturaleza exploratoria de tipo descriptivo (Hernández, Fernández y Baptista, 2006). Es de naturaleza exploratoria debido a que busca facilitar la comprensión del tema que se plantea y de tipo descriptivo debido a que busca especificar las propiedades, características, y los perfiles importantes de un grupo de personas frente al tema que se plantea en el objetivo del estudio. La muestra no es probabilística, la elección es de tipo incidental, por lo tanto, no aleatoria, la realizaron los docentes de la institución buscando facilidad en la aplicación de la prueba y los horarios de los grupos, así como la inclusión, en la muestra, de estudiantes de los niveles avanzado (Ingeniería), medio (Robótica) y básico (Ciencias de la salud), contemplados en la institución. La metodología se organiza en tres etapas distintas, así: 1. Caracterización de la población. 2. Etapas o fases del trabajo, que comprende diseño y aplicación del instrumento y la selección de datos. Y por último 3. Análisis de las respuestas donde se establecen las unidades de análisis correspondientes a los tipos de errores que se revisaron en las pruebas aplicadas a los estudiantes.

6. Conclusiones

- Con respecto a los objetivos, planteados al inicio del desarrollo del presente estudio, se logra consolidar la prueba con la que posteriormente se desarrolla la identificación y descripción de los errores que presentaron los estudiantes de grado 11 – 2016 del colegio INEM Francisco de Paula Santander de Bogotá, en el uso del lenguaje algebraico al dar solución a algunos problemas. Además, gracias a la revisión bibliográfica, a la organización del material consultado y al análisis de la información que se indagó, junto con la identificación y descripción de los errores que se encontraron, la docente "investigadora" amplió y organizó su conocimiento frente al tema de investigación, debido a que identificó diferentes formas en que puede aparecer un tipo de error; así como, la identificación de nuevos errores en el uso del lenguaje algebraico; un tema que con frecuencia se encuentra en su rol como docente.
- Frente a la información recolectada, clasificada y descrita podemos concluir que se presentan diversas variaciones de las unidades de análisis planteadas en este estudio, generando subcategorías, que se dan según como el estudiante aborde el conocimiento o los procesos; por tal motivo, es indispensable que el docente reconozca a cada uno de sus estudiantes tanto desde sus habilidades como desde sus dificultades para que así mismo los pueda apoyar. Además, se considera importante que el estudio de los errores haga parte del conocimiento del docente en su rol como educador debido a que con ello puede apoyar a sus estudiantes en la aprehensión del conocimiento.
- La docente en su rol de "investigadora" amplió sus conocimientos en el planteo y delimitación del campo de investigación de una idea de estudio, en la organización y análisis del material bibliográfico como herramienta para centrar y darle forma al desarrollo del trabajo.
- En relación a la prueba, planteada y desarrollada por los estudiantes, se evidenció, posterior a su aplicación, que se encontraban problemas con un mayor nivel de complejidad en su solución lo que conllevó a la no realización de algunos y posiblemente a un bloqueo para los estudiantes; además, se evidenció la importancia de diseñar primero las unidades de análisis, antes de consolidar la prueba para que se planteen problemas que permitan evidenciar los errores o aciertos en los procesos que se desean estudiar.

- Dentro del ejercicio docente es necesario estar planteando pruebas o evaluaciones para evidenciar la apropiación, o no, de procesos, conocimientos y la aplicación, o no, de los mismos en la solución de problemas que se les presente a los estudiantes, para replantear la dinámica general de la clase.
- En el desarrollo del presente trabajo se rescató la importancia de pensar, organizar y decidir muy bien los ejercicios que se seleccionan para un instrumento de evaluación; teniendo en cuenta nivel de complejidad y de exigencia, para que el estudiante mantenga su motivación y se sienta retado, sin perder el interés y para que logre la solución de los ejercicios o problemas planteados.
- La solución al instrumento no evidencia, en algunos casos el procedimiento seguido por un estudiante; en este sentido es muy importante que el profesor: 1) no se quede con solo estas evidencias al momento de evaluar, 2) genere estrategias para que los procedimientos que no resultan exitosos puedan también ser expuestos, debido a que a partir de ellos se pueden evidenciar dificultades que se pueden corregir a tiempo.
- Al realizar este trabajo la autora hizo conciencia sobre el uso del igual en el álgebra, tanto en el sentido unidireccional procedente de la aritmética como de su sentido bidireccional. Además; la cantidad de conexiones de información, mínimas, que debe hacer un estudiante para realizar el proceso de sustitución numérica y de sustitución formal.
- Se evidencia la importancia de la precisión en la escritura de las expresiones; por ejemplo, en el uso de paréntesis, debido a que si no se atiende en casos sencillos puede llevar a errores en expresiones complejas.
- Los tipos de errores más comunes encontrados en el presente estudio son:
    1. Letra Ignorada donde el estudiante opera los valores numéricos de cada término sin tener en cuenta si son o no términos semejantes.
    2. Letra Ignorada donde el estudiante no le da sentido a la letra y la escribe en algunos términos para poder operar.
    3. En sustitución numérica donde el estudiante no sustituye correctamente un valor negativo dado en una expresión que contiene términos negativos.
    4. En sustitución numérica donde el estudiante no sustituye en la variable correcta.

5. En sustitución numérica donde el estudiante sustituye el mismo valor numérico en letras distintas.
6. En sustitución numérica donde el estudiante sustituye la letra por valores de dos cifras cuando las condiciones del ejercicio admiten solo dígitos.
7. En sustitución formal cuando el estudiante no escribe el paréntesis cuando un signo precede al polinomio o cuando el polinomio se sustituye en un producto.
8. En el desarrollo de procedimientos al solucionar un producto notable suma o diferencia al cuadrado donde el estudiante distribuye el exponente en cada término del binomio.
9. En el desarrollo de procedimientos al plantear un producto entre expresiones algebraicas ya que no utiliza la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición, que permite simplificar expresiones.
10. En el desarrollo de procedimientos al plantear una diferencia entre polinomios y solo aplicar el opuesto al primer término del polinomio precedido del signo negativo.
11. En el desarrollo de procedimientos al plantear un producto entre un monomio y un polinomio y solo multiplicar el monomio por el primer término del polinomio.
12. Al desarrollar cálculos numéricos el estudiante deja indicadas, en las expresiones algebraicas, operaciones entre valores numéricos no permitiendo la simplificación de la expresión algebraica.

- Algunos de los errores encontrados, en el presente estudio, son nombrados en los estudios consultados en el marco referencial. Ellos son:

1. Letra Ignorada donde el estudiante opera los valores numéricos de cada término sin tener en cuenta si son o no términos semejantes.
2. En sustitución numérica donde el estudiante no sustituye correctamente un valor negativo dado en una expresión que contiene términos negativos.
3. En sustitución formal cuando el estudiante no escribe el paréntesis cuando un signo precede al polinomio o cuando el polinomio se sustituye en un producto.
4. En el desarrollo de procedimientos al solucionar un producto notable suma o

diferencia al cuadrado donde el estudiante distribuye el exponente en cada término del binomio.

Esto nos lleva a estar más atentos en el momento de enseñar estos procedimientos o conceptos, variando la metodología y verificando la apropiación.

- Es indispensable que el docente esté atento al desarrollo del proceso de aprehensión del conocimiento para lograr identificar los errores que pueden llegar a cometer sus estudiantes y así poderlos apoyar en la superación de las dificultades encontradas.
- Considero pertinente que los docentes conozcan sobre el estudio de errores, no solo en el uso del lenguaje algebraico, sino en general; ya que les permite tener herramientas adicionales para abordar los temas y poder corregir los errores que sus estudiantes puedan cometer.

Elaborado por:	Sandra Patricia Morales Niño
Revisado por:	Profesora Lyda Constanza Mora Mendieta

Fecha de elaboración del Resumen:	23	01	2017

CONTENIDO

Pág.

LISTA DE ILUSTRACIONES

Pág.

LISTA DE TABLAS

Pág.

LISTA DE ANEXOS

Pág.

PRESENTACIÓN

Se plantea el problema de identificar y describir los errores que presentan un grupo de estudiantes en el uso del lenguaje por interés profesional de la docente autora del trabajo; estos aparecen en las respuestas de una prueba planteada en los objetivos del trabajo y realizada por estudiantes de grado 11 – 2016, del colegio INEM Francisco de Paula Santander de Bogotá. En el estudio participaron ochenta y siete (87) estudiantes distribuidos en tres (3) cursos. A este grupo de estudiantes se les administró un instrumento con seis (6) problemas en los cuales se requiere el uso del lenguaje algebraico.

El contenido de este trabajo está organizado en los siguientes capítulos: En el capítulo 1 se plantea y justifica el problema de investigación, en el capítulo 2 se presenta el marco referencial que incluye la información revisada relacionada con el tema de interés del presente trabajo; tales como, descripción del lenguaje algebraico, cómo se ha percibido el error a través de los modelos educativos, una descripción de algunos de los trabajos en categorización y tipificación de errores en el uso del lenguaje algebraico y finalmente, qué se entiende por problema. En el capítulo 3 se describe el tipo de investigación y la metodología, el capítulo 4 incluye los resultados observados tras la descripción y ejemplificación de los errores encontrados y para finalizar, en el capítulo 5 se presentan las conclusiones del presente estudio.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Justificación

Gracias a la experiencia profesional, de la autora de este trabajo, de más de quince (15) años de labor docente, se ha podido observar y vivenciar que para muchos de los docentes de álgebra en la secundaria, el estudio de su asignatura por parte de los estudiantes, ha sido uno de los mayores problemas; aspecto que comparten algunos autores nombrados en el presente documento. Esta problemática en algunos casos se debe a la dificultad que se presenta en el aprendizaje del lenguaje algebraico, su estructura, su simbología, sus relaciones y propiedades y su aplicación en la solución de diversas situaciones matemáticas y no matemáticas; además, el cómo se percibe el error, tanto por parte de los docentes como de los estudiantes.

El lenguaje algebraico comprende una serie de símbolos y estructuras de presentación que contribuyen de forma determinante a la perfecta comprensión de las matemáticas y que el conocimiento, interpretación y uso de este lenguaje es totalmente necesario para poder adquirir los conceptos propios del álgebra (Alcalá, 2002).

Debido a la importancia del uso del lenguaje algebraico en sí mismo, y para la comprensión de los conceptos que subyacen en la matemática y en otras ciencias, es necesario trabajar en el aula por la correcta apropiación del mismo. Además, entender, manejar y aplicar el lenguaje algebraico le da al estudiante la posibilidad de aprender, de manera consciente, a establecer relaciones lógicas y causales, en las cuales extrae información y deduce conclusiones a partir de los hechos de una situación determinada, potencializando así su pensamiento deductivo.

Dada esta importancia, su desconocimiento genera una serie de dificultades para el estudiante que se traducen en problemas en el momento de la comprensión de los nuevos conceptos que se introducen y desaciertos en las respuestas en los exámenes que conllevan al fracaso, por otro lado genera deficiencias en la comunicación entre profesor y alumno.

Estos problemas de comunicación generan en el alumno una reacción de rechazo y apatía hacia las matemáticas, que en la mayoría de los casos es difícil superar. Cuando el maestro se ocupa de identificar las dificultades y los errores que presentan sus estudiantes, de buscarles sentido, de encontrar las operaciones mentales que los estudiantes han generado, el maestro encuentra información que le permite plantear nuevas formas de acceder al conocimiento y si evidencia estos hallazgos con los estudiantes, puede lograr canales de comunicación que fortalezcan la relación profesor – alumno – conocimiento; además, conlleva a que el estudiante profundice en su conocimiento, que establezca relaciones entre conocimientos antiguos y el nuevo conocimiento, provocando una reestructuración del conocimiento en general y posteriormente se genera la corrección de dichos errores.

En general, podemos identificar que el desconocimiento del lenguaje algebraico complica la transmisión y apropiación de conceptos en las matemáticas ya que es el sistema que posibilita trabajar en matemáticas, es la herramienta que permite comunicar procesos previos y generalizar sucesos con características similares y permite modelar situaciones para poder ser tratadas. El uso de las variables proporciona la identificación y diferenciación de las características que afectan una situación particular y la posibilidad de evaluar estas características de manera individual y simultánea para analizar posibles resultados o acontecimientos en una situación planteada (MEN, 1998). Por lo anterior, el estudio del lenguaje algebraico debe constituir una tarea primordial del maestro; así como, la identificación de dificultades y errores que puedan cometer los estudiantes. Como lo afirma Alcalá (2002):

> […] *considerar la matemática como un lenguaje es útil,* […] *Ayuda a interpretar la mayoría de las dificultades que tienen los niños en su aprendizaje* […] *Dificultades semánticas* […] *Dificultades inherentes a la estructura que adopta el código notacional* […] *Dificultades relativas al cuándo y/o al cómo utilizar el código.* (p. 30)

Como ya se hizo notar, el estudio del lenguaje algebraico permite comprender la estructura de las matemáticas, conocer las propiedades necesarias para transformar expresiones complejas en expresiones sencillas y así avanzar en el conocimiento y tratamiento de las matemáticas en sí mismas, permite escribir con poca simbología las ideas básicas y generales de una situación determinada y plasmar el pensamiento generalizado ya que un término no solo puede contemplar una definición sino también una relación o varias según el contexto en el que se encuentre; asimismo, la persona que lo maneja genera una estructura de pensamiento que le permite analizar el contexto que lo rodea, entenderlo y transformarlo, en general, pone las matemáticas al servicio del hombre para dar solución a diferentes situaciones de índole social, económicas y tecnológicas entre otras.

Además, los estudiantes presentando tantas dificultades en su aprendizaje, es importante que el maestro conozca los errores que están y pueden llegar a cometer sus estudiantes porque le proporciona información sobre como ellos están aprendiendo los procedimientos, conceptos y cómo los utilizan en la interpretación de los problemas. Los estudios acerca de errores, una cuestión de interés en el campo de la educación matemática, han dado algunas pistas frente a esta problemática. El análisis de errores es una herramienta que le permite al maestro mejorar su desempeño incluyendo en sus prácticas educativas, actividades y metodologías para continuar apoyando a los estudiantes en la adquisición y afianzamiento de estos y futuros procesos; así como, en la superación de las dificultades de aprendizaje que presenten (Socas, 2008).

Así, el presente estudio tiene como propósito fundamental reconocer y describir los errores que presenta un grupo de estudiantes en el uso del lenguaje algebraico al dar solución a algunos problemas que se plantean.

1.2. Objetivo General

Identificar, describir y ejemplificar tipos de errores que presentan los estudiantes de grado 11 – 2016, del colegio INEM Francisco de Paula Santander de Bogotá, en el uso del lenguaje algebraico al dar solución a algunos problemas con el fin de enriquecer el conocimiento del docente de matemáticas autor del presente trabajo.

1.3. Objetivos Específicos

1. Consolidar un conjunto de problemas cuya solución implique el uso del lenguaje algebraico.
2. Tipificar errores relacionados con el uso del lenguaje algebraico atendiendo a bibliografía del campo de la Educación Matemática, la experiencia docente de la autora del trabajo y la selección de unidades de análisis.
3. Identificar los errores en los que incurren estudiantes de grado 11°, en relación con el uso del lenguaje algebraico, al desarrollar ciertos problemas y a la luz de las unidades de análisis establecidas.
4. Ejemplificar y describir los errores identificados atendiendo a las unidades de análisis y a la interpretación de la autora del documento.
5. Enriquecer el conocimiento del profesor de matemáticas a través del desarrollo de este trabajo de grado y las conclusiones asociadas a los tipos de errores en el uso del lenguaje algebraico.

2. MARCO DE REFERENCIA

En el presente capítulo se encuentran los referentes necesarios para el estudio que se describe en el presente trabajo. En primera instancia, se establece qué es el lenguaje algebraico y una breve descripción de cómo se relaciona con el lenguaje en general. Posteriormente se muestra el error desde los modelos educativos para hacer una revisión de cómo se ha percibido este tema, luego se hace una descripción de los trabajos en categorización y tipificación de errores específicamente en el lenguaje algebraico. Finalmente, se puntualiza en lo que se entiende por problema.

2.1. LENGUAJE ALGEBRAICO

El lenguaje algebraico es el sistema de signos completamente simbólico que utiliza las matemáticas para expresar informaciones y operar sobre ellas con precisión y rigor a través de unas reglas y una lógica interna particulares, caracterizado por la generalización que le da el uso de la letra y por el significado que asume el signo "=" . Por ende, el conocimiento de este lenguaje conlleva la comprensión sintáctica y semántica de los signos, símbolos y reglas que comprende este sistema para así asegurar el uso significativo de las mismas.

Como se ha anotado, el lenguaje algebraico comprende dos aspectos la semántica, que se refiere al significado o al contenido del símbolo, es decir, cómo este es entendido por el sujeto y la sintaxis que tiene que ver con los procesos de representación y manipulación de los símbolos. Una de las dificultades que presentan los estudiantes al utilizar los símbolos es que, algunas veces, su representación corresponde a un único significado, mientras que el significado puede tener múltiples representaciones y sentidos según el contexto en el que se encuentre. Además, cuando se trata de interpretar un enunciado matemático que viene dado en lenguaje natural dicha expresión debe ser primero comprendida, es decir, encontrar su significado. Una vez deducido este significado los alumnos deben elegir entre la multitud de representaciones y sentidos posibles para este mismo. De esta forma, si el enunciado se ha interpretado correctamente, se estará en condiciones de comenzar a resolver el problema (Esquinas, 2009).

Esta destreza al manipular e interpretar expresiones simbólicas asociadas a los conceptos, tomando conciencia de los diferentes roles que los símbolos pueden tener en distintos contextos y pudiendo evaluar la adecuación de una representación para expresar una información, es el fundamento del pensamiento algebraico y la clave para la correcta formalización por parte de los estudiantes que se introducen en este lenguaje.

Kaput (citado en Esquinas, 2009, p. 120) señala dos niveles para el análisis sintáctico de las expresiones algebraicas:

- Uno asociado con la escritura y el análisis de las expresiones y
- Otro relacionado con las transformaciones y la manipulación de estas expresiones.

Nicaud (citado en Esquinas, 2009, p. 121) señala tres niveles para el análisis semántico de las expresiones algebraicas:

- Nivel 1º (Nivel de evaluación): dar sentido a una expresión algebraica mediante el reemplazo de valores en las variables y la realización del cálculo correspondiente.
- Nivel 2º (Nivel de tratamiento): transformar las expresiones en otras equivalentes. Implica conocer las transformaciones y saber justificarlas. Tal justificación reposa en el hecho de que una expresión y su transformación coinciden en toda evaluación.
- Nivel 3º (Nivel de resolución de los problemas): tener conocimiento de estrategias que permitan la elección de las transformaciones adecuadas para resolver un determinado problema, haciendo significativo el cálculo. Implica, necesariamente, saber anticipar el efecto de las transformaciones a realizar.

En general, el lenguaje algebraico está compuesto de cifras numéricas, letras que representan números particulares, otros signos específicos que representan operaciones, relaciones, letras que representan números u objetos generales, letras o símbolos que representan objetos particulares, cuantificadores y de símbolos que soportan las ideas de variabilidad y generalidad que le son propias. Estos últimos, junto a otros símbolos no formales, son los que encierran la idea general del álgebra; esto puede apreciarse en la siguiente tabla.

SIGNOS	SIGNIFICADO (SÍMBOLO)
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	Cifras numéricas
$+, -, \times, \cdot, :, /, \sqrt{\ }, \sum, \int, \cap, \cup, \circ, \ldots$	Operaciones
$=, \neq, <, > \leq, \geq, \subset, \in, \notin, \sim, \simeq, \approx, \ldots$	Relaciones
a,b,c, ...,α, β, γ,..., A, B, C, ...	Letras que representan números u objetos generales
π, e, i,...	Letras que representan números particulares
d, r, a, h, M, D, Δ, σ, μ, ∞, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$,...	Letras o símbolos que representan objetos particulares
$\forall, \exists$	Cuantificadores
$(\ ), \{\ \}, [\ ], \vert\ \vert, \Vert\ \Vert, \rightarrow, \Leftrightarrow, \%, \hat{\ }, \perp \ldots$	Otros signos

Tabla 1. Los signos matemáticos más comunes y su significado (Esquinas, 2009, p. 112).

Como se había expresado anteriormente, los símbolos en álgebra tienen un significado; sin embargo, algunas veces diferentes representaciones comparten un mismo significado y el sentido varía según el contexto en que se encuentre; por ende la letra no podría estar excluida de esta caracterización. La función de una letra depende del contexto en el que se encuentra y no es fácil para los alumnos que se inician en el álgebra diferenciar cuándo la letra representa un número y cuándo representa un conjunto de números, por ejemplo.

2.1.1. La letra

El nivel de comprensión del álgebra está muy relacionado con la progresión que se sigue en la utilización de las letras. Küchemann (citado en Esquinas, 2009, p. 124) señala que las consideraciones acerca de la compresión del álgebra implican el desarrollo de las habilidades de interpretar y manipular letras y otros símbolos, en sus test para el CSMS -

Concepts in SecondaryMathematics and Science- Project (1981), establece la siguiente tipificación del uso de las letras por parte de los alumnos:

1. **Letra evaluada**: cuando se le da a la letra un valor numérico arbitrario para superar la dificultad que suponen. Por ejemplo, en $3x + 2 + 3x = 20$, se sustituye la x por 3 de manera arbitraria buscando un significado numérico concreto.
2. **Letra no utilizada**: cuando es simplemente ignorada para superar la dificultad que su presencia plantea en la expresión. Los estudiantes en ningún caso le atribuyen un significado. Por ejemplo, en la expresión $3x + 2 + 3x$, se pide reducirla lo más posible. El estudiante puede responder $3x + 2 + 3x = 8$, sumando los números e ignorando la presencia de la letra. O podría ser: $3x + 2 + 3x = 8x$, manifestando una incomprensión de la función de la letra aunque ésta aparezca en su respuesta.
3. **Letra como objeto**: se considera que la letra es un objeto en sí misma y corresponde a la abreviatura del nombre del objeto. Por ejemplo, para los alumnos $5n$ representa cinco *enes* o cinco neveras debido a que la n es la inicial de la palabra en mención. Interpretar la letra como objeto no tendría por qué ser un obstáculo en la introducción del aprendizaje algebraico, puesto que apoya en la manipulación operativa con los símbolos; aun así, no permite el desarrollo de las ideas de variabilidad y generalidad propias del pensamiento algebraico. Por lo tanto esta concepción de letra está asociada a la memorización y mecanización de reglas algebraicas descontextualizadas y carentes de significado.
4. **Letra como incógnita:** los estudiantes interpretan la letra como una incógnita, un valor numérico desconocido que deben encontrar. Esta concepción de letra es interpretada por los estudiantes cuando se introduce a partir de la solución de las ecuaciones lineales.
5. **Letra como número generalizado**: la letra puede tomar distintos valores en vez de uno solo. Por ejemplo, todo número par se puede representar con la expresión $2n$; aquí los alumnos asocian a la n un número, pero ese número no está determinado, no es un número fijo sino que puede ser cualquier número y ese valor permite generar un número par.

6. **Letra como variable**: la letra se asocia a un conjunto de números u objetos de manera que esta letra puede representar cualquiera de los elementos de dicho conjunto y comprendiendo la idea de variabilidad que este hecho conlleva; además, se ve la relación sistemática entre dos conjuntos de números u objetos. Por ejemplo, si en $x + 5$, con $x \in R$ el estudiante comprende que la variación del valor de x supone una relación determinada con el resultado de las operaciones que se plantean, comprenderá la relación de variabilidad entre los conjuntos que intervienen.

Como afirma Palarea (1998, p. 60) las categorías 4, 5 y 6, podrían representar diferentes usos teóricos de las letras en álgebra, mientras que las categorías 1, 2 y 3, podrían estar indicando maneras que tiene los alumnos de interpretar las letras, dificultando así la comprensión teórica formal implícita en el álgebra.

2.1.2. El signo igual

Con respecto al signo igual "=", en la práctica, podemos observar que las notaciones algebraicas y aritméticas son similares en su escritura pero en su significado diferentes. Esto hace que sea difícil diferenciar unas de otras. En Aritmética el signo igual "=" se utiliza como una acción; es decir, se usa para conectar una operación con su resultado, casi siempre con carácter unidireccional donde, por lo general, a la izquierda se indica la operación y a la derecha el resultado. Así $13 - 5 = \square$, indica a la izquierda una parte conocida y a la derecha se debe completar con el resultado de la acción ordenada por la primera; con menor frecuencia, se utiliza para relacionar dos procesos que dan el mismo resultado, por ejemplo $4 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3$, y en algunos casos relaciona la secuencia de pasos intermedios de un proceso que conduce a un mismo resultado, por ejemplo $3 \times \; 7 - 2 \;\; + 6 = 3 \times 5 + 6 = 21$ donde cada parte de la cadena de igualdades expresa una simplificación o cambio en la forma de su predecesor; aun así, manteniendo siempre verdaderas cada parte de la igualdad; en este contexto se sigue manteniendo el carácter unidireccional del símbolo. Los estudiantes tienden a trasladar este significado del signo "=" al Álgebra y lo confunden con el "=" de la ecuación (Palarea, 1998).

En el álgebra escolar el signo "=" como señal de acción no desaparece ya que se usa en procesos; tales como, productos notables y factorización, por ejemplo $a + b \cdot a - b = a^2 - b^2$. En estos procesos se evidencia un término bien caracterizado y automatizado en el álgebra escolar, la simplificación. La simplificación, de acuerdo con ciertas reglas, se da en un sentido o en otro y su aplicación no se limita exclusivamente a expresiones algebraicas tautológicas, sino también a ecuaciones donde las igualdades solo son ciertas para algunos valores (Palarea, 1998).

En Álgebra, el signo igual tiene un carácter bidireccional, es decir, hay que verlo actuar tanto de izquierda a derecha como de derecha a izquierda. Este carácter bidireccional da paso a la sustitución, tanto numérica, cómo formal.

> La sustitución es un instrumento de cálculo algebraico importante a causa de su amplio campo de aplicaciones, que se manifiesta en diferentes procesos matemáticos tales como, entre otros: generalización, cuando términos numéricos son reemplazados por variables; simplificación, cuando en una expresión dada, expresiones parciales son reemplazadas por variables; eliminación, cuando variables implicadas en una sustitución son suprimidas, por ejemplo en la resolución de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas; complicación estructural, cuando en una expresión las variables son reemplazadas por expresiones dadas y particularización, cuando las variables son reemplazadas por números para verificar ciertas expresiones. (Palarea, 1998, p. 71)

Aparece así un cambio importante en el sentido del signo "=" en su paso de la Aritmética al Álgebra. Por tanto, para simbolizar en Álgebra es necesario haber realizado un verdadero cambio conceptual en el uso del signo igual, manteniendo al mismo tiempo el que tenía en Aritmética, ya que la notación utilizada en ambos casos es la misma.

Cuando se mantiene el signo “=” como señal de acción y no se logra ampliar su significado es que los estudiantes, como señala Collis (citado en Palarea, 1998)

> Ven las expresiones algebraicas como proposiciones que son, de alguna manera, incompletas. Collis atribuye esta percepción a la incapacidad que tienen los estudiantes para admitir operaciones indicadas. Ellos necesitan que dos números que están conectados mediante un signo de operación se reemplacen inmediatamente por el resultado de esa operación; es decir, incluyan el signo igual y como una acción. Los estudiantes no pueden mantener operaciones sin realizar, “no aceptan la falta de cierre”, y eso se pone de manifiesto cuando se utilizan expresiones como $6 + x$, que no se pueden reemplazar por un número. Cuando ocurre esto, los alumnos tienden a igualar a cero y hallar el valor de la x. (p. 72)

Molina y otros (citados en González y González, 2014, p. 194) han clasificado ocho (8) maneras de usar el signo igual, las cuales se muestran en la siguiente tabla.

Tipo de uso	Descripción	Ejemplo
Propuesta de actividad de cálculo	Se usa mediante expresiones incompletas que contienen una cadena de números y/o símbolos, junto con símbolos operacionales, seguida a su derecha del signo igual.	$\frac{24}{18} =$ $x(x+1) - 2x =$
Operador	Indica la respuesta a un cálculo o simplificación. Predomina una concepción procedimental de los objetos matemáticos (Andonegui, 2009)	$7x3 = 21$ $x(x+1) = x^2 + x$
Separador	Significado otorgado por los alumnos al hacer uso de este signo como separador de los pasos realizados en la resolución de una actividad	$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x} = x^2+1 = x = x^2 - x + 1$ $40+2 = 42-4 = 38x2 = 76$
Expresión de una equivalencia condicional (ecuación)	Equivalencia expresada por medio de este signo, la cual es cierta según el dominio de referencia, es decir puede ser cierta para algún (algunos) valor (valores) de la variable (variables) o ninguno.	$x^3 - 9 = 21 - 4x^2$ $e^x - 8 = 0$
Expresión de una relación funcional o de dependencia	Se refiere al uso del signo para indicar cierta relación de dependencia entre variables o parámetros	$A = \pi . r^2$ $y = -2x + 5$
Indicador de cierta conexión o correspondencia	Significado impreciso del signo, que refiere a su uso entre objetos no matemáticos o de distinta naturaleza, como, por ejemplo, entre imágenes o figuras y números, o entre expresiones matemáticas y expresiones no matemáticas	$\Delta = \textit{triángulo}$ $\propto\propto\propto\propto = 4$ $5 \text{ camisas} = \text{Bs}.650$
Aproximación	Corresponde a las situaciones en las que este símbolo relaciona una expresión aritmética y una aproximación de su valor numérico	$\pi = 3{,}14$ $\frac{2}{9} = 0{,}2$
Definición de un objeto matemático	El signo se utiliza para definir un objeto matemático o asignarle un nombre	$0! = 1$ $a^0 = 1,$ $f(x) = 6 - x$

Tabla 2. Diferentes usos dados al signo igual (González y González, 2014, p. 194).

Las categorías correspondientes al igual como operador, como expresión de una equivalencia condicional y como expresión de una relación funcional, podrían representar diferentes usos teóricos del símbolo en Álgebra, mientras que las demás categorías podrían estar indicando maneras que tiene los alumnos de interpretar el signo igual, dificultando así la comprensión teórica formal implícita en el Álgebra.

2.2. ERRORES Y DIFICULTADES

En el proceso de aprehensión del conocimiento es normal llegar a cometer errores, de hecho el error es tan antiguo como la enseñanza misma. El estudiante, a nivel consciente e inconsciente, mientras el nuevo conocimiento se acentúa, establece relaciones de semejanza y comparación, entre otras, con los conocimientos previos; generando así variaciones del nuevo conocimiento, a su vez construye precisiones, diferencias y semejanzas frente a las nuevas ideas, las cuales pueden llegar a ser verdaderas o falsas frente al nuevo conocimiento en proceso de adquisición. Mientras el estudiante está en este proceso puede generar imprecisiones de la información que son tomadas como errores o que conllevan a errores en la aplicación del nuevo conocimiento. En la cotidianidad esta aparición de errores o equivocaciones que comete quien aprehende son vistas como parte del proceso para seguir creciendo; mientras que en la escuela se buscan evadir, evitar y sobre todo, se señalan.

Por otro lado, el estudiante, en sus procesos de aprendizaje, puede presentar dificultades tales como la falta de concentración, bloqueos, olvidos, entre otros; que generan errores en el momento de verificar o de aplicar el conocimiento adquirido.

Aun así, no siempre en los proceso de enseñanza se tuvo en cuenta la aparición de errores como una herramienta pedagógica y didáctica. A lo largo de la historia se encuentran diferentes posturas frente a la aparición, reconocimiento y manejo del error que se pueden describir a través de los modelos pedagógicos. Veamos los tres modelos predominantes en la enseñanza según Astolfí (2004) y su relación con el error ya que sirven como base para las prácticas y los estilos que los maestros pueden llegar a adquirir.

En el **modelo transmisivo o tradicional el profesor** es el elemento principal ya que tiene el papel activo; es quien expone su conocimiento a la clase de manera progresiva, maneja la información y se percibe como el conocedor de una ciencia donde él nunca se equivoca. El aprendiz en este modelo simplemente es receptivo a la información que imparte el profesor sin mostrarse como sujeto activo del mismo proceso de aprendizaje. Se utiliza la memorización, la clase tipo conferencia y la abundante toma de apuntes; la enseñanza es una transmisión que al final se resume en la acumulación de conocimientos. Si se presentan errores, son atribuibles al estudiante por no adoptar la actitud esperada; lo que conlleva a ver el error como un fallo del aprendizaje, donde se ve el proceso como un sistema que no ha funcionado bien. El profesor simplemente al momento de ver el error lo subraya o tacha, percibiendo el error como una falla del sistema y como una falta que se debe castigar (Astolfi, 2004).

El **modelo comportamentalista (conductista),** donde se enfatiza en los medios necesarios para llegar a un comportamiento esperado y verificar su obtención, el profesor se muestra como un planificador meticuloso, un armador de actividades donde él espera, por parte de los estudiantes, la respuesta que él ya ha programado. En este modelo el estudiante toma un papel algo activo debido a que desarrolla paso a paso las actividades que el profesor ha programado previamente, donde el conocimiento por complejo que sea se ha dividido en etapas elementales, las cuales se refuerzan positivamente en el proceso de adquisición o superación de cada etapa y no a través de un castigo. Aunque continúa siendo una transmisión de saberes, se busca que sea de manera graduada a través de ejercicios y actividades puntuales lo cual hace que sea un método de tipo instruccional, donde se utiliza el refuerzo como herramienta en el momento de aprehender algún concepto; sin embargo, nada garantiza que el comportamiento externo corresponda con el mental. En este método escalonado se evitan los errores, debido a que el proceso es estrechamente guiado y predeterminado lo que conlleva a que el aprendiz no tenga autonomía intelectual. El error aún conserva el estatus de negativo por lo que se evita que aparezca. Por otro lado el profesor en el momento de encontrarse con los errores de los estudiantes duda de la enseñanza impartida pensando que fue ineficaz y genera miedo al pensar en ahondar en las respuestas que dan sus estudiantes ya que surgen preguntas como ¿Dónde quedaría la programación y parcelación?, entre otras (Astolfi, 2004).

Por último, en los **modelos constructivistas** existe una relación dinámica y no estática entre el aprendiz y el objeto de conocimiento donde el proceso de adquisición del conocimiento es de estructuración y construcción permitiendo que el nuevo conocimiento se articule necesariamente con el previo y modificándolo. Es decir, que al estudiante se le asigna la responsabilidad de ser el constructor de su propio conocimiento y no la mera acumulación de información proveniente del exterior. Esto permite formar individuos autónomos que generen su propio aprendizaje. El profesor se percibe como un profesional autónomo que investiga reflexionando sobre su práctica docente. Este modelo contrario a los anteriores le da un estatus positivo al error ya que lo ve como un indicador y analizador de los procesos intelectuales que ocurren al interior de quien aprende. Para el constructivismo, los errores no son fallos del sistema ni faltas que ameriten castigo sino que son considerados momentos creativos que permiten mejorar los aprendizajes, en la medida en que se profundice en la lógica del error mismo; por extraños que nos parezcan los errores se trata de encontrarles el sentido y las operaciones mentales que surgen en el momento en que aparecen. En este proceso es indispensable observar el error dando posibilidades y no cerrar la mirada a que son errores fruto de la ignorancia o la distracción.

Se ve así, que los modelos constructivistas perciben que aprender es arriesgarse a errar y errar es señal de progreso; además, que el error indica las tareas intelectuales que quien aprende va resolviendo.

2.2.1. Tipología de errores asociados al lenguaje algebraico

Como se citó en Rodríguez (2015), **Socas** (1997) clasifica los errores en los que incurren los estudiantes en contextos algebraicos en tres tipos según su origen:

1. **Errores que tienen su origen en un obstáculo**: los estudiantes, al comenzar con sus estudios de Álgebra, suele ver las expresiones algebraicas como enunciados incompletos por ejemplo, al encontrar situaciones donde la operación de adición ya no significa lo mismo que en aritmética. Dentro de este eje también tiene cabida la yuxtaposición de símbolos en el lenguaje algebraico, donde $5x$ suele notar "5 veces x" el alumnado tiende a sustituir un valor por x y convertirlo en un número de dos cifras, por ejemplo 53.

2. **Errores que tienen su origen en ausencia de sentido:** la mayoría de estos errores se originan como falsas generalizaciones sobre operadores, fundamentalmente, por falta de linealidad de estos operadores. En esta tipología tienen cabida errores que derivan de la aritmética como es el uso de fracciones, de paréntesis o de potencias, y los errores en los procedimientos. También se encuentran los errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva, de las reglas de potencias, como el resultado de las identidades notables o errores de cancelación. Este tipo de errores indican que los estudiantes tienden a generalizar procedimientos que se verifican en determinadas ocasiones. Dentro de este segundo eje, se recogen también los errores causados por las características propias del simbolismo algebraico, que se manifiesta "en diferentes procesos matemáticos, tales como: generalización, simplificación, eliminación, complicación estructural y particularización".
3. **Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales:** errores que se deben a la falta de actitud racional hacia las matemáticas, que se pueden llamar "casuales o de descuido […] que van desde una excesiva confianza en la tarea matemática hasta un bloqueo que le incapacita para la citada tarea". (pp. 52 – 53)

Como se citó en Rodríguez (2015), **Palarea** (1998) realiza una clasificación a partir de la de Socas (1997) donde distingue dos grandes grupos:

1. **Errores del Álgebra que están en la Aritmética:** el álgebra no está separada de la aritmética por lo que a veces las dificultades que los estudiantes encuentran en álgebra son problemas que se quedan sin corregir en la aritmética. Por ejemplo, errores en la confusión con las operaciones con fracciones, el signo " –" delante de un paréntesis, el uso inapropiado de fórmulas y reglas de procedimientos. La mayoría de estos errores se originan como falsas generalizaciones de operadores, generalmente por falta de linealidad de estos operadores. Entre estos errores se distinguen:

a. Errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva

b. Errores relativos al uso de recíprocos
c. Errores de cancelación
2. **Errores de álgebra debidos a las características propias del simbolismo algebraico:** son de naturaleza estrictamente algebraica y no tienen referencia explícita en la aritmética, algunos ejemplos son el sentido del signo "=" en su paso de la aritmética al álgebra y la sustitución formal. (p. 53)

Cerdan (2010) clasificó los errores para la traducción de problemas a ecuaciones en tres categorías. En este estudio, detecta que los estudiantes incurren en errores al intentar traducir directamente de las palabras clave a los símbolos matemáticos, de izquierda a derecha, sin prestar atención al significado:

1. **Errores en el uso de letras**: distingue entre designación múltiple (cuando un número o cantidad es designado por más de una literal), significado múltiple (cuando la parte literal se utiliza para designar a más de un número o cantidad) y significado cambiado (cuando una literal se usa para designar a otra cantidad diferente de la que le fue expresamente atribuida a tal literal).
2. **Errores en la construcción de expresiones aritméticas o algebraicas**: pueden ser errores de operación, errores de inversión (confusión de operaciones inversas) y errores de arbitrariedad (cuando no tiene ningún referente en el diccionario teórico de cantidades y es leída de forma que los errores mencionados anteriormente no juegan un papel relevante).
3. **Error de igualdad**: se produce si las cantidades referidas por las expresiones de un lado y otro de la igualdad son diferentes. (pp. 101 – 102)

Aquí se evidencian algunos de los estudios relacionados con la tipificación de errores en el uso del lenguaje algebraico que permitirán, a partir de ellos, establecer las unidades de análisis que servirán para el presente estudio.

2.3.PROBLEMAS Y ACTIVIDADES EN MATEMÁTICAS

Es indispensable establecer las diferentes situaciones de aprendizaje que se dan alrededor de la aprehensión de un conocimiento y que el profesor utiliza en el aula de clase; para así poder establecer del tipo de actividad se aplicará para el estudio que se presenta en este trabajo.

Según Christiansen y Walther (1986) (citados en Ponte, 2004, p. 2) cuando se está realizando una actividad, se están desarrollando tareas en pro de un objetivo marcado; por lo tanto es el profesor el encargado de formular distintos tipos de tareas, así como, de dirigir su aplicación en el aula.

Los distintos tipos de tareas están enmarcados según el grado de dificultad y la duración. Así, según el grado de dificultad se encuentran *el ejercicio* y *la exploración* como tareas de un menor nivel de dificultad mientras que *el problema* y *la investigación* son de un mayor nivel de dificultad. Según la duración, los ejercicios son de duración corta; los problemas, las tareas exploratorias y de investigación, son de duración media y por último los proyectos de larga duración (Ponte, 2004).

Otra dimensión que se tiene en cuenta alrededor de las tareas es el grado de estructura donde los ejercicios y los problemas son tareas cerradas, mientras que las investigaciones y las tareas de exploración son abiertas, entendiendo una tarea cerrada como aquella que expresaron claridad lo que se da y lo que se pide y una tarea abierta como aquella que comporta un grado de indeterminación significativo en lo que se da, lo que se pide, o en ambas cosas (Ponte, 2004).

En los problemas y en los ejercicios, como establecimos anteriormente, está perfectamente indicado lo que se da y lo que se pide, aun así, los problemas conllevan un grado de dificultad mayor que los ejercicios; según George Pólya (1975) (citado en Ponte, 2004, p. 3) hay que proponer problemas a los estudiantes para que ellos puedan sentirse retados en sus capacidades matemáticas, y así experimentar el gusto por el descubrimiento; sin embargo, hay que medir el grado de dificultad ya que si es demasiado difícil, puede hacer que el estudiante desista rápidamente. Por su parte, los ejercicios sirven para que el alumno ponga en práctica los conocimientos adquiridos con anterioridad y le ayuden a consolidar estos conocimientos.

Las investigaciones y las tareas de exploración conllevan un grado de indeterminación significativo en lo que se da, lo que se pide, o en ambas cosas; como se había establecido anteriormente, la diferencia entre la exploración y la investigación es el grado de dificultad donde la exploración no requiere un nivel alto de planificación; si así lo tuviera se hablaría de una investigación. (Ponte, 2004)

Es indispensable aclarar que la demarcación de dificultad está mediada por los conocimientos previos que tenga el estudiante; así como la relación que tenga con el contexto en el que se expongan las tareas.

Por lo anterior, lo más apropiado, para un estudio del estilo que presentamos en este trabajo, es considerar problemas, esto es, tareas que indiquen perfectamente lo que se da y lo que se pide con una dificultad media debido a los conceptos matemáticos que se incluirán.

3. METODOLOGÍA

El presente estudio es de naturaleza exploratoria de tipo descriptivo (Hernández, Fernández y Baptista, 2006). Es de naturaleza exploratoria debido a que busca facilitar la comprensión del tema que se plantea; aspecto importante en el ejercicio de la profesión de ser educador ya que aprender sobre la tipología de errores trabajadas y caracterizadas por diferentes autores, tanto en matemáticas como en el aprendizaje y uso del lenguaje algebraico, le permite al educador conocer parte de la historia, características del aprendizaje e implicaciones del uso del lenguaje algebraico; así como, los errores frecuentes que un estudiante promedio puede llegar a cometer y los motivos por los cuales los comete. Es descriptivo debido a que busca especificar las propiedades, características, y los perfiles importantes de un grupo de personas frente al tema que se plantea en el objetivo del estudio.

3.1 Caracterización de la población

La población que se consideró para efectuar el presente proyecto corresponde a los estudiantes de grado 11°, del colegio INEM Francisco de Paula Santander de Bogotá 2016. Para el estudio se elige una población de nueve (9) cursos tales que sus estudiantes están inscritos en la asignatura de Cálculo, de estos se toma una muestra no probabilística de tres (3) cursos que comprende ochenta y siete (87) estudiantes. La muestra la escogen los docentes de la institución, estando estos tres cursos clasificados previamente por la institución según su opción de estudio posterior. Un curso corresponde al grupo de Ingeniería, otro de Robótica y el último de Ciencias de la salud. La elección es de tipo incidental, por lo tanto, no aleatoria, la realizan los docentes de la institución buscando facilidad en la aplicación de la prueba y los horarios de los grupos, así como incluir en la muestra estudiantes de los niveles avanzado (Ingeniería), medio (Robótica) y básico (Ciencias de la salud), contemplados en la institución.

En cuanto a la situación académica de los estudiantes de la muestra, corresponde a estudiantes de educación pública donde según los parceladores y programación desarrollada en los años anteriores ya tuvieron un curso de Álgebra en grado octavo donde aprendieron las reglas básicas dentro del tratamiento de las expresiones algebraicas y durante noveno y décimo realizaron aplicaciones de estas reglas al desarrollar actividades en diferentes temas tales como ecuaciones y funciones tanto lineales como cuadráticas, entre otros conceptos trabajados en estos grados.

1.2.Etapas o fases del trabajo

1.2.1. Diseño del instrumento

El instrumento que se utilizó para este estudio es una prueba que recoge seis problema en diferentes contextos de las matemáticas, todos ellos involucran procesos de tipo algebraico tales como sustitución, identificación de productos notables con su correspondiente desarrollo, solución de operaciones básicas algebraicas, simplificación de términos semejantes para despejar ecuaciones lineales y solucionar ecuaciones cuadráticas sencillas. Los problemas involucran el concepto de circunferencia en el contexto de secciones cónicas, perímetro, área y volumen asociados a figuras sólidas, conceptos básicos de economía y función afín donde en cada ejercicio se establecen las definiciones y su correspondiente ecuación; además, se plantea un ejercicio numérico de reto seleccionado del calendario matemático (Colombia Aprendiendo, 2010) donde se busca hallar, por tanteo, el dígito que le corresponde a cada letra según unas reglas establecidas (anexo A).

La prueba se planteó teniendo en cuenta la programación y planeación de temas trabajados en años anteriores y que para su solución fuera necesario utilizar procesos algebraicos; esto se garantiza debido a que hay una revisión previa de la evaluación por parte de los docentes de la institución. Se eligieron problema de libros de texto, de pruebas de estado y del calendario matemático; además, en cada ejercicio se plantea la información necesaria para ser desarrollado.

En la siguiente tabla se muestran los contenidos y procesos contemplados en cada una de las preguntas de la prueba (anexo A).

Pregunta	Contenido	Procesos
1. La ecuación canónica de una circunferencia está dada por $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ donde r es el radio y (h,k) es el centro, si se desarrollan las operaciones indicadas se obtiene la ecuación general con la forma $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ Si una circunferencia tiene centro en (3,-2) y $r=5$, determine la ecuación canónica y la ecuación general de la circunferencia.	Circunferencia como sección cónica. Operaciones Algebraicas que incluyen propiedad distributiva y productos notables	Sustitución, simplificación de términos semejantes.
2. Una caja sin tapa ha de construirse al cortar cuadrados de 3 pulgadas de las esquinas de una lámina rectangular de hojalata cuya longitud es el doble de su ancho. ¿Una lámina de qué medidas producirá una caja que tenga un volumen de 60 $pulg^3$?	Volumen de una caja. Planteamiento y resolución de una ecuación cuadrática.	Representar gráficamente la situación. Traducción de lenguaje común a lenguaje algebraico. Factorización
3. En Economía se conoce como Utilidad $U(x)$, a la diferencia entre el Ingreso y el Costo, es decir $U(x)=I(x)-C(x)$, donde el ingreso $I(x)$ está dado por la siguiente ecuación $I(x)=x\cdot p(x)$, siendo $p(x)$ la ecuación del Precio y x el Nivel de Producción. Para una empresa cuya ecuación de precio está definida como $p(x)=8x+20$ y la ecuación del costo como $C(x)=7x^2+4x+13$, donde el nivel de producción está dado en miles de unidades y la utilidad en miles de dólares, Determine:	Aplicaciones a Economía. Operaciones Algebraicas que incluyen propiedad distributiva y el opuesto de un polinomio. Resolución de ecuación cuadrática aplicando factorización.	Sustitución, simplificación de términos semejantes.

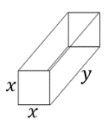
a. La ecuación del Ingreso b. La ecuación de la Utilidad c. El Nivel de Producción x para que la Utilidad de la compañía sea igual a 67.		
4. **ALPHAMETIC** (Recuerda que cada letra corresponde a un número diferente y que las letras iguales corresponden al mismo número)	Rompecabezas matemático usando letras y expresiones algebraicas	Sustitución numérica por ensayo y error cumpliendo condiciones.
5. Las piezas de la ilustración son utilizadas en la industria de la ornamentación como piezas de seguridad. Se han dejado las dimensiones de cada pieza en términos de x ya que los tamaños pueden variar de acuerdo con las necesidades de los compradores. a. Determine la expresión que representa el perímetro de la cara frontal de la pieza 3 b. Determine la expresión que representa el área de la cara lateral de la pieza 1 c. El volumen $V(x)$ de una caja común se halla multiplicando el área de la base por la altura, es decir aplicando la fórmula $V(x) = Ab \cdot h$. Por ejemplo, en  el volumen es $V(x) = x^2 \cdot y$ Determine el volumen de la pieza 2.	Perímetro, área y volumen asociados a un sólido dado. Operaciones algebraicas que incluyen multiplicaciones sencillas, propiedad distributiva y el opuesto de un polinomio.	Interpretación de las gráficas dadas. Sustitución, simplificación de términos semejantes.
6. En economía se denomina punto de equilibrio a aquel en el que coinciden la oferta y la demanda. El siguiente gráfico muestra la oferta $g(x)$ y la demanda $f(x)$ de cierto producto. Dado que cada recta en el plano se expresa algebraicamente como $f(x) = mx + b$, donde m es la pendiente y b es el intercepto con el eje y, encuentre la ecuación de la oferta y la ecuación de la demanda y luego determine el punto de equilibrio.	Función afín y el concepto de punto de equilibrio.	Sustitución aplicando conceptos de pendiente e intercepto. Igualación de dos ecuaciones lineales y su despeje correspondiente.

Tabla 3. Descripción de los contenidos y procesos contemplados en la prueba.

1.2.2. Aplicación del instrumento

La prueba se aplicó el 17 de mayo de 2016 en el horario regular de la clase de Cálculo de los estudiantes del INEM Francisco de Paula Santander. Cada curso tiene un bloque de clase completo, correspondiente a una hora y cuarenta minutos por reloj (1:40min), para desarrollarla. El primer curso en contestar la prueba fue el de nivel avanzado (Ingeniería), la clase inició a las seis y diez de la mañana (6:10 a.m.) y el profesor titular junto con el docente en formación, quien realizó el estudio, acompañaron la presentación de la misma, el docente titular hizo una reflexión al iniciar la sesión para motivar a los estudiantes a contestar la prueba completa y de manera responsable; pasada una (1) hora de clase llegaron diez (10) estudiantes al salón, a ellos se les explicó qué estaban haciendo sus compañeros e iniciaron la presentación de la prueba, aun así, seis (6) de ellos dejaron la prueba en blanco; el profesor titular informó, al maestro en formación, que estos diez (10) estudiantes ingresaron a la institución pasados tres (3) meses de haber iniciado clases y que su nivel de compromiso es muy bajo, la prueba terminó al finalizar el bloque de clase. En general, en este grupo se evidenció compromiso y trabajo concentrado en el desarrollo de la prueba.

En el bloque siguiente, que inició a las ocho de la mañana (8:00 a.m.) del nivel medio (Robótica), empezó el desarrollo de la prueba en ese momento; en este grupo el profesor titular no hizo introducción alguna a la prueba, lo que pudo generar en el grupo una mayor dispersión y distracción, de hecho el profesor titular tuvo que llamar la atención a los estudiantes en varias ocasiones y el docente en formación que realizó el estudio debió invitar a los estudiantes, de manera individual, a que contestaran a conciencia y con responsabilidad; la prueba terminó al finalizar el bloque de clase.

Por último, el nivel básico (Ciencias de la salud) inició la prueba a las diez y cuarenta de la mañana (10:40 a.m.), pasados veinte minutos de haber iniciado el bloque debido a que el curso en general llegó tarde ya que se encontraban en una asesoría con el director de la línea de Ciencias de la salud; en este curso el profesor titular dio una reflexión al grupo en general, invitándolos a responder la prueba con responsabilidad e informando que el docente en formación, recogería la prueba al finalizar la clase ya que se quedaría solo cuidando el desarrollo de la misma. En este grupo se evidenció un poco más de compromiso con respecto al grupo anterior, aun así, presentaron dificultades al interpretar instrucciones y en la decodificación de la terminología matemática en general.

Ilustración 1. Presentación de la prueba.

Finalmente en los anexos B, C y D se podrán ver tres ejemplos de pruebas resueltas por los estudiantes seleccionados para el presente estudio.

1.2.3. Selección de datos

Posterior a la aplicación de la prueba se hizo una revisión del material recolectado, previa a la detección de los errores, donde se identificó que de las ochenta y siete (87) pruebas presentadas era necesario anular dieciocho (18) debido a que los estudiantes las dejaron en blanco; es decir, que la muestra se redujo a sesenta y nueve (69); el detalle de la selección se muestran en la tabla 4.

Curso	Pruebas Aceptadas	Pruebas Anuladas	Total Pruebas
11-03 (Ingeniería)	27	6	33
11-08 (Robótica)	20	3	23
11-09 (Ciencias de la salud)	22	9	31
Total	69	18	87

Tabla 4. Cantidad de pruebas presentadas, aceptadas y anuladas.

Además, se realiza un conteo de las preguntas respondidas por los estudiantes clasificando el conteo por curso, por pregunta y con su correspondiente porcentaje. La información se presenta a continuación.

Preguntas / Curso	11-03 (Ingeniería)	11-08 (Robótica)	11-09 (Ciencias de la salud)	Total de Preguntas Respondidas		Total de Preguntas Sin Responder	
				Cantidad	%	Cantidad	%
1	25	20	22	67	97	2	3
2	14	2	7	23	33	46	67
3	23	13	8	44	64	25	36
4	21	17	20	58	84	11	16
5	21	8	6	35	51	34	49
6	14	1	0	15	22	54	78

Tabla 5. Cantidad de preguntas respondidas por curso.

Teniendo en cuenta la información que se registra anteriormente, para el estudio en mención, no se tendrán en cuenta las respuestas a las preguntas dos (2) y seis (6) debido a que, respectivamente solo, el 33% y el 22% de la muestra contestaron estas preguntas, esto es, ni el 50% de los estudiantes las respondieron.

1.3. Análisis de las respuestas

Después de hacer la revisión y descripción general de algunos de los trabajos presentados alrededor de la tipificación de errores en el marco referencial; no solo en matemáticas sino específicamente en el aprendizaje y uso del lenguaje algebraico, y teniendo en cuenta la prueba que se aplica a la población elegida, se establecen las unidades de análisis que se utilizan en el presente estudio.

1.3.1. Unidades de análisis

Para crear las unidades de análisis que se utilizan en el presente estudio se revisaron específicamente cuatro (4) autores de los enunciados en el marco de referencia.

1. Küchemann (1981) quien tipifica el uso que dan los estudiantes a la letra, estableciendo seis (6) categorías de las cuales tres (3) son asumidas por errores que cometen los estudiantes, estos son: 1. Letra evaluada, 2. Letra no utilizada y 3. Letra como objeto.

2. Molina y otros (2007) quienes establecen ocho (8) tipos de uso del signo igual, de los cuales dos (2) se pueden considerar como errores al ser utilizados en algunos contextos algebraicos, estos son 1. Operador y 2. Separador.

3. Socas (1997) sitúa los errores que cometen los alumnos en relación con tres orígenes distintos: 1. Obstáculos, 2. Ausencia de sentido, 3. Actitudes afectivas y emocionales.

4. Palarea (1999) quien realiza un estudio a partir del trabajo de Socas (1997) y establece dos (2) categorías específicas, 1. Errores del álgebra debidos a las características propias del simbolismo algebraico y 2. Errores del álgebra que están en la aritmética.

Posterior a esta revisión, se estableció un paralelo y una relación entre la información que aporta cada autor y se establecieron las unidades de análisis correspondientes.

A través de la siguiente tabla, se presenta la información.

Küchemann (1981) Errores asociados al uso de las letras	Molina y otros (2007) Errores asociados al uso del símbolo de igualdad	Socas (1997) Clasificación de errores en contextos algebraicos	Palarea (1999) Clasificación a partir de la de Socas (1997)	Unidades de análisis consideradas para este trabajo (Código)
- Letra evaluada: cuando se le da a la letra un valor numérico arbitrario buscando un significado numérico concreto.			- Errores del álgebra debidos a las características propias del simbolismo algebraico: son de naturaleza estrictamente algebraica y no tienen referencia explícita en la aritmética, por ejemplo el sentido del signo “=” en su paso de la aritmética al algebra y la sustitución formal y **la interpretación y comprensión** de los signos, **las letras** y las expresiones algebraicas	- Errores relativos a evaluar la letra por valores específicos. (LEv).
- Letra no utilizada: cuando es simplemente ignorada la presencia de la letra, manifestando una incomprensión de la función de la letra aunque ésta aparezca en su respuesta.		- Errores que tienen su origen en un obstáculo: el alumnado, al comenzar con sus estudios de álgebra, suele ver las expresiones algebraicas como enunciados incompletos		Errores relativos a ignorar u omitir la letra. (LIg)
- Letra como objeto: se considera que la letra es un objeto en sí misma y corresponde a la abreviatura del nombre del objeto.				No se considera este tipo de error dado que la prueba aplicada no permite hallar evidencias para ello, se requiere entrevistas, por ejemplo.

Küchemann (1981) Errores asociados al uso de las letras	Molina y otros (2007) Errores asociados al uso del símbolo de igualdad	Socas (1997) Clasificación de errores en contextos algebraicos	Palarea (1999) Clasificación a partir de la de Socas (1997)	Unidades de análisis consideradas para este trabajo (Código)
	- Separador: el signo de igualdad se utiliza como separador de los pasos realizados, sin mantener la equivalencia entre las expresiones.		- Errores del álgebra debidos a las características propias del simbolismo algebraico: son de naturaleza estrictamente algebraica y no tienen referencia explícita en la aritmética, algunos ejemplos son el sentido del **signo "="** en su paso de la aritmética al algebra y la **sustitución formal.**	- Errores al interpretar el signo igual como separador. (ISe)
	- Operador: el signo de igualdad indica la respuesta a un cálculo o simplificación. Predomina una concepción procedimental de los objetos matemáticos. Carácter unidireccional del signo igual.			- Errores relativos al mal uso de la sustitución numérica. (ISn) - Errores relativos al mal uso de la sustitución formal. (ISf)
		- Errores que tienen su origen en ausencia de sentido: son falsas generalizaciones sobre operadores. En esta tipología tienen cabida errores que derivan de la aritmética como es el uso de fracciones, de paréntesis o de	- Errores del álgebra que están en la aritmética: Por ejemplo, errores en la confusión con las operaciones con fracciones, el signo "-" delante de un paréntesis, el uso inapropiado de fórmulas y reglas de procedimientos.	- Errores en los procedimientos. (APr) - Errores relativos a cálculos numéricos. (ACn)

Küchemann (1981) Errores asociados al uso de las letras	Molina y otros (2007) Errores asociados al uso del símbolo de igualdad	Socas (1997) Clasificación de errores en contextos algebraicos	Palarea (1999) Clasificación a partir de la de Socas (1997)	Unidades de análisis consideradas para este trabajo (Código)
		potencias, y los errores en los procedimientos. También se encuentran los errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva, de las reglas de potencias, como el resultado de las identidades notables o errores de cancelación. Además, los errores causados por las características propias del simbolismo algebraico, tales como: generalización, simplificación, eliminación, complicación estructural y particularización	La mayoría de estos errores se originan como falsas generalizaciones de operadores, generalmente por falta de linealidad de estos operadores. Entre estos errores se distinguen: a. Errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva b. Errores relativos al uso de recíprocos c. Errores de cancelación.	

Küchemann (1981) Errores asociados al uso de las letras	Molina y otros (2007) Errores asociados al uso del símbolo de igualdad	Socas (1997) Clasificación de errores en contextos algebraicos	Palarea (1999) Clasificación a partir de la de Socas (1997)	Unidades de análisis consideradas para este trabajo (Código)
		- Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales: errores que se deben a la falta de actitud racional hacia las matemáticas, que se pueden llamar "casuales o de descuido […] que van desde una excesiva confianza hasta un bloqueo que le incapacita para la citada tarea"		No se considera este tipo de error dado que la prueba aplicada no permite hallar evidencias para ello, se requiere entrevistas, por ejemplo.

Tabla 6. Paralelo entre los autores y determinación de las unidades de análisis.

Finalmente, las unidades de análisis que se plantean y se utilizan en la identificación de errores que cometen los estudiantes de grado 11, del colegio INEM Francisco de Paula Santander de Bogotá se resumen y describen a continuación.

Error Asociado a	Unidad De Análisis Considerada Para Este Trabajo (Código)	Descripción
La Letra	1. Errores relativos a evaluar la letra por valores específicos. (LEv).	En este caso se le da a la letra un valor numérico arbitrario buscando un significado numérico concreto.
	2. Errores relativos a ignorar, omitir y agregar la letra. (LIg)	Cuando la letra es ignorada y en algunos casos se omite o se agrega la letra del procedimiento efectuado o de su resultado. En general, hay una incomprensión de la función de la letra sin tener sentido alguno.
El Signo de Igualdad	3. Errores al interpretar el signo igual como separador. (ISe)	En este caso el signo de igualdad se utiliza como separador de los pasos realizados, sin mantener la equivalencia entre las expresiones.
	4. Errores relativos al mal uso de la sustitución numérica. (ISn)	En este caso se da explícitamente el valor de la letra y no se sustituye por la cantidad numérica especificada como corresponde según el contexto del problema que se plantea.
	5. Errores relativos al mal uso de la sustitución formal. (ISf)	En este caso se da explícitamente una expresión equivalente a la letra y no se sustituye por la expresión algebraica especificada como corresponde según el contexto del problema que se plantea.
La Aritmética	6. Errores en los procedimientos (APr)	Cuando se aplica de manera incorrecta la propiedad distributiva, el signo negativo antes de una expresión algebraica u opuesto de un polinomio y las reglas para algunos productos notables.
	7. Errores relativos a cálculos numéricos. (ACn)	En este caso se tendrán en cuenta todos los cálculos numéricos que estén incorrectos.

Tabla 7. Descripción de las unidades de análisis.

4. CLASIFICACIÓN DE LOS ERRORES ENCONTRADOS

En este capítulo se describe la forma en la que se realizó la clasificación de los errores que se presentan en las pruebas revisadas y se detallan las características principales de esos errores.

Para iniciar la identificación de los errores que se presentan en las pruebas, se tienen en cuenta cuatro (4) de los seis (6) problemas planteados; se consideran los ítems uno (1), tres (3), cuatro (4) y cinco (5) (Tabla 5. Cantidad de preguntas respondidas por curso..). Una vez seleccionados los ítems, las pruebas representativas y de ellas las preguntas que fueron contestadas se procedió a examinar cada una de las respuestas de las sesenta y nueve (69) pruebas seleccionadas en este estudio.

En el proceso de revisión, se distinguieron los errores que presentaron los diferentes estudiantes en cada pregunta según las unidades de análisis expuestas en el capítulo anterior (Tabla 7. Descripción de las unidades de análisis.) y se realizó este proceso con cada curso al que se le aplicó la prueba. Para distinguir los cursos 11-03 (Ingeniería), 11-08 (Robótica) y 11-09 (Ciencias de la salud) se utiliza la siguiente notación C3, C8, C9 respectivamente y a los estudiantes con E1, E2, E3… para cada curso; así, el estudiante doce del curso 11-08 (Robótica) se le nombra C8E12. Por último, se realizó un conteo de los errores encontrados según cada unidad de análisis, por curso y por pregunta.

A continuación se presentan los resultados de la revisión realizada.

4.1. Errores detectados según cada unidad de análisis

4.1.1. Errores relativos a evaluar la letra por valores específicos. (LEv).

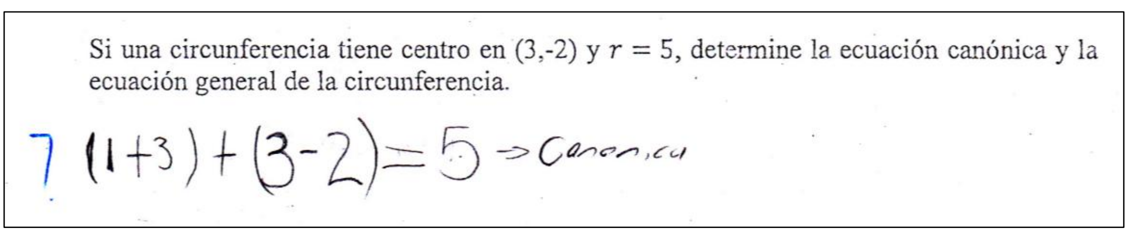
La cantidad de errores que en total se presentaron, según la unidad de análisis LEv, en las pruebas seleccionadas por curso y por problemas resueltos se muestran en la siguiente tabla:

Curso/Pregunta	P1	P3	P4	P5	Total
11-03 (Ingeniería)	3	0	0	1	4
11-08 (Robótica)	8	0	0	0	8
11-09 (ciencias de la salud)	2	0	0	0	2
Total	13	0	0	1	14

Tabla 8. Cantidad de errores relativos a evaluar la letra por valores específicos (LEv).

Este tipo de error se encontró en las respuestas al problema 1 con seis (6) variaciones diferentes según las pruebas revisadas.

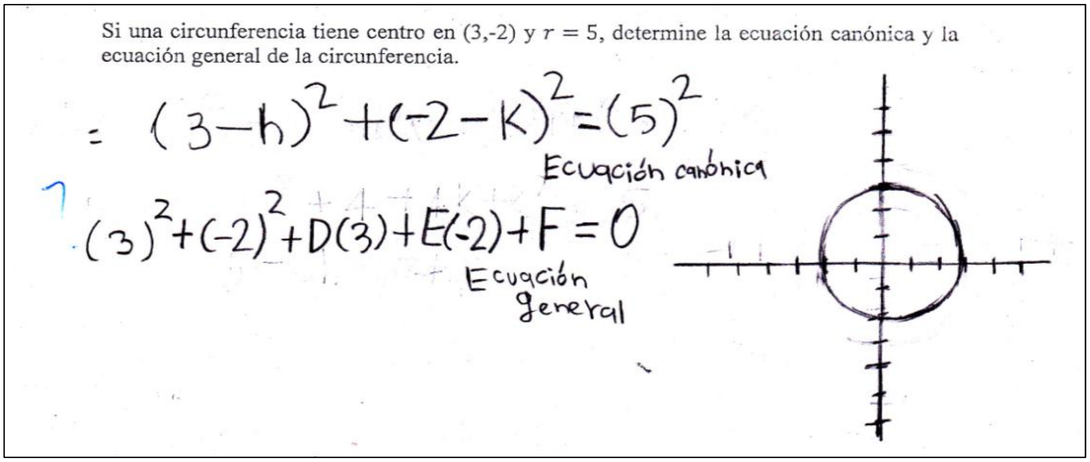
- El estudiante establece una equivalencia numérica dándole valores a las variables x, y, además; evalúa h y k con los valores dados en el ejercicio y ajusta las expresiones para que las operaciones establecidas generen el radio. Este error se detectó en la prueba del estudiante C3E7, como se puede observar en la siguiente ilustración:


Si una circunferencia tiene centro en (3,-2) y $r = 5$, determine la ecuación canónica y la ecuación general de la circunferencia.

7 $(1+3)+(3-2)=5$ → Canonica

Ilustración 2. Error LEv encontrado en C3E7.

- El estudiante confunde variables con parámetros, evaluando los valores dados en las variables y dejando las ecuaciones en términos de los parámetros. Este error se detectó en las pruebas de seis (6) estudiantes. Por ejemplo:

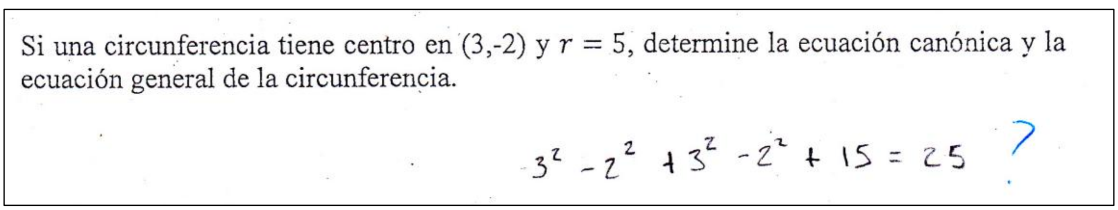

Si una circunferencia tiene centro en (3,-2) y $r = 5$, determine la ecuación canónica y la ecuación general de la circunferencia.

$= (3-h)^2 + (-2-K)^2 = (5)^2$ Ecuación canónica

? $(3)^2 + (-2)^2 + D(3) + E(-2) + F = 0$ Ecuación general

Ilustración 3. Error LEv encontrado en C3E13.

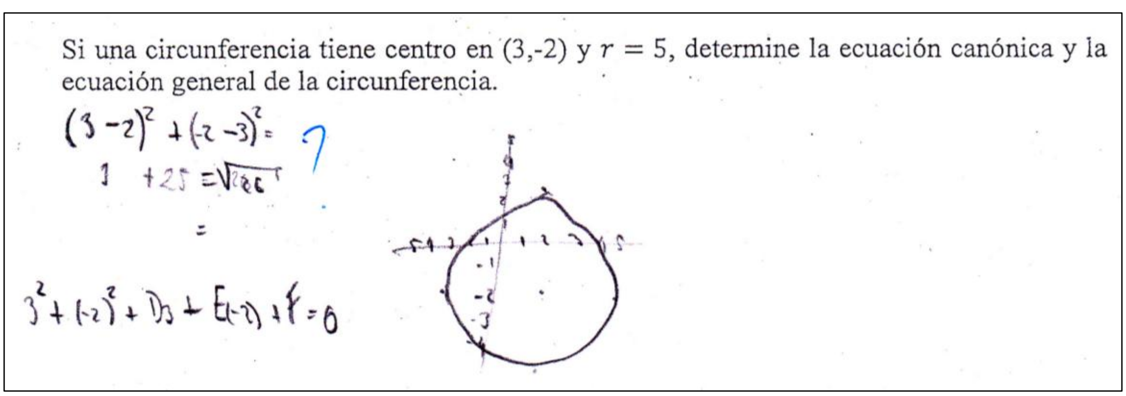
- El estudiante establece una equivalencia numérica utilizando los datos que se dan de manera arbitraria y ajustando la operación para que el resultado dé el radio al cuadrado. Este error se detectó en la prueba del estudiante C3E20, como se puede observar en la siguiente ilustración:


Si una circunferencia tiene centro en (3,-2) y $r = 5$, determine la ecuación canónica y la ecuación general de la circunferencia.

$-3^2 - 2^2 + 3^2 - 2^2 + 15 = 25$?

Ilustración 4. Error LEv encontrado en C3E20.

- El estudiante evalúa la letra con los valores dados tanto en variables como en parámetros sin mantener la equivalencia. Este error se detectó en las pruebas de tres (3) estudiantes. Por ejemplo:


Si una circunferencia tiene centro en (3,-2) y $r = 5$, determine la ecuación canónica y la ecuación general de la circunferencia.

$(3-2)^2 + (-2-3)^2 =$?

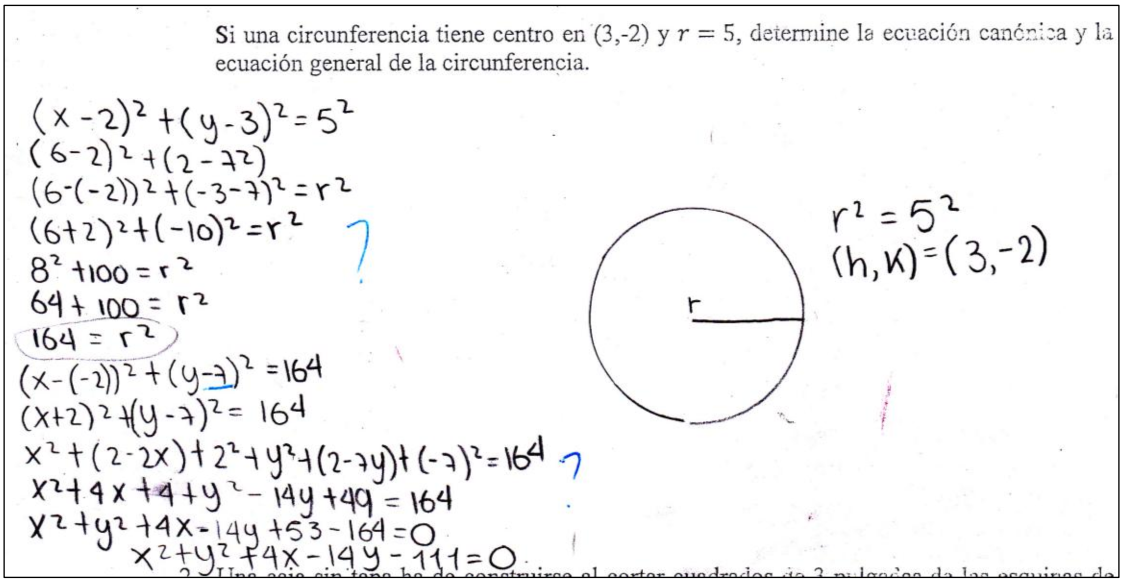
$1 + 25 = \sqrt{26}$

$=$

$3^2 + (-2)^2 + D3 + E(-2) + F = 0$

Ilustración 5. Error LEv encontrado en C8E19.

- El estudiante asigna valores a las variables y parámetros de manera arbitraria determinando el valor del radio, ignorando que este dato ya fue dado. Este error se detectó en la prueba del estudiante C8E12, como se puede observar en la siguiente ilustración:



Si una circunferencia tiene centro en (3,-2) y $r = 5$, determine la ecuación canónica y la ecuación general de la circunferencia.

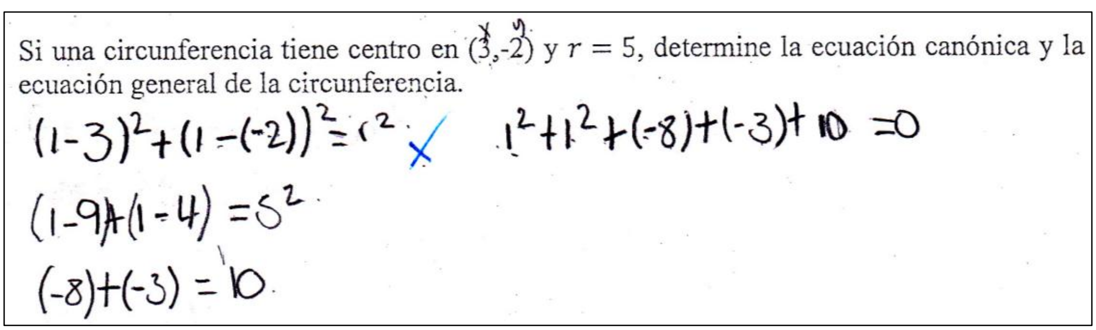
$(x-2)^2+(y-3)^2=5^2$
$(6-2)^2+(2-7^2)$
$(6-(-2))^2+(-3-7)^2=r^2$
$(6+2)^2+(-10)^2=r^2$?
$8^2+100=r^2$
$64+100=r^2$
$164=r^2$
$(x-(-2))^2+(y-7)^2=164$
$(x+2)^2+(y-7)^2=164$
$x^2+(2-2x)+2^2+y^2+(2-7y)+(-7)^2=164$?
$x^2+4x+4+y^2-14y+49=164$
$x^2+y^2+4x-14y+53-164=0$
$x^2+y^2+4x-14y-111=0$

r

$r^2=5^2$
$(h,k)=(3,-2)$

Ilustración 6. Error LEv encontrado en C8E12.

- El estudiante evalúa los parámetros con los valores dados y las variables con el valor de 1 sin mantener la equivalencia. Este error se detectó en la prueba del estudiante C9E1, como se puede observar en la siguiente ilustración:



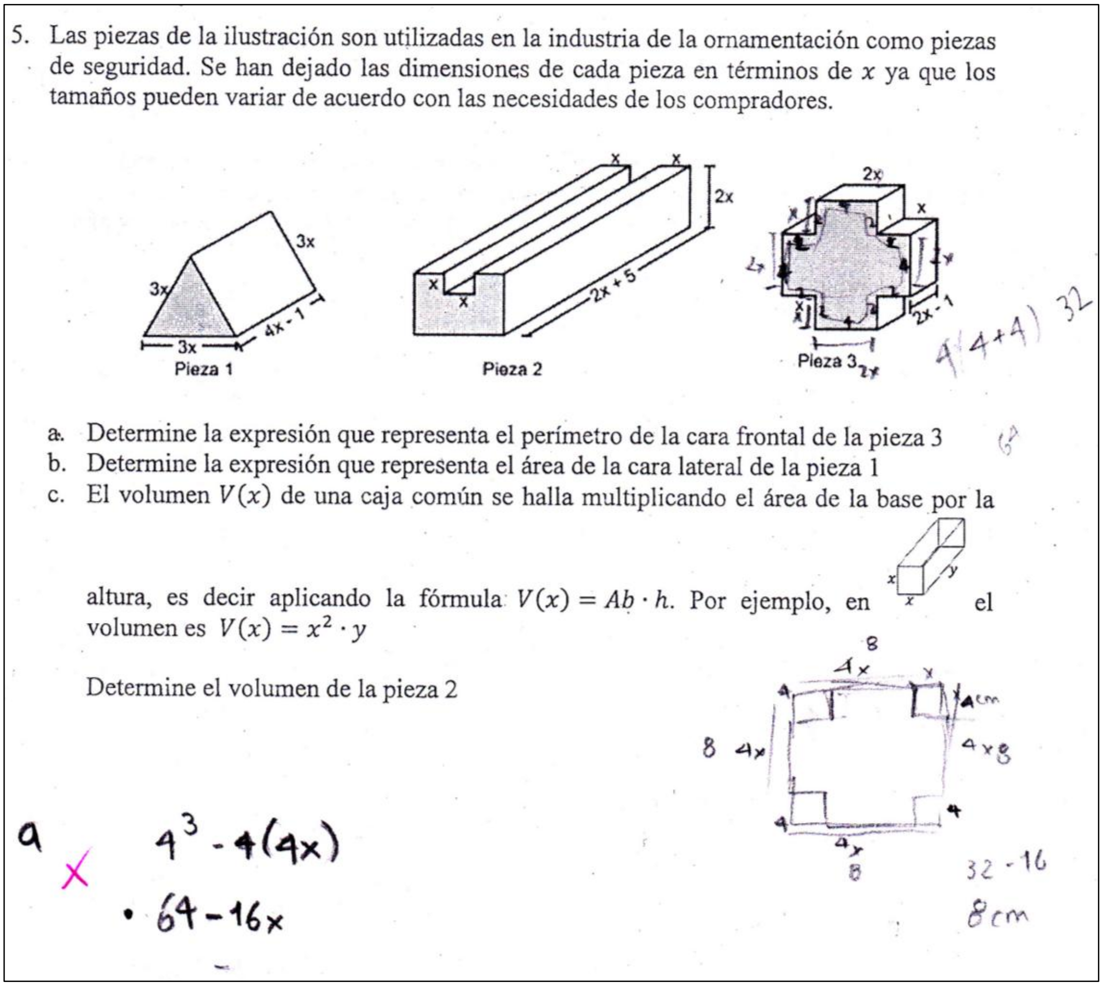
Si una circunferencia tiene centro en (3,-2) y $r = 5$, determine la ecuación canónica y la ecuación general de la circunferencia.

$(1-3)^2+(1-(-2))^2=r^2$ ✗
$(1-9)+(1-4)=5^2$
$(-8)+(-3)=10$

$1^2+1^2+(-8)+(-3)+10=0$

Ilustración 7. Error LEv encontrado en C9E1.

En los problemas 3, 4 y 5 no se evidenció este tipo de error (LEv) debido al estilo de los problemas planteados. A excepción; como se puede observar en la siguiente ilustración, del estudiante C3E6 en el problema 5 quien le asignó un valor numérico a una longitud que está representada por una expresión algebraica.



5. Las piezas de la ilustración son utilizadas en la industria de la ornamentación como piezas de seguridad. Se han dejado las dimensiones de cada pieza en términos de x ya que los tamaños pueden variar de acuerdo con las necesidades de los compradores.

a. Determine la expresión que representa el perímetro de la cara frontal de la pieza 3

b. Determine la expresión que representa el área de la cara lateral de la pieza 1

c. El volumen $V(x)$ de una caja común se halla multiplicando el área de la base por la altura, es decir aplicando la fórmula $V(x) = Ab \cdot h$. Por ejemplo, en [caja] el volumen es $V(x) = x^2 \cdot y$

Determine el volumen de la pieza 2

a $4^3 - 4(4x)$

$\cdot\ 64 - 16x$

Ilustración 8. Error LEv encontrado en C3E6

4.1.2. Errores relativos a ignorar, omitir y agregar la letra. (LIg)

La cantidad de errores que en total se presentaron, según la unidad de análisis LIg, en las pruebas seleccionadas por curso y por problemas resueltos se muestran en la siguiente tabla:

Curso/Pregunta	P1	P3	P4	P5	Total
11-03 (Ingeniería)	2	2	0	2	6
11-08 (Robótica)	1	11	0	6	18
11-09 (ciencias de la salud)	6	2	0	4	12
Total	9	15	0	12	36

Tabla 9. Cantidad de errores relativos a ignorar, omitir y agregar la letra (LIg).

Este tipo de error se encontró en las respuestas al problema 1 con dos (2) variaciones diferentes según las pruebas revisadas.

- El estudiante agrega la letra para ajustar resultados que se solicitan en el problema. Este error se detectó en las pruebas de cinco (5) estudiantes. Por ejemplo:

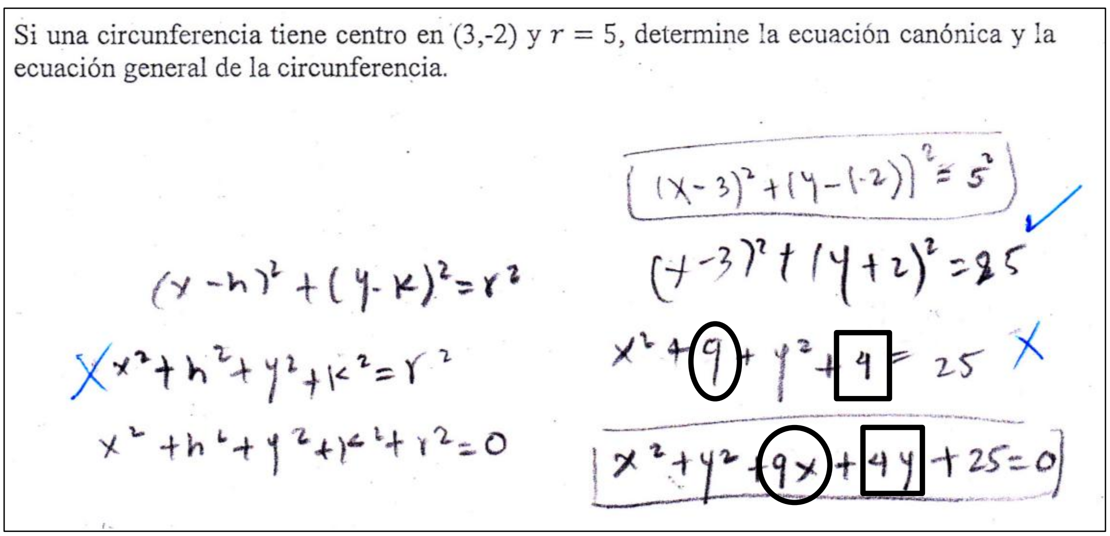
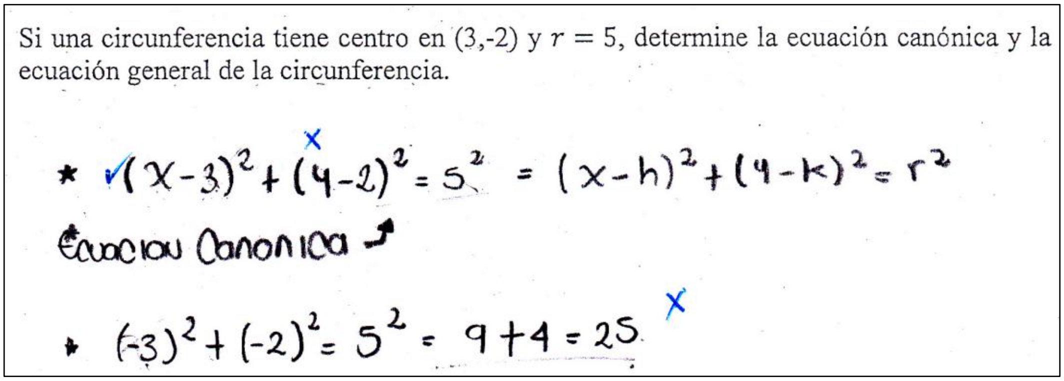


Ilustración 9. Error LIg encontrado en C3E4.

- El estudiante omite la letra o la ignora para operar lo numérico. No mantiene equivalencias. Este error se detectó en las pruebas de cuatro (4) estudiantes. Se puede observar en la ilustración 10 una omisión de letra.



Si una circunferencia tiene centro en (3,-2) y $r = 5$, determine la ecuación canónica y la ecuación general de la circunferencia.

$* \ (x-3)^2 + (y-2)^2 = 5^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

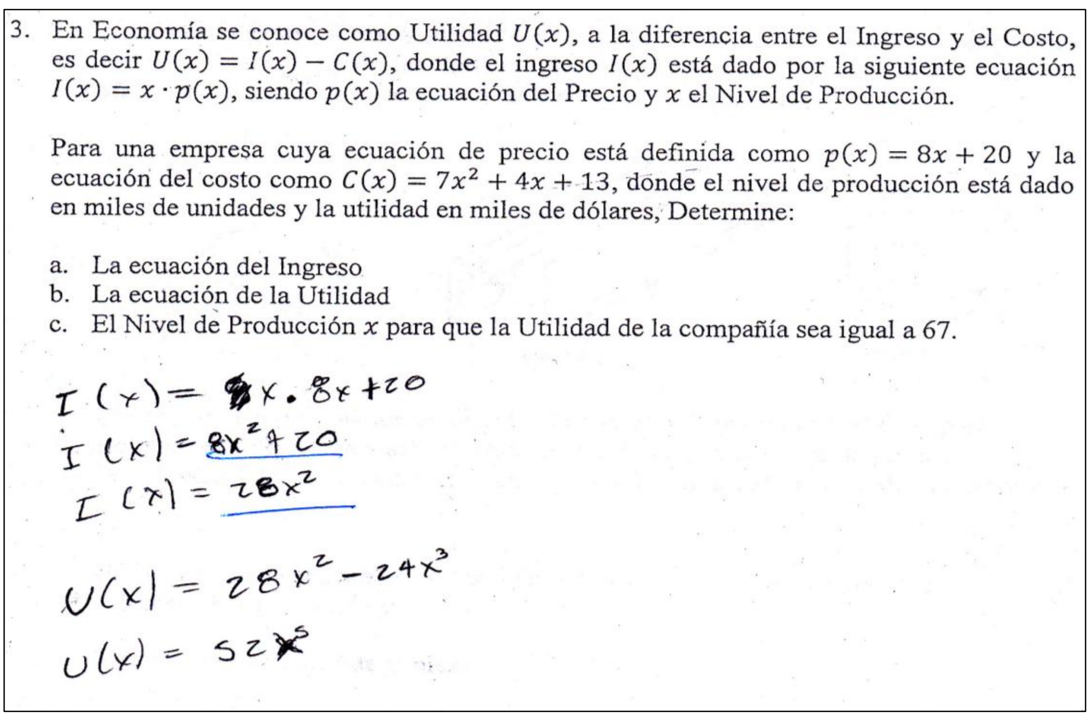
Ecuacion Canonica

$* \ (-3)^2 + (-2)^2 = 5^2 = 9 + 4 = 25$

Ilustración 10. Error LIg encontrado en C9E6.

En las respuestas a los problemas 3 y 5 se encuentran dos (2) variaciones del error LIg.

- El estudiante ignora la letra y opera los valores numéricos de cada término sin tener en cuenta si son o no términos semejantes. Este error se detectó en las pruebas de dieciocho (18) estudiantes. Por ejemplo:



3. En Economía se conoce como Utilidad $U(x)$, a la diferencia entre el Ingreso y el Costo, es decir $U(x) = I(x) - C(x)$, donde el ingreso $I(x)$ está dado por la siguiente ecuación $I(x) = x \cdot p(x)$, siendo $p(x)$ la ecuación del Precio y x el Nivel de Producción.

   Para una empresa cuya ecuación de precio está definida como $p(x) = 8x + 20$ y la ecuación del costo como $C(x) = 7x^2 + 4x + 13$, donde el nivel de producción está dado en miles de unidades y la utilidad en miles de dólares, Determine:

   a. La ecuación del Ingreso
   b. La ecuación de la Utilidad
   c. El Nivel de Producción x para que la Utilidad de la compañía sea igual a 67.

$I(x) = x \cdot 8x + 20$

$I(x) = 8x^2 + 20$

$I(x) = 28x^2$

$U(x) = 28x^2 - 24x^3$

$U(x) = 52x^5$

Ilustración 11. Error LIg encontrado en C8E6.

- Para el estudiante no tiene sentido la letra, la escribe en algunos términos para poder operar, o para escribir expresiones algebraicas que no se relacionan con el sentido del problema planteado. Este error se detectó en las pruebas de nueve (9) estudiantes y se puede observar en la siguiente ilustración:

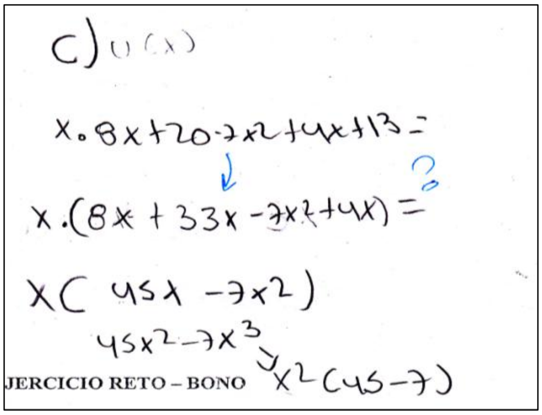


Ilustración 12. Error LIg encontrado en C3E17.

En el problema 4 no se evidenció este tipo de error (LIg) debido a que en este problema se busca hallar, por tanteo, el dígito que le corresponde a cada letra según unas reglas establecidas.

4.1.3. Errores al interpretar el signo igual como separador. (ISe)

La cantidad de errores que en total se presentaron, según la unidad de análisis ISe, en las pruebas seleccionadas por curso y por problemas resueltos se muestran en la siguiente tabla:

Curso/Pregunta	P1	P3	P4	P5	Total
11-03 (Ingeniería)	1	0	0	1	2
11-08 (Robótica)	0	0	4	0	4
11-09 (ciencias de la salud)	0	0	0	0	0
Total	1	0	4	1	6

Tabla 10. Cantidad de errores al interpretar el signo igual como separador (ISe).

Este tipo de error se encontró con poca frecuencia en la revisión de todas las pruebas de la muestra, identificando dos (2) variaciones diferentes.

- El estudiante va mostrando algún proceso algebraico parcializado en el mismo renglón y estableciendo igualdades falsas. Este error se detectó en las pruebas de dos (2) estudiantes. Por ejemplo:

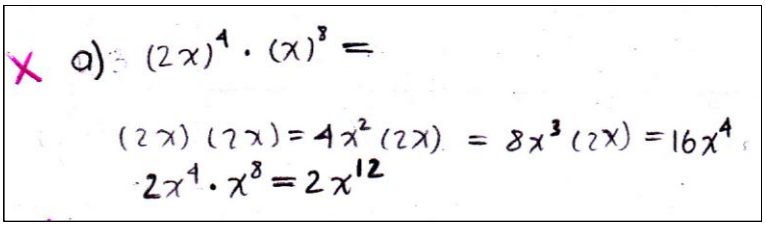


Ilustración 13. Error ISe encontrado en C3E15.

- El estudiante va desarrollando las operaciones numéricas en forma parcializada y mostrando los resultados en el mismo renglón sin mantener equivalencias. Este error se detectó en las pruebas de cuatro (4) estudiantes y se puede observar en la siguiente ilustración:

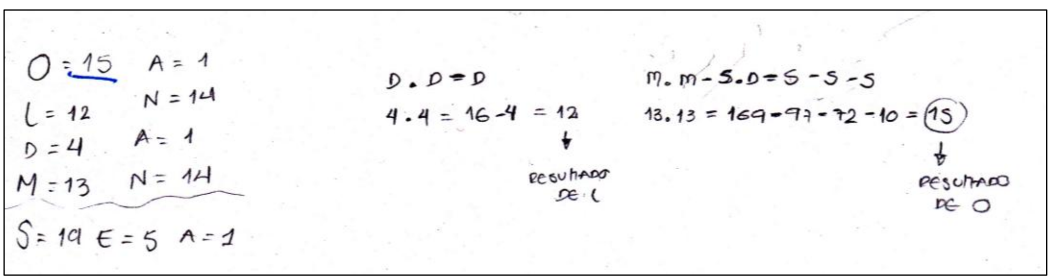


Ilustración 14. Error ISe encontrado en C8E10.

4.1.4. Errores relativos al mal uso de la sustitución numérica. (ISn)

La cantidad de errores que en total se presentaron, según la unidad de análisis ISn, en las pruebas seleccionadas por curso y por problemas resueltos se muestran en la siguiente tabla:

Curso/Pregunta	P1	P3	P4	P5	Total
11-03 (Ingeniería)	5	14	7	0	26
11-08 (Robótica)	10	6	15	0	31
11-09 (ciencias de la salud)	16	4	3	0	23
Total	31	24	25	0	80

Tabla 11. Cantidad de errores relativos al mal uso de la sustitución numérica (ISn).

Este tipo de error se encontró en las respuestas al problema 1 con cinco (5) variaciones diferentes según las pruebas revisadas.

- El estudiante al determinar la ecuación canónica de una circunferencia dado el centro y el radio no sustituye correctamente un valor negativo dado, ya que no diferencia el signo menos de la ecuación canónica del signo menos del valor dado. Este error se detectó en las pruebas de veinte (20) estudiantes y se puede observar en la siguiente ilustración:

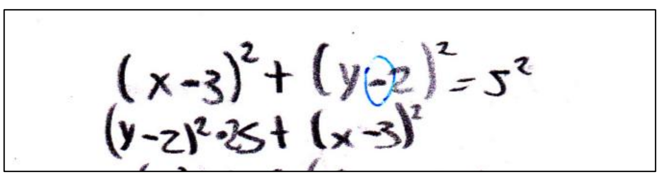


Ilustración 15. Error ISn encontrado en C8E7.

- El estudiante sustituye el valor del radio y omite el cuadrado que se establece en la ecuación canónica de la circunferencia. Este error se detectó en las pruebas de tres (3) estudiantes. Por ejemplo:

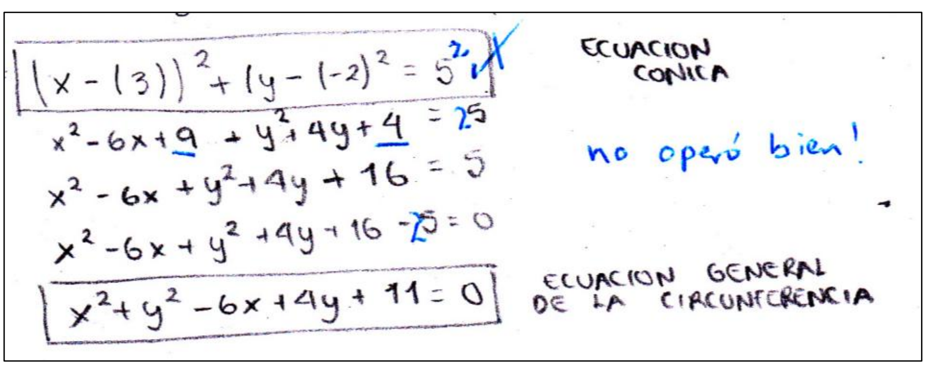


Ilustración 16. Error ISn encontrado en C3E19.

- El estudiante no sustituye el valor del radio dejando la ecuación en términos de x, y, y r. Este error se detectó en las pruebas de dos (2) estudiantes y se observa en la siguiente ilustración.

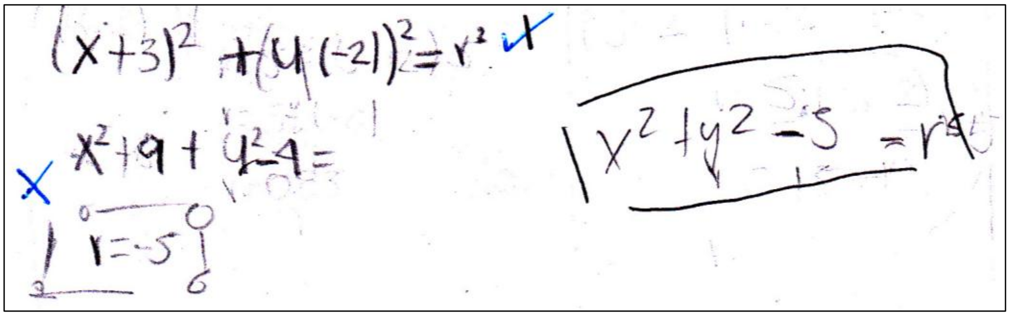


Ilustración 17. Error ISn encontrado en C9E16.

- El estudiante omite los signos de la ecuación dejando los signos de los valores dados en el ejercicio. Este error se muestra en la siguiente ilustración y se detectó en las pruebas de dos (3) estudiantes.

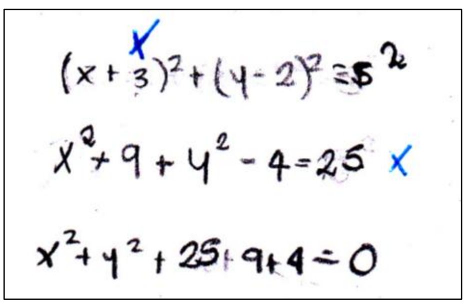


Ilustración 18. Error ISn encontrado en C9E18.

- El estudiante expresa el valor del radio como exponente de r dejando la ecuación en términos de x, y, y r. Este error se muestra en la siguiente ilustración y se detectó en las pruebas de tres (3) estudiantes.

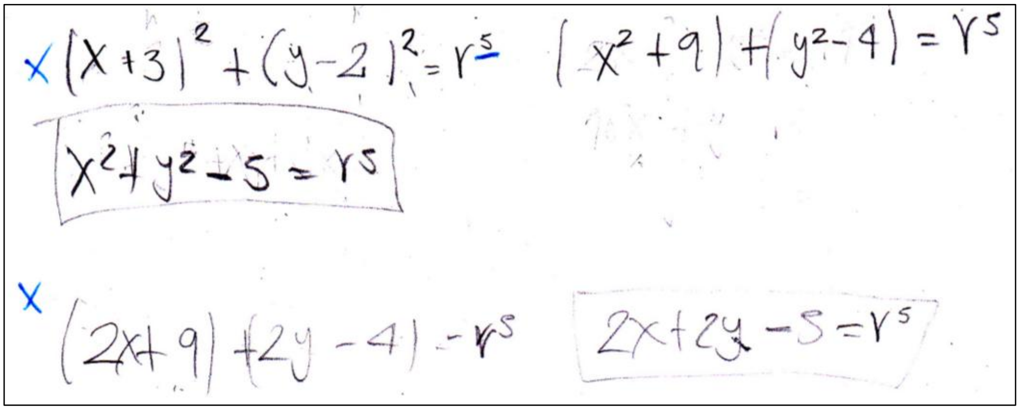
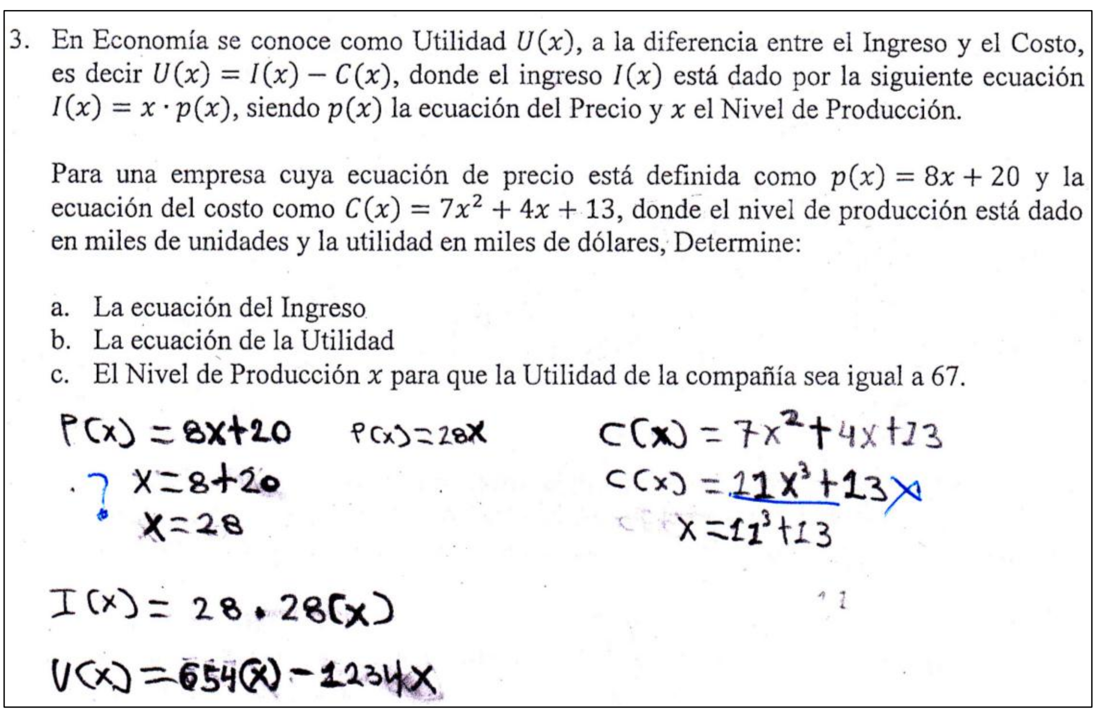


Ilustración 19. Error ISn encontrado en C9E2.

En las respuestas al problema 3 se encuentran cuatro (4) variaciones del error (ISn).

- En el problema 3c se requiere una sustitución numérica donde queda planteada una ecuación de segundo grado en términos de x cuyo valor corresponde al nivel de producción establecido según el contexto del problema; esto se ve en la siguiente ilustración junto con un ejemplo del error que se describe a continuación. El estudiante plantea una ecuación para la utilidad pero no realiza la sustitución. Este error se detectó en las pruebas de ocho (8) estudiantes.

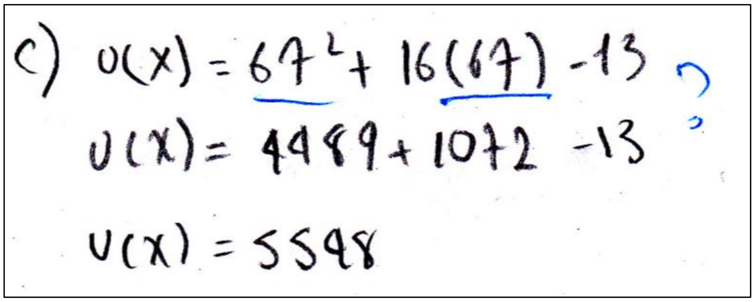

3. En Economía se conoce como Utilidad $U(x)$, a la diferencia entre el Ingreso y el Costo, es decir $U(x) = I(x) - C(x)$, donde el ingreso $I(x)$ está dado por la siguiente ecuación $I(x) = x \cdot p(x)$, siendo $p(x)$ la ecuación del Precio y x el Nivel de Producción.

Para una empresa cuya ecuación de precio está definida como $p(x) = 8x + 20$ y la ecuación del costo como $C(x) = 7x^2 + 4x + 13$, donde el nivel de producción está dado en miles de unidades y la utilidad en miles de dólares, Determine:

a. La ecuación del Ingreso
b. La ecuación de la Utilidad
c. El Nivel de Producción x para que la Utilidad de la compañía sea igual a 67.

Ilustración 20. Error ISn encontrado en C8E15.

- El estudiante identifica el valor numérico dado como nivel de producción y no como utilidad; es decir, no sustituye en la variable correcta. Este error se detectó en las pruebas de siete (7) estudiantes. Por ejemplo:



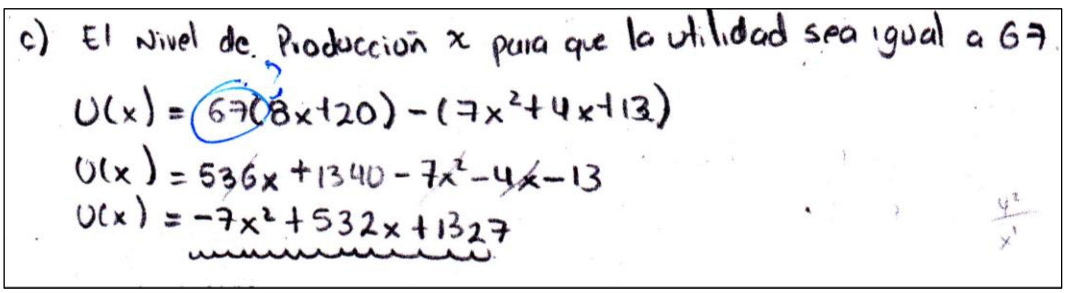
c) $U(x) = 67^2 + 16(67) - 13$?

$U(x) = 4489 + 1072 - 13$?

$U(x) = 5548$

Ilustración 21. Error ISn encontrado en C3E9.

- El estudiante sustituye el valor de la variable solo en uno de los términos de la ecuación dejando otros términos con la variable. Este error se detectó en las pruebas de cuatro (4) estudiantes y se evidencia en la siguiente ilustración.



c) El Nivel de Producción x para que la utilidad sea igual a 67.

$U(x) = 67(8x+20) - (7x^2+4x+13)$

$U(x) = 536x + 1340 - 7x^2 - 4\cancel{x} - 13$

$U(x) = -7x^2 + 532x + 1327$

Ilustración 22. Error ISn encontrado en C3E10.

- El estudiante realiza un proceso de tanteo del valor de la variable, encontrando el valor de la variable en algunos casos, sin hacer la sustitución numérica ni resolviendo la ecuación. Este error se detectó en las pruebas de cinco (5) estudiantes. Por ejemplo:

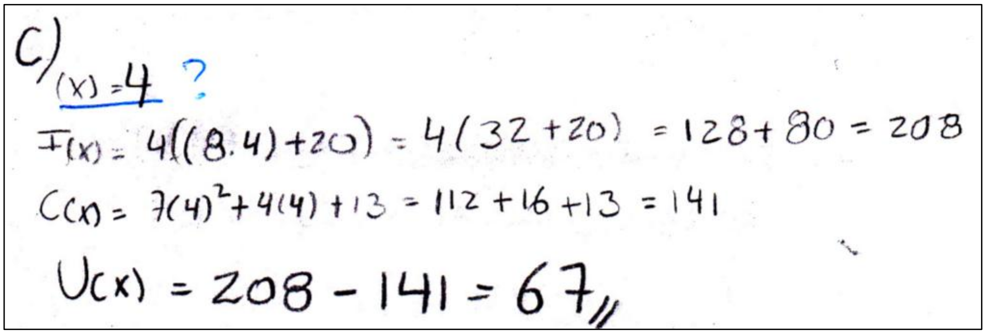


Ilustración 23. Error ISn encontrado en C9E4.

La pregunta 3c la dejan de contestar trece (13) estudiantes, dos (2) de C3, siete (7) de C8 y cuatro (4) de C9 no permitiendo identificar algún tipo de error ISn o acierto.

En las respuestas al problema 4 se encuentran dos (2) variaciones del error ISn.

- El estudiante sustituye el mismo valor numérico en letras distintas. Este error se muestra en la siguiente ilustración y se detectó en las pruebas de nueve (9) estudiantes.

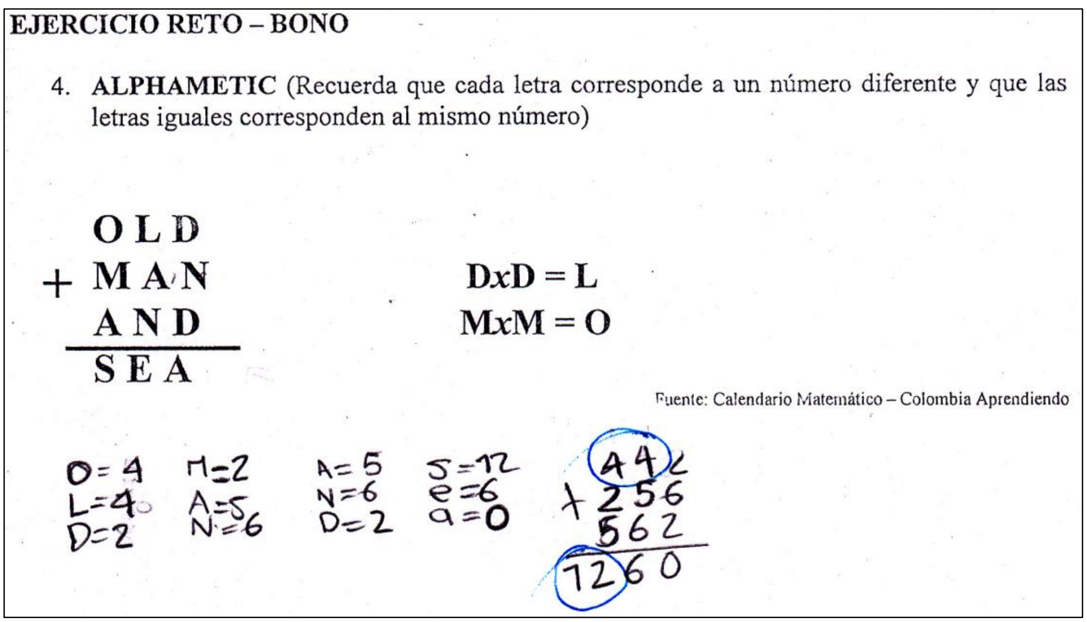


Ilustración 24. Error ISn encontrado en C8E1.

- El estudiante sustituye la letra por valores de dos cifras cuando las condiciones del ejercicio admite solo dígitos. Este error se detectó en las pruebas de dieciséis (16) estudiantes. Por ejemplo:

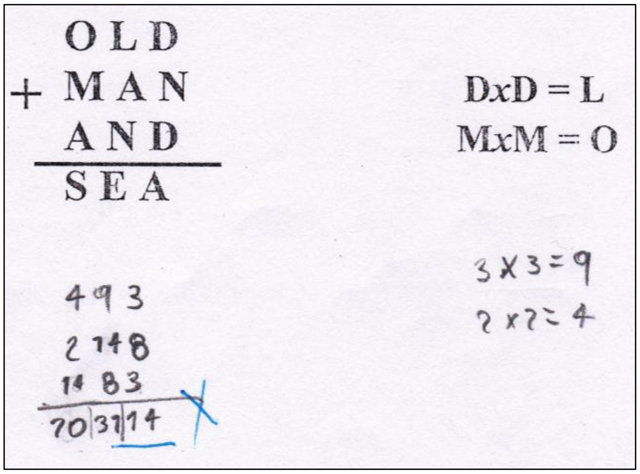


Ilustración 25. Error ISn encontrado en C8E2.

En el problema 5 no se contempla la sustitución numérica.

4.1.5. Errores relativos al mal uso de la sustitución formal. (ISf)

La sustitución formal solo se evidencia en el problema 3 en los literales a y b donde se solicita expresar el ingreso haciendo uso de la ecuación del precio y la utilidad haciendo uso de las ecuaciones del ingreso y el costo (anexo A).

La cantidad de errores que en total se presentaron, según la unidad de análisis ISf, en las pruebas seleccionadas por curso se muestran en la siguiente tabla:

Curso/Pregunta	P3
11-03 (Ingeniería)	14
11-08 (Robótica)	3
11-09 (ciencias de la salud)	9
Total	26

Tabla 12. Cantidad de errores relativos al mal uso de la sustitución formal (ISf).

Este tipo de error se encontró en las respuestas con cinco (5) variaciones diferentes según las pruebas revisadas.

- El estudiante realiza una sustitución incompleta dejando un producto indicado sin un factor. Este error se observa en la siguiente ilustración y se detectó en las pruebas de dos (2) estudiantes.

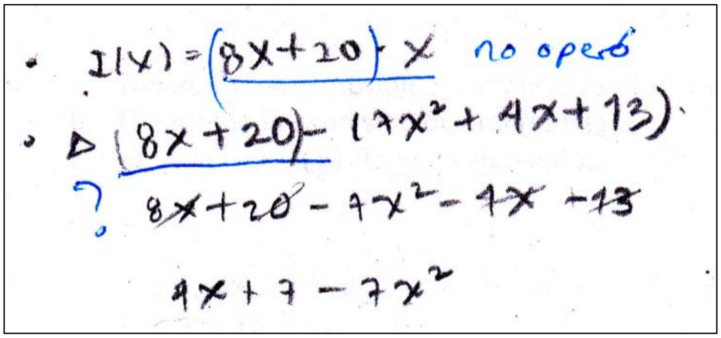


Ilustración 26. Error ISf encontrado en C3E4.

- El estudiante al sustituir un polinomio en una expresión algebraica no escribe el paréntesis cuando un signo negativo precede al polinomio. Este error se detectó en las pruebas de siete (7) estudiantes. Por ejemplo:

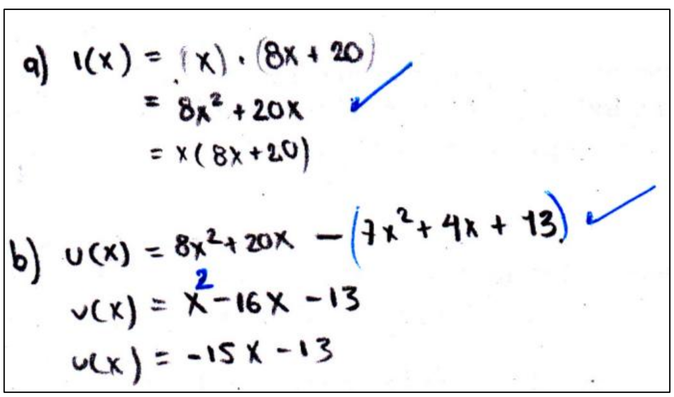


Ilustración 27. Error ISf encontrado en C3E5.

- El estudiante no escribe el paréntesis en el polinomio cuando este se sustituye en un producto. Este error se muestra en la siguiente ilustración y se detectó en las pruebas de nueve (9) estudiantes.

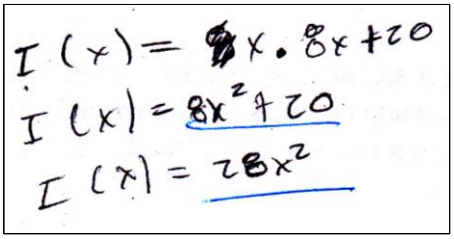


Ilustración 28. Error ISf encontrado en C8E6.

- El estudiante no identifica la relación de equivalencia entre las expresiones algebraicas ni la posibilidad que existe para sustituir estas expresiones en otras equivalencias dadas en el ejercicio. Este error se detectó en las pruebas de siete (7) estudiantes. Por ejemplo:

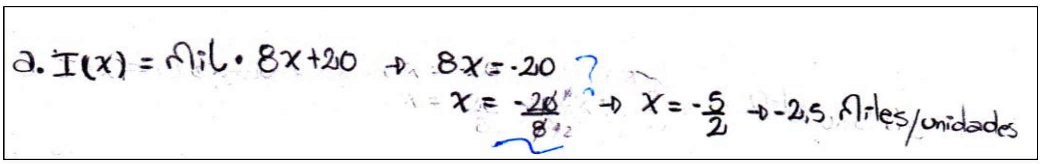


Ilustración 29. Error ISf encontrado en C3E22.

- El estudiante no sustituye por las expresiones algebraicas correctas. Este error se detectó en la prueba del estudiante C3E14, como se puede observar en la siguiente ilustración:

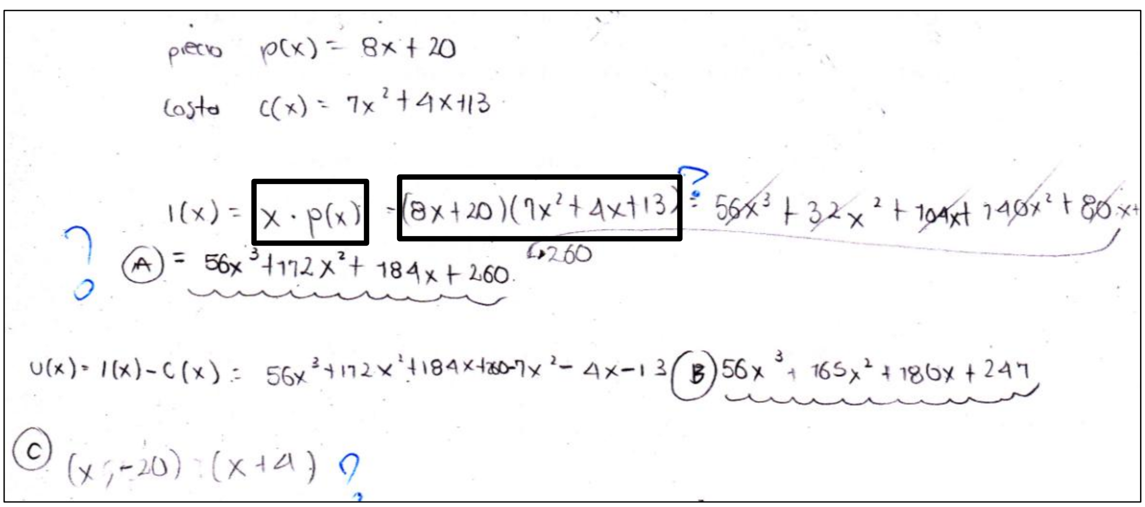


Ilustración 30. Error ISf encontrado en C3E14.

Es de anotar, que el error de no escribir paréntesis en el polinomio cuando este se sustituye en un producto o está precedido de un signo menos, en algunos estudiantes no afecta el resultado ya que el proceso que aplican posteriormente es correcto; por ejemplo:

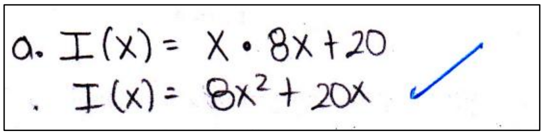


Ilustración 31. Error ISf encontrado en C3E16.

Sin embrago, es un error en la escritura que puede conllevar a errores según la complejidad del contexto en que se encuentre.

Esta unidad de análisis ISf no se verificó en todas las respuestas dado que los estudiantes que presentaron errores relativos al uso de la letra, no evidenciaron errores en la sustitución formal.

4.1.6. Errores en los procedimientos (APr)

La cantidad de errores que en total se presentaron, según la unidad de análisis APr, en las pruebas seleccionadas por curso y por problemas resueltos se muestran en la siguiente tabla:

Curso/Pregunta	P1	P3	P4	P5	Total
11-03 (Ingeniería)	8	7	0	9	24
11-08 (Robótica)	7	3	0	5	15
11-09 (ciencias de la salud)	17	6	0	2	25
Total	32	16	0	16	65

Tabla 13. Cantidad de errores en los procedimientos (APr).

Este tipo de error se encontró en las respuestas al problema 1 con cuatro (4) variaciones diferentes según las pruebas revisadas.

- El estudiante en el producto notable suma o diferencia al cuadrado distribuye el exponente en cada término del binomio. Este error se detectó en las pruebas de veintisiete (27) estudiantes. Por ejemplo:

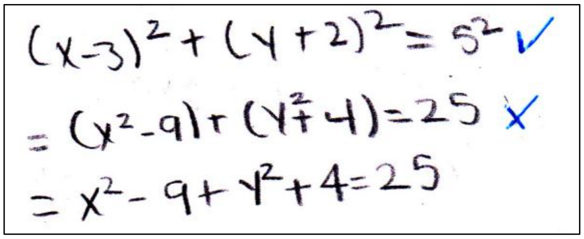


Ilustración 32. Error APr encontrado en C9E10.

- El estudiante al aplicar la regla del producto notable suma o diferencia al cuadrado omite el doble en el segundo término. Este error se puede observar en la siguiente ilustración y se detectó en las pruebas de tres (3) estudiantes.

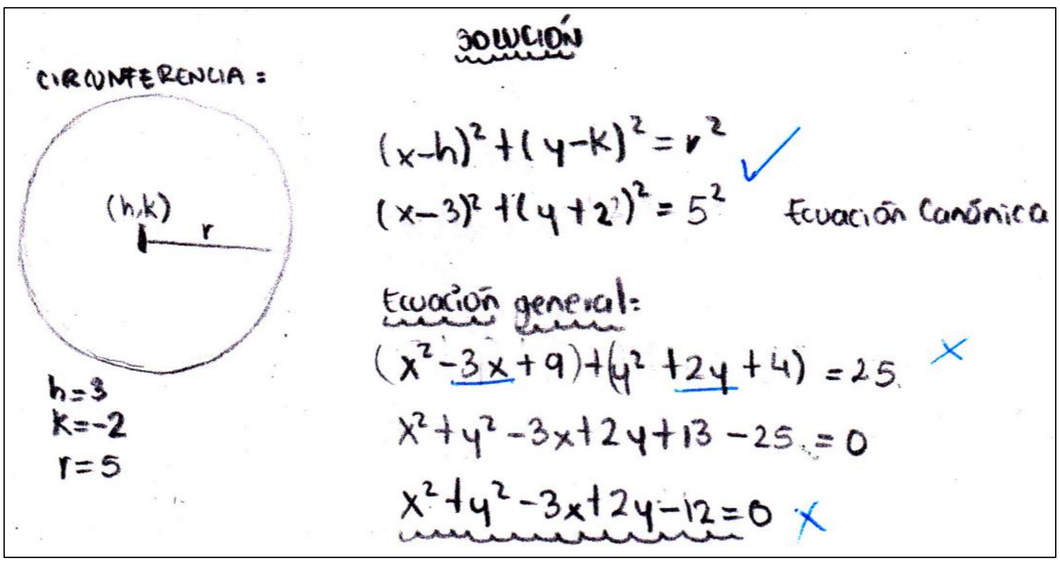


Ilustración 33. Error APr encontrado en C3E10.

- El estudiante al aplicar la regla del producto notable diferencia al cuadrado mantiene el tercer término negativo. Este error se detectó en la prueba del estudiante C3E21, como se puede observar en la siguiente ilustración:

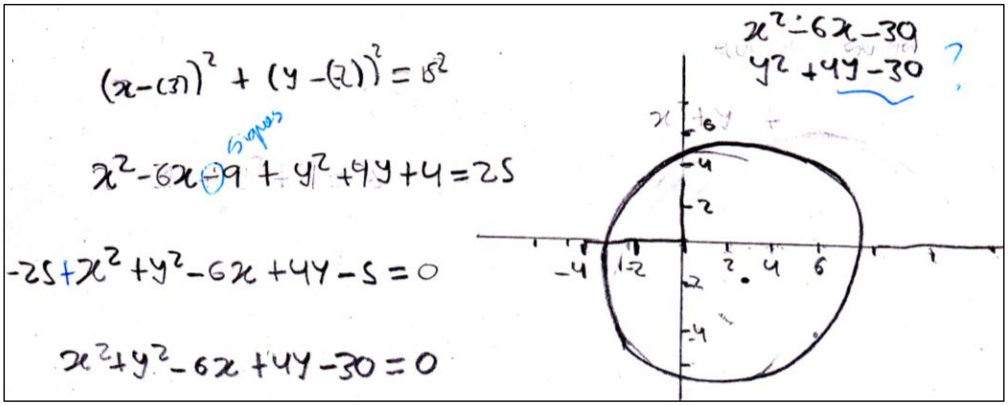


Ilustración 34. Error APr encontrado en C3E21.

- El estudiante aplica parcialmente la regla del producto notable. Este error se detectó en la prueba del estudiante C8E7, como se puede observar en la siguiente ilustración:

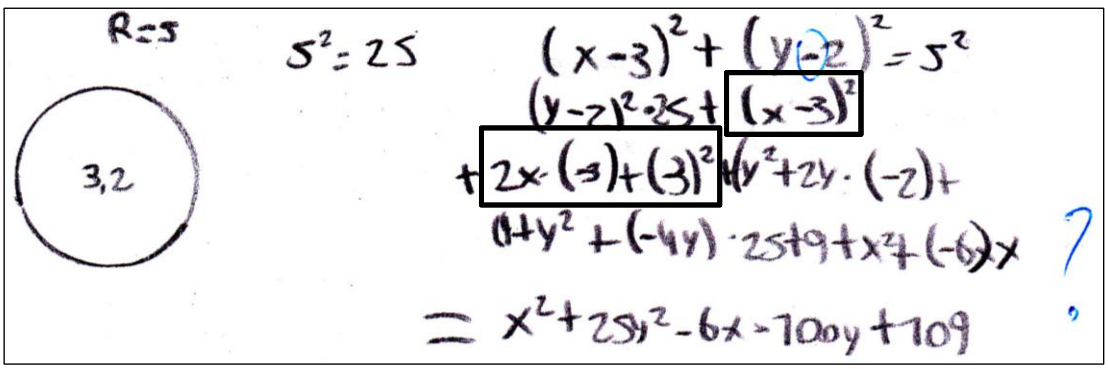


Ilustración 35. Error APr encontrado en C8E7.

La pregunta 1 incluye resolver los productos notables que se plantean para determinar la ecuación general de la circunferencia dada la ecuación canónica; este proceso lo dejan de contestar catorce (14) estudiantes; tres (3) de C3, ocho (8) de C8 y tres (3) de C9 no permitiendo identificar algún tipo de error o acierto.

En las respuestas a los problemas 3 y 5 se encuentran cinco (5) variaciones del error (APr).

- El estudiante plantea el producto entre expresiones algebraicas y no utiliza la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición que le permite identificar y simplificar términos semejantes dejando la expresión reducida. Este error se detectó en las pruebas de trece (13) estudiantes. Por ejemplo:

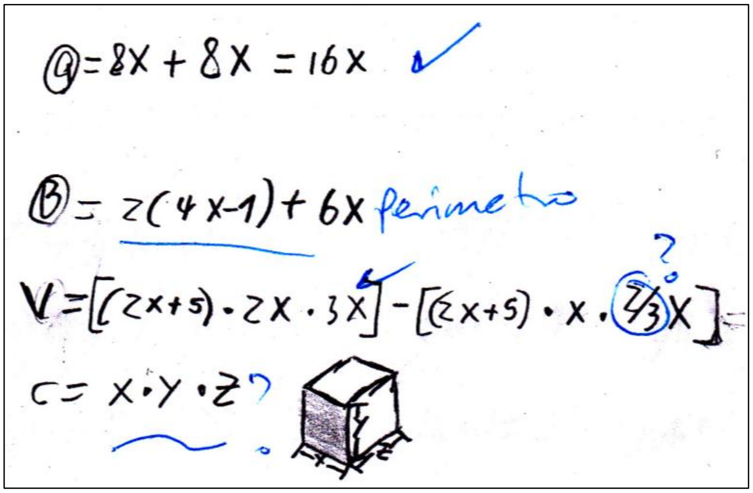


Ilustración 36. Error APr encontrado en C8E20.

- El estudiante plantea la diferencia entre polinomios teniendo en cuenta el uso de paréntesis y no aplica el opuesto del polinomio para simplificar términos semejantes y expresar el polinomio simplificado. Este error se detectó en las pruebas de cuatro (4) estudiantes y se muestra en la siguiente ilustración.

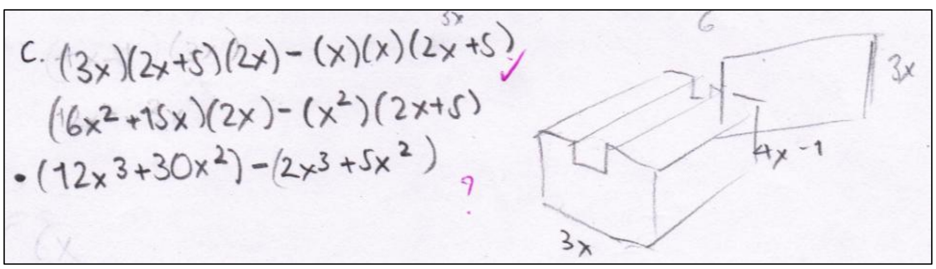


Ilustración 37. Error APr encontrado en C3E6.

- El estudiante solo aplica el opuesto al primer término del polinomio cuando este está precedido de un signo negativo. Este error se detectó en las pruebas de siete (7) estudiantes. Por ejemplo:

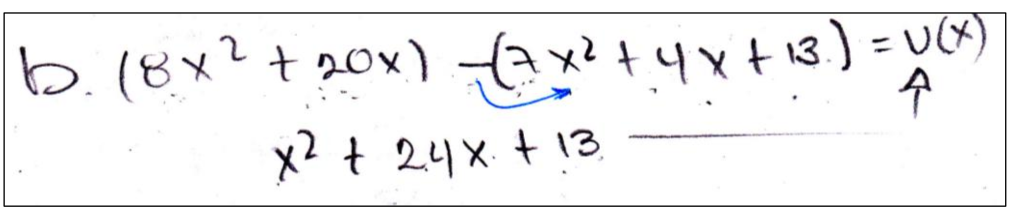


Ilustración 38. Error APr encontrado en C9E5.

- El estudiante no identifica los factores en la expresión algebraica que plantea, agrega paréntesis y opera polinomios que no debía operar. Este error se detectó en la prueba del estudiante C3E17, como se puede observar en la siguiente ilustración:

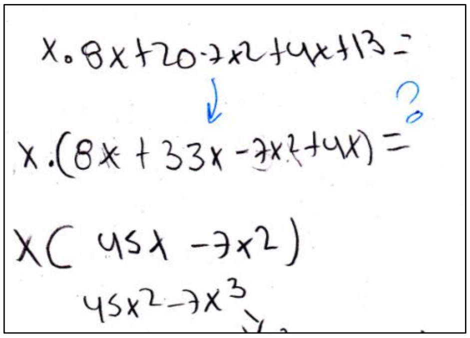


Ilustración 39. Error APr encontrado en C3E17.

- El estudiante al multiplicar un monomio por un binomio solo multiplica el monomio por el primer término del binomio. Este error se detectó en las pruebas de siete (7) estudiantes. Por ejemplo:

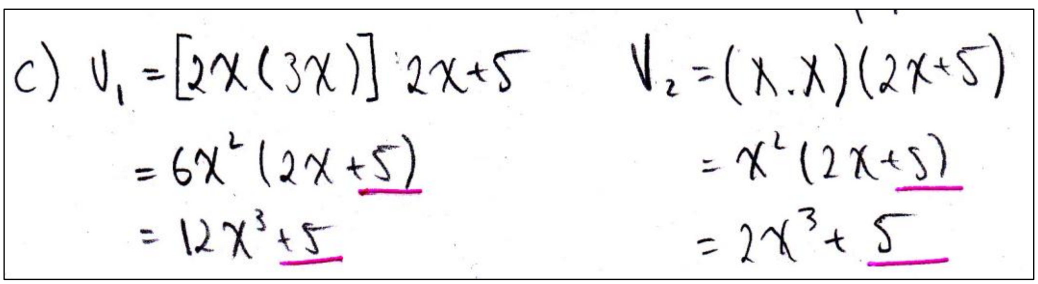


Ilustración 40. Error APr encontrado en C3E9.

En el problema 4 no se contemplan procedimientos de tipo algebraico.

Esta unidad de análisis (APr) no se pudo verificar en todas las respuestas dado que los estudiantes que presentaron errores relativos al uso de la letra, no evidenciaron errores en los procedimientos que se tuvieron en cuenta en este estudio debido a que no se logran presentar estos procesos.

4.1.7. Errores relativos a cálculos numéricos (ACn)

La cantidad de errores que en total se presentaron, según la unidad de análisis ACn, en las pruebas seleccionadas por curso y por problemas resueltos se muestran en la siguiente tabla:

Curso/Pregunta	P1	P3	P4	P5	Total
11-03 (Ingeniería)	7	1	3	0	11
11-08 (Robótica)	0	1	11	0	12
11-09 (ciencias de la salud)	10	0	4	0	14
Total	17	2	18	0	37

Tabla 14. Cantidad de errores relativos a cálculos numéricos. (ACn).

Este tipo de error se encontró en las respuestas a los problemas 1, 3 y 4 con cinco (5) variaciones diferentes según las pruebas revisadas.

- El estudiante deja indicadas, en las expresiones algebraicas, operaciones entre valores numéricos. Este error se observa en la siguiente ilustración y se detectó en las pruebas de dieciséis (16) estudiantes.

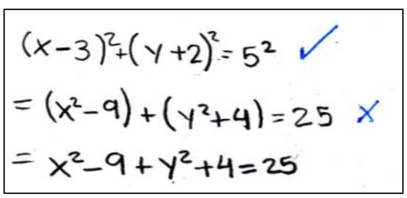


Ilustración 41. Error ACn encontrado en C9E21.

- El estudiante no opera correctamente sumas entre valores numéricos. Este error se detectó en las pruebas de ocho (8) estudiantes. Por ejemplo:

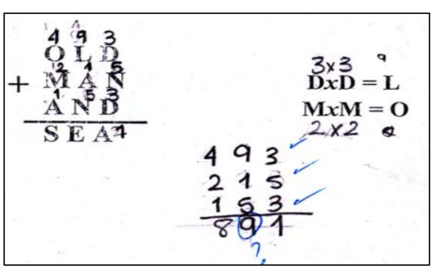
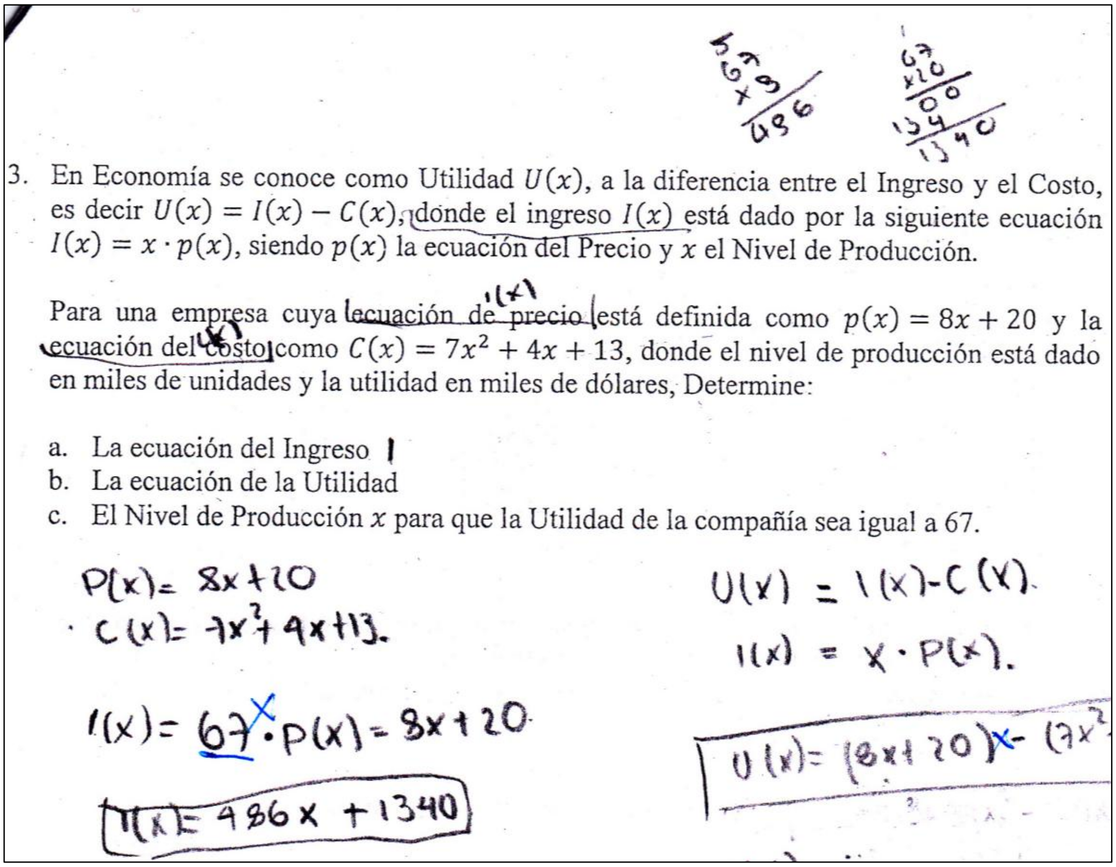


Ilustración 42. Error ACn encontrado en C9E15.

- El estudiante presenta errores al multiplicar dos valores numéricos. Este error se detectó en la prueba de C3E25, como se observa en la ilustración, donde se evidencia en el borde de la margen superior el cálculo y al final de la imagen el resultado.



67
x 8
486

67
x20
00
134
1340

3. En Economía se conoce como Utilidad $U(x)$, a la diferencia entre el Ingreso y el Costo, es decir $U(x) = I(x) - C(x)$, donde el ingreso $I(x)$ está dado por la siguiente ecuación $I(x) = x \cdot p(x)$, siendo $p(x)$ la ecuación del Precio y x el Nivel de Producción.

Para una empresa cuya ecuación de precio está definida como $p(x) = 8x + 20$ y la ecuación del costo como $C(x) = 7x^2 + 4x + 13$, donde el nivel de producción está dado en miles de unidades y la utilidad en miles de dólares, Determine:

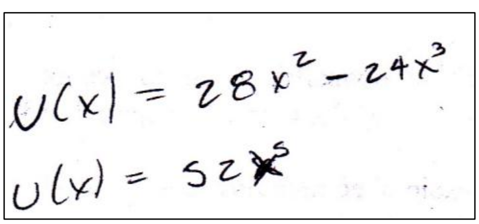
a. La ecuación del Ingreso
b. La ecuación de la Utilidad
c. El Nivel de Producción x para que la Utilidad de la compañía sea igual a 67.

$P(x) = 8x + 20$
$C(x) = 7x^2 + 4x + 13.$
$I(x) = 67x \cdot P(x) = 8x + 20.$
$\boxed{I(x) = 486x + 1340}$

$U(x) = I(x) - C(x).$
$I(x) = x \cdot P(x).$
$U(x) = (8x + 20)x - (7x^2$

Ilustración 43. Error ACn encontrado en C3E25.

- El estudiante confunde una resta con una suma. Este error se puede observar en la respuesta del estudiante C8E6 que aparece en la siguiente ilustración.



$U(x) = 28x^2 - 24x^3$
$U(x) = 52x^5$

Ilustración 44. Error ACn encontrado en C8E6.

- El estudiante escribe dos cifras, en una suma horizontal, en una casilla que le corresponde solo a una cifra. Este error se detectó en las pruebas de once (11) estudiantes. Por ejemplo:

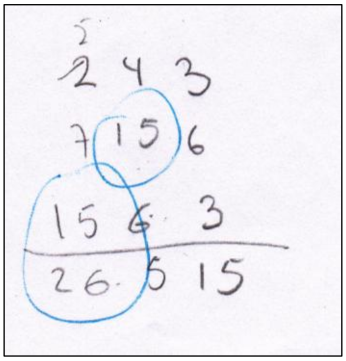


Ilustración 45. Error ACn encontrado en C3E26.

En el problema 5 no se presentaron errores en el cálculo numérico posiblemente porque el problema contempla cálculos sencillos entre valores numéricos.

4.2. Errores detectados por curso

En la siguiente tabla se establece la cantidad de errores cometidos por cada curso, en las pruebas revisadas, según las unidades de análisis planteadas en el capítulo anterior.

Curso/Unidad de Análisis	LEv	LIg	ISe	ISn	ISf	APr	ACn	Total
11-03 (Ingeniería)	4	6	2	26	14	24	11	87
11-08 (Robótica)	8	18	4	31	3	15	12	91
11-09 (ciencias de la salud)	2	12	0	23	9	24	13	83
Total	14	36	6	80	26	63	36	261

Tabla 15. Cantidad de errores por curso y por unidad de análisis.

Es importante aclarar que en cada curso aparecen más errores que pruebas revisadas y eso se debe a que en un mismo ejercicio se pueden encontrar diferentes errores dependiendo de los procesos a realizar.

Como se observa, la mayor frecuencia se encuentra en la sustitución numérica (ISn) y en la aplicación de procedimientos de tipo algebraico (APr), ochenta (80) y sesenta y tres (63) errores encontrados, respectivamente.

En general, los errores por curso son equitativos entre ellos y corresponden de manera proporcional al número de problemas resueltos por cada curso.

En la siguiente tabla se realiza una recopilación de los errores encontrados según cada una de análisis.

5. CONCLUSIONES

En este capítulo, se exponen las conclusiones del presente trabajo, anotando todo aquello que se considera fue lo más significativo de este estudio. El capítulo se desarrolla en tres secciones; en la primera se presentan las conclusiones con respecto a los objetivos planteados del trabajo, luego con respecto al rol de "investigadora" y por último en el rol como docente

5.1. CONCLUSIONES RESPECTO A LOS OBJETIVOS PLANTEADOS

Con respecto a los objetivos, planteados al inicio del desarrollo del presente estudio, se logra consolidar la prueba con la que posteriormente se desarrolla la identificación y descripción de los errores que presentaron los estudiantes de grado 11 – 2016 del colegio INEM Francisco de Paula Santander de Bogotá, en el uso del lenguaje algebraico al dar solución a algunos problemas. Además, gracias a la revisión bibliográfica, a la organización del material consultado y al análisis de la información que se indagó, junto con la identificación y descripción de los errores que se encontraron, la docente "investigadora" amplió y organizó su conocimiento frente al tema de investigación, debido a que identificó diferentes formas en que puede aparecer un tipo de error; así como, la identificación de nuevos errores en el uso del lenguaje algebraico; un tema que con frecuencia se encuentra en su rol como docente.

Frente a la información recolectada, clasificada y descrita podemos concluir que se presentan diversas variaciones de las unidades de análisis planteadas en este estudio, generando subcategorías, que se dan según como el estudiante aborde el conocimiento o los procesos; por tal motivo, es indispensable que el docente reconozca a cada uno de sus estudiantes tanto desde sus habilidades como desde sus dificultades para que así mismo los pueda apoyar. Además, se considera importante que el estudio de los errores haga parte del conocimiento del docente en su rol como educador debido a que con ello puede apoyar a sus estudiantes en la aprehensión del conocimiento.

Los tipos de errores más comunes encontrados en el presente estudio son:

1. Letra Ignorada donde el estudiante opera los valores numéricos de cada término sin tener en cuenta si son o no términos semejantes.
2. Letra Ignorada donde el estudiante no le da sentido a la letra y la escribe en algunos términos para poder operar.
3. En sustitución numérica donde el estudiante no sustituye correctamente un valor negativo dado en una expresión que contiene términos negativos.
4. En sustitución numérica donde el estudiante no sustituye en la variable correcta.
5. En sustitución numérica donde el estudiante sustituye el mismo valor numérico en letras distintas.
6. En sustitución numérica donde el estudiante sustituye la letra por valores de dos cifras cuando las condiciones del ejercicio admiten solo dígitos.
7. En sustitución formal cuando el estudiante no escribe el paréntesis cuando un signo precede al polinomio o cuando el polinomio se sustituye en un producto.
8. En el desarrollo de procedimientos al solucionar un producto notable suma o diferencia al cuadrado donde el estudiante distribuye el exponente en cada término del binomio.
9. En el desarrollo de procedimientos al plantear un producto entre expresiones algebraicas ya que no utiliza la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición, que permite simplificar expresiones.
10. En el desarrollo de procedimientos al plantear una diferencia entre polinomios y solo aplicar el opuesto al primer término del polinomio precedido del signo negativo.
11. En el desarrollo de procedimientos al plantear un producto entre un monomio y un polinomio y solo multiplicar el monomio por el primer término del polinomio.
12. Al desarrollar cálculos numéricos el estudiante deja indicadas, en las expresiones algebraicas, operaciones entre valores numéricos no permitiendo la simplificación de la expresión algebraica.

5.2. CONCLUSIONES RESPECTO AL ROL DE “INVESTIGADORA”

La docente en su rol de “investigadora” amplió sus conocimientos en el planteo y delimitación del campo de investigación de una idea de estudio, en la organización y análisis del material bibliográfico como herramienta para centrar y darle forma al desarrollo del trabajo.

En relación a la prueba, planteada y desarrollada por los estudiantes, se evidenció, posterior a su aplicación, que se encontraban problemas con un mayor nivel de complejidad en su solución lo que conllevó a la no realización de algunos y posiblemente a un bloqueo para los estudiantes; además, se evidenció la importancia de diseñar primero las unidades de análisis, antes de consolidar la prueba para que se planteen problemas que permitan evidenciar los errores o aciertos en los procesos que se desean estudiar.

Algunos de los errores encontrados, en el presente estudio, son nombrados en los estudios consultados en el marco referencial. Ellos son:

1. Letra Ignorada donde el estudiante opera los valores numéricos de cada término sin tener en cuenta si son o no términos semejantes.
2. En sustitución numérica donde el estudiante no sustituye correctamente un valor negativo dado en una expresión que contiene términos negativos.
3. En sustitución formal cuando el estudiante no escribe el paréntesis cuando un signo precede al polinomio o cuando el polinomio se sustituye en un producto.
4. En el desarrollo de procedimientos al solucionar un producto notable suma o diferencia al cuadrado donde el estudiante distribuye el exponente en cada término del binomio.

Esto nos lleva a estar más atentos en el momento de enseñar estos procedimientos o conceptos, variando la metodología y verificando la apropiación.

5.3. CONCLUSIONES RESPECTO AL ROL COMO DOCENTE

Dentro del ejercicio docente es necesario estar planteando pruebas o evaluaciones para evidenciar la apropiación, o no, de procesos, conocimientos y la aplicación, o no, de los mismos en la solución de problemas que se les presente a los estudiantes, para replantear la dinámica general de la clase.

En el desarrollo del presente trabajo se rescató la importancia de pensar, organizar y decidir muy bien los ejercicios que se seleccionan para un instrumento de evaluación; teniendo en cuenta nivel de complejidad y de exigencia, para que el estudiante mantenga su motivación y se sienta retado, sin perder el interés y para que logre la solución de los ejercicios o problemas planteados.

La solución al instrumento no evidencia, en algunos casos el procedimiento seguido por un estudiante; en este sentido es muy importante que el profesor: 1) no se quede con solo estas evidencias al momento de evaluar, 2) genere estrategias para que los procedimientos que no resultan exitosos puedan también ser expuestos, debido a que a partir de ellos se pueden evidenciar dificultades que se pueden corregir a tiempo.

Al realizar este trabajo la autora hizo conciencia sobre el uso del igual en el álgebra, tanto en el sentido unidireccional procedente de la aritmética como de su sentido bidireccional. Además; la cantidad de conexiones de información, mínimas, que debe hacer un estudiante para realizar el proceso de sustitución numérica y de sustitución formal.

Se evidencia la importancia de la precisión en la escritura de las expresiones; por ejemplo, en el uso de paréntesis, debido a que si no se atiende en casos sencillos puede llevar a errores en expresiones complejas.

Es indispensable que el docente esté atento al desarrollo del proceso de aprehensión del conocimiento para lograr identificar los errores que pueden llegar a cometer sus estudiantes y así poderlos apoyar en la superación de las dificultades encontradas.

Considero pertinente que los docentes conozcan sobre el estudio de errores, no solo en el uso del lenguaje algebraico, sino en general; ya que les permite tener herramientas adicionales para abordar los temas y poder corregir los errores que sus estudiantes puedan cometer.

BIBLIOGRAFÍA

Alcalá, M. (2002). *La construcción del lenguaje matemático*. España: Editorial Graó Colección Biblioteca de Uno.

Alonso, F., Barbero, C., Fuentes, I. & otros. Grupo Azarquiel. (1993). *Ideas y actividades para enseñar algebra.* Madrid, España, Editorial Síntesis, S.A.

Aravena, M.; Kimelman E; y otros. (2006). *Investigación educativa I.* Chile: Universidad Arcis.

Astolfi, J. P. (1999). *El "error", un medio para enseñar*. Serie Práctica (Lectura 18, Unidad 9). Sevilla, España.

Cerdán, F. (2010). *Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraico: un catálogo de errores*. PNA, 4(3), p. 99-110.

D'Amore. (2006). *Didáctica de la matemática.* Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Esquinas, A. (2009). *Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico: Del símbolo a la formalización algebraica: Aplicación a la práctica docente* (Tesis Doctoral). Universidad Complutense de Madrid, España.

Franchi, L.; Rincon, A. H. (2004). *Tipología de errores en área de la geometría plana.* Revista Educere Investigación Arbitrada. ISSN: 1316-4910. (Año 8, No. 24), p. 63 – 71.

García, J. (2010). *Análisis de errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas por alumnos de primer ingreso en nivel licenciatura* (Tesis de Maestría). Universidad de Granada, España.

García, J., Segovia, I. y Lupiáñez, J. L. (2011). *Errores y dificultades de estudiantes mexicanos de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas*. Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011 (p. 145-155). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Garriga, M. (2011*). El lenguaje algebraico: Un estudio con alumnos de tercer curso de educación secundaria obligatoria* (Tesis de Doctoral). Universidad de Zaragoza, España.

Godino, J. D.; Batanero C. y Font V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática para maestros*. Granada, España: Universidad de Granada. Distribución en Internet: *http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/*

Gómez, P. (1998). *Profesor: no entiendo. Reflexiones alrededor de una experiencia en docencia de las matemáticas.* Bogotá: Una Empresa Docente.

Gómez-Granell, C. (1989). *La adquisición del lenguaje matemático: un difícil equilibrio entre el rigor y el significado*. Comunicación, Lenguaje y Educación, 3-4, 5-16.

González, A. y González, F. (2014). *Historia social de la educación matemática en Iberoamérica: Consideraciones históricas y didácticas relacionadas con el símbolo algebraico de igualdad*. Revista Iberoamericana de educación Matemática. (13), p. 181 – 198.

González, E. (2012). *Del lenguaje natural al lenguaje algebraico. El significado de la variable. Una propuesta didáctica basada en el planteamiento y resolución de problemas* (Tesis de Maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Hernández, R.; Fernández C. & otros. (1997). *Metodología de la investigación.* Colombia: Editorial McGraw – Hill.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Serie lineamientos curriculares*. *mineducacion.gov.co*. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf8.pdf.

Palarea, M. M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años* (Tesis Doctoral). Universidad de la laguna, España.

Palarea, M. M. (1999). *La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones de una investigación.* Revista de didáctica de las matemáticas Números. (40), p. 3 – 28.

Pochulu, M.D. (2003). *Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad.* Revista Iberoamericana de Educación Matemática. ISSN: 1681-5653. Argentina: Universidad Nacional de Villa María.

Ponte, J. P. (2004). *Problemas e investigaciones en la actividad matemática d los alumnos.* La actividad matemática en el aula. Grupo de investigación DIF. Departamento de educación y Centro de investigación en Educación. Universidad de Lisboa, Barcelona: Graó, p. 25-34.

Rodríguez, S. (2015). Traducción entre los sistemas de representación simbólico y verbal: Un estudio con alumnado que inicia su formación algebraica en secundaria (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, España.

Ruano, R. M., Socas, M. M. & Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. PNA 2(2), 61-74.

Socas, M. M & Camacho, M. (2003). *Conocimiento matemático y enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria. Algunas reflexiones.* Boletín de la Asociación Matemática Venezolana. (X, No. 2). p. 151 – 171.

Socas, M. M., Hernández, J., & Palarea, M. M. (2014). *Dificultades en la resolución de problemas de Matemáticas de estudiantes para Profesor de Educación Primaria y Secundaria*. Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática - 2014 (pp. 145-154). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.

ANEXOS

Anexo A. Prueba aplicada a la muestra.

MATEMÁTICAS
Taller
2016

Docente: Sandra P. Morales

Nombre: ____________________________ **Curso:** ___ **Fecha:** _________________

Institución: ____

Lea cuidadosamente cada enunciado con su correspondiente instrucción. Las respuestas deben ser coherentes, completas y con su respectiva justificación.
NO SE PERMITE EL USO DE CALCULADORA.

1. La ecuación canónica de una circunferencia está dada por $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ donde r es el radio y (h,k) es el centro, si se desarrollan las operaciones indicadas se obtiene la ecuación general con la forma $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

   Si una circunferencia tiene centro en (3,-2) y $r=5$, determine la ecuación canónica y la ecuación general de la circunferencia.

2. Una caja sin tapa ha de construirse al cortar cuadrados de 3 pulgadas de las esquinas de una lámina rectangular de hojalata cuya longitud es el doble de su ancho. ¿Una lámina de qué medidas producirá una caja que tenga un volumen de 60 $pulg^3$?

3. En Economía se conoce como Utilidad $U(x)$, a la diferencia entre el Ingreso y el Costo, es decir $U(x) = I(x) - C(x)$, donde el ingreso $I(x)$ está dado por la siguiente ecuación $I(x) = x \cdot p(x)$, siendo $p(x)$ la ecuación del Precio y x el Nivel de Producción.

   Para una empresa cuya ecuación de precio está definida como $p(x) = 8x + 20$ y la ecuación del costo como $C(x) = 7x^2 + 4x + 13$, donde el nivel de producción está dado en miles de unidades y la utilidad en miles de dólares, Determine:

   a. La ecuación del Ingreso
   b. La ecuación de la Utilidad
   c. El Nivel de Producción x para que la Utilidad de la compañía sea igual a 67.

EJERCICIO RETO – BONO

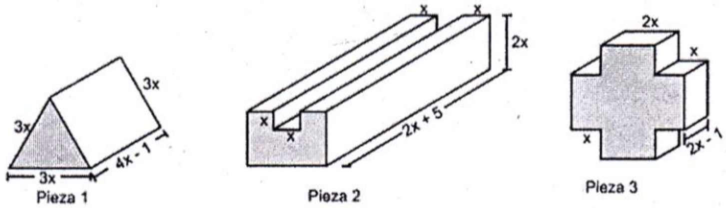
4. **ALPHAMETIC** (Recuerda que cada letra corresponde a un número diferente y que las letras iguales corresponden al mismo número)

$$\begin{array}{r} \mathbf{OLD} \\ +\ \mathbf{MAN} \\ \mathbf{AND} \\ \hline \mathbf{SEA} \end{array}$$

D*x*D = L
M*x*M = O

Fuente: Calendario Matemático – Colombia Aprendiendo

5. Las piezas de la ilustración son utilizadas en la industria de la ornamentación como piezas de seguridad. Se han dejado las dimensiones de cada pieza en términos de x ya que los tamaños pueden variar de acuerdo con las necesidades de los compradores.

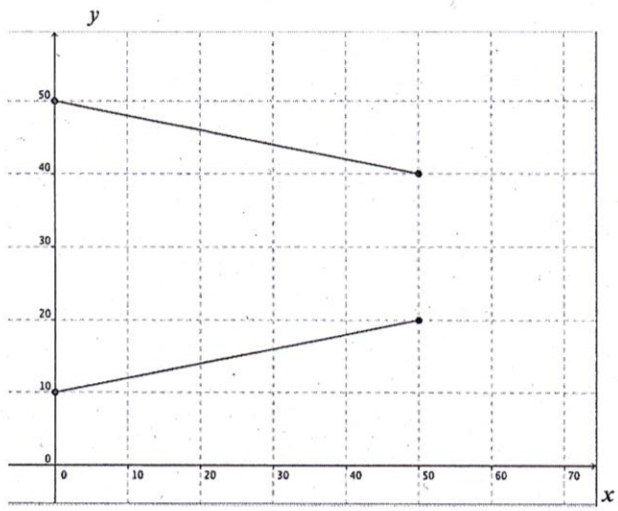


a. Determine la expresión que representa el perímetro de la cara frontal de la pieza 3
b. Determine la expresión que representa el área de la cara lateral de la pieza 1
c. El volumen $V(x)$ de una caja común se halla multiplicando el área de la base por la altura, es decir aplicando la fórmula $V(x) = Ab \cdot h$. Por ejemplo, en  el volumen es $V(x) = x^2 \cdot y$

Determine el volumen de la pieza 2

6. En economía se denomina punto de equilibrio a aquel en el que coinciden la oferta y la demanda. El siguiente gráfico muestra la oferta $g(x)$ y la demanda $f(x)$ de cierto producto.

   Dado que cada recta en el plano se expresa algebraicamente como $f(x) = mx + b$, donde m es la pendiente y b es el intercepto con el eje y, encuentre la ecuación de la oferta y la ecuación de la demanda y luego determine el punto de equilibrio.



Anexo B. Prueba del estudiante C3E8

8.

MATEMÁTICAS
Taller
2016

Docente: Sandra P. Morales

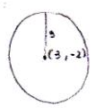
Nombre: [redacted] **Curso:** 11 **Fecha:** 17/05/2016

Institución: INEM Kennedy

Lea cuidadosamente cada enunciado con su correspondiente instrucción. Las respuestas deben ser coherentes, completas y con su respectiva justificación. NO SE PERMITE EL USO DE CALCULADORA.

1. La ecuación canónica de una circunferencia está dada por $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ donde r es el radio y (h,k) es el centro, si se desarrollan las operaciones indicadas se obtiene la ecuación general con la forma $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

   Si una circunferencia tiene centro en (3,-2) y $r=5$, determine la ecuación canónica y la ecuación general de la circunferencia.



$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ $\quad (y-(-2)) = (y+2)$

$(x-3)^2+(y+2)^2=5^2$ ✓

$(x-3)(x-3)+(y+2)(y+2)=25$

$x^2-3x-3x+9+y^2+2y+2y+4=25$

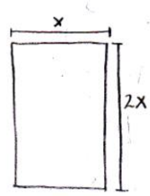
$x^2-6x+9+y^2+4y+4=25$

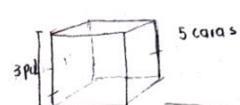
$x^2+y^2-6x+4y+13=25$

$x^2+y^2-6x+4y+13-25=0$

$x^2+y^2-6x+4y-12=0$ ✓

2. Una caja sin tapa ha de construirse al cortar cuadrados de 3 pulgadas de las esquinas de una lámina rectangular de hojalata cuya longitud es el doble de su ancho. ¿Una lámina de qué medidas producirá una caja que tenga un volumen de 60 $pulg^3$?





$2x = x$

$x = \frac{x}{2}$

$V = ab.h.$

$60pulg^3 = ab.h$

$a = 3pulg \cdot 3pulg$

$a = 9pulg^2$

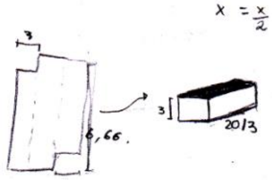
$V = (3pulg)^3$?

$= 27pulg^3$

$60pulg^3 = ab.\ 3pulg$

$\frac{60pulg^3}{3pulg} = ab$

$20pulg^2 = ab$



$x^2 \cdot y$

$3^2 \cdot y =$

$ab = b.h$

$20 = b.h$

$20 = b.3$

$20/3$

6,66 $\lfloor 2$

3,33

3. En Economía se conoce como Utilidad $U(x)$, a la diferencia entre el Ingreso y el Costo, es decir $U(x) = I(x) - C(x)$, donde el ingreso $I(x)$ está dado por la siguiente ecuación $I(x) = x \cdot p(x)$, siendo $p(x)$ la ecuación del Precio y x el Nivel de Producción.

   Para una empresa cuya ecuación de precio está definida como $p(x) = 8x + 20$ y la ecuación del costo como $C(x) = 7x^2 + 4x + 13$, donde el nivel de producción está dado en miles de unidades y la utilidad en miles de dólares, Determine:

   a. La ecuación del Ingreso
   b. La ecuación de la Utilidad
   c. El Nivel de Producción x para que la Utilidad de la compañía sea igual a 67.

$p(x) = 8x+20 \longrightarrow$ miles de unidades

$C(x) = 7x^2+4x+13 \rightarrow$ miles de dolares

$U(x) = I(x) - C(x)$

x = Nivel de producción

Px = ecuación de precio.

a. $I(x) = x \cdot (8x+20)$

$I = \boxed{8x^2+20x}$

$U = (8x^2+20x) - (7x^2+4x+13)$

$U = 8x^2+20x-7x^2-4x-13$

b. $\boxed{U = x^2+16x-13}$

c.

$67 = x^2+16x-13$

$67+13 = x^2+16x$

$80 = x^2+16x$

$0 = x^2+16x-80$

$(x-4)(x+20) = 0$

$x = 4$

$x = -20$

Rta = 4

EJERCICIO RETO – BONO

4. **ALPHAMETIC** (Recuerda que cada letra corresponde a un número diferente y que las letras iguales corresponden al mismo número) cada letra es un digito

$$\begin{array}{r} \text{OLD} \\ +\ \text{MAN} \\ \text{AND} \\ \hline \text{SEA} \end{array}$$

DxD = L

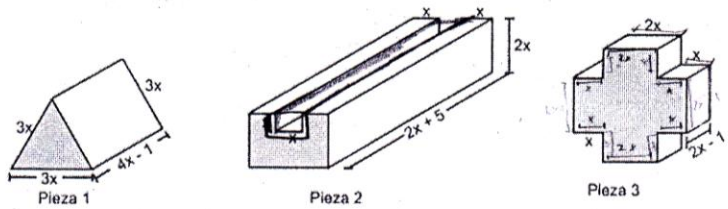
MxM = O

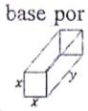
Fuente: Calendario Matemático – Colombia Aprendiendo

$$\boxed{\begin{array}{r} 4\ 9\ 3 \\ +\ 2\ 1\ 5 \\ 1\ 5\ 3 \\ \hline 8\ 6\ 1 \end{array}}$$

O = 4
M = 2
A = 1
L = 9
A = 1

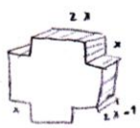
5. Las piezas de la ilustración son utilizadas en la industria de la ornamentación como piezas de seguridad. Se han dejado las dimensiones de cada pieza en términos de x ya que los tamaños pueden variar de acuerdo con las necesidades de los compradores.



a. Determine la expresión que representa el perímetro de la cara frontal de la pieza 3
b. Determine la expresión que representa el área de la cara lateral de la pieza 1
c. El volumen $V(x)$ de una caja común se halla multiplicando el área de la base por la altura, es decir aplicando la fórmula $V(x) = Ab \cdot h$. Por ejemplo, en  el volumen es $V(x) = x^2 \cdot y$

Determine el volumen de la pieza 2

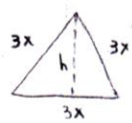
a.



$P = 2x + y + x + x + x + 2x - 1 + 2x - 1 + x + x + y + x + 2y - 1$ ×

$= \boxed{15x - 2}$

b.



×

$a = b.h$

$a = 3x.h$

$h = (3x)^2 - \left(\frac{3}{2}x\right)^2$

$h = (3x)(3x) - \left(\frac{3}{2}x\right)\left(\frac{3}{2}x\right)$

$h = 9x^2 - \frac{9}{4}x^2$

$h = \frac{36x^2 - 9x^2}{4} = h = \sqrt{\frac{27x^2}{4}}$

$h = \frac{27x}{4}$

$a = 3x \cdot \frac{27x}{4}$

$\boxed{a = \frac{81x^2}{4}}$

c. $V = Ab.h.$

$b.h = ab.$

$(2x+5)(2x) = ab.$

$4x^2 + 10x = ab$

$V = x^2.(2x+5)$

$= 2x^3 + 5x^2$

$V = (4x^2 + 10x)(2x)$

$V = 8x^3 + 20x^2$

no se resta, se suma.

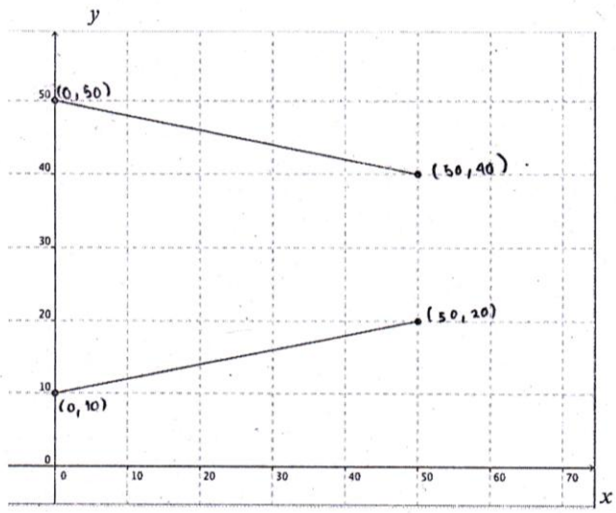
$V = 8x^3 + 20x^2 - (2x^3 + 5x^2)$ ×

$= 8x^3 + 20x^2 - 2x^3 - 5x^2$

$= \boxed{6x^3 + 15x^2}$

6. En economía se denomina punto de equilibrio a aquel en el que coinciden la oferta y la demanda. El siguiente gráfico muestra la oferta $g(x)$ y la demanda $f(x)$ de cierto producto.

Dado que cada recta en el plano se expresa algebraicamente como $f(x) = mx + b$, donde m es la pendiente y b es el intercepto con el eje y, encuentre la ecuación de la oferta y la ecuación de la demanda y luego determine el punto de equilibrio.



$g(x) \rightarrow$ precio.

$f(x) \rightarrow$ lo que se pide

$f(x) = mx + b$.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$.

$m =$

Anexo C. Prueba del estudiante C9E4

MATEMÁTICAS
Taller
2016

4.

Docente: Sandra P. Morales

Nombre: ______ **Curso:** 1109 **Fecha:** 17 de Mayo

Institución: Inem Francisco de Paulo Santander.

Lea cuidadosamente cada enunciado con su correspondiente instrucción. Las respuestas deben ser coherentes, completas y con su respectiva justificación. NO SE PERMITE EL USO DE CALCULADORA.

1. La ecuación canónica de una circunferencia está dada por $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ donde r es el radio y (h,k) es el centro, si se desarrollan las operaciones indicadas se obtiene la ecuación general con la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

   Si una circunferencia tiene centro en (3,-2) y $r = 5$, determine la ecuación canónica y la ecuación general de la circunferencia.

$(x-3)^2 + (y-(-2))^2 = 5^2$ ✓

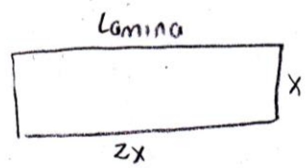
$(x^2+9)+(y^2+4) = 5^2$ ×

$x^2+y^2+9x+4y-25 = 0$ ×

2. Una caja sin tapa ha de construirse al cortar cuadrados de 3 pulgadas de las esquinas de una lámina rectangular de hojalata cuya longitud es el doble de su ancho. ¿Una lámina de qué medidas producirá una caja que tenga un volumen de 60 $pulg^3$?

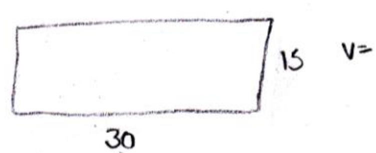
V= b.h. profundidad

V= Area de la base . h



7 volumen de caja

V= 3.3.3 = 27 pulgados



3. En Economía se conoce como Utilidad $U(x)$, a la diferencia entre el Ingreso y el Costo, es decir $U(x) = I(x) - C(x)$, donde el ingreso $I(x)$ está dado por la siguiente ecuación $I(x) = x \cdot p(x)$, siendo $p(x)$ la ecuación del Precio y x el Nivel de Producción.

   Para una empresa cuya ecuación de precio está definida como $p(x) = 8x + 20$ y la ecuación del costo como $C(x) = 7x^2 + 4x + 13$, donde el nivel de producción está dado en miles de unidades y la utilidad en miles de dólares, Determine:

   a. La ecuación del Ingreso
   b. La ecuación de la Utilidad
   c. El Nivel de Producción x para que la Utilidad de la compañía sea igual a 67.

A)
$I(x) = x \cdot p(x)$

$I(x) = x \cdot (8x+20) = 8x^2+20x$

B)
$U(x) = (8x^2+20x) - (7x^2+4x+13)$

$= 8x^2+20x-7x^2-4x-13$

$U(x) = x^2+16x-13$

C)
$(x) = 4$?

$I(x) = 4((8.4)+20) = 4(32+20) = 128+80 = 208$

$C(x) = 7(4)^2+4(4)+13 = 112+16+13 = 141$

$U(x) = 208 - 141 = 67$

EJERCICIO RETO – BONO

4. **ALPHAMETIC** (Recuerda que cada letra corresponde a un número diferente y que las letras iguales corresponden al mismo número)

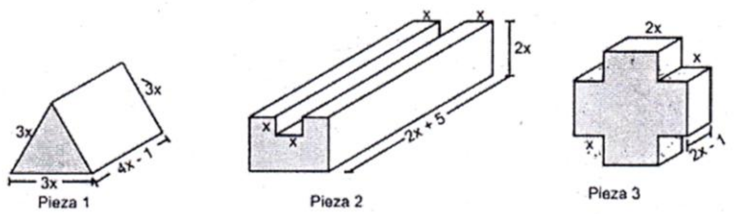
```
  OLD
+ MAN
  AND
  ---
  SEA
```

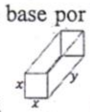
3x3 = 9
DxD = L
MxM = O
2x2 = 4

Fuente: Calendario Matemático – Colombia Aprendiendo

```
  493
  215
  153
  ---
  861
```

5. Las piezas de la ilustración son utilizadas en la industria de la ornamentación como piezas de seguridad. Se han dejado las dimensiones de cada pieza en términos de x ya que los tamaños pueden variar de acuerdo con las necesidades de los compradores.



a. Determine la expresión que representa el perímetro de la cara frontal de la pieza 3
b. Determine la expresión que representa el área de la cara lateral de la pieza 1
c. El volumen $V(x)$ de una caja común se halla multiplicando el área de la base por la altura, es decir aplicando la fórmula $V(x) = Ab \cdot h$. Por ejemplo, en  el volumen es $V(x) = x^2 \cdot y$

Determine el volumen de la pieza 2

A)

$P = (2x)+(2x)+2x+2x+x+x+x+x+x+x+x+x =$

$P = 16x$

B)

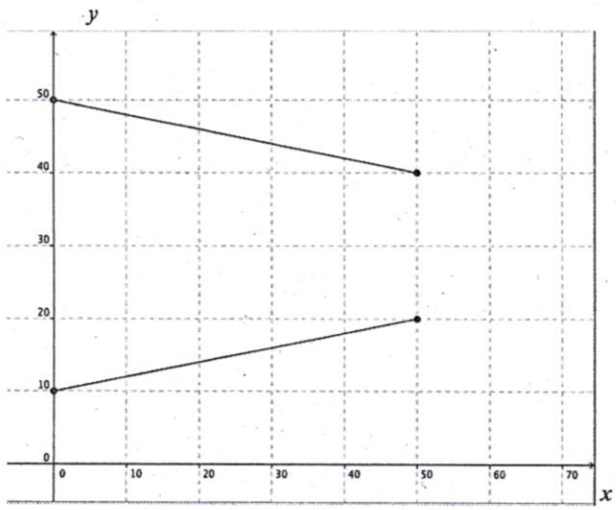
$A = \frac{(4x-1)(3x)}{2} = \frac{12x^2-3x}{2}$?

C)

$V = 9x^2 \cdot (2x+5) = 18x^3+45x^2$

6. En economía se denomina punto de equilibrio a aquel en el que coinciden la oferta y la demanda. El siguiente gráfico muestra la oferta $g(x)$ y la demanda $f(x)$ de cierto producto.

Dado que cada recta en el plano se expresa algebraicamente como $f(x) = mx + b$, donde m es la pendiente y b es el intercepto con el eje y, encuentre la ecuación de la oferta y la ecuación de la demanda y luego determine el punto de equilibrio.



$f(x) = \quad +50$

$g(x) = \quad +10$

Anexo D. Prueba del estudiante C8E3

3.

MATEMÁTICAS
Taller
2016

Docente: Sandra P. Morales

Nombre: ______________ Curso: 11-08 Fecha: 17/05/2016

Institución: INEM Francisco de Paula Santander.

Lea cuidadosamente cada enunciado con su correspondiente instrucción. Las respuestas deben ser coherentes, completas y con su respectiva justificación.
NO SE PERMITE EL USO DE CALCULADORA.

1. La ecuación canónica de una circunferencia está dada por $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ donde r es el radio y (h,k) es el centro, si se desarrollan las operaciones indicadas se obtiene la ecuación general con la forma $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

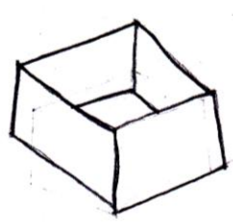
   Si una circunferencia tiene centro en (3,-2) y $r=5$, determine la ecuación canónica y la ecuación general de la circunferencia.

$(x-3)^2+(y-(-2))^2=5^2$

$x^2+9+y^2 \quad = 25$

2. Una caja sin tapa ha de construirse al cortar cuadrados de 3 pulgadas de las esquinas de una lámina rectangular de hojalata cuya longitud es el doble de su ancho. ¿Una lámina de qué medidas producirá una caja que tenga un volumen de 60 $pulg^3$?

?



3. En Economía se conoce como Utilidad $U(x)$, a la diferencia entre el Ingreso y el Costo, es decir $U(x) = I(x) - C(x)$, donde el ingreso $I(x)$ está dado por la siguiente ecuación $I(x) = x \cdot p(x)$, siendo $p(x)$ la ecuación del Precio y x el Nivel de Producción.

   Para una empresa cuya ecuación de precio está definida como $p(x) = 8x + 20$ y la ecuación del costo como $C(x) = 7x^2 + 4x + 13$, donde el nivel de producción está dado en miles de unidades y la utilidad en miles de dólares, Determine:

   a. La ecuación del Ingreso
   b. La ecuación de la Utilidad
   c. El Nivel de Producción x para que la Utilidad de la compañía sea igual a 67.

$U(x) = I(x) - C(x)$

$I(x) = x \cdot p(x)$

$P(x) = 8x + 20$

$x = \underline{-8-20}$

$x = -28$

$C(x) = 7x^2 + \underline{4x + 13}$

$= 14x + 4$?

$x = -18$

$U(x) = (-28) - (-18)$

$U(x) = -28 + 18$

$U(x) = -10$

EJERCICIO RETO – BONO

4. **ALPHAMETIC** (Recuerda que cada letra corresponde a un número diferente y que las letras iguales corresponden al mismo número)

$$\begin{array}{r} 9 = \text{O L D} = 2 \\ + \; 3 = \text{M A N} = 1 \\ 5 = \text{A N D} = 2 \\ \hline 17 = \text{S E A} \end{array}$$

O = 5, E = 0, A = 5

? 1705

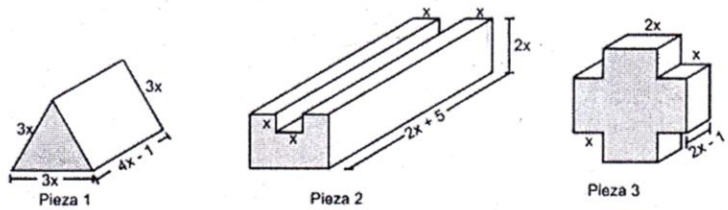
$\underset{3}{M} \times \underset{3}{M} = O = 9$

$\overset{2}{D} \times \overset{2}{D} = L = 4$

Fuente: Calendario Matemático – Colombia Aprendiendo

D = 2
M = 3
O = 9
N = 1
L = 4
A = 5
S = 17

5. Las piezas de la ilustración son utilizadas en la industria de la ornamentación como piezas de seguridad. Se han dejado las dimensiones de cada pieza en términos de x ya que los tamaños pueden variar de acuerdo con las necesidades de los compradores.



a. Determine la expresión que representa el perímetro de la cara frontal de la pieza 3
b. Determine la expresión que representa el área de la cara lateral de la pieza 1
c. El volumen $V(x)$ de una caja común se halla multiplicando el área de la base por la altura, es decir aplicando la fórmula $V(x) = Ab \cdot h$. Por ejemplo, en  el volumen es $V(x) = x^2 \cdot y$

Determine el volumen de la pieza 2

$2x + 5 = 0$

$2x = -5$

$x = -\frac{5}{2}$

$x = -2.5$

$2(x) =$

$2(2.5) = 5$

$3x + x = 10$

?

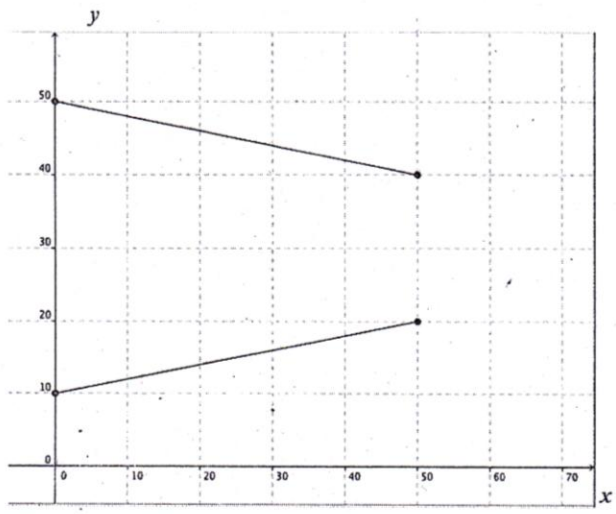
$2x + 5 =$

$2(2.5) + 5 = 10$

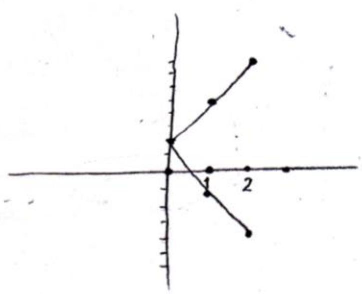
$10 \cdot 5 \cdot 10 = 500\ cm^3$

6. En economía se denomina punto de equilibrio a aquel en el que coinciden la oferta y la demanda. El siguiente gráfico muestra la oferta $g(x)$ y la demanda $f(x)$ de cierto producto.

Dado que cada recta en el plano se expresa algebraicamente como $f(x) = mx + b$, donde m es la pendiente y b es el intercepto con el eje y, encuentre la ecuación de la oferta y la ecuación de la demanda y luego determine el punto de equilibrio.



$f(x) = mx+b$



$G(x) = -mx+b$