

## EFFECTOS QUE TIENE LA INCORPORACIÓN DE GRÁFICAS EN EL TRATAMIENTO DE ALGUNOS CONCEPTOS DEL CÁLCULO DIFERENCIAL EN EL NIVEL MEDIO SUPERIOR

**María Patricia Colín Uribe, Celia Araceli Islas Salomón, Fernando Morales Téllez**

Instituto Politécnico Nacional, CECyT NB.(México)

patricia\_c\_u@hotmail.com, pcolin@ipn.mx, arissass@hotmail.com, fernando\_morales\_tellez@hotmail.com

**Palabras clave:** gráfica, visualización, Cálculo Diferencial, dominio, límite.

**Key words:** graphics, visualization, differential calculus , domain limit

**RESUMEN:** Algunas investigaciones en el campo de la Matemática Educativa demuestran que cuando un estudiante logra incorporar elementos visuales como parte de su actividad matemática, podrá transitar entre las diversas representaciones: algebraicas, geométricas, numéricas y verbales. En el Instituto Politécnico Nacional (IPN) desarrollamos un proyecto de investigación cuyo objetivo fue la elaboración de material didáctico a base de gráficos de funciones, que sirviera de apoyo para trabajar en el Nivel Medio Superior (NMS) conceptos de funciones y límites en la materia de Cálculo Diferencial. Este trabajo fue realizado, primero, rescatando de la literatura especializada en Matemática Educativa situaciones de aprendizaje y artículos de investigación relativos a este tema. Después, elaboramos el material en base a nuestros hallazgos y experiencia profesional y al final, aplicamos a un grupo de estudiantes. Finalmente observamos los efectos que este material tuvo en su forma de pensar.

**ABSTRACT:** Some research in the field of Mathematics Education show that when a student manages to incorporate visual elements as part of their mathematical activity, he can move between many representations: algebraic, geometric, numerical and verbal. In the Instituto Politécnico Nacional (IPN) we have developed a research project whose objective was the development of teaching material based on graphs of functions, which serve to support teacher and student work on the high Scholl (NMS) functions and concepts of limits when we work with Differential calculus. This work was done , first , rescuing specialized in Mathematics Education learning situations and research articles on this subject literature. Then we developed the material basis of our findings and work experience and eventually apply to a group of students. Finally we look at the effects that this material had on their thinking

## ■ INTRODUCCIÓN

En el Nivel Medio Superior (NMS), la enseñanza del Cálculo tiende a sobrevalorar los procedimientos analíticos y la algoritmización, dejando de lado a los argumentos visuales por no considerarlos como puramente “matemáticos”, a pesar de que la visualización es una habilidad en los seres humanos que, por naturaleza siempre será empleada para representar una parte o la aproximación de la realidad que se estudia.

Algunas investigaciones en el campo de la Educación Matemática, demuestran que cuando un estudiante logra incorporar elementos visuales como parte de su actividad matemática, podrá transitar entre las diversas representaciones: algebraicas, geométricas, numéricas y verbales y de esta forma, darle un significado más rico al saber en cuestión.

Por esta razón, creemos que es necesario elaborar materiales didácticos o de apoyo para poder desarrollar esta habilidad.

Este trabajo tiene como objetivo, mostrar las diferencias que existen entre un grupo de estudiantes que hay llevado un curso de cálculo diferencial basado en elementos visuales, y un grupo de estudiantes que sólo recibieron instrucción meramente analítica.

Nuestro interés se centrará a conceptos como límites, dominio, rango, par, impar, intervalos de crecimiento y decrecimiento de funciones con características especiales.

## ■ MARCO TEÓRICO

La teoría de Duval plantea en lo general que las representaciones semióticas utilizadas normalmente en matemáticas, no se generan de manera aislada, sino que pertenecen a sistemas de representación que tienen su propia estructura interna, sus propias limitaciones de funcionamiento y de significado, que pueden ser caracterizadas en función de las actividades cognitivas que permiten desarrollar. Estas actividades cognitivas condicionan la estructura misma del sistema de representación.

Consideraremos el concepto de función en el marco teórico de las representaciones semióticas, en el cual se observa las diferentes representaciones que corresponden a este concepto: como: descripción en lengua natural (enunciado), tablas, gráficas, fórmulas, y modelos geométricos. Cada modalidad tiene sus propiedades, reglas y significación; en algunos estudios se ha señalado que las traslaciones del sistema gráfico a las representaciones algebraicas son las que causan mayores dificultades (Duval, 1998, p.181).

Para comprender un concepto es necesaria la coordinación de los diferentes registros de representación, pues con uno solo (mono-registro) no se obtiene la comprensión integral del concepto. Sin embargo, la conversión entre registros no se realiza en forma espontánea, a menos que se trate de representaciones congruentes entre el registro de partida y el de llegada. La coordinación de los diferentes registros de representaciones aparece como una condición fundamental para el aprendizaje en aquellas disciplinas donde los datos son representaciones semióticas (Duval 1998).

Otro aspecto central de la teoría presentada por Duval, plantea que “la comprensión (integradora) de un contenido conceptual, reposa en la coordinación de al menos dos registros de

representación, y esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión” (Duval, 1998).

En palabras del propio Duval

En los sujetos, una representación puede funcionar verdaderamente como representación, es decir, darle acceso al objeto representado, sólo cuando se cumplen dos condiciones: que dispongan de al menos dos sistemas semióticos diferentes para producir la representación de un objeto, de una representación, de un proceso... y que puedan convertir "espontáneamente" de un sistema semiótico a otro las representaciones producidas, sin siquiera notarlo

Por lo tanto, no basta con la exposición del docente para que el estudiante pueda adquirir un concepto, pues debe manipular diferentes registros de representación para poder adquirir el conocimiento, y para esto las actividades o ejercicios propuestos a los estudiantes son fundamentales. Por otra parte, no bastará con presentar y proponer actividades que apunten a aprehensión o tratamiento de registros sino que necesariamente deben implicar conversión, pues no existirá comprensión si no se maneja al menos dos registros semióticos diferentes del mismo concepto.

## ■ DESARROLLO

Para lograr nuestro objetivo, realizamos las siguientes actividades:

**a) Estado del arte relacionado con la propuesta de investigación:** Realizamos la lectura y el análisis de artículos y libros de Cálculo Diferencial con el objetivo de conocer secuencias o actividades didácticas que ya han desarrollado otros investigadores en el área de la Educación Matemática.

i) Los usos de las gráficas que generan las prácticas institucionales en el bachillerato; muestran que el funcionamiento y las formas de las gráficas mantienen una relación dialéctica, incluso en los libros de texto, y se van resignificando para dar lugar a otros funcionamientos y formas gráficas, lo cual expresa el desarrollo del uso de la gráfica en tres aspectos: los métodos de uso de la graficación, las comprensiones de las gráficas y su funcionalidad. (Cordero, F., Cen, C. y Suarez, L., 2010).

ii) Farfán, R.M. (2000) muestra el trabajo con varias funciones (exponencial, logarítmica, etc.) pero no encontramos ninguna secuencia que se haya aplicado respecto a gráficos relativos a límites y dominio.

iii) Cantoral, R. y Montiel, G. (2001) muestran de una forma particular, el entender a la visualización de las funciones, pero utilizando un ejemplo solamente: la construcción del polinomio de interpolación de Lagrange mediante estrategias de visualización.

iv) Font, V., Bolite, J. & Acevedo, J. I. (2010), muestran los fenómenos que observaron en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la lectura y elaboración de gráficos de funciones en el nivel secundaria. Indagó las metáforas que utiliza el profesor para explicar representaciones gráficas.

**b) Seleccionar las secuencias de aprendizaje a aplicar.** Una vez revisados los textos y artículos, tendríamos que seleccionar las secuencias o actividades que pudiéramos aplicar a estudiantes. Como ya lo mencionamos, lo que nos mostró nuestro Estado del Arte es que no hay material gráfico aún desarrollado para trabajar conceptos del Cálculo Diferencial con gráficos en el Nivel Medio Superior, pero si se trabajan algunos tipos de gráficas para niveles superiores. Ante este escenario, tuvimos que diseñar nuestros propios ejemplos y actividades para aplicarlas a los estudiantes. Elegimos trabajar diversas funciones, algebraicas, racionales, trigonométricas y racionales.

Elaboramos una secuencia de actividades que incluía las gráficas de las funciones que se muestran a continuación.

$$y = \operatorname{sen} x$$

$$f(x) = x^4 - 2x^2$$

$$j(x) = \frac{x-1}{x^2+x-2}$$

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$$

$$h(x) = x^2 + 1$$

$$k(x) = \sqrt{25 - x^2}$$

La secuencia estaba dividida en 4 actividades. Cada actividad tenía la siguiente estructura:

- Inicialmente se les daba un breve recordatorio del tema para recordarlo
- Después les pedía resolver algebraicamente una serie de ejercicios.

Figura 1.

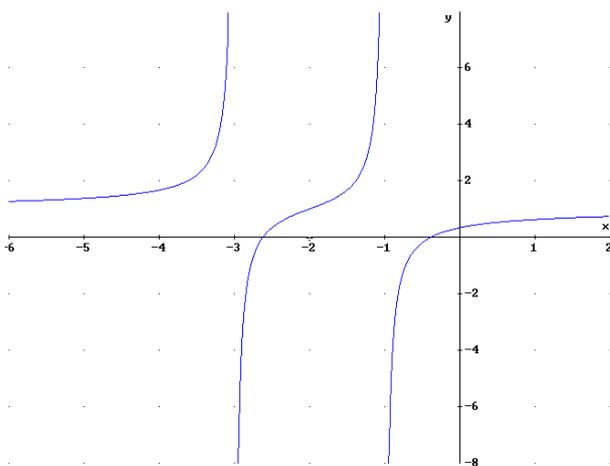


Figura 2.

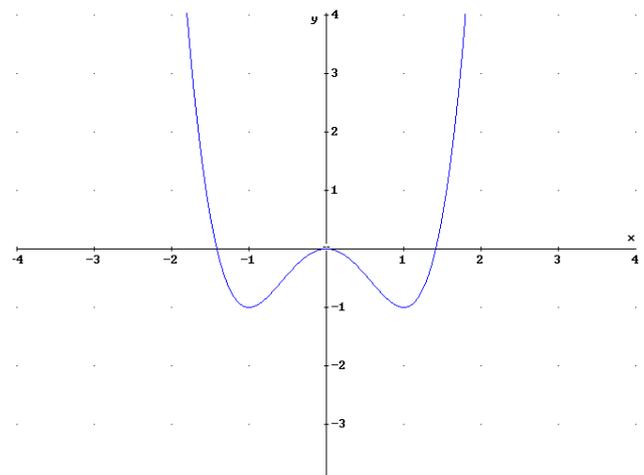


Figura 3.

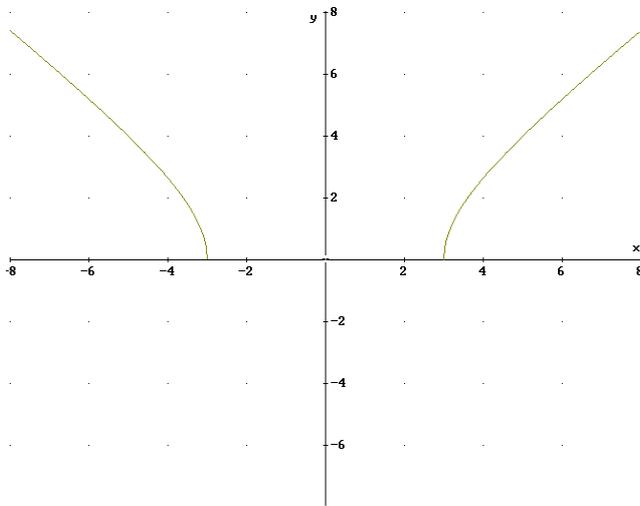
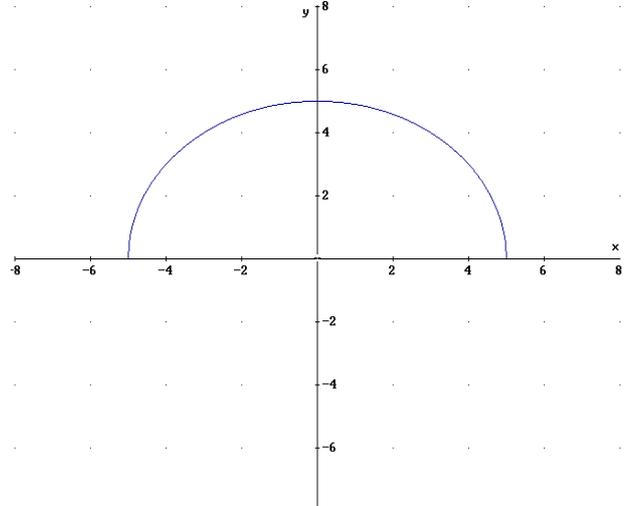


Figura 4.



d) Finalmente se les pedía resolver gráficamente.

**c) Aplicación de las situaciones de aprendizaje:** Se trabajó con 8 grupos de estudiantes de 5° semestre que ya habían llevado el curso de Cálculo Diferencial. Los grupos estaban divididos en 4 que llevaron instrucción tradicional (privilegiaban la algoritmización) y 4 que llevaron una instrucción utilizando gráficos, visualización y algoritmización. Los estudiantes pertenecían a las diferentes carreras técnicas que se imparten en el Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos (CECyT) “Narciso Bassols” del Instituto Politécnico Nacional: técnico en plásticos, técnico en mantenimiento industrial, técnico en computación y técnico en sistemas automotrices, todas ellas orientadas al área de las Físico Matemáticas.

A cada grupo se le dio un tiempo de 40 minutos para resolver cada una de las actividades. Los estudiantes podían interactuar entre sí para poder responder los ejercicios. Sólo dos de las actividades fueron videograbadas y, para comprender las situaciones que no estaban claras en el escrito, recurrimos a la cinta grabada.

**d) Análisis de resultados** Se realizó el análisis de las respuestas de los estudiantes. Los resultados que se obtuvieron se muestran en las tablas 1, 2, 3 y 4. Cada tabla representa el área de los estudiantes que fueron entrevistados y están separados respecto a la forma en la que fueron instruidos.

La primera columna indica el número de estudiante que fue entrevistado y las columnas siguientes el porcentaje de aciertos que tuvo al resolver cada una de las actividades de la secuencia.

**Tabla 1.** Porcentaje de aciertos obtenidos por los estudiantes al realizar las 4 actividades de la secuencia. Área: Técnico en plásticos

Área de los estudiantes: Técnico en Plásticos					
Estudiante	% de aciertos de la Actividad				Forma de enseñanza
	1	2	3	4	
1	80	70	95	50	Tradicional (algoritmización)
2	100	100	100	60	
3	90	86	100	40	
4	90	100	80	75	Gráfica, algebraica y visual
5	100	60	100	90	
6	95	100	100	80	

**Tabla 2.** Porcentaje de aciertos obtenidos por los estudiantes al realizar las 4 actividades de la secuencia. Área: Técnico en mantenimiento industrial

Área de los estudiantes: Técnico en Mantenimiento Industrial					
Estudiante	% de aciertos de la Actividad				Forma de enseñanza
	1	2	3	4	
1	90	50	100	66	Tradicional (algoritmización)
2	100	80	100	66	
3	100	100	100	75	
4	85	70	100	70	Gráfica, algebraica y visual
5	100	95	85	86	
6	100	90	100	92	

**Tabla 3.** Porcentaje de aciertos obtenidos por los estudiantes al realizar las 4 actividades de la secuencia. Área: Técnico en computación

Área de los estudiantes: Técnico en Computación					
Estudiante	% de aciertos de la Actividad				Forma de enseñanza
	1	2	3	4	
1	90	70	100	30	Tradicional (algoritmización)
2	100	80	100	42	
3	95	75	100	85	
4	85	70	90	80	Gráfica, algebraica y visual
5	95	100	100	100	
6	100	100	100	66	

**Tabla 4.** Porcentaje de aciertos obtenidos por los estudiantes al realizar las 4 actividades de la secuencia. Área: Técnico en sistemas automotrices

Área de los estudiantes: Técnico en Sistemas Automotrices					
Estudiante	% de aciertos de la Actividad				Forma de enseñanza
	1	2	3	4	
1	85	40	90	40	Tradicional (algoritmización)
2	90	60	100	50	
3	100	75	95	80	
4	100	93	100	70	Gráfica, algebraica y visual
5	100	95	95	60	
6	100	92	95	75	

En cuanto al tiempo para responder la secuencia, se les dieron 40 minutos para cada una de las actividades. Una vez realizada la actividad, se obtuvo el promedio de tiempo que se muestra en la tabla 2 para cada actividad.

**Tabla 5.** Tiempo promedio por grupo en resolver la secuencia de actividades

Área	Tiempo en minutos en realizar la Actividad			
	1	2	3	4
Técnico en plásticos	10.5	11	4.75	6.75
Técnico en mantenimiento Industrial	27.5	9.75	6	19
Técnico en computación	14.5	19.5	7.25	9.75
Técnico en sistemas automotrices	17.2	12.3	5.4	12.45

### ■ RESULTADOS

Los resultados de este trabajo exploratorio nos dan pie para elaborar una nueva secuencia de actividades para, posteriormente, realizar una puesta en escena de las secuencias de actividades basadas en gráficos, así como la articulación de un curso de Cálculo Diferencial en el cual se trabaje mayormente un contexto gráfico que uno algebraico.

Este trabajo de investigación nos da pauta para aplicar a grupos mas grandes de estudiantes este tipo de secuencias de actividades, las cuales contengan mas gráficos y con el objetivo de verificar si, a través del acercamiento del estudiante a un contexto gráfico, el aprendizaje de conceptos de Cálculo Diferencial son más significativos para el.

Finalmente, contamos con los datos necesarios para el rediseño y puesta en escena de por lo menos una situación de aprendizaje, la cual servirá para introducir un contexto gráfico en la enseñanza del Cálculo Diferencial.

### ■ CONCLUSIONES

A partir de las respuestas de los estudiantes, podemos tener las siguientes conclusiones en la aplicación de esta secuencia de aprendizaje

- Los alumnos demostraron mayor facilidad para resolver las actividades gráficas que las algebraicas.
- No todos pudieron establecer una relación entre la representación gráfica y la algebraica.
- EL trabajo con gráficos resultó más significativo para los estudiantes que el trabajo algebraico.
- Los estudiantes que llevaron instrucción meramente algebraica tuvieron problemas para establecer la representación gráfica de los conceptos trabajados.
- El tiempo de realización de la secuencia fue muy grande, pues la actividad se realizó en menos tiempo del propuesto.
- La secuencia de actividades fue resuelta con mejores resultados por los estudiantes de computación y sistemas automotrices.

## ■ REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: Visualización y pensamiento matemático*. México: Pearson Educación
- Cordero, F., Cen, C. y Suarez, L. (2010). *Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato*. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 13, núm. 2, julio, 2010, pp. 187-214. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Distrito Federal, México
- Duval, R. . (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.. En *Investigaciones en Matemática Educativa II*.(173-201). México: Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav.
- Farfan, R. M. . (2000). Lenguaje algebraico y pensamiento funcional. En *Desarrollo del pensamiento matemático* (89-144). México : Trillas.
- Font, V., Bolite, J. & Acevedo, J. I. (2010). Metaphors in mathematics classrooms: analyzing the dynamic process of teaching and learning of graph functions. *Educational Studies in Mathematics*, 75(2),131–152.
- Secretaria Académica (2010) Programa de estudios de la Unidad de Aprendizaje de *Cálculo Diferencial*. Dirección de educación Media Superior del Instituto Politécnico Nacional
- 

## ■ ACTIVIDAD 1

Nombre: \_\_\_\_\_

Hola: Tú ya cursaste la materia de Cálculo Diferencial, así que has trabajado algunos conceptos que se utilizarán en estas actividades.

En las siguientes actividades, recordaremos las definiciones necesarias para realizar los ejercicios. Gracias por participar en este proyecto y contesta con toda libertad.

### Conceptos para esta actividad

**Dominio:** Son los valores que puede tener la variable independiente ( $x$ ) de manera que la función que estoy trabajando, exista o esté determinada, en otras palabras, que cuando yo evalúe la función y haga operaciones en la calculadora, ésta no me marque un ERROR

**Imagen:** Son los valores que obtiene la variable dependiente ( $y$ ) una vez que hemos sustituido los valores de la variable independiente ( $x$ ) en la función.

**Ejercicio 1:** Encuentra el DOMINIO de las siguientes funciones:

1)  $f(x) = x^2 + 1$

2)  $y = x^4 - 2x^2$

3)  $f(x) = \frac{x-1}{x^2+x-2}$

4)  $f(x) = \frac{x-2}{x^2-9}$

5)  $y = \sqrt{x^2-9}$

6)  $y = \sqrt{25-x^2}$

**Ejercicio 2:** Observa las siguientes gráficas. Determina el dominio de cada gráfica marcando con color ROJO y la imagen marcándola con AZUL.