EVALUACIÓN FORMATIVA DE PROBLEMAS CREADOS POR FUTUROS PROFESORES DE MATEMATICA

Lorena Salazar-Solórzano
Universidad de Costa Rica, Costa Rica
lorena.salazarsolorzano@ucr.ac.cr

Palabras clave: creación de problemas, profesores de matemática, formación inicial, educación matemática.

Key words: creating problems, math teachers, initial formation, mathematics' education.

RESUMEN: Este trabajo presenta resultados preliminares de una investigación que pretende evaluar problemas creados por futuros profesores de matemática con el objetivo de mejorar esta competencia en ellos. Se indujo a que fueran los propios estudiantes quienes determinaran criterios de calidad como: claridad, sintaxis, coherencia, originalidad, relación con la teoría, grado de desafío e interés y si generaban procesos de pensamiento que indujeran a la asimilación de conceptos matemáticos. La guía de observación y análisis de los problemas creados, fueron los instrumentos para recopilar la información necesaria, la cual fue organizada con un enfoque cualitativo. Los resultados de este estudio muestran cómo el proceso de buscar rúbricas para clasificar "un buen problema" aunado a la evaluación por pares, dio lugar a una mejora en la invención de nuevos problemas.

ABSTRACT: This paper presents preliminary results of a study aimed at evaluating problems created by future mathematics teachers in order to improve this competition in them. As quality criteria were considered: clarity in the redaction, syntax, consistency, originality, relationship to theory, degree of challenge and interest generated and if they involve thought processes that induce the assimilation of mathematical concepts. The guide observation and analysis of the problems created were the tools to gather the necessary information, which was organized with a qualitative approach. The results of this study show how the process of seeking criteria to qualify a "good problem" joined with peer evaluation of the problems, resulted in an improvement in the invention of new problems.

INTRODUCCIÓN

Este documento reporta algunos resultados preliminares de la última fase de una investigación que tiene como objetivo desarrollar la competencia de creación de problemas en futuros profesores de matemática para secundaria. Esta fase consiste en el análisis didáctico, evaluación y mejoramiento de problemas creados por estudiantes de la carrera Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional y de la Universidad de Costa Rica. En Salazar (2014a) se reportan algunos resultados de las fases previas, iniciando con un análisis de problemas planteados en libros de texto, básicamente en Bartle (2010) en los que se les pedía a los alumnos para profesores, analizar los problemas referentes al tema de propiedades de funciones continuas, y sin resolverlos intentar descubrir cuál fue la intención del autor al proponerlos. Una vez hecho esto en una segunda fase, se les pedía después de resolver un problema dado, realizarle modificaciones, cambiando los requerimientos del problema, en este caso concreto modificando las funciones, variando los intervalos del dominio y el tipo de discontinuidad. La fase 3 se solicitaba que los estudiantes crearan problemas en una modalidad de trabajo colaborativo, en el tema de funciones continuas en intervalos cerrados, de modo que respondieran a un objetivo dado y que debería ser resuelto por otro grupo. En Salazar (2015a) los estudiantes muestran creaciones de problemas para enfatizar la importancia de una hipótesis en una actividad llamada ¿Y si no…qué pasa? Finalmente, la última fase que es la que se reporta en este documento, pretendía que los estudiantes hicieran una reflexión y análisis de algunos de los problemas creados por futuros profesores de matemática, de modo que estos pudieran ser objeto de evaluación y clasificación tomando en cuenta criterios, elementos y aspectos que ellos mismos en consenso con la docente del grupo, debían determinar en conjunto. Con esto se esperaba que los estudiantes reflexionaran sobre qué elementos podrían tomarse en cuenta para decidir si un problema era mejor que otro y sobre qué elementos debería tener un "buen problema". Es por esto que el objetivo de esta investigación fue la siguiente: Investigar si la búsqueda de criterios para la clasificación y evaluación de problemas matemáticos planteados por futuros profesores de matemática, ayuda a superar algunas de las limitaciones presentadas y mejora la competencia de creación de problemas.

La estructura del artículo es la siguiente: después de esta introducción, en la que se explican el problema y el objetivo de la investigación se expone el marco teórico utilizado, luego se explica la metodología cualitativa seguida de la descripción de la experiencia y análisis de resultados para terminar con unas consideraciones finales.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Debido a que los nuevos currículos de matemática para secundaria en Costa Rica, declaran la resolución de problemas como el enfoque principal de enseñanza, los futuros profesores de matemática deben ser competentes en la creación de problemas, ya que en su labor docente deberán inducir a sus estudiantes a resolver problemas para introducir algún tema nuevo. Sin embargo, la formación inicial de profesores de matemática se ha centrado históricamente en que ellos resuelvan problemas y no se les involucra en actividades en las que ellos por sí mismos, deban plantear algunos, o realicen al menos algunas variaciones a problemas dados. Esto ha dado lugar a un profesional con poca capacidad de creación y que se limita a escoger uno o varios libros de texto de editoriales comerciales para obtener de ahí problemas planteados por otros profesionales, matemáticos puros, investigadores o personas desligadas de la educación secundaria, lamentablemente descontextualizados y ajenos a la realidad de los estudiantes a los que se les aplicarán. Mallart, Font y Malaspina (2015) comentan que los alumnos “(…) tienden a asumir que ellos siempre dispondrán de otras fuentes (libros de texto o internet) para proveerse de problemas para plantear a sus futuros alumnos.” Por otro lado, investigaciones en creaciones de problemas indican que los futuros docentes carecen de habilidades necesarias para crear “buenos problemas”, como por ejemplo Singer y Voica (2013) los cuales reportan un estudio sobre planteamiento de problemas en profesores de matemática en la que consideraron tres aspectos: claridad, coherencia y originalidad. Estos autores indican que 17 % de los problemas creados, eran incompletos, 8 % estaban incorrectos y la mayoría de ellos (70%) no eran interesantes según los expertos consultados. Por otro lado, Tichá y Hošpesová (2013) concluyen que los enunciados propuestos por futuros maestros de primaria, revelaron deficiencias en la comprensión del tema mismo tratado (fracciones). Otros autores como Ellerton, (2013), Malaspina (2013) y Salazar (2014a) señalan que los futuros profesores deberían como mínimo realizar variaciones de un problema dado. En Malaspina (2013), por ejemplo, se reporta una experiencia con profesores sobre la modificación de problemas a partir de episodios de clase en los profesores debían crear problemas haciendo variaciones al problema que interviene en el episodio, obteniéndose resultados positivos. Por otro lado, en Salazar (2014b) se muestran algunas experiencias de aula en educación universitaria en las áreas de análisis y álgebra en cursos de matemática formal para futuros profesores de matemática, en donde la estrategia de creación de problemas resultó ser una actividad muy productiva para la comprensión y aprendizaje de algunos temas de estas áreas. La misma concluye que después de inducir a los estudiantes para profesores a crear problemas, estos “(…) modificaron sus conductas respecto a otros temas que habían estudiado previamente, en concreto ahora no se limitaban a intentar resolver la tarea propuesta sino que reflexionaban sobre su enunciado, consiguiendo de esta manera una mejor comprensión de la teoría que se tenía que utilizar en su resolución.” (Salazar, 2014a, p. 74).

Cuando un estudiante crea un problema, debe tener la teoría muy clara y si no la tiene clara, es un medio de aclarársela en el proceso de la misma creación, indagando en las posibles soluciones que un segundo individuo podría dar, dirigiendo su atención a los detalles, hipótesis y al objetivo a conseguir, adecuándolo al contexto y al nivel de los estudiantes al que va dirigido y preocupándose de expresarlo de manera coherente y cuidando el uso de un lenguaje que no dé cabida a ambigüedades. Pero esto no se logra si no se incluyen actividades de creación de problemas en las aulas, acompañados de una reflexión sobre la práctica, que haga conciencia de todos estos elementos a considerar al crear un problema. Aunque este tipo de actividades consumen más tiempo, los resultados bien valen la pena, como señala Salazar (2015b, p.74), “although these tasks were more time-consuming than traditional lecture sessions, they facilitated the understanding of the subsequent topics, which could then be presented more quickly”. De modo que la creación de problemas puede utilizarse como una estrategia didáctica para lograr conocimiento matemático en los estudiantes y debería ser parte de la formación inicial de profesores de matemática.

¿Pero cuándo y bajo qué condiciones podría considerarse un problema ser un “buen problema”?. Mallart, Font y Malaspina (2015) señalan que “(…) el alumno que tiene competencia en análisis didáctico y una lista de criterios, consigue aplicarla de manera más eficiente en la reformulación de su problema inicial que aquel alumno que carece de dicha competencia, aunque tenga buen nivel de competencia matemática.” (Conclusiones, párr. 5) Ellos consideran que un “buen problema” es aquel que satisface criterios como los siguientes:

- La dificultad no es muy grande y se percibe una solución alcanzable.
- Los contenidos que se tratan y/o las estrategias resolutivas se conocen.
- Resulta claro en qué consiste el problema (determinar o demostrar algo).
- Se intuye un camino para obtener la solución o conjeturar una solución.
- Permite hacer verificaciones para mantener o rechazar las conjeturas.
- Permite establecer conexiones ya sea entre varios temas matemáticos con situaciones reales o con otros campos del conocimiento.

Por otro lado el proyecto PISA considera tres clases de complejidad en los ítems propuestos en sus exámenes, los cuales de alguna manera podría verse como una clasificación para evaluar problemas, desde un nivel más simple a uno más complejo. Estos niveles son: problemas de reproducción, problemas de conexión y problemas de reflexión. Según Rico (2007) el primer nivel se refiere a problemas que son familiares al estudiante, requieren procedimientos rutinarios, aplicación de fórmulas, algoritmos y propiedades matemáticas. En el segundo nivel los problemas requieren mayores exigencias en la interpretación y se necesitan relaciones entre las diferentes representaciones y aspectos del problema, mientras que en el tercer nivel, se requiere que los estudiantes realicen procesos de razonamiento, argumentación, intuición y generalización. De modo que el “arte de inventar”, van más allá del hecho de crear problemas interesantes a los alumnos a los que van dirigidos. Deben responder a un objetivo y a un nivel de complejidad adecuado.

METODOLOGÍA

Para conseguir el objetivo de investigación, se tomó como muestra a los estudiantes de un curso en paralelo de análisis de variable real de la Universidad Nacional (UNA) y de la Universidad de Costa Rica (UCR), las cuales preparan estudiantes para ser profesores de matemática de secundaria. Se trata de alumnos de tercer año en la UCR y de quinto año en la UNA, por lo que podría decirse que ya tienen madurez en su formación inicial así como conceptos matemáticos suficientemente sólidos para la experiencia a realizar.

Para la recolección de información se tomaron en cuenta entrevistas y cuestionarios aplicados por los estudiantes a profesores en ejercicio y análisis de los problemas creados así como de sus reflexiones. Se llevó una bitácora con las anotaciones de la experiencia, comentarios, percepciones y actitudes de los estudiantes. Se realizaron seis tareas las cuales se realizaron en grupos de estudiantes de dos a tres estudiantes. Para el diseño de estas tareas se tomaron en cuenta los cuatro aspectos que propone Malaspina (2013) para la creación de problemas: información, requerimiento, contexto y entorno matemático.

Tabla 1. Características para el diseño de tareas

Información	Problemas de libro de texto y problemas creados por futuros profesores de matemática
Requerimientos	Tarea 1: Investigación sobre lo que es un buen problema Tarea 2: Establecimiento de criterios para un buen problema Tarea 3: Análisis y evaluación de problemas creados Tarea 4: Sugerencias de mejora de los problemas creados Tarea 5: Creación de problemas propios
Contexto	Intra-matemático
Entorno matemático	Contenidos matemáticos: Funciones reales continuas. Procesos: Demostración.

DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA

Se presenta en esta sección la descripción de la experiencia, tomando en consideración algunos de los resultados hallados. Para la tarea 1 que consistió en investigar sobre lo que es un buen problema, los estudiantes realizaron búsquedas en la web, en revistas y realizaron entrevistas a profesores con amplia experiencia y a expertos, de modo que tuvieron algunos elementos para clasificar un "buen problema". A continuación se presentan los resultados de la tarea 2, en la que se determinaron los criterios, para clasificar y evaluar un buen problema. Estos fueron consensuados por los estudiantes de la experiencia y la docente del grupo.

Tabla 2. Criterios de calidad para un buen problema

Criterio	Características presentes
Redacción y coherencia	Lenguaje claro, sencillo, preciso y que el estudiante conoce, sobre todo el lenguaje matemático. Presenta un texto con lo justo y necesario sin ambigüedades e información extra. Tiene datos suficientes y coherentes. Presenta una demanda clara para resolver el problema.
Relación con la teoría y nivel del problema	Se adapta al nivel de los estudiantes al que va dirigido. Involucra conocimientos que el estudiante ya conoce. Se conocen estrategias de solución. El problema tiene posibilidades reales de ser resuelto en un tiempo prudencial determinado.
Grado de desafío e interés	Resulta ser un reto al estudiante. Logra motivarlo a hallar su solución. Es interesante para el alumno, atractivo y contextualizado a sus intereses
Originalidad y procesos de pensamiento matemático	No es una adaptación o variación de algún problema. Se sale del marco de los problemas estudiados. Permite realizar conexiones intra-matemáticas y con otras áreas del conocimiento. Desarrolla procesos matemáticos de conexión, argumentación, razonamiento y comunicación. Es un problema que en el proceso de solución lleva a reafirmar conceptos matemáticos previos y consolidar los nuevos.

Para la ejecución de la tarea 3, que consistía en el análisis y evaluación de problemas, se les dio a cada grupo una lista de problemas creados por estudiantes para profesores de otro ciclo, es decir ajenos a ellos, y su tarea consistía en darle una evaluación de acuerdo a los criterios de calidad establecidos en la tarea anterior. Los problemas a evaluar se relacionaban al tema de propiedades de funciones continuas de variable real, específicamente a la propiedad de composición de funciones continuas.

La pregunta y el problema que dio origen a las modificaciones y a la creación de los problemas se muestran a continuación

Pregunta generadora:

¿Cuándo se puede meter el límite dentro de una composición? Es decir cuando es válido que

$\lim_{x\to c}(gof)(x) = g\left(\lim_{x\to c} f(X)\right)$

Problema Generador: (Bartle, 2010)

Sea g definida en IR por $g(1)=0$ y $g(x):=2$ si $x \neq 1$, y sea $f(x):=x+1$ $\forall x \in IR$.

Demostrar que $\lim_{x\to 0}(gof)(x) \neq (gof)(0)$. ¿Por qué este hecho no contradice el teorema de composición de funciones?

A continuación se presentan algunos de los problemas creados por los futuros profesores de matemática y la evaluación que se le dio al problema.

Tabla 3. Evaluación de problemas creados de acuerdo a los criterios de tabla 2

PROBLEMA	Redacción	Teoría	Desafío	Procesos	NOTA
Problema 1: Sean $g(x) = x-2$ y $f(x) = x^2$. Justifique porqué se cumple $\lim_{x\to c} g(f(x)) = g(f(c))$	2	1	1	1	5
Problema 2: Sean $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$, $f(x) = x^2-x+1$ y $g(x)=\ln x$. Pruebe que $\lim_{x\to c}(g\circ f)(x) = g(f(c))$, $\forall c\in\mathbb{R}$	3	2	2	1	9
Problema 3: Sean $g(x)=\ln x$ y $f(x) = x+1$. Justifique porqué se cumple que $\lim_{x\to -1}(g\circ f)(x) \neq g(f(-1))$	2	3	3	3	11
Problema 4: Sea $g(x)=\sqrt{x}$ y $f(x) = x^2-x$. Determine los valores de x=c para los cuales se da la igualdad $\lim_{x\to c}(g\circ f)(x) = g(f(c))$	2	2	2	3	9
Problema 5: Sea $g(x) = \mathrm{sen}(x)$ y $f(x) = 1/x$. Justifique que $\lim_{x\to 0}(g\circ f)(x) \neq g(f(0))$	2	3	2	3	10
Problema 6: Sea $f(x)=[\![x]\!]$ y $g(x) = 1/x^2+1$. Determine si puede afirmarse que $\lim_{x\to 1}(g\circ f)(x) = g(f(1))$	2	3	2	3	10
Problema 7: Sean $f(x) = x\,sen\left(1/x\right)$ si $x\neq 0$, $f(0)=0$ y $g(x)=2$, si $x\neq 0$, $g(0)=-1$. ¿Se cumple $\lim_{x\to 0}(g\circ f)(x) = g(f(0))$?	2	3	3	3	11

Nota: (1) Presenta el criterio mencionado muy pobremente, (2) Logra el criterio parcialmente, (3) Presenta el criterio satisfactoriamente.

Varios de los problemas no aclaran que *f* y g son funciones ni sus dominios, por lo que obtienen un puntaje de 2 puntos en redacción. El problema 1 se trata de un par de funciones continuas, no presenta gran interés ni desafío para un estudiante, más que reforzar el teorema de composición de funciones continuas (TCFC). El segundo problema toma en cuenta que la composición esté bien definida buscando que *f* tenga valores positivos, pero no representa un interés mayor que el mismo teorema TCFC, por lo que los estudiantes le dieron un punto en originalidad. El problema 3 y 4 presentan un grado mayor de originalidad y razonamiento por cuanto lleva a revisar la definición de la composición, y a los casos en que $\ln x$ y $sen\left(1/x\right)$ no están definidos en x=1 y en x=0 respectivamente, lo que lleva a la reflexión sobre la existencia de objetos matemáticos. Los problemas 6 y 7 obtuvieron un puntaje mayor pues presenta un mayor desafío al estudiante porque la pregunta, a diferencia de los anteriores está planteada en forma interrogativa, aspecto que lleva a los estudiantes a cuestionarse si esto será cierto no, buscando casos particulares. Por otro lado el tipo de discontinuidad inevitable presenta mayor interés al problema original en que la discontinuidad era evitable.

Finalmente se les pidió una generalización al problema original, lo que les exigió un mayor nivel de dificultad pues esto es “hacer matemática”. Se les proporcionó una guía de preguntas para ayudarles en su tarea. Después de mucha discusión en los grupos, y luego a nivel de todo el estudiantado junto con la docente, fueron detallando las características de cada una de las funciones, hasta obtener, con gran satisfacción entre todos, la generalización siguiente:

Problema 8: Generalización del problema generador:

Sea *g* definida en IR por $g(x) := h(x)$ para $x \neq c$ y $g(c) = a$, donde $h(c) \neq a$. Si $f(x)$ es una función continua, invertible $\forall x \in IR$ tal que h es continua en $f^{-1}(c)$, entonces $\lim_{x \to f^{-1}(c)} (gof)(x) \neq (gof)(f^{-1}(c))$. ¿Por qué este hecho no contradice el teorema de composición de funciones continuas?

CONCLUSIONES

Ante la pregunta de investigación sobre si la búsqueda de criterios para la clasificación y evaluación de problemas matemáticos planteados por futuros profesores, ayudaba a superar algunas de las limitaciones presentadas y a mejorar la competencia de creación de problemas, la respuesta es sin duda que sí. En siguientes creaciones de problemas, los estudiantes tomaron en cuenta las rúbricas que ellos mismos en consenso con la docente habían seleccionado, mostrando más cuidado a la hora de redactar un problema y un mayor grado de originalidad en la invención de sus problemas. Al reflexionar sobre lo que debe ser un “buen problema matemático” y sus alcances, concientizaron la necesidad de tener un objetivo claro a enfatizar con el problema, visualizaron sus propios errores y en cómo no volver a cometerlos. Mostraron más interés en llamar la atención a una hipótesis en particular de alguno de los teoremas y se volvieron más suspicaces al detectar detalles que antes pasaban desapercibidos.

La evaluación en pares resultó ser muy positiva, dado que al evaluar el trabajo de sus compañeros, se empoderaron de los criterios de calidad establecidos en conjunto, lográndose un mayor beneficio que si la docente hubiera sido la evaluadora, según sus comentarios. Sintieron la responsabilidad de adjudicar un número a cada problema tratando de ser justos en su labor, tarea nada fácil si no se tienen criterios adecuados.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bartle, R. y Sherbert, D. (2010). *Introducción al análisis matemático de una variable*. México: Limusa.

Ellerton, N. F. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics*, *83(1), 87-101.*

Malaspina, U. (2013a). Nuevos horizontes matemáticos mediante variaciones de un problema. *Unión*, *35, 135-143*.

Malaspina, U. (2015b). Creación de problemas: sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Memorias de XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática.* Chiapas, México.

Mallart, A, Font, V. & Malaspina, U. (2015). Reflexión sobre el significado de qué es un buen problema en la formación inicial de maestros. *Perfiles Educativos* (En prensa)

Rico, Luis (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA, 1(2), pp. 47-66*

Salazar, L (2014a). Diseño de tareas a partir de la modificación de problemas planteados en libros de texto y su implementación con futuros profesores de matemática. *Revista Paradigma vol. XXXV (1),* junio 2014 V-2, 55 – 77.

Salazar, L (2014b). Creación de problemas: un método alternativo para introducir

reafirmar el concepto de grupo. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet*. *Vol. 15, No 1,* Agosto - Febrero 2015, 1-35

Salazar, L. (2015a). ¿Y si no se cumple,. . ., qué pasa? Reforzando conceptos matemáticos en futuros profesores de matemática para Secundaria. *Memorias del Encuentro Centroamericano de Matemática Educativa II ECAME*, Cartago, Costa Rica § 15–17 Julio 2014. TEC.

Salazar, L. (2015b). Problem-posing as a didactic resource in formal mathematics courses to train future secondary school mathematics teachers. *Journal of Technology and Science Education (JOTSE), 5(2), 64-74*.

Singer. F. M. y Voica, C. (2013). A problem-solving conceptual framework and its implications in designing problem-posing tasks. *Educational Studies in Mathematics, 83(1), 9-26.*

Tichá, M. y Hošpesová, A. (2013). Developing teachers' subject didactic competence through problem posing. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 133-143.

143.