

**¿QUÉ ÁLGEBRA SE QUIERE ENSEÑAR EN LA ESCUELA?: ANÁLISIS DE LOS
REFERENTES DE CALIDAD QUE SE PROMUEVEN DESDE LOS
DOCUMENTOS DE POLÍTICA PÚBLICA EDUCATIVA EN COLOMBIA.**

LILIANA CAROLINA DELGADO GARCÍA

BRITANY JOHANA SALAZAR SALAZAR

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D.C., COLOMBIA

2016

**¿QUÉ ÁLGEBRA SE QUIERE ENSEÑAR EN LA ESCUELA?: ANÁLISIS DE LOS
REFERENTES DE CALIDAD QUE SE PROMUEVEN DESDE LOS
DOCUMENTOS DE POLÍTICA PÚBLICA EDUCATIVA EN COLOMBIA.**

Trabajo de grado asociado al estudio de un asunto de interés profesional de las estudiantes,
presentado como requisito para optar al título de:

Licenciadas en Matemáticas

LILIANA CAROLINA DELGADO GARCÍA

CC: 1.073.158.494 Madrid Cundinamarca.

CÓDIGO: 2011240076

BRITANY JOHANA SALAZAR SALAZAR

CC: 1.024.502.058 Bogotá D.C.

CÓDIGO: 2011240063

ASESOR:

MG. ISAAC LIMA DÍAZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D.C., COLOMBIA

2016

DEDICATORIA

Este trabajo lo dedico a Dios todo poderoso, por todas las bendiciones obtenidas a lo largo de esta etapa.

A mi madre LUZ MARINA SALAZAR, por su esfuerzo, dedicación y su apoyo constante en todos los aspectos de mi vida. También por su lucha y tesón para brindarme más de lo necesario para sacar mi carrera adelante, por levantarse cada día a regalarme una vida mejor. ¡TE ADMIRO Y TE AMO CON TODO MI CORAZÓN!

A mi hermano Cristian, que no sé qué sería mi vida sin él, por apoyarme y siempre sacarme una sonrisa en los momentos de adversidad. Además por compartir el camino de la vida junto a mí.

A mi novio y compañero de vida Cesar Moreno, que siempre ha estado conmigo. En esta etapa ha estado pendiente de mí, en que no me falte nada para cumplir con mis objetivos académicos y siempre ha tenido una voz de aliento. Quiero darle las gracias por ser tan paciente y tan comprensivo. ¡TE AMO MUCHO!

A mis familiares, que siempre han estado pendientes de mis proyectos y me han tendido su mano cuando más lo he necesitado.

A todos mis compañeros de clase en la universidad, en especial a María, Jhon y a mi compañera en este trabajo Carolina, que en este peldaño siempre estuvieron pendientes de mis pasos, tuvieron palabras de aliento para que no desfalleciera. También por su colaboración en la parte académica. Además por los buenos momentos compartidos. Les quiero decir gracias y que más que mis compañeros y amigos se convirtieron en mis hermanos.

Britany Johana Salazar Salazar

Este trabajo lo dedico a Dios quien me lleno de mucha paciencia y fortaleza para hacer realidad este sueño.

A mis padres Nubia Esperanza García y Jairo Delgado quienes a lo largo de este camino han estado apoyándome y brindándome lo mejor que han podido para que este sueño se haga realidad, gracias infinitas por ser los principales pilares en mi vida, mis primeros maestros y porque gracias a ustedes soy quien soy. ¡Los amo! Mami, gracias por darme todos los días una razón de peso para seguir adelante.

A mis hermanos quienes han estado pendientes de mí en esta etapa (la verdad no sé qué sería de mi vida sin ustedes) y en especial a Diego, quien siempre ha estado apoyándome y sacándome de apuros. A mis compañeros de universidad, en especial a Alejandra, María, Jhon, Astrid y a mi compañera en este trabajo Britany, gracias por la paciencia, acompañamiento en situaciones de felicidad y en especial en las situaciones de adversidad, gracias porque a lo largo de la carrera descubrí en ustedes que Dios envía ángeles disfrazados de amigos.

Carolina Delgado García

AGRADECIMIENTOS

En primera instancia agradecer a Dios, por permitirnos emprender este camino lleno de grandes retos, dificultades, y sobre todo de grandes alegrías y recompensas. También por bendecirnos con salud y paciencia para continuar con este producto.

En segundo lugar, a la Universidad Pedagógica Nacional por ser nuestro hogar durante esta etapa y por supuesto por permitir futuramente cumplir nuestro sueño de ser profesoras de matemáticas.

En tercer lugar, a los profesores de Departamento de Matemáticas que han hecho parte de nuestro proceso académico, por compartir sus conocimientos, experiencia y hacernos ver la importancia de la labor docente.

Por último, a nuestros compañeros dado que todos compartimos el mismo objetivo de ser maestros y gracias a esto hemos podido forjar unos caminos juntos hacia un mismo rumbo.

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN- RAE

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado.
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional, Biblioteca Central.
Título del documento	¿Qué álgebra se quiere enseñar en la escuela?: Análisis de los referentes de calidad que se promueven desde los documentos de política pública educativa en Colombia.
Autor(es)	Delgado García, Liliana Carolina; Salazar Salazar, Britany Johana
Director	Isaac Lima
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2016, 65 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional.
Palabras Claves	ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA, CONCEPCIONES DEL ÁLGEBRA, PENSAMIENTO ALGEBRAICO, ESTÁNDARES, DERECHOS BÁSICOS, REFERENTES DE CALIDAD.
2. Descripción	
<p>En este documento se expone un reporte del trabajo de grado el cual surge del interés de las autoras por saber el tipo de álgebra que se quiere enseñar en Colombia a partir de lo expuesto en los documentos orientadores del Ministerio Nacional de Educación [MEN] como referentes de calidad, es decir, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas [LCM] (MEN, 1998), Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas [EBCM] (MEN, 2006) y el más reciente, los Derechos Básicos de Aprendizaje [DBA](MEN, 2015).</p> <p>Dicho trabajo se fundamenta en las investigaciones hechas por autores como Usiskin (1989) y Kieran (1996) que son referentes sobre las concepciones que se tienen sobre el álgebra; en investigaciones hechas por autores como Socas (2011), Castro (2012), Godino (2012) y Vergel (2015) en lo que tiene que ver con la enseñanza del álgebra y el pensamiento algebraico, la</p>	

respectiva clasificación de los EBCM y DBA y de los objetos matemáticos expuestos en los LCM relacionados con la enseñanza del álgebra.

3. Fuentes

Para la realización de este trabajo se consultó como fuente bibliográfica principal los siguientes documentos:

Godino, J., Castro, W., Aké, L., & Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del Razonamiento Algebraico Elemental. *Acta scientiae*, 26, 483-511.

Kieran, C., Bednarz, N., & Lee, L. (1996). *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá, D.C., Cooperativa Editorial Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá: MEN.

Ministerio de Educación Nacional. (2015). *Derechos Básicos de Aprendizaje*. Bogotá, Colombia.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números*, 77,5-34 (Versión electrónica).

Valoyes, L. (2013) *Estudio de la representación del álgebra en los documentos curriculares colombianos*. Tolima, Colombia: Universidad de Tolima.

Vergel, R. (2016). *Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria* (tesis doctoral). Doctorado Interinstitucional en Educación. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Usiskin, Z. (1988). *Conceptions of Algebra and Uses of Variables*. En A.F. Coxford y A.P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra K-12* (pp. 8-19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

4. Contenidos

Este trabajo se estructura bajo 5 capítulos, a saber:

Capítulo 1: En el cual se exponen el objetivo general y los objetivos específicos que orientan el trabajo de grado.

Capítulo 2: Se presenta la fundamentación teórica, entre ellos algunas definiciones: qué se entiende por enseñanza del álgebra, pensamiento algebraico, relación entre la aritmética y el álgebra, concepciones del álgebra y por último una mirada a la enseñanza del álgebra desde los referentes de calidad.

Capítulo 3: Se describe la metodología a usar para responder a los objetivos planteados.

Capítulo 4: Se presentan los instrumentos y el análisis que se hace a partir de estos, estableciendo relaciones entre las concepciones del álgebra y los elementos de los referentes de calidad.

Capítulo 5: Se presentan las conclusiones en cuanto al desarrollo del trabajo teniendo en cuenta el cumplimiento de los objetivos y otros aspectos encontrados en el desarrollo del análisis.

5. Metodología

Los procedimientos metodológicos que se llevaron a cabo para el desarrollo de este trabajo, consta de tres momentos, los cuales se describirán a continuación:

Primer momento: Se hace una clasificación de los EBCM y los DBA que están relacionados directamente con el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, dado que en los referentes de calidad no se habla sobre el pensamiento algebraico directamente, a su vez se hace una clasificación de los mismos teniendo en cuenta los objetos matemáticos relacionados con la enseñanza del álgebra expuestos en los LCM.

Segundo momento: se hace una clasificación de los EBCM y los DBA teniendo en cuenta los elementos característicos de las distintas concepciones del álgebra, exponiéndose a través de varios gráficos y en un tercer momento, se establece la relación entre los elementos propios de las concepciones, los objetos matemáticos relacionados con el pensamiento algebraico y la clasificación de los EBCM y los DBA respectivamente.

6. Conclusiones

A continuación se hace un breve resumen de las conclusiones:

- Los procesos que se establecen en los LCM están inmersos en las características propias de cada una de las concepciones expuestas por Usiskin (1988), Kieran (1996) y Molina (2015).
- Las concepciones del álgebra que más se ven reflejadas en los enunciados estipulados en los EBCM y los DBA son el Álgebra como el estudio de los procedimientos para resolver ciertos tipos de problemas [EPRTP] y el álgebra como el estudio de las relaciones entre cantidades [ERC].
- El álgebra como aritmética generalizada [ACAG] solo se trabaja en los primeros años de escolaridad, es decir, a partir de la caracterización de dicha concepción se evidencia que en la básica secundaria y la media se da prioridad a las concepciones EPRTP y ERC.

Elaborado por:	DELGADO GARCÍA, Liliana Carolina SALAZAR SALAZAR, Britany Johana		
Revisado por:	Isaac Lima Díaz		
Fecha de elaboración del Resumen:	03	11	2016

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN.....	1
JUSTIFICACIÓN.....	3
1. OBJETIVOS.....	5
1.1. Objetivo General	5
1.2. Objetivos Específicos.....	5
2. MARCO DE REFERENCIA	6
2.1. Antecedentes	6
2.1.1. Definiciones.....	7
2.1.1.1. Algunas concepciones sobre que es enseñanza del álgebra	7
2.1.1.2. ¿Qué es el pensamiento algebraico?.....	7
2.1.1.3. Actividades que desarrollan el pensamiento algebraico.	8
2.1.1.4. Relación entre la Aritmética y el Álgebra.	11
2.1.2. Concepciones del álgebra en la escuela.....	13
2.1.2.1. Álgebra como aritmética generalizada.	14
2.1.2.2. Álgebra como el estudio de los procedimientos para resolver ciertos tipos de problemas.....	14
2.1.2.3. El álgebra como el estudio de las relaciones entre cantidades.....	15
2.1.2.4. El álgebra como el estudio de estructuras.	15
2.2. Álgebra en los Documentos Curriculares	15
2.2.1. Antecedentes.....	16
2.2.2. Álgebra desde los Lineamientos Curriculares de Matemáticas.....	18
2.2.2.1. Procesos generales.....	20
2.2.3. Álgebra desde los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.	24

2.2.4. Álgebra desde los Derechos Básicos de Aprendizaje.....	25
3. METODOLOGÍA.....	27
3.1. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.....	27
3.2. Derechos Básicos de Aprendizaje.....	29
3.3. Clasificación de los EBCM y DBA a partir de los elementos propios de las concepciones.....	31
4. ANÁLISIS	35
4.1. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas	35
4.2. Derechos Básicos de aprendizaje.....	38
4.3. Lineamientos curriculares.....	43
5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	46
5.1. Acerca de los objetivos	46
5.2. De manera general	47
5.3. Acerca de las preguntas de investigación	49
5.4. Recomendaciones	49
BIBLIOGRAFÍA	51
ANEXOS	53
Anexo 1.	53
Anexo 2.	54

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Clasificación de los EBCM.	28
Tabla 2. Clasificación de los DBA.	29
Tabla 3. Clasificación EBCM de acuerdo a las características de cada concepción.	33
Tabla 4. Clasificación DBA de acuerdo a las características de cada concepción.	34

ÍNDICE DE GRÁFICOS

Gráfico 1. Relación de los EBCM con la concepción ACAG.....	35
Gráfico 2. Relación de los EBCM con la concepción EP RTP.....	36
Gráfico 3 Relación de los EBCM con la concepción ERC	37
Gráfico 4. Relación de los EBCM con la concepción EEA.	38
Gráfico 5. Relación de los DBA con la concepción ACAG.....	39
Gráfico 6. Relación de los DBA con la concepción EP RTP.....	40
Gráfico 7. Relación de los DBA con la concepción ERC.	41
Gráfico 8. Relación de los DBA con la concepción EEA.	42

INTRODUCCIÓN

En este documento se reporta un análisis de los referentes de calidad en cuanto a las políticas educativas en Colombia propuestos por el Ministerio de Educación Nacional [MEN] teniendo como objetivo principal identificar el tipo de álgebra que se quiere enseñar en la escuela a partir de lo expuesto en los Lineamientos Curriculares en Matemáticas [LCM] (MEN, 1998), Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas [EBCM] (MEN, 2006) y Derechos Básicos de Aprendizaje [DBA] (MEN, 2015), y enfatizando en las características propias de las distintas concepciones que se tienen del álgebra, específicamente las expuestas por Usiskin (1989) y Kieran (1996) , y la clasificación de dichos referentes en torno a la enseñanza del álgebra.

Cabe resaltar que este trabajo se propone tomando como referencia que en las últimas décadas las investigaciones hechas por distintos autores citados por Socas (2011) teniendo en cuenta el tratamiento del pensamiento algebraico, se enfocan en los errores y dificultades que se pueden presentar durante su desarrollo, por tal motivo se realiza un análisis a los referentes de calidad propuestos por el MEN.

El documento se divide en cinco capítulos. En el capítulo 1 se expone el propósito del trabajo a través de los objetivos general y específicos, en el capítulo 2 se exhibe un marco de referencia que da soporte a la investigación. Este tiene que ver con algunos conceptos y definiciones que servirán de insumos, al momento de hacer el análisis de los referentes de calidad, a su vez contiene un breve recuento histórico del desarrollo de las políticas educativas en Colombia en cuanto a la educación matemática.

En el capítulo 3 se presenta la metodología implementada en la investigación, con la cual se pretende dar cumplimiento a los objetivos propuestos y resolver las preguntas de investigación. Dicha metodología está estructurada bajo los siguientes momentos: primer momento, clasificación de los EBCM y DBA particularmente los que están relacionados con el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, puesto que en estos referentes de calidad no se habla directamente del pensamiento algebraico y haciendo uso

de los objetos matemáticos y procesos generales relacionados con la enseñanza del álgebra expuestos en los LCM y segundo momento, clasificación de los EBCM y DBA con base a las características propias de cada una de las concepciones del álgebra.

El capítulo 4, contiene los análisis y resultados obtenidos a partir de la investigación, a su vez se presentan algunos gráficos en los cuales se evidencia la relación entre los referentes de calidad y cada una de las características propias de las concepciones del álgebra.

En el capítulo 5, se exponen las conclusiones en concordancia con el cumplimiento de los objetivos y otros aspectos encontrados a lo largo del desarrollo de la investigación.

JUSTIFICACIÓN

A partir de las reflexiones realizadas en los diferentes espacios del ambiente de pedagogía y didáctica del proyecto curricular de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, surge el interrogante acerca del álgebra que se quiere enseñar en Colombia: ¿Qué álgebra se quiere enseñar en la escuela?

Tradicionalmente se ha establecido que la enseñanza del álgebra es una cuestión de la escuela secundaria y con ello la idea que para entender álgebra, es necesario tener una base aritmética relativamente sólida. No es extraño adaptar consideraciones de científicos y psicólogos del desarrollo, como Kant, Newton y Vygotsky, quienes consideraron el álgebra como una extensión o generalización de la aritmética (Vergel, 2015).

Carraher, Schliemann & Brizuela (2001, citado por Vergel 2015) comentan que la introducción escolar al álgebra se ha dado a través del establecimiento de concepciones erróneas acerca de tres aspectos: la naturaleza de la aritmética, la naturaleza del álgebra, y la capacidad de los niños para tratar con ella.

Sin embargo, la literatura en Educación Matemática posiciona la crítica sobre el tradicional acercamiento al álgebra escolar que inicia por enseñar la sintaxis algebraica, dándole relevancia a sus aspectos manipulativos. De esta manera se empieza por enseñar el trabajo con expresiones y ecuaciones, y al final se resuelven ejercicios, aplicando el contenido sintáctico del álgebra, haciendo un énfasis excesivo en aplicar fórmulas ya dadas en la solución de ejercicios mecánicos (Bolea, 2003).

Usiskin (1988) trata cuatro concepciones distintas del álgebra: como aritmética generalizada; como método para la resolución de ciertos tipos de problemas matemáticos en los que se desconocen algún/os valor/es llamados incógnitas; como estudio de las relaciones entre magnitudes que implica variación conjunta y concepto de función; y como el estudio de estructuras matemáticas como grupos y polinomios.

Ahora bien, con relación a todo lo anterior ¿En qué sentido están propuestas las políticas educativas en Colombia? ¿Cuál es la perspectiva que hay con relación a la enseñanza del álgebra escolar propuesta en documentos orientadores conocidos, tales como los LCM y los EBCM? ¿Qué cambio y qué impacto tiene en la enseñanza del álgebra, la aparición del documento DBA? ¿Los documentos orientadores acerca de la política pública de calidad educativa en educación matemática se inclinan por el acercamiento tradicional? ¿Qué criterios racionales se ponen en juego para proponer los enunciados propuestos en los DBA?

Es por ello que es pertinente realizar un estudio de los referentes de calidad en la enseñanza del álgebra de acuerdo a los documentos que rigen la política pública en educación matemática en el país.

1. OBJETIVOS

1.1.Objetivo General

Hacer un análisis documental de los referentes de calidad para reconocer qué álgebra se promueve en la escuela desde los LCM, los EBCM y los DBA, teniendo en cuenta las distintas concepciones del álgebra y el análisis de los referentes de calidad vigentes propuestos por el MEN.

1.2.Objetivos Específicos

- Identificar elementos que caracterizan la Enseñanza del álgebra a través de la revisión de los documentos que orientan en la actualidad la educación matemática en Colombia como lo son los LCM, EBCM y los DBA.
- Revisar algunos documentos acerca de la enseñanza del álgebra para caracterizar los elementos propios de la misma.

2. MARCO DE REFERENCIA

En esta sección se recopilan algunas definiciones que serán útiles para hacer el análisis de los documentos presentados por el MEN, en cuanto a la enseñanza del álgebra que estos promueven.

También se encontrará un recuento histórico de la evolución de los referentes de calidad y las reformas educativas, esto con el fin de evidenciar cómo se ha orientado la enseñanza del álgebra en los últimos años, para luego poder hablar sobre las características propias de la enseñanza del álgebra que tienen los documentos curriculares actuales, es decir, los LCM, EBCM y por último los DBA, mostrando sus respectivas estructuras, dado que son en gran parte la fuente teórica que sustenta el desarrollo de este trabajo.

2.1. Antecedentes

Teniendo como base las reflexiones realizadas durante el desarrollo de algunos espacios académicos en el proyecto curricular de la Licenciatura en Matemáticas, específicamente los relacionados con la pedagogía y la línea del álgebra de la Universidad Pedagógica Nacional, surge un interrogante frente al tipo de álgebra que se pretende enseñar en la escuela, el cual puede ser abordado desde los referentes de calidad establecidos por el MEN.

A continuación se presentan algunas definiciones las cuales darán claridad frente a qué se entiende por enseñanza del álgebra, pensamiento algebraico, cómo se relaciona la aritmética y el álgebra desde varias miradas, y en particular cómo son las distintas concepciones del álgebra con el fin de mostrar, posteriormente, la evolución de los referentes de calidad en los últimos años.

2.1.1. Definiciones.

2.1.1.1. *Algunas concepciones sobre que es enseñanza del álgebra*

Según lo expuesto por Socas (2011), el álgebra se ha desarrollado como contenido matemático desde la secundaria hasta la universidad, pues en los últimos años esto ha ido cambiando, dado que se ha intentado promover algunas cuestiones del pensamiento algebraico en la educación primaria (Early álgebra).

Castro (2012) menciona que en la enseñanza del álgebra se reconoce una crisis determinada por factores como la dificultad en la generalización y uso de símbolos (tipo cognitivo); el miedo que produce a los estudiantes escuchar la palabra “álgebra” (tipo psicológico); la caracterización del álgebra como una de las ramas de la matemática más difíciles de estudiar (tipo social) y por último los intereses de los estudiantes que se encuentran un poco aislado al aprendizaje del álgebra.

Booth (1984, citado en Castro, 2012) menciona que uno de los principales objetivos de la enseñanza del álgebra es hacer que los estudiantes logren generalizar procedimientos y a su vez representar relaciones de manera general, dado que por medio de las mismas, se puede hallar la solución a distintos cuestionamientos propuestos y a través de ellos poder generar nuevas relaciones.

De acuerdo a lo dicho anteriormente, no hay una manera exacta de definir qué es enseñanza del álgebra pero si se puede asegurar que dentro de sus objetivos principales se encuentran la generalización de algunos procedimientos y el desarrollo de nuevas relaciones a partir de las que ya se conocen.

2.1.1.2. *¿Qué es el pensamiento algebraico?*

En los últimos 30 años, investigaciones hechas por Wagner y Kieran (1989), Kieran y Filloy (1989), Socas y otros (1989), Kieran (1992, 2006, 2007), Rojano (1994), Bednarz, Kieran y Lee (1996), Palarea (1998), Socas (1999), Socas y otros (2007) (citados en Socas, 2011) sobre el pensamiento algebraico, han sido orientadas al análisis de sus características, niveles de organización y a las problemáticas que se pueden presentar en cuanto a su enseñanza y aprendizaje, y por otro lado a la descripción y estudio de los procesos de resolución que se

obtienen por parte del estudiante y a su vez por parte de profesores en tareas propias del pensamiento. Normalmente se tiende a suponer que el pensamiento algebraico es el tratamiento de objetos matemáticos de forma general.

Según Radford (2012, citado en Vergel, 2016, pág. 71), la diferencia entre el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico radica en el tratamiento que se da a las cantidades con las cuales se trabaja en los mismos, es decir, en el pensamiento aritmético se hace necesario conocerlas para poder operarlas, mientras que en el otro no, dado al tratamiento analítico que se aplica a las mismas.

En concordancia con lo anterior Vergel (2016) afirma que el pensamiento algebraico se puede considerar como un conjunto de procesos materializados a través de acciones y reflexiones tanto históricas como culturales.

Radford (citado en Vergel, 2016, pág. 71) caracteriza el pensamiento algebraico y argumenta que el mismo, está determinado por:

- La indeterminación en cuanto a los objetos a trabajar, por ejemplo las incógnitas, variables y parámetros.
- El tratamiento analítico con el que se trabajan los objetos indeterminados, es decir, el reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos.
- La representación simbólica que se asigna a los objetos trabajados.

A su vez Vergel (2016) argumenta que la indeterminación y el tratamiento analítico están relacionados íntimamente en una regla, la cual facilita al estudiante el tratamiento de cualquier elemento o figura de la secuencia, es decir, que esta regla se puede ejemplificar en casos particulares, donde los números con los cuales se está trabajando no son solo números sino que son vistos como elementos tomados de algo más general.

2.1.1.3. Actividades que desarrollan el pensamiento algebraico.

Dentro de los rasgos característicos del álgebra y apoyándose en otras investigaciones Kieran (2007, citado en Godino, Castro, Aké & Wilhelmi, 2012) realizó un modelo para clasificar las actividades referentes al álgebra escolar, las cuales se mencionan a continuación:

- **Actividades de tipo generacional:** implican la formación de expresiones y ecuaciones, las cuales se consideran como los objetos del álgebra. Por ejemplo en esta categoría se encuentran: uso de ecuaciones con una incógnita en situaciones problema, expresiones que representan generalidades las cuales se evidencian en modelos geométricos o sucesiones numéricas, y expresiones de las reglas que rigen las relaciones numéricas. Por ejemplo, en la siguiente actividad se logra evidenciar que los estudiantes deben hacer uso de la formulación de las características del objeto con el que está trabajando, para luego a partir de cierto tipo de preguntas establecer un patrón y así poder llegar a una generalización.

Armar un triángulo con exactamente tres palitos de paleta, posteriormente armar otro triángulo teniendo en cuenta que este debe formar con los palitos del triángulo anterior (sin desarmar el mismo), otro triángulo y posteriormente hacer las siguientes preguntas:

- *¿Cuántos palitos se usaron para hacer el primer triángulo?*
- *¿Cuántos palitos se necesitan para hacer dos triángulos?, ¿Cuántos para hacer tres triángulos?*
- *¿Cuántos triángulos se pueden hacer con diez palitos?*
- *¿Cuántos triángulos se pueden hacer con cuarenta palitos?*
- *¿Cuántos palitos se necesitan para construir veintidós triángulos?*

(Tomada de Universidad Pedagógica Nacional [UPN]- Ministerio de Educación Nacional [MEN] ,2012)

- **Actividades de tipo transformacional:** se encuentran las actividades basadas en reglas, por ejemplo factorización, productos notables, desigualdades, operaciones entre expresiones algebraicas, entre otras. Cabe mencionar que este tipo de actividades no son netamente rutinarias dado que se está haciendo uso de la axiomática de los números reales.

Por ejemplo, cuando se trabajan ejercicios como el siguiente:

$$(4x + 2y)^2 =$$

Los estudiantes tienen que hacer uso de los productos notables, es decir, deben seguir ciertas reglas (o pasos) según sea el caso, para así poder proporcionar una solución al ejercicio.

- **Actividades de tipo global:** en esta categoría se encuentran la modelización, resolución de problemas, formulación de conjeturas, estudio del cambio (variación) en situaciones funcionales, entre otras.

Por ejemplo:

Una suma de \$1000 se invierte a una tasa de interés de 4% al año. Encuentre el tiempo necesario para que la cantidad crezca a \$4000 si el interés se capitaliza continuamente.

(Tomada de Stewart, Redlin & Watson, 2012, pp. 337)

En la anterior actividad se evidencia que para solucionarla se requiere hacer uso de un modelo que a su vez permita entrever la variación que hay entre las dos variables a tratar en la situación.

Por otro lado, se hace necesario mencionar que algunos investigadores de estudios referentes al razonamiento algebraico coinciden en que uno de los rasgos característicos del mismo, son los procesos de generalización frente a diversas situaciones matemáticas.

Kieran (2007, citado en Godino et al., 2012) menciona que para que haya una caracterización significativa del pensamiento algebraico no basta identificar lo general en lo particular, sino que se debe ser capaz además de enunciarlo de forma algebraica, por ejemplo si se tiene una secuencia ya sea numérica o geométrica no basta con identificar el patrón sino que se hace necesario poder establecer el mismo de una manera más formal.

De igual manera el estudio de las relaciones de equivalencias y sus respectivas propiedades hacen parte de las características del razonamiento algebraico, dado que algunos estudios se han centrado en la investigación de la manera en cómo se aborda el uso del signo “igual” para indicar tanto resultados como equivalencias de dos expresiones algebraicas.

2.1.1.4. Relación entre la Aritmética y el Álgebra.

Socas (2011) señala que uno de los temas de estudio más recurrentes en las últimas décadas es el paso de la aritmética al álgebra.

Kieran (2007, citado en Godino et al., 2012) menciona que la problemática del álgebra escolar consiste en el paso existente entre la aritmética y el álgebra. Comenta que para la gran mayoría de los estudiantes se hace complicado trabajar con letras cuando siempre, desde primaria, lo han hecho con números.

Normalmente las dificultades que se evidencian en cuanto a la enseñanza del álgebra se centran en la manera como se entiende la misma, dado que el álgebra se concibe como la manipulación de letras, donde se busca hallar un valor exacto. Es decir, no se da una significación al proceso que se lleva a cabo sino que se vuelve un automatismo.

Es por eso que el trabajo que se desarrolla en las escuelas en cuanto a la aritmética y al álgebra, no debe verse como dos entes distantes (Gómez, 1995), dado que los mismos están íntimamente ligados debido a su estructura, es decir, muchos investigadores ven el álgebra como una aritmética generalizada y a su vez consideran que la aritmética se ajusta al lenguaje horizontal en lo que tiene que ver con el uso de igualdades y los paréntesis.

Teniendo en cuenta lo dicho anteriormente, se hace necesario que en la enseñanza de la aritmética y el álgebra haya una secuencia referente a los temas a trabajar, debido a las similitudes en sus respectivas estructuras. Autores como Vallejo (1841, citado por Gómez, 1995 y Castro, 2012) argumentan que el tratamiento de los números se puede ver desde dos perspectivas, una perspectiva general la cual se encarga de generalizar leyes o patrones (álgebra) y otra particular la cual hace referencia al trabajo de casos particulares por ejemplo $3 \times 5 = 15$ es una relación particular entre dichos números (aritmética).

Drijvers y Hendrikus (2003, citados en Castro, 2012) señalan que estas dos ramas se relacionan bajo el argumento de que la aritmética es la base o raíz del álgebra, y el álgebra permite a la aritmética generalizar los patrones y relaciones que se establecen de manera particular.

Gómez (1995) menciona que el álgebra al igual que la aritmética proporciona un soporte formal al razonamiento cuantitativo, lo cual garantiza que las operaciones mentales sigan activas.

Por otro lado, el estudio del paso de la aritmética al álgebra ha originado en el desarrollo curricular dos propuestas, las cuales pretenden dar un tratamiento al álgebra desde los primeros cursos de la primaria. Dichas propuestas son Pre- Álgebra y Early- Álgebra, las cuales han surgido mediante las investigaciones que se han desarrollado alrededor de los errores y dificultades que se han evidenciado a través de los trabajos propuestos para la enseñanza y el aprendizaje del álgebra en los últimos años.

2.1.1.4.1. Pre- álgebra

Socas (2011) afirma que las investigaciones realizadas entre los años 1980 y 1990 sobre los errores y dificultades que desarrollaban los estudiantes en el aprendizaje del álgebra, favorecieron el pensamiento que se tenía frente a la efectividad del estudio formal de este tópico en los últimos cursos del bachillerato, a su vez dichos resultados hacían énfasis en que el trabajo que se desarrollaba con el álgebra como aritmética generalizada no era suficiente para el desarrollo del pensamiento algebraico.

Socas (2011) reconoce que esta propuesta tiene dos antecedentes que permiten justificar la misma. Estos son:

- La concepción de que el álgebra está presente cuando se hace uso del simbolismo algebraico, pero en el cual esta concepción es mucho más amplia y va más allá de escrituras formales de la aritmética generalizada.
- En la validez de las propuestas de organización de los estadios de desarrollo cognitivos de Piaget en la que el álgebra se encuentra en el estadio de desarrollo formal, es considerada como fuera del alcance de los estudiantes de educación primaria.

Otras investigaciones hechas en la década de los 80's, por ejemplo las realizadas por Davis (1985) o Vergnaud (1988), (citados en Socas, 2011), aseguran la importancia de empezar la enseñanza del álgebra desde la primaria, esto con el fin de preparar a los estudiantes para el trabajo que se lleva a cabo en la secundaria respecto al álgebra.

Con base en lo anterior, se puede decir que esta propuesta hace énfasis a una serie de actividades que están relacionadas directamente con el planteamiento y la resolución de

ecuaciones, aproximaciones a la generalización de patrones sean numéricas o geométricas, variables y funciones. Socas (2011).

2.1.1.4.2. *Early álgebra*

A partir de diversas investigaciones, Socas (2011) y Mora (2012) mencionan que “Early álgebra” se entiende como una propuesta curricular en la cual se pretende introducir el álgebra en los primeros años escolares, dado que normalmente se acostumbra a hablar sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra en los cursos de la básica y la media (sexto – once);

Básicamente esta propuesta pretende implantar actividades de observación en la cual los estudiantes logren identificar las características de una secuencia de patrones, relaciones y propiedades de tal manera que dichas actividades desarrollen y potencialicen tanto el pensamiento numérico, como el algebraico desde la primaria, facilitando el trabajo en la básica y la media, y a su vez que contribuyan en el aprendizaje y tratamiento del álgebra en años posteriores.

2.1.2. *Concepciones del álgebra en la escuela.*

A lo largo del desarrollo del álgebra escolar autores en Educación Matemática como Godino, Radford, Vergel, Castro, entre otros, se han empeñado en mostrar a la comunidad académica lo que ellos entienden sobre la misma. Molina (2015) cita autores como Usiskin (1988), Bednarz, Kieran y Lee (1996), Kaput (1999), Drijvers y Hendrikus (2003), Kaput, Carraher y Blanton (2008) y Drijvers, Goddijn y Kindt (2011), los cuales a partir de la determinación de las distintas características del álgebra han propuesto trabajos para el tratamiento de la misma en la escuela y a su vez la relación de esta, con otros espacios propios del currículo.

Kieran, C., Bednarz, N., & Lee, L. (1996) y otros autores como Usiskin (1988) hacen un análisis de los distintos enfoques o concepciones que se evidencian en el desarrollo del álgebra. Cabe resaltar que estas perspectivas no son independientes entre sí, es decir, en muchas ocasiones a partir de una sola situación se puede hacer uso de una o varias de ellas.

2.1.2.1. Álgebra como aritmética generalizada.

Usiskin (1988), argumenta que el trabajo que se realiza con la aritmética, consiste en gran parte en identificar regularidades, estudiar y analizar las características propias de patrones numéricos.

Manson (citado por Kieran et al.1996) sugiere varias formas de aproximación, las cuales pueden ser de utilidad en la orientación de los estudiantes en cuanto a la construcción de dichas generalidades, entre ellas menciona las siguientes: la visualización; la manipulación del objeto de estudio, esto con el fin de facilitar el reconocimiento de la generalización a la cual se quiere llegar; la formulación de las características evidenciadas en la manipulación del objeto, lo cual conduce a la construcción del siguiente término; y por último, el hallazgo del patrón que caracteriza el objeto de estudio.

Teniendo en cuenta lo dicho anteriormente se hace fácil evidenciar cómo el álgebra se puede ver como una aritmética generalizada, dado que el trabajo que se realiza con la misma sistematiza las distintas propiedades halladas en dichos patrones, es decir, a partir de la identificación de algunas características, se trata de sintetizar cálculos buscando reemplazar los números por variables, de tal manera que se puedan cubrir todos los casos que cumplen dichas condiciones, para finalmente hallar una generalidad que abarque los mismos.

2.1.2.2. Álgebra como el estudio de los procedimientos para resolver ciertos tipos de problemas.

Kieran (1996) y Usiskin (1988) argumentan que la resolución de problemas ha desempeñado un papel importante en el desarrollo de la enseñanza y aprendizaje del álgebra, dado que el tratamiento que se le da a los mismos permite identificar las distintas pautas o caminos a utilizar en la búsqueda de una posible solución. A su vez deja entrever las dificultades que se puedan presentar a lo largo de la búsqueda de una respuesta al cuestionamiento planteado.

En distintas áreas del conocimiento se trabaja con situaciones contextualizadas algunas ideales y otras en menor medida, lo cual hace que las variables sean de gran utilidad en la

solución de las mismas. Dado que en algunas situaciones y dependiendo de la perspectiva de donde se mire, estas pueden asumir ser una incógnita o un parámetro. Es decir, o bien es el dato que se necesita saber para poder proporcionar una respuesta al cuestionamiento planteado, o simplemente puede ser un parámetro o constante dentro del mismo problema.

2.1.2.3.El álgebra como el estudio de las relaciones entre cantidades.

A través de distintas investigaciones, Nemirovsky y Janvier (citado en Kieran,1996) mencionan que es pertinente hacer uso de fenómenos físicos como medio de aproximación al álgebra haciendo uso de la variable, esto con el fin de que los estudiantes puedan construir distintas representaciones (gráfica, ecuación, tabular, entre otras) que permitan dar significado al simbolismo algebraico.

En la concepción expuesta por Usiskin (1988) y Molina (2015), las letras se pueden asumir como variables que están en constante cambio, es decir, variables que están en función de otras, lo cual permite trabajar directamente con funciones y familia de funciones, de allí el significado de la variable dependiente y la variable independiente.

2.1.2.4.El álgebra como el estudio de estructuras.

Usiskin (1988) menciona que esta concepción se relaciona más a nivel universitario que escolar, dado que en la escuela a pesar de que se trabajan las propiedades de las distintas estructuras algebraicas, estas no son nombradas como tal.

Aquí las variables se usan para manipular propiedades abstractas, es decir, estas no se usan para hallar un valor exacto o para determinar una función, simplemente se estudian nuevas estructuras y sus propiedades.

2.2. Álgebra en los Documentos Curriculares

A continuación se hace una caracterización de los referentes de calidad implementados en la actualidad por el MEN, como son los: LCM, EBCM y DBA, en cuanto al trabajo relacionado con el álgebra escolar.

Inicialmente se realiza un recuento histórico del currículo de matemáticas en Colombia, luego se expone una mirada del álgebra y el desarrollo del pensamiento algebraico desde cada uno de los documentos mencionados anteriormente.

2.2.1. Antecedentes

La educación en Colombia se desarrolló inicialmente a partir de las doctrinas cristianas, es decir, estaba bajo la supervisión de la iglesia, luego en el siglo XVIII durante el reinado del Carlos III surgieron las primeras “escuelas públicas”, donde se enseñaba a leer, escribir y contar. Posteriormente en el siglo XIX Francisco de Paula Santander, instauró el sistema de escuelas públicas, en las cuales se enseñaba además, aritmética y moral cristiana, a partir de allí se crearon las leyes educativas y los planes de estudios (Patiño, 2014).

Dando continuidad, en el gobierno de Mariano Ospina Rodríguez, a través del Código de Instrucción Pública de 1844, el estado empieza a intervenir en la educación, que estaba basada en una formación humanística y técnica. En 1870 surgió la Dirección Nacional de Instrucción Pública, dada a partir de la reforma radical *Paz, caminos y escuela*.

Siguiendo con lo anterior, en el siglo XX se inició el enfoque a la Escuela Nueva – Activa y a nuevos recursos pedagógicos, como consecuencia de las ciencias, enfocadas en la psicología, la sociología y la antropología.

Respecto a la enseñanza de las matemáticas escolares en el transcurso de las décadas de 1940 y 1950, se desempeñó una sistematización de las matemáticas por medio del lenguaje de la teoría de conjuntos y de la lógica matemática, la cual fue desarrollada por el grupo denominado “Nicolás Bourbaki” (a partir de la concepción bourbakista se llegó a pensar en eliminar el plural “matemáticas” para considerar el singular “matemática”). Estas temáticas, fueron parte de programas experimentales de matemáticas, las cuales permitían el acceso a matemáticas avanzadas.

Hacia los años 60 y 70 la denominada “nueva matemática”, pretendía ejercer una transformación en la enseñanza de las matemáticas, las características de esta nueva corriente son: el énfasis en las estructuras abstractas y profundización en la lógica, lo cual trajo una fundamentación en la teoría de conjuntos y el álgebra; descendió el enfoque de la geometría elemental; implicando la falta de actividades en las cuales se fomenta el interés de los estudiantes y estas a su vez fueron cambiadas por ejercicios que fueran resueltos por medio de la tautología. Para realizar esta transformación el gobierno promulgó el decreto

1710 de 1963, el cual estableció en los programas para primaria objetivos generales y específicos conductuales. Así mismo se instauraron con este mismo estilo en el decreto 080 de 1974 los programas para secundaria (MEN, 1998).

Entre los años 1970 y 1980, se inició un debate entre la comunidad de educación matemática. Por un lado estaban los que preferían la “nueva matemática” y por otro quienes apoyaban volver a lo tradicional: las operaciones con enteros, fraccionarios y decimales.

De esta manera en 1975 la administración de López Michelsen, dio apertura a una reforma escolar denominada Mejoramiento Cualitativo de la Educación. Esta se encargó de capacitar a maestros, además de lograr una renovación en los programas y a partir de esto se podría establecer un mejoramiento en la educación.

En el año 1978, con ayuda de Carlos Vasco Uribe, el ministerio empezó a reestructurar las matemáticas escolares en Colombia. Esta renovación curricular procuraba superar los inconvenientes entre las dos corrientes antes nombradas.

A partir de lo anterior se estableció que el marco teórico del programa de matemáticas, pretendió enfocarla como sistemas y no como conjuntos, así se tuvieron en cuenta distintas áreas de las matemáticas como: los números, la geometría, las medidas, los datos estadísticos, la lógica y los conjuntos comprendida como totalidades estructuradas.

Por último, en la Ley General de Educación (Ley 115 de 1994) se identifica el enfoque en sistemas el cual se adoptó para algunas áreas entre ellas el área de matemáticas, los cuales se encuentran contemplados en los artículos 21 y 22 de la misma.

Ahora, atendiendo a lo estipulado en el artículo 78 de esta ley, se diseñan los LCM para las áreas obligatorias entre ellas las siguientes: español, matemáticas, ciencias sociales, ciencias naturales, que tienen como finalidad ampliar el razonamiento lógico y analítico para la interpretación y solución de problemas de las ciencias, la tecnología y la cotidianidad mediante el desarrollo de distintos pensamientos a saber: pensamiento numérico, pensamiento métrico, pensamiento geométrico, pensamiento estadístico y por último pensamiento variacional.

Posteriormente publican los EBCM (MEN, 2006) los cuales son creados con el fin de materializar los LCM, proporcionando información de interés para todas las instituciones educativas y a su vez siendo material de apoyo para el desarrollo de planes de estudio.

Según (MEN, 2015b) en junio de 2015 el presidente Juan Manuel Santos y la ministra de Educación Gina Parody, presentaron los DBA en matemáticas, establecidos como una herramienta que permite a familias, colegios y profesores de Colombia conocer lo básico que los estudiantes deben aprender en matemáticas.

2.2.2. Álgebra desde los Lineamientos Curriculares de Matemáticas.

Los LCM son un documento publicado por el MEN en el año 1998 como un trabajo mancomunado de la comunidad de educación matemática, siendo estos una orientación en cuanto a la elaboración de los currículos propios en cada una de las instituciones educativas colombianas.

Estos a su vez se estructuran bajo tres aspectos:

- Conocimientos básicos
- Procesos generales
- Contextos

Para el desarrollo de este trabajo solo se consideraran los dos primeros ítems, dado que estos servirán como insumos para hacer la clasificación de los EBCM y los DBA.

2.2.2.1. Conocimientos básicos.

Los conocimientos básicos contemplados en los LCM (MEN, 1998) están relacionados con los procesos que desarrollan el pensamiento matemático en cada uno de los pensamientos y sus sistemas, los cuales son los siguientes:

- Pensamiento numérico y sistemas numéricos
- Pensamiento espacial y sistema geométrico
- Pensamiento métrico y sistemas de medidas
- Pensamiento aleatorio y sistemas de datos
- Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos

Para el desarrollo de este trabajo se tendrá en cuenta el pensamiento variacional dado que a partir del mismo se trabaja de forma directa el pensamiento algebraico.

Según Vasco (2003) el pensamiento variacional puede describirse como una forma de pensar de manera dinámica para así poder generar mentalmente sistemas en los cuales se relacionen las variables internas que pertenezcan al mismo y, a su vez, estas covaríen de manera semejante a los patrones de covariación entre cantidades que tengan la misma o distinta magnitud (según sea el caso) en los subprocesos relacionados con la realidad.

Complementando la anterior hipótesis, Vasco (2003) argumenta que el objeto del pensamiento variacional es la captura y modelación de la covariación entre magnitudes, lo cual implica no solo la resolución de problemas contextualizados sino armar un modelo que sintetice todos los posibles casos, teniendo en cuenta la situación a trabajar.

Los LCM (MEN, 1998), proponen que el pensamiento variacional sea desarrollado por medio de la enseñanza de contenidos matemáticos divididos en secciones, dentro de un campo conceptual, que incluye conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados, que lleven a analizar, organizar y modelar situaciones y problemas de la actividad práctica del ser humano, de las ciencias y de las propias matemáticas.

Adicionalmente los LCM (MEN, 1998) proporciona una sucinta visión histórica del estudio de la variación dentro de las matemáticas, la cual tiene origen con las tablas babilónicas, las gráficas de variación en la edad media y las formulas algebraicas que tienen origen renacentista. Esta reconstrucción histórica tiene como finalidad mostrar que a partir del estudio de distintos contextos en los cuales se tiene como objeto de estudio el movimiento, se logra la construcción matemática de la variación, la cual es la que configura el cálculo.

De acuerdo a esta visión histórica se establecen los conceptos, procedimientos y métodos que incluyen la variación. Algunos núcleos matemáticos conceptuales donde se encuentra la misma son: continuo numérico reales; la función, las magnitudes; el álgebra en un sentido simbólico, y modelos matemáticos de tipos de variación, de allí que el álgebra este directamente relacionada con el pensamiento variacional.

A su vez, el MEN (1998) argumenta que “Entre los sistemas de representación asociados a la variación se encuentran: los enunciados verbales, las representaciones tabulares, las gráficas tipo cartesiano o sagital, las representaciones pictóricas o icónicas, la instruccional (programación), la mecánica (molinos), las formulas y expresiones analíticas”. También establecen que es necesario empezar el estudio de la variación desde la primaria con el estudio de patrones, por medio de situaciones de la vida cotidiana y en las propias matemáticas en escenarios geométricos o numéricos y/o graficas cartesianas.

Por otro lado cuando aparece en la historia la noción de función, esta se establece como una herramienta necesaria para relacionar patrones de variación entre variables (dependientes e independientes).

Además, Valoyes (2013) expone que debido a que en los LCM se considera en un primer momento la generalización de patrones aritméticos y posteriormente se constituye en una potente herramienta para la modelación de situaciones de cuantificación y de diversos fenómenos de variación y cambio, se puede decir que el álgebra juega un doble papel, dado que esta es considerada como uno de los sistemas simbólicos para representar y manipular el sistema conceptual del pensamiento variacional, es decir, como sistema simbólico y como sistema matemático, entendiendo sistema como "un conjunto de objetos, con sus operaciones y sus relaciones".

2.2.2.1. Procesos generales.

Los procesos generales que establecen los LCM (MEN, 1998) están relacionados con el aprendizaje, estos mismos son: la resolución y el planteamiento de problemas, el razonamiento, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.

2.2.2.1.1. La resolución y el planteamiento de problemas.

Los LCM (MEN, 1998) consideran la actividad de resolver problemas, importante para el desarrollo de las matemáticas, tanto así que diferentes propuestas curriculares la consideran como eje central en el currículo de matemáticas, además debe ser un objetivo primario y parte de la actividad matemática.

Así mismo, la actividad de resolver problemas permite que en la medida en que los estudiantes resuelven problemas se familiaricen con el uso de las matemáticas, y así desarrollen sus capacidades de comunicación y procesos de pensamiento matemático. (MEN, 1998).

Los LCM, resaltan los siguientes aspectos importantes para aprender matemáticas:

- Formulación de problemas dentro y fuera de las matemáticas.
- Desarrollo y aplicación de diversas estrategias para la resolución de problemas.
- Verificación e interpretación de resultados a la luz del problema original.
- Generalización de soluciones y estrategias para nuevas situaciones problema.
- Adquisición de confianza en el uso significativo de las matemáticas.

Polya (1969, citado en MEN,1998) afirma que “resolver un problema es encontrar un camino allí donde se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de salir de una dificultad, encontrar la forma en sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no es conseguible de forma inmediata, utilizando los medios adecuados”.

2.2.2.1.2. El razonamiento.

Los LCM (MEN, 1998) establecen una relación entre el razonamiento matemático y el planteamiento y resolución de problemas, en cuanto tienen que ver con las matemáticas como comunicación, como modelación y como procedimientos.

Así mismo afirman que en el razonamiento matemático se deben tener en cuenta aspectos como: la edad de los estudiantes y su nivel de desarrollo, y los logros alcanzados en los cursos tomados y amplificar los mismos en los grados a cursar.

Los siguientes son aspectos son tomados de los LCM y es importante considerarlos para llegar a reconocer el proceso de razonar:

- Dar cuenta del cómo y porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones.
- Justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas.

- Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.
- Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.
- Utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas son más que memorizar reglas y algoritmos y que potencian la capacidad de pensar.

2.2.2.1.3. La comunicación.

Los LCM (MEN, 1998) expresan que la comunicación es una necesidad que tienen todos los seres humanos en diferentes disciplinas. Además que es esencial para formar vínculos entre los estudiantes y el lenguaje abstracto y simbólico de las matemáticas. El proceso de comunicación pretende que las personas tengan las siguientes habilidades:

- Expresar ideas hablando, escribiendo, demostrando y describiendo visualmente de diferentes formas.
- Comprender, interpretar y evaluar ideas que son presentadas oralmente, por escrito y de forma visual.
- Construir, interpretar y ligar varias representaciones de ideas y relacionarlas.
- Hacer observaciones y conjeturas, formular preguntas, y reunir y evaluar información.
- Producir y presentar argumentos persuasivos y convenientes.

Thomas A. Romberg ((s.f) citado en MEN, 1998) quien resalta que la comunicación verbal y escrita son importantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas por las siguientes razones. En primera instancia, la comunicación como argumento lógico es primordial en el discurso matemático. En segundo lugar, la comunicación es el medio por el cual los conocimientos individuales se sistematizan y así constituyen un conocimiento nuevo. Y en tercera instancia, el desarrollo de estructuras del sistema lingüístico construye la comprensión de los estudiantes.

2.2.2.1.4. La modelación.

Los LCM (MEN, 1998) afirman que en la escuela se resalta que los estudiantes aprenden matemáticas “haciendo matemáticas” lo cual es primordial en la resolución de problemas

de la vida diaria, a partir de esto es necesario involucrar en el currículo diferentes problemas en los cuales este inmerso el contexto de los estudiantes.

Treffers y Goffree citados por el MEN (1998) proponen que para “transferir la situación problemática real a un problema planteado matemáticamente” se pueden ver algunas actividades como las siguientes:

- Identificar las matemáticas específicas en un contexto general
- Esquematizar
- Formular y visualizar un problema en diferentes formas
- Descubrir relaciones
- Descubrir regularidades
- Reconocer aspectos isomorfos en diferentes problemas
- Transferir un problema de la vida real a un problema matemático
- Transferir un problema del mundo real a un modelo matemático conocido

Después que se logra extrapolar un problema más o menos matemático, este problema puede ser tratado con herramientas matemáticas, para lo cual se pueden hacer las siguientes actividades propuestas por los lineamientos:

- Representar una relación en una formula
- Probar o demostrar regularidades
- Refinar y ajustar modelos
- Utilizar diferentes modelos
- Combinar e integrar modelos
- Formular un concepto matemático nuevo
- Generalizar

2.2.2.1.5. La elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.

Los LCM MEN (1998), exponen que los estudiantes deben tener la habilidad de hacer cálculos correctamente, además de seguir instrucciones, usar de forma adecuada la calculadora para realizar operaciones, hacer transformaciones de expresiones algebraicas de

una forma a otras, que mida longitudes, áreas y volúmenes de forma correcta, lo cual quiere decir que realicen tareas matemáticas en las cuales se encuentren procedimientos usados frecuentemente en el desarrollo de rutinas secuenciadas. El aprendizaje de estos procedimientos es de gran importancia en el currículo porque estos facilitan la aplicación de las matemáticas en la vida cotidiana.

Los procedimientos relacionados con el pensamiento algebraico considerados en los LCM son los *procedimientos analíticos* los cuales comprenden modelar situaciones de cambio a través de las funciones, las gráficas y las tablas, realizar traducciones de una a otra representación de la función, resolver ecuaciones, comprender y hallar tasas de inflación, los intereses de préstamo, entre otras.

2.2.3. Álgebra desde los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.

Los EBCM son un documento publicado en el 2006 por el MEN, cuyo objetivo principal es la educación para todos, teniendo en cuenta la diversidad cultural y proporcionando las competencias a los educandos, para que estos ejerzan sus derechos y deberes democráticos.

Cabe resaltar que en este documento se contemplan los cinco procesos generales de la actividad matemática descritos en los LCM. A su vez se describen los cinco pensamientos que constituyen el pensamiento matemático, los cuales ya fueron tratados anteriormente.

Por otro lado, los EBCM, están organizados en 5 conjuntos de grados (primero – tercero, cuarto - quinto, sexto – séptimo, octavo – noveno, decimo – once) esto con el fin de proporcionar una mayor flexibilidad en cuanto a la distribución de las actividades allí expuestas dentro del tiempo escolar y a su vez ser un apoyo para el docente en la organización del ambiente y situaciones en las cuales el aprendizaje sea significativo.

También se hace necesario mencionar que debido a que en los EBCM se contemplan cinco pensamientos los cuales están estructurados de la misma manera que los LCM, para este trabajo solo se tendrá en cuenta el pensamiento variacional, dada su íntima relación con el desarrollo del pensamiento algebraico.

De acuerdo a los EBCM (MEN, 2006), y complementando lo expuesto en LCM (MEN, 1998), el pensamiento variacional está relacionado con el reconocimiento, la percepción, la

identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos. También su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos (verbales, icónicos, gráficos o algebraicos).

Los EBCM se establece que uno de los propósitos, es que a partir del conocimiento variacional se estructuren distintas estrategias para la comprensión y uso de conceptos que logren un aprendizaje con sentido en el cálculo numérico y algebraico, además del cálculo diferencial e integral.

Además, estos pretenden desarrollar el pensamiento algebraico tomando como referencia los siguientes objetos de estudio: regularidades, sucesiones, expresiones algebraicas, cambio y variación, relaciones, ecuaciones, inecuaciones o desigualdades y distintos sistemas de representación.

2.2.4. Álgebra desde los Derechos Básicos de Aprendizaje

Los DBA (MEN, 2015a), son un documento publicado en el año 2015 por el MEN, el cual se constituye como una herramienta dirigida a la comunidad educativa. Este tiene como fin hacer evidente los temas matemáticos a desarrollar que son “indispensables” en la educación de niños y jóvenes siendo estos, garantía del aprendizaje de los mismos.

La estructura de los DBA se fundamenta principalmente en el trabajo propuesto en los LCM y los EBCM, pero no se hace un reconocimiento de la forma en que son usadas dichas estructuras, es decir, si se tienen en cuenta solamente los pensamientos (los cuales no están especificados en ninguna parte): todos, algunos o solo uno, o si solo se contemplan los procesos generales.

Por otro lado, se hace necesario mencionar que esta propuesto solamente para las áreas de matemáticas y español.

En la organización del documento, se evidencia lo siguiente:

- Se plantean, un listado de DBA para cada grado, es decir, se contemplan los grados establecidos desde primero hasta once.
- Pueden ser usados para establecer una ruta de aprendizaje, con el fin de abarcar todos los temas propuestos en los EBCM.

- En cada DBA se plantean algunos ejemplos, los cuales según los autores del documento son diseñados para aclarar los enunciados, por ejemplo:

DBA número 16, grado 6, “Usa letras para representar cantidades y las usa en representaciones sencillas para representar situaciones.” Tiene como enunciados auxiliares los siguientes:

- ✓ Entiende que el perímetro de un cuadrado de lado y es $4y$, pues $4y = y + y + y + y$
- ✓ Adriana alcanzó a leer t palabras, su hermano Andrés leyó el triple, y su primo Iván leyó dos palabras menos que Adriana. Entre todos leyeron $5t - 2$ palabras.

$$(t) + (3t) + (t - 2) = t + 3t + t - 2 = 5t - 2$$

- Estos enunciados pueden ser usados como referentes de planeaciones en cuanto al trabajo del docente.

Los DBA son un documento que está sujeto a cambios, dado que esta es una primera versión que se puede mejorar a partir de las críticas de la comunidad académica¹.

¹ En el año 2017 el MEN pretende publicar una nueva versión de este documento.

3. METODOLOGÍA

En este capítulo se mostrarán los diferentes procesos de recolección de información, con los cuales se pretenden articular las concepciones del álgebra escolar que han sido previamente abordadas, junto con los referentes de calidad actuales propuestos por el MEN en cuanto al currículo de matemáticas.

A partir de la revisión realizada a los documentos establecidos como referentes de calidad (LCM, EBCM y DBA) por el MEN se hace una clasificación de los mismos, la cual se describe a continuación:

3.1. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.

En primera medida se realizó una clasificación de los EBCM (MEN, 2006) teniendo en cuenta solamente los relacionados con el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. Cabe resaltar que la relación entre este pensamiento y el pensamiento algebraico ha sido expuesta previamente. A partir de esta tabla se estableció una codificación que será usada más adelante.

Por otro lado y teniendo en cuenta dicha clasificación (Tabla 1.), se hizo uso de algunas siglas, las cuales se asignaron de la siguiente manera:

Las siglas de la columna *ciclo*, se diseñaron de tal manera que a cada uno se le asignó una letra del alfabeto, es decir: para los conjuntos de grados de 1-3 se tiene la letra (A), para el de 4-5 la letra (B), al de 6-7 la (C), al de 8-9 la (D) y al de 10-11 (E).

A su vez en la segunda columna, residen los estándares correspondientes al pensamiento variacional para cada uno de los conjuntos de grados, y por último en la casilla correspondiente al *código* se encuentran los mismos codificados, teniendo en cuenta las letras que corresponde a la codificación del ciclo y un número que representa un orden (este orden se encuentra tal cual como están en los EBCM) entre los estándares de cada ciclo.

Tabla 1. Clasificación de los EBCM.

Ciclo	Estándar	Código
A	Reconozco y describo regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros).	A-01
A	Describo cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas.	A-02
A	Reconozco y genero equivalencias entre expresiones numéricas y describo cómo cambian los símbolos aunque el valor siga igual.	A-03
A	Construyo secuencias numéricas y geométricas utilizando propiedades de los números y de las figuras geométricas.	A-04
B	Describo e interpreto variaciones representadas en gráficos.	B-01
B	Predigo patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica.	B-02
B	Represento y relaciono patrones numéricos con tablas y reglas verbales.	B-03
B	Analizo y explico relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo con cierta regularidad en situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales.	B-04
B	Construyo igualdades y desigualdades numéricas como representación de relaciones entre distintos datos.	B-05
C	Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).	C-01
C	Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).	C-02
C	Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos.	C-03
C	Utilizo métodos informales (ensayo y error, complementación) en la solución de ecuaciones.	C-04
C	Identifico las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan.	C-05
D	Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.	D-01
D	Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.	D-02
D	Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.	D-03
D	Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.	D-04
D	Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.	D-05
D	Analizo los procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales.	D-06
D	Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación.	D-07
D	Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan.	D-08
D	Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.	D-09
E	Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos.	E-01

E	Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollo métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos.	E-02
E	Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas.	E-03
E	Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas.	E-04

3.2. Derechos Básicos de Aprendizaje.

Con base en los DBA (MEN, 2015a) y su clasificación (Tabla 2.) también se realiza una asignación de código el cual se describe a continuación: en la primera columna se encuentra el *grado* de escolaridad; en la segunda columna se encuentra el *número* del derecho establecido en el documento; en la tercera el *derecho básico* para cada grado respectivamente; y en la última columna el *código* mediante en el cual se encuentra el número del grado y el número del derecho básico. A partir de esta tabla de estableció una codificación que será usada más adelante.

Tabla 2. Clasificación de los DBA.

Grado	Número	Derechos Básicos de Aprendizaje	Código
1	10	Reconoce y propone patrones simples con números, ritmos, o figuras geométricas.	1-10
2	13	Reconoce y propone patrones simples con números, ritmos o figuras geométricas.	2-13
3	8	Comprende el significado de la igualdad y utiliza el símbolo " = " de forma correcta.	3-08
3	14	Puede describir variaciones.	3-14
3	15	Reconoce y propone patrones con números o figuras geométricas.	3-15
5	10	Resuelve problemas de proporcionalidad directa.	5-10
6	7	Soluciona problemas que involucran proporción directa y puede representarla de distintas formas.	6-07
6	8	Usa razones (con cantidades y unidades) para solucionar problemas de proporcionalidad.	6-08
6	16	Usa letras para representar cantidades y las usa en representaciones sencillas para representar situaciones.	6-16
7	2	Identifica si en una situación dada las variables son directamente proporcionales o inversamente proporcionales o ninguna de las dos.	7-02
7	5	Usa las relaciones entre velocidad, distancia y tiempo para solucionar problemas.	7-05

7	7	Manipula expresiones lineales (del tipo $ax + b$, donde a y b son números dados), las representa usando graficas o tablas y las usa para modelar situaciones.	7-07
7	8	Dada una expresión de la forma $ax^2 + bx + c$ (donde a, b y c son números dados), calcula el valor de la expresión para distintos valores de x (positivos o negativos) y presenta sus resultados en forma de tabla o gráfica de puntos.	7-08
7	11	A partir de una gráfica de puntos o de línea, identifica e interpreta los puntos máximos y mínimos y el cambio entre dos puntos de la gráfica.	7-02
7	15	En una serie sencilla identifica el patrón y expresa la n -ésima posición en términos de n .	7-15
8	1	Comprende sin un lenguaje formal la noción de función como una regla f , que a cada valor de x , le asigna un único valor $f(x)$ y reconoce que su grafica está conformada por todos los puntos $(x, f(x))$.	8-01
8	2	Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa usando razones o proporciones, tablas, gráficas o ecuaciones.	8-02
8	7	Reconoce que la gráfica de $y = mx + b$ es una línea recta.	8-07
8	8	Usa su conocimiento sobre funciones lineales ($f(x) = mx + b$) para plantear y solucionar problemas.	8-08
8	9	Aplica la propiedad distributiva en expresiones simples como $(Ax + B)(Cx + D)$.	8-09
8	10	Reconoce que la gráfica de una función cuadrática (de la forma $g(x) = ax^2$,	8-10
8	11	Utiliza identidades como: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ Para resolver problemas y las justifica algebraica o geoméricamente. Reconoce errores comunes como $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.	8-11
8	12	Multiplica, divide, suma y resta fracciones que involucran variables (fracciones algebraicas) en la resolución de problemas.	8-12
9	5	Conoce las propiedades y las representaciones gráficas de las familias de funciones lineales $f(x) = mx + b$ al igual que los cambios que los parámetros m y b producen en la forma de sus gráficas.	9-05
9	6	Plantea sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y los resuelve utilizando diferentes estrategias.	9-06
9	7	Describe características de la relación entre dos variables a partir de una gráfica.	9-07
9	8	Conoce las propiedades y las representaciones gráficas de la familia de funciones $g(x) = ax^n$ con n entero positivo o negativo.	9-08
9	11	Expresa una función cuadrática ($y = ax^2 + bx + c$) de distintas formas ($y = a(x + d)^2 + e$, o $y = a(x - f)(x - g)$) y reconoce el significado de los parámetros a, c, d, e, f y g , y su simetría en la gráfica	9-11
9	12	Conoce las propiedades y las representaciones gráficas de la familia de funciones exponenciales $h(x) = kax$ con $a > 0$ y distinto de 1, al igual que los cambios de los parámetros a y k producen en la forma de sus gráficas.	9-12
10	2	Comprende el concepto de límite de una sucesión.	10-02
10	3	Reconoce la familia de funciones logarítmicas $f(x) = \log_a(x)$ junto con su dominio, rango, propiedades y gráficas.	10-03
10	4	Comprende el significado de la razón de cambio promedio de una función en un intervalo (a partir de gráficas, tablas o expresiones) y la calcula.	10-04

10	5	Reconoce la noción razón de cambio instantáneo de una función en un punto $x = a$.	10-05
10	6	Reconoce los cambios generados en las gráficas de funciones cuando su expresión algebraica presenta variaciones como: $y = f(x) + a$, $y = bf(x)$, $y = f(x + c)$, $y = f(dx)$.	10-06
10	8	Reconoce características generales de las gráficas de las funciones polinómicas observando regularidades.	10-08
10	9	Soluciona inecuaciones del tipo $f(x) > 3$ o $f(x) \leq g(x)$, donde f y g son funciones dadas de forma gráfica o algebraica.	10-09
10	10	Compara y comprende la diferencia entre la variación exponencial y lineal.	10-10
10	14	Comprende la definición de las funciones trigonométricas $sen(x)$ y $cos(x)$, en las cuales x puede ser cualquier número real y calcula a partir del círculo unitario, el valor aproximado de $sen(x)$ y $cos(x)$.	10-14
11	1	Comprende que entre cualesquiera dos números reales hay infinitos números reales.	11-01
11	3	Interpreta la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función $f(x)$ en un punto $A = (a, f(a))$ como el límite de las pendientes de las rectas secantes entre el punto A y los puntos sobre la gráfica que se acercan a A .	11-03
11	4	Reconoce la derivada de una función como la función de razón de cambio instantáneo.	11-04
11	5	Conoce las fórmulas de las derivadas de funciones polinomiales, trigonométricas, potencias, exponenciales y logarítmicas y las utiliza para resolver problemas.	11-05
11	6	Modela situaciones haciendo uso de funciones definidas a trozos.	11-06
11	7	Analiza algebraicamente funciones racionales y encuentra su dominio y sus asíntotas.	11-07
11	8	Reconoce las propiedades básicas que diferencian las familias de funciones exponenciales, lineales, logarítmicas, polinómicas, etc., e identifica cuáles puede utilizar para modelar situaciones específicas.	11-08
11	9	Reconoce cuándo una función tiene o no una función inversa.	11-09
11	13	Razona geométrica y algebraicamente para resolver problemas y para encontrar fórmulas que relacionan magnitudes en diversos contextos.	11-13

3.3. Clasificación de los EBCM y DBA a partir de los elementos propios de las concepciones

Para los EBCM y DBA se hizo una clasificación de los mismos a partir de los elementos propios de las concepciones del álgebra. En la tabla 3 y tabla 4, esta consignada dicha información y además está organizada de la siguiente manera:

- En la primera columna se establecen las concepciones con sus respectivas siglas (dicha abreviación ya ha sido mencionada anteriormente), en la segunda columna se encuentran las *características* propias de cada concepción y en la tercera columna se encuentra la respectiva clasificación de los EBCM.

- Para los DBA se creó una tabla organizada de la misma manera que la tabla descrita anteriormente.

Cabe resaltar que las siglas asignadas y la codificación correspondiente tienen como finalidad, representar gráficamente la relación entre los EBCM y los DBA con cada una de las concepciones del álgebra.

A su vez dicha codificación será usada para establecer la relación entre los tres documentos propuestos como referentes de calidad por el MEN y las características propias de las concepciones.

Posteriormente se hizo una clasificación de los EBCM (Anexo 1.) y los DBA (Anexo 2.) en contraste con los objetos de estudio del álgebra establecidos en los EBCM (MEN, 2006) y procesos generales señalados en los LCM (MEN, 1998) los cuales han sido mencionados anteriormente.

Tabla 3. Clasificación EBCM de acuerdo a las características de cada concepción.

Concepciones del álgebra	Características de cada concepción		EBCM
Álgebra como aritmética generalizada (ACAG)	1	Caracterización de patrones	A-01,B-02,B-03
	2	Visualización	A-01,B-01, B-02,B-03
	3	Manipulación del objeto de estudio	A-01-B-02, B-03
	4	Formulación de las características del objeto de estudio	A-01, A-03, A-04,B-02, B-03
	5	Hallazgo del patrón	A-01, B-02, B-03
Álgebra como el estudio de los procedimientos para resolver ciertos tipos de problemas (EPRTP)	1	Uso de variables o incógnitas	C-04,D-01,D-05
	2	Interpretación y abordaje del problema en busca de la solución	A-02,D-01,D-03,D-05,D-07,E-02
Álgebra como el estudio de las relaciones entre cantidades (ERC)	1	Establecer un modelo entre variable (variable dependiente e independiente)	B-04,B-05, C-01, C-02,C-03,C-05,D-07,D-08, D-09,E-02
	2	Función	B-04,C-05,D-04,D-08,D-09,E-02,E-04
Álgebra como el estudio de estructuras (EEA)	1	Estructuras algebraicas y propiedades	D-02,E-03

Tabla 4. Clasificación DBA de acuerdo a las características de cada concepción.

Concepciones del álgebra	Características de cada concepción		DBA
Álgebra como aritmética generalizada (AAG)	1	Caracterización de patrones	1-10, 2-13, 2-15, 7-15
	2	Visualización	1-10, 2-13, 7-15
	3	Manipulación del objeto de estudio	1-10,2-13,7-15
	4	Formulación de las características del objeto de estudio	1-10, 2-13,7-15
	5	Hallazgo del patrón	1-10, 2-13 3-08,7-15
Álgebra como el estudio de los procedimientos para resolver ciertos tipos de problemas (EPRTP)	1	Uso de variables o incógnitas	3-08,3-14, 6-16, 7-08, 8-11,8-12,9-06, 10-09, 11-05, 11-07, 11-13
	2	Interpretación y abordaje del problema en busca de la solución	5-10, 6-07, 6-08, 7-02, 7-07, 7-08, 7-11, 8-08, 11-05, 11-06, 11-07, 11-08, 11-13
El álgebra como el estudio de las relaciones entre cantidades (ERC)	1	Establecer un modelo entre variable (variable dependiente e independiente)	7-02, 7-05, 7-07, 7-11,10-04, 10-10
	2	Función	7-05, 7-07, 8-01, 8-07,8-08,8-10,9-05,9-07,9-08,9-11, 9-12, 10-03, 10-04, 10-05, 10-06, 10-08, 10-09, 10-14, 11-03, 11-04, 11-05, 11-06,11-07, 11-08, 11-09
El álgebra como el estudio de estructuras (EEA)	1	Estructuras algebraicas y propiedades	8-09, 10-12, 11-01

4. ANÁLISIS

El análisis documental tiene como finalidad establecer la relación entre los documentos establecidos por el MEN como referentes de calidad (LCM, EBCM y DBA), y las concepciones del álgebra propuestas por Kieran (1996) y Usiskin (1988).

4.1. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas

Teniendo en cuenta la información consignada en la tabla 3, se identifica que no todos los estándares cumplen con todos los elementos que constituyen dichas concepciones, es decir, algunos cumplen todas las características y otros cumplen varias pero no todas.

Por lo tanto se mostrarán gráficos en los cuales se usan colores. Cada color representa una de las características de la concepción a tratar, esto se hace con el fin de identificar con claridad cada una de las características de las concepciones que presentan los estándares y como estas se relacionan.

De manera particular para la primera concepción se logra identificar la relación de los estándares con la misma en el gráfico 1.

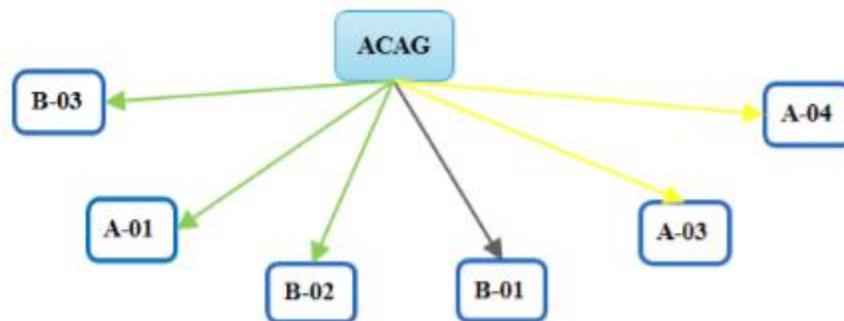


Gráfico 1. Relación de los EBCM con la concepción ACAG.

Los que están relacionados mediante la flecha **verde**, son los que cumplen con todos los elementos, es decir, se puede evidencia que estos tres estándares tienen como finalidad que el estudiante mediante la visualización, la manipulación del objeto de estudio (sea numérico

o geométrico), establezca las características del mismo y formule un patrón en cuanto al hallazgo que él mismo realizó y así poder llegar a una generalización.

Del mismo modo, los que están relacionados con la flecha gris, se evidencia que solo se busca que el estudiante haga uso de la visualización como recurso para predecir que sucede con el siguiente o en su defecto para lograr identificar un patrón. Por último, los que están relacionados con la flecha amarilla al parecer pretenden que el estudiante haga una abstracción de las características que evidenció a partir de la visualización.

En el gráfico 2, se muestra la relación de los estándares con el álgebra vista como el estudio de los procedimientos para resolver ciertos tipos de problemas. Al igual que en la concepción anterior no todos cumplen con todos los elementos particulares de la misma.

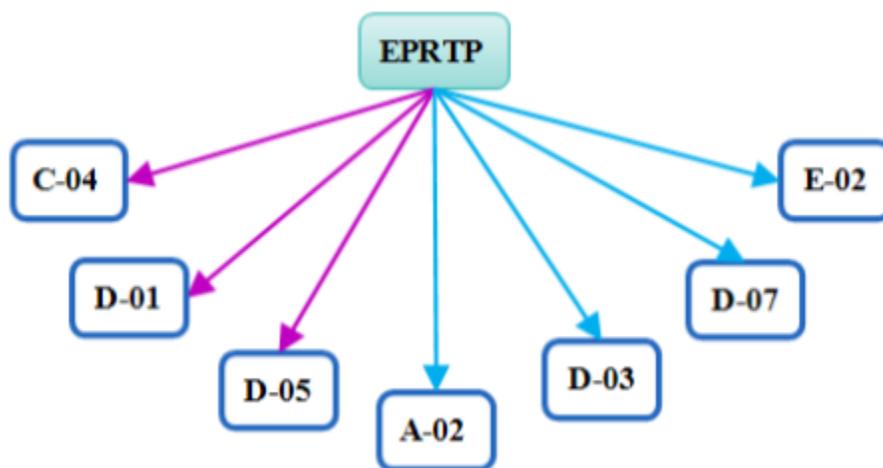


Gráfico 2. Relación de los EBCM con la concepción EP RTP.

Los estándares que están relacionados mediante las flechas de color lila, buscan que los estudiantes a partir de la interpretación de la situación problema que se esté trabajando y el uso de variables y/o incógnitas puedan proporcionar una solución a la misma, dado que para tal fin se hace necesario trabajar con cantidades que se desconocen, asumiéndolas como conocidas para así poder llegar a una solución “coherente”.

En lo que tiene que ver con los que están relacionados a partir de las flechas de color azul, se puede decir que solo cumple la característica número 2, es decir, a partir de lo que se

menciona en cada uno de estos estándares se infiere que el objetivo de los mismos, es hacer que los estudiantes hagan una abstracción de lo que se necesita para poder dar solución a las situaciones propuestas, o sea que, identifiquen los posibles elementos que necesitan para dar solución al cuestionamiento propuesto aun sabiendo que hay información que necesitan sintetizar sea en fórmulas o en el uso de incógnitas y/o variables (según sea el caso).

Ahora el gráfico 3, se centra en mostrar los estándares en los cuales se hace evidente que el álgebra que se quiere enseñar es a través del estudio de las relaciones entre cantidades (ERC).

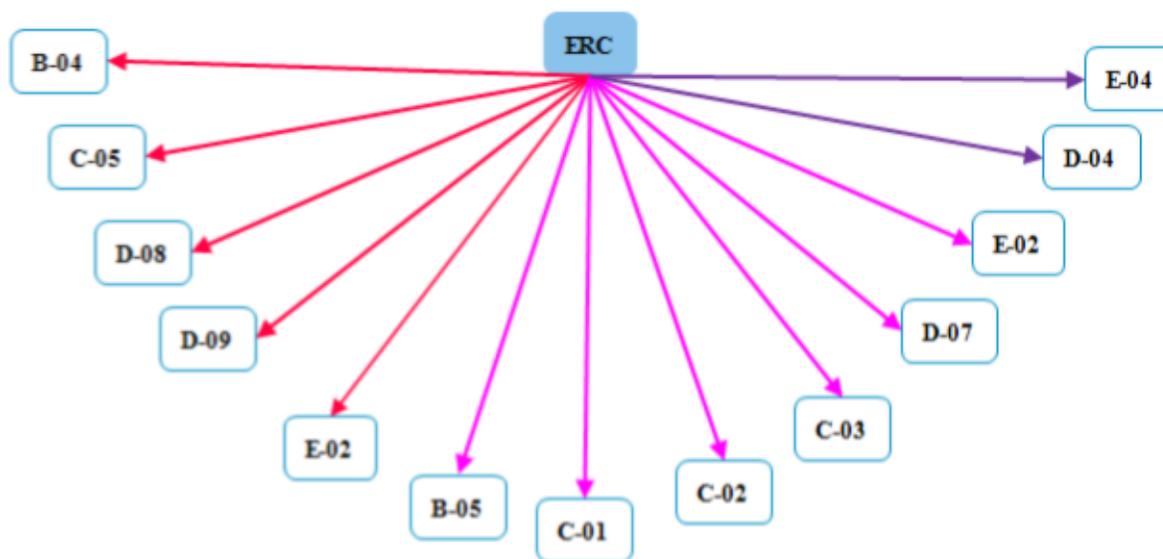


Gráfico 3 Relación de los EBCM con la concepción ERC

En este se puede observar que los estándares que están relacionados con la flecha de color rojo cumplen con todos los elementos que hacen parte de dicha concepción, dado que a partir de los enunciados que se establecen en los mismos, se pretende buscar que el estudiante identifique la relación de variación entre dos cantidades cualesquiera y logre abstraer la misma llegando así a comprender que este proceso está directamente ligado al concepto función. Por otro lado, los que están relacionados con la flecha color lila, solo cumplen la característica 1, es decir, a través de estos se busca que el estudiante establezca

un modelo en el que sea evidente para ellos el uso de variables dependiente e independiente respectivamente. Por último, los estándares que están relacionados con la flecha de color morado cumplen exclusivamente la característica 2, dado que según lo estipulado en los mismos, se supone que el estudiante ya está en la capacidad de modelar una situación a través del uso de la función (teniendo en cuenta la comprensión de la definición).

Finalmente, en el gráfico 4 se muestran los estándares que están relacionados con el álgebra vista como el estudio de estructuras.



Gráfico 4. Relación de los EBCM con la concepción EEA.

De lo cual se puede inferir que estos dos estándares cumplen estrictamente con el trabajo de estructuras y sus respectivas propiedades. Es decir, según los enunciados de dichos estándares al parecer se pretende que los estudiantes evidencien la relación que hay entre las propiedades de las expresiones algebraicas de una manera más formal.

4.2. Derechos Básicos de aprendizaje

Cabe resaltar que esta clasificación se hace a partir del análisis de los enunciados, dado que en este documento específico no hay una distinción en cuanto a los DBA correspondientes a cada uno de los pensamientos, a pesar de que el mismo está fundamentado en los LCM y los EBCM.

A partir de la información consignada en la tabla 4, se evidencia que al igual que en los EBCM, no todos los DBA cumplen con la totalidad de características propias de las

concepciones respectivamente, algunos las cumplen todas y otros algunas, o en su defecto ninguna.

De manera específica, en el gráfico 5 se establece la relación de los DBA con el álgebra vista como una aritmética generalizada.

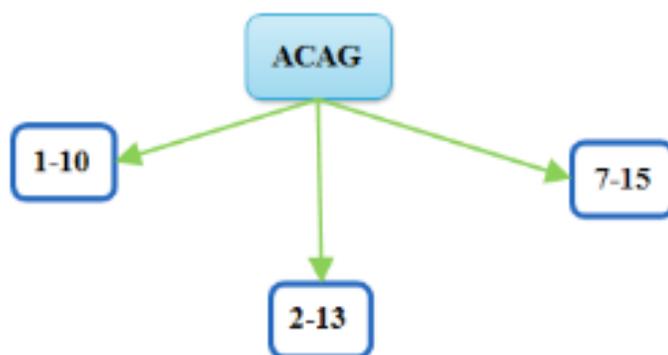


Gráfico 5. Relación de los DBA con la concepción ACAG

Los que están vinculados mediante la flecha verde, cumple con todas las características de la concepción, es decir, a través del análisis del enunciado de cada uno de estos derechos se evidencia que la finalidad de los mismos es que a partir de la manipulación de objetos matemáticos (sean numéricos o geométricos) el estudiante logre evidenciar la secuencialidad, para así establecer un patrón que caracterice el objeto trabajado.

Teniendo en cuenta lo descrito anteriormente se hace evidente que la única concepción que se trabaja en la básica primaria es el álgebra como aritmética generalizada, dado que son muy pocos los DBA que se clasifican como potenciadores del pensamiento algebraico, a su vez muy pocos enunciados permiten inferir la finalidad del mismo.

Ahora, el gráfico 6 hace referencia a los DBA que se relacionan con el álgebra tomada como el estudio de los procedimientos para resolver ciertos tipos de problemas.

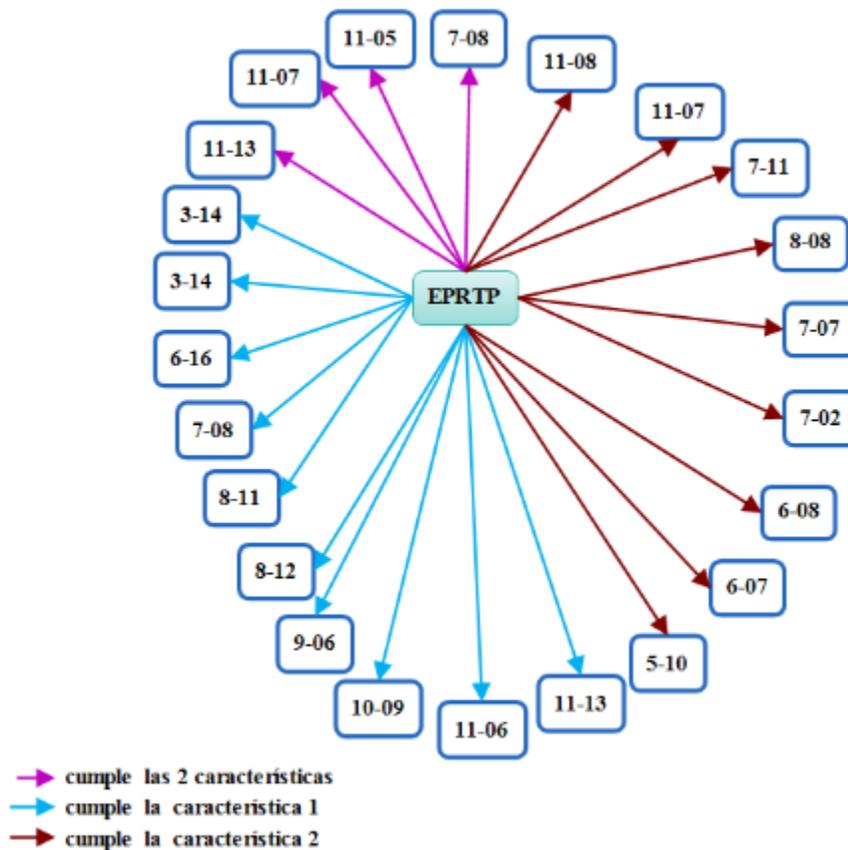


Gráfico 6. Relación de los DBA con la concepción EP RTP.

Los Derechos que a partir de lo que se especifica en su enunciado se puede decir que cumplen los dos elementos que caracterizan la concepción EP RTP están relacionados mediante la flecha de color **lila**, dado que estos hacen énfasis en el uso de la incógnita y de la variable en la aplicación de fórmulas algebraicas para proporcionar una solución al cuestionamiento o situación problema propuesta.

En cuanto a los DBA que están relacionados a través de flecha de color **azul**, se puede decir que estos cumplen solamente la característica 1, puesto que, solamente se tiene en cuenta la aplicación de fórmulas y algoritmos en los cuales se trabaja con letras sin tener que hacer un análisis o una interpretación del resultado (por ejemplo casos de factorización, resolución de sistemas de ecuaciones, entre otros).

Por último los derechos que están relacionados mediante la flecha de color rojo, cumplen con la característica número 2, es decir, que en estos enunciados se evidencia que no solo necesita hacer uso de algoritmos que ha mecanizado, sino que necesita hacer una interpretación y una extrapolación de la información que está implícita en la situación que le presentan, para poder hallar la respectiva solución.

A continuación se muestra el gráfico 7, en el cual se encuentran la concepción del álgebra establecida como el estudio de las relaciones entre cantidades (ERC).

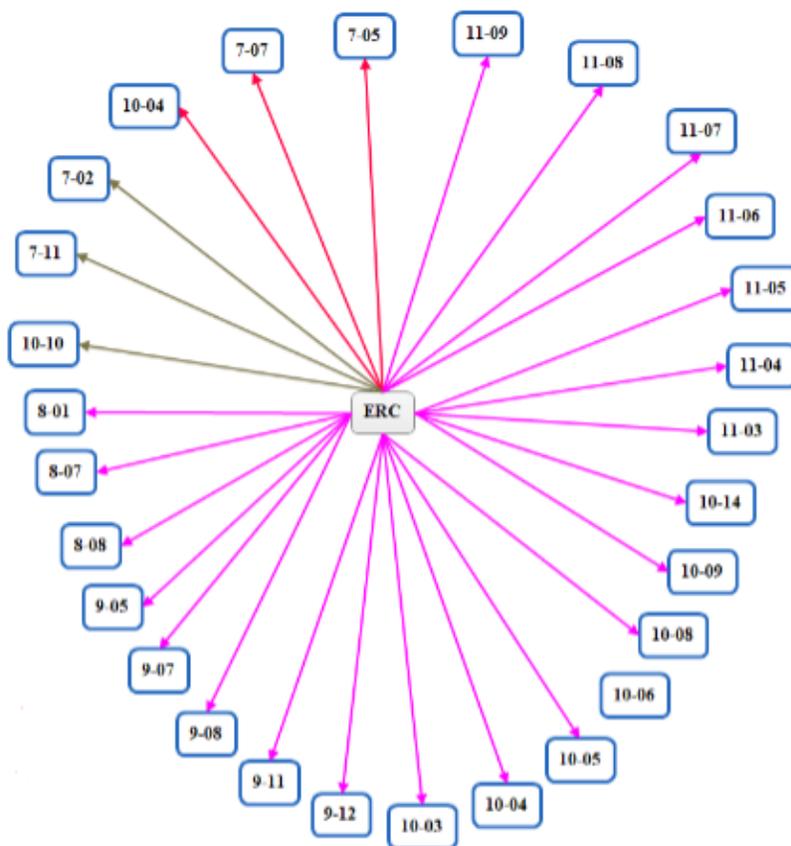


Gráfico 7. Relación de los DBA con la concepción ERC.

Como se muestra en el gráfico la mayoría de los DBA están relacionados con esta concepción, de esto se puede evidenciar que los que están relacionados con la flecha de color gris cumplen la característica número 1, puesto que se infiere que pretenden que el estudiante a partir de distintas representaciones logra identificar las variables que se usan en

los ejercicios que pretenden desarrollar, además a través de los mismos ellos pueden modelar la situación.

Los que están relacionados con la flecha de color **lila**, cumplen exclusivamente la característica número 2, dado que, lo que al parecer se pretende con dichos enunciados es que los estudiantes evidencien algunas características propias de las funciones a través de sus distintas representaciones (gráfica, algebraica, entre otras), a su vez establezcan distinciones entre las mismas.

Ahora, los DBA que se relacionan mediante las flechas de color **rojo** indican que estos cumplen con las dos características, es decir, que se pueda identificar que la función se usa para modelar situaciones involucran fenómenos físicos, a su vez se busca que no solo proporcionen una respuesta numérica sino que los resultados sean interpretados de manera que la respuesta que se proporcione este acorde al trabajo realizado, dado que en los mismos no se busca que una respuesta numérica.

Por último en el gráfico 8, se encuentran los DBA que según sus características pueden estar relacionados con la concepción del álgebra como estudio de estructuras.

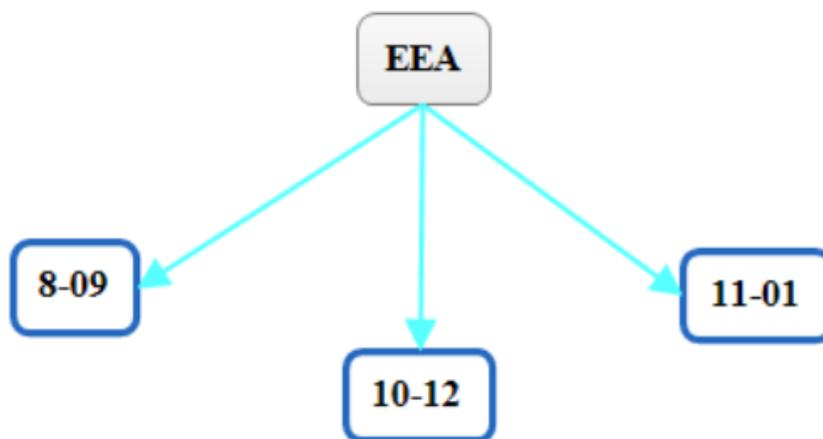


Gráfico 8. Relación de los DBA con la concepción EEA.

Del gráfico 8, se puede inferir que estos DBA según su enunciado busca potenciar el trabajo de las estructuras en la escuela, es decir, se sabe que a pesar de que en la misma se

trabajan algunas de las estructuras algebraicas, esto no se hace de una manera tan formal. Cabe mencionar que en dichos enunciados tampoco se hace de esta manera, pero según los mismo y según la caracterización que se dio a dicha concepción, estos son los que más se acercan al uso del álgebra como estudio de estructuras.

4.3. Lineamientos curriculares

A continuación se muestra en la tabla 5, la clasificación de los EBCM y los DBA teniendo en cuenta los objetos matemáticos planteados en los EBCM y los elementos característicos de las concepciones.

Tabla 5. Clasificación EBCM y DBA a partir de los objetos establecidos en los LCM.

Concepciones del álgebra	Objetos	EBCM	DBA
Álgebra como aritmética generalizada (AAG)	Regularidades	A-01,B-03,B-04	1-10,2-13,3-15,10-08
	Sucesiones	A-04, B-02	10-02,
Álgebra como el estudio de los procedimientos para resolver ciertos tipos de problemas (EPRTP)	Ecuaciones	A-03, B-05, C-04, D-01, D-05	3-08, 5-08, 8-02, 9-06, 9-11
	Inecuaciones	B-05	10-09,
El álgebra como el estudio de las relaciones entre cantidades (ERC)	Cambio y Variación	A-02,B-01, B-02, B-04,C-01,C-02,C-03,D-04,D-07,D-09,E-01,E-02,E-04,	3-14,6-16,7-02,9-07,10-02,10-04,10-05,10-06,10-10,11-01,11-03,11-04
	Sistemas de Representación	B-01,C-01,C-04,D-01,D-05,D-08,E-03	6-07,8-02,8-08,8-12,9-11,9-12,11-07
	Relaciones	B-04,B-05,D-01,D-04,D-08,D-09,E-02,E-03, E-04	5-10,6-07,6-08,7-05,8-02,8-08,8-12,9-05,9-07,9-08, 9-11,9-12, 10-03,10-04,10-05,10-07,10-14
El álgebra como el estudio de estructuras (EEA)	Expresiones algebraicas	D-02,E-03	7-07, 7-08,8-09,8-11,8-12,11-03

Teniendo en cuenta la información consignada en la tabla número 5, se evidencia que los objetos que se establecen en los EBCM están inmersos en los elementos que caracterizan las concepciones, además, si se quiere hacer una comparación entre dicha clasificación y la propuesta anteriormente expuesta en la tabla 1 y en la tabla 2, se logra entrever que los EBCM y los DBA están clasificados de manera uniforme, puesto que al hacer un paralelo entre dichos documentos se establece que tanto en los ciclos como a lo largo de cada uno de los años escolares el trasfondo es trabajar los mismos temas.

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En esta sección se presentan los resultados obtenidos y las respectivas conclusiones en cuanto al desarrollo del trabajo de grado.

Inicialmente se exponen las conclusiones a las cuales se llegó a partir del cumplimiento de los objetivos del trabajo, en segundo lugar, se muestran algunas conclusiones frente a lo que se evidencio en relación a las concepciones y las clasificación de los referentes de calidad en cada una de las mismas, posteriormente se trata de dar respuesta a las preguntas de investigaciones planteadas inicialmente y para finalizar se manifiestan las conclusiones en relación a la formación de las autoras y finalmente muestran las recomendaciones que surgieron a partir del desarrollo del trabajo.

5.1. Acerca de los objetivos

En cuanto al objetivo específico “Identificar elementos que caracterizan la Enseñanza del Álgebra a través de la revisión de los documentos que orientan en la actualidad la educación matemática en Colombia como lo son los LCM, EBCM y los DBA” se tiene que a partir de la caracterización de los elementos propios de las cuatro concepciones del álgebra expuestas por Usiskin (1988) y Kieran (1996) y la clasificación de los EBCM y los DBA en cada una de estas respectivamente, se puede afirmar que los elementos que caracterizan la enseñanza del álgebra en Colombia a partir de los referentes de calidad están enmarcados en su mayoría en las siguientes concepciones EPRTP y ERC, es decir, el trabajo que se quiere desarrollar en la escuela en cuanto al álgebra está ligado a la resolución de problemas (uso de las incógnitas y variables vistas como parámetros) y al concepto de función, este último a través de distintas representaciones (graficas, algebraicas) y en algunos casos a partir del análisis de situaciones problema.

Cabe resaltar que a pesar de que en los referentes teóricos se afirma que la concepción EEA se usa esencialmente en la educación superior, se encontró evidencias de que la misma se trabaja de una manera informal desde la escuela, es decir, no se trata con la rigurosidad con

la que se trabaja en cursos superiores, pero si se tiene en cuenta para el desarrollo de algunos temas puntuales.

Por otro lado, en lo que tiene que ver con los objetos matemáticos que se establecen en los EBCM se evidencio que estos hacen parte de los elementos primordiales de las concepciones, lo cual conlleva a pensar que en los EBCM a pesar de que no se establece el uso de una concepción específica, estas se encuentran inmersas implícitamente en el trabajo que se quiere desarrollar en los establecimientos académicos.

Ahora, para el objetivo específico: “Revisar documentos acerca de la enseñanza del álgebra para caracterizar los elementos propios de esta.”, se tiene que a partir de las investigaciones propuestas por autores como Kieran (1996), Usiskin (1989), Socas (2011) y Vergel (2015) la enseñanza del álgebra se puede caracterizar a través de varios elementos, entre ellos el trabajo de patrones que permitan al estudiante generalizar el procedimiento que está llevando a cabo, dando la posibilidad al mismo de evidenciar el proceso que realizó para llegar a la generalidad y no solo se quede solo en la aplicación de algoritmos. Por otro lado, se puede evidenciar que la enseñanza del álgebra en Colombia está íntimamente ligada a la solución de situaciones problema, algunas relacionadas con fenómenos físicos, aunque hay que resaltar que en la mayoría de los casos esto se queda como ya se mencionó anteriormente en la aplicación ya sea de fórmulas o algoritmos sin entender el trasfondo de lo que se quiere trabajar.

5.2.De manera general

De manera general se pudo observar que en los referentes de calidad hay muy poco énfasis en cuanto al aprovechamiento del trabajo que se puede hacer con el álgebra vista como aritmética generalizada a lo largo del desarrollo de la básica primaria, básica secundaria y la media.

Es decir, la concepción ACAAG en los EBCM se trabaja en los primeros años de escolaridad (básica primaria) ciclo A y B, mientras que en los DBA se evidenció que la misma se trata hasta el grado 7 esto de manera muy sucinta y no continua. Esto conlleva a pensar que el Early - Algebra está presente de manera implícita en los EBCM mientras que

en los DBA no se hace tan evidente el uso de la misma, puesto que a pesar de que se trata de potenciar el pensamiento algebraico desde los primeros cursos escolares no es clara la intención que se tiene frente a la caracterización del uso del Early- álgebra.

Por otro lado, se puede asegurar que en los referentes de calidad propuestos por el MEN no se evidencia uso alguno en cuanto a la propuesta denominada como pre-álgebra, puesto que según lo establecido en el marco de referencia esta propuesta se debe implementar en cursos posteriores a la educación básica primaria y a partir del análisis de los EBCM y DBA se encontró evidencias del uso del álgebra desde los primeros años de escolaridad.

Es decir, teniendo como base lo dicho anteriormente y a partir de lo que se encontró durante el desarrollo del análisis de los EBCM y los DBA el álgebra se trata de manera implícita en la básica primara.

A su vez se puede evidenciar que la prioridad en los referentes de calidad, aparentemente es enseñar a manipular las variables y las incógnitas de manera mecánica sin cuestionarse si eso es lo que realmente necesita el estudiante para enfrentarse a las situaciones de la cotidianidad.

En cuanto al trabajo que se desarrolla en los EBCM y DBA frente a la concepción EEA se evidenció que esta solo está presente en los últimos grados de escolaridad, tal vez la intención de ello es preparar a los estudiantes para una vida académica universitaria, puesto que como se menciona en los referentes teóricos esta concepción se trabaja fuertemente en cursos superiores.

En referencia a los procesos no se pudo hacer una caracterización de los mismos en relación a la concepción, dado que estos están inmersos en todas y cada una de ellas, aunque de manera implícita como se mencionó anteriormente si las variable si las incógnitas se enseñan desde algo “mecánico” el proceso que se relaciona es el proceso de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos (es especial la ejercitación de procedimientos).

5.3. Acerca de las preguntas de investigación

Las políticas públicas en educación en educación matemática en Colombia en lo que tiene que ver con la enseñanza del álgebra están establecidas bajo el desarrollo del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, dado que a partir de este se trabaja de manera implícita el pensamiento algebraico. Es decir, se evidenció que tanto el pensamiento variacional como el pensamiento algebraico están ligados de manera directa con el tratamiento que se da a las variables y al cambio y la variación de las mismas según sea la situación en la cual se estén usando.

En la revisión que se realizó a los DBA y en concordancia con lo expuesto por Vergel (2015), este documento no presenta una justificación relevante y a su vez no hay una claridad en relación con la selección de los derechos, dado que en el mismo no se evidencia una fundamentación teórica que solidifique lo allí expuesto, a pesar de que en el documento aseguran tener como referentes teóricos los LCM y los EBCM.

Por otro lado se concluyó que no todos los referentes de calidad promulgan un acercamiento tradicional al álgebra, es decir, se evidencio que en los EBCM y los LCM hay una continuidad en la transición de la aritmética al álgebra, mientras que en los DBA no se vislumbra dicha continuidad, esto en cuanto a que como se mencionó anteriormente en dicho documento no se evidencia un marco teórico estructurado donde se logre entrever las intenciones que se tienen en tanto a potenciar el pensamiento algebraico.

5.4. Recomendaciones

Se sugiere profundizar en la relación que se puede establecer entre una concepción y otra, dado que a partir del de los procesos establecidos en los LCM se puede lograr identificar la misma (si la hay). Por otro lado, a partir de la identificación de los elementos propios del álgebra como aritmética generalizada y del análisis hecho a los enunciados propuestos en los EBCM y los DBA para cada ciclo y cada grado respectivamente, se puede hacer una pequeña investigación que responda a cuestionamientos como ¿Por qué dentro de los referentes de calidad solo se contempla el trabajo de esta concepción en los primeros grados de escolaridad?, ¿se puede potenciar en el estudiante de básica secundaria y media el desarrollo del álgebra vista como una aritmética generalizada?, ¿De qué manera se puede

llevar a cabo dicho propósito?, ¿los DBA realmente están fundamentados en los LCM y los EBCM?.

BIBLIOGRAFÍA

- Bolea, P. (2003). *Los procesos de algebrización de las Organizaciones Matemáticas Escolares*. Zaragoza, España: Universidad de Zaragoza. (Tesis doctoral no publicada).
- Carraher, D., Schliemann, A., & Brizuela, B. (2001). *Can young students operate on unknowns?* In M. v. d. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 130-140). Utrecht University, the Netherlands.
- Castro, E. (2012). *Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar*. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75 - 94). Jaén: SEIEM
- Godino, J., Castro, W., Aké, L., & Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del Razonamiento Algebraico Elemental. *Acta scientiae*, 26, 483-511.
- Gómez, B. (1995). Los viejos métodos de cálculo. Un dominio para transitar de la aritmética al álgebra y viceversa. *SUMA*, 20, 61-68.
- Kieran, C., Bednarz, N., & Lee, L. (1996). *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas* Bogotá, D.C., Cooperativa Editorial Magisterio.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá: MEN.
- Ministerio de Educación Nacional. (2015a). *Derechos Básicos de Aprendizaje*. Bogotá, Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional. (2015b). *Gobierno lanza nueva herramienta para maestros y padres de familia*. Colombia.: Centro Virtual de Noticias de la Educación.

- Molina, M. (2015). *Concepciones del álgebra escolar*. Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Mora, L. (2012). Álgebra en primaria. Documento en el marco del Programa Todos a Aprender del MEN.
- Patiño, C. (2014). Apuntes para una historia de la educación en Colombia. *Revista Actualidades Pedagógicas*, 64, 261-265.
- Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números*, 77,5-34 (Versión electrónica).
- Sterwart, J., Rendlin, L. & Watson, S. (2012). *PRECALCULO. Matemáticas para el cálculo (6ª ed.)*. Ed. CENGAGE Learning, México, pp.137.
- UPN-MEN [Universidad Pedagógica Nacional CANAL OFICIAL] (2012, Agosto 21). Generalización de patrones en primaria [Archivo de Video]. Bogotá, D.C. Recuperado de: http://youtu.be/TH2_oM-hsO8
- Valoyes, L. (2013) *Estudio de la representación del álgebra en los documentos curriculares colombianos*. Tolima, Colombia: Universidad de Tolima.
- Vasco, C. (2003). El pensamiento variacional y la modelación matemática. *Memorias Conferencia Interamericana de Educación Matemática – CIAEM*.
- Vergel, R. (2015). *Una mirada crítica al componente algebraico del documento del Ministerio de Educación Nacional “Derechos Básicos de Aprendizaje”*. Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Vergel, R. (2016). *Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria* (tesis doctoral). Doctorado Interinstitucional en Educación. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.
- Usiskin, Z. (1988). *Conceptions of Algebra and Uses of Variables*. En A.F. Coxford y A.P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra K-12* (pp. 8-19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

ANEXOS

Anexo 1.

Ciclo Objeto	1-3(A)	4-5(B)	6-7(C)	8-9(D)	10-11(E)
Regularidades	A-01	B-03 B-04			
Sucesiones	A-04	B-02			
Expresiones algebraicas				D-02	E-03
Cambio y Variación	A-02	B-01 B-02 B-04	C-01 C-02 C-03	D-04 D-07 D-09	E-01 E-02 E-04
Relaciones		B-04 B-05		D-01 D-04 D-08 D-09	E-02 E-03 E-04
Ecuaciones	A-03	B-05	C04	D-01 D-05	
Inecuaciones		B-05			
Sistemas de representaciones		B-01	C-01 C-04	D-01 D-05 D-08	E-03
Procesos generales					
Resolver problemas			C-04	D-03 D-05	E-01
Razonar		B-02 B-03 B-04	C-03 C-05	D-03 D-06 D-09	E-02 E-03
Comunicar	A-01 A-02 A-03 A-04	B01 B-03 B-04 B-05	C01 C02	D-02 D-03 D-07	
Modelar				D-01 D-04 D-08	E-04
Elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos					

Anexo 2.

Ciclo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Objeto											
Regularidades	• 1-10	• 2-13	• 3-15							• 10-8	
Sucesiones										• 10-2	
Expresiones algebraicas							• 7-7 • 7-8	• 8-9 • 8-11 • 8-12			• 11-3
Cambio y Variación			• 3-14			• 6-16	• 7-2		• 9-7	• 10-2 • 10-4 • 10-5 • 10-6 • 10-10	• 11-1 • 11-3 • 11-4
Relaciones		• 2-5	• 3-5	• 4-4	• 5-3 • 5-10	• 6-7 • 6-8	• 7-5	• 8-2 • 8-8	• 9-5 • 9-7 • 9-8	• 10-3 • 10-4 • 10-5 • 10-14	• 11-4 • 11-5 • 11-6 • 11-7 • 11-8 • 11-9
Ecuaciones		• 2-6	• 3-3 • 3-6 • 3-8	• 4-3	• 5-8			• 8-2	• 9-6 • 9-11		
Inecuaciones										• 10-9	
Sistemas de representaciones						• 6-7		• 8-2 • 8-8 • 8-12	• 9-11 • 9-12		• 11-7
Procesos generales											
Resolver problemas					• 5-10	• 6-7 • 6-8	• 7-5		• 9-6		• 11-13

Razonar	• 1-10	• 2-13	• 3-3 • 3-5 • 3-15		• 5-3	•	• 7-2		• 9-11	• 10-6 • 10-10 • 10-14	• 11-1 • 11-3 • 11-7 • 11-8 • 11-13
Comunicar	• 1-10	• 2-5	• 3-6 • 3-8 • 3-14	• 4-3 • 4-4	• 5-8			• 8-7 • 8-10	• 9-5 • 9-7 • 9-8 • 9-12	• 10-2 • 10-3 • 10-4 • 10-5	• 11-4 • 11-8
Modelar							• 7-7		•	• 10-8	• 11-6 • 11-8
Elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos		• 2-6			• 5-8	• 6-16	• 7-8	• 8-9 • 8-11			