PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA DEFINICIÓN Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE LUGAR GEOMÉTRICO UTILIZANDO EL GEOGEBRA

Maritza Luna Valenzuela

Pontificia Universidad del Perú, Instituto de Investigación para la Enseñanza de las Matemáticas (Perú)

luna.m@pucp.edu.pe

Palabras clave: Lugar geométrico, geometría analítica, circunferencia, parábola

Key words: geometrical location, analytic geometry, circumference, parable.

RESUMEN: En este trabajo se presenta una propuesta de enseñanza didáctica de uno de los problemas fundamentales de la geometría analítica que es definir el lugar geométrico descrito por un objeto que se mueve siguiendo una ley específica. Este trabajo tiene como objetivos: interpretar la información dada de manera textual que incluyen propiedades para realizar el planteamiento; mostrar construcciones gráficas de lugares geométricos de manera dinámica y analizar sus propiedades; realizar construcciones con el apoyo de las herramientas tecnológicas dinámicas de GeoGebra 4.0, 5.0. Las actividades presentadas son aplicadas en alumnos de pregrado del área de ciencias e ingeniería.

ABSTRACT: In this paper we present a proposal focused on didactic teaching on one of the fundamental problems of analytic geometry, corresponding to show locus described by an object whose movement is governed by a specific law. The objectives of this article focuses on: Interpretation of the information provided, this includes the properties required for this approach; Presentation of a dynamic manner the construction of loci, together with an analysis of their properties. We rely on the dynamic technological tools of GeoGebra 4.0, 5.0 for constructions. The activities presented are applicable to undergraduate students in the area of science and engineering.

INTRODUCCIÓN

Es de fundamental importancia en el funcionamiento cognitivo, la distinción entre un objeto y su representación, y la comprensión de la matemática como una actividad que moviliza una variedad de registros de representación semiótica. (Duval, 1996).

En geometría analítica resolver problemas como los que se muestran en las siguientes actividades presentan dificultades en el planteamiento de modo algebraico, para ello se realiza:

- la representación de la información de un modo gráfico, usando herramientas del GeoGebra.
- la aplicación de las propiedades geométricas para obtener la ecuación que representa el lugar geométrico,
- la verificación de los resultados obtenidos por los alumnos, hechos de manera escrita, con el apoyo de GeoGebra.

Por tanto, en cada de las actividades se presentará el planteamiento, la visualización mediante el software, y finalmente la solución esperada.

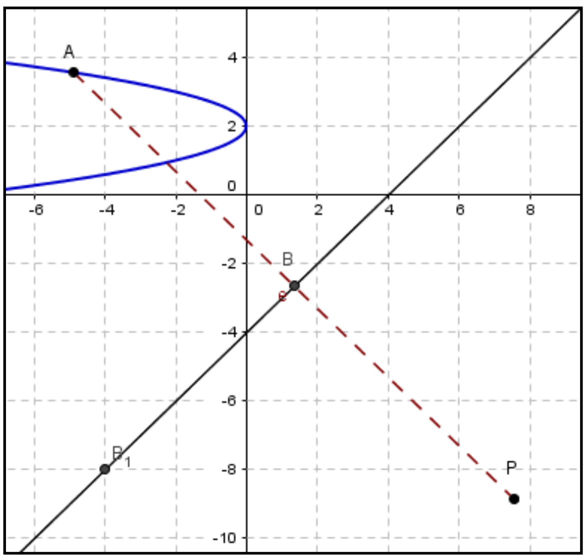
Enunciado de la actividad 1.

Sea *A* un punto que se desplaza sobre la curva C $:(y-2)^2=-\frac{x}{2}$. Hallar la ecuación del lugar geométrico descrito por todos los puntos *P* del plano cartesiano tal que la recta $L: y=x-4$ es mediatriz del segmento $\overline{AP}$.

Planteamiento y solución

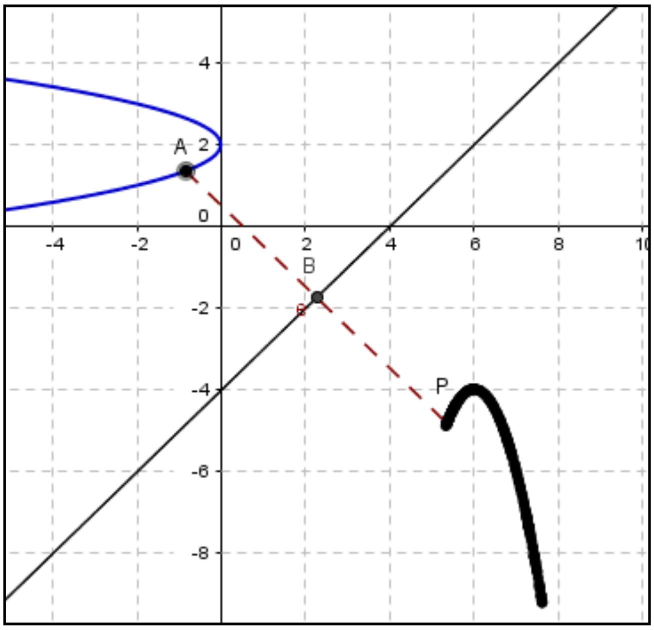
Sea $B(x_B, y_B)$ un punto de la recta L y $A(x_A, y_A)$ un punto que está en la curva C de modo que el segmento AB es perpendicular a L y con la herramienta de simetría del GeoGebra obtenemos $P(x, y)$ como se aprecia en la Fig. 1.

Figura 1. Parábola $:(y-2)^2=-\frac{x}{2}$



Desplazando el punto A se visualiza en la Fig. 2 el lugar geométrico de la nueva parábola

Figura 2. Parábola simétrica generada por P al desplazar A.



Así, por simetría de la parábola respecto a la recta, la solución será la parábola de ecuación $(x-6)^2 = -\frac{1}{2}(y+4)$.

Enunciado de la actividad 2 (Examen Parcial de Matemática Básica 2015-0 PUCP)

Halle e identifique la ecuación del lugar geométrico descrito por el centro de una circunferencia móvil, que en el plano cartesiano se mueve de manera que simultáneamente es tangente a la recta $L: x = 0$ y es tangente exterior a la circunferencia $C:\ x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$.

Planteamiento y solución

Con las herramientas del GeoGebra representamos la información de la circunferencia con centro en (4,0) y radio 2 y la construcción de la circunferencia móvil de centro en $C(x, y)$.

Figura 2a. Circunferencias tangentes exteriores.

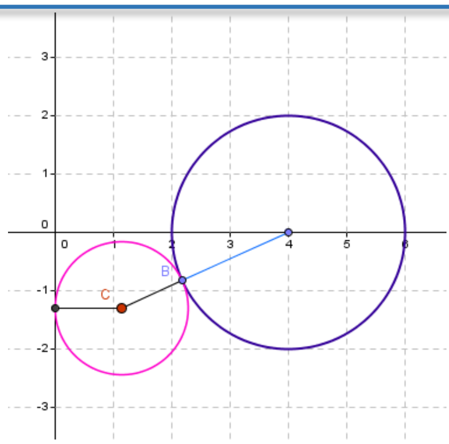


Figura 3. Inicio de lugar geométrico.

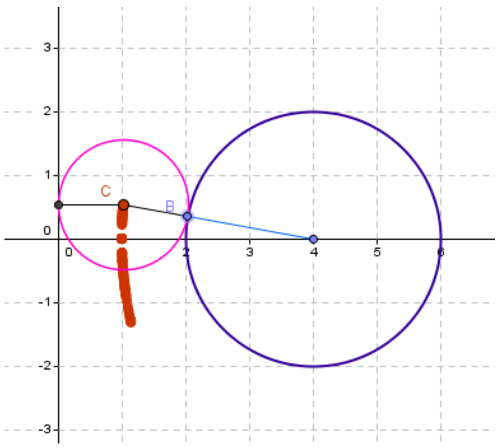
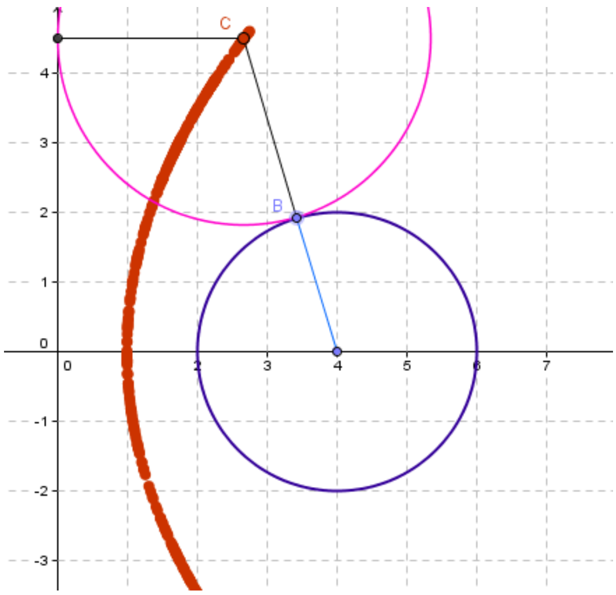


Figura 4. Lugar geométrico solicitado.



Como el centro es $C(x,y)$ móvil. De este modo, su radio correspondiente, según la figura 4 será $d(C,(4{,}0))-2$ e igual a x,

lo cual implica que $x=\sqrt{(x-4)^2+(y)^2}-2$,

elevando al cuadrado y simplificando se tiene

$(x+2)^2=(x-4)^2+(y)^2$.

Así, se obtiene la parábola $y^2=12(x-1)$.

En la siguiente actividad se requiere el uso del GeoGebra 5.0, debido a que es necesario realizar el planteamiento en tres dimensiones porque un gráfico en dos dimensiones no permite apreciar detalles importantes para establecer propiedades geométricas que veremos a continuación.

Enunciado de la actividad 3

Una persona de 1,60m de estatura camina sobre el plano XY describiendo la parábola de ecuación $x^2 = 4y$. Si en el punto A(0,1) hay un poste de luz de 4,80m de altura, halle la ecuación del lugar geométrico descrito por el punto extremo de la sombra de la persona.

Planteamiento y solución

En el plano XY se representa la parábola $x^2 = 4y$ y se ubica el punto A(0,1).

Figura 5. Parábola en el plano XY

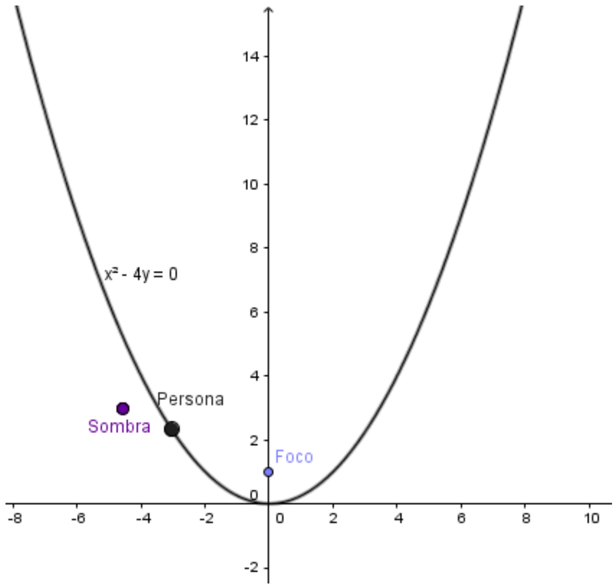
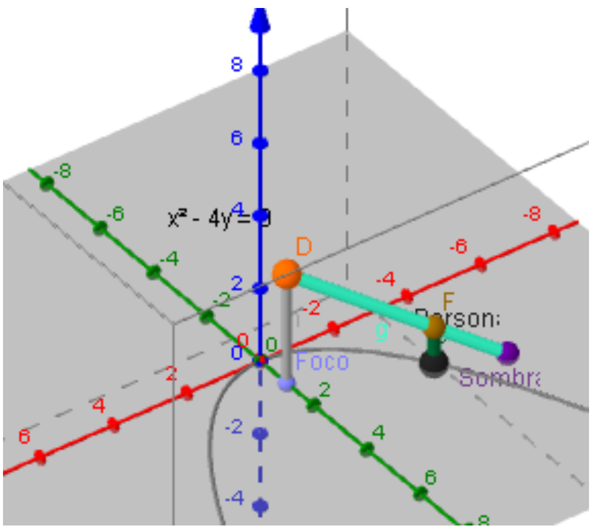


Figura 6. En el poste, la persona y la sombra en XY



El dinamismo del software permite visualizar el lugar geométrico que se genera como se puede ver en la Fig. 7 y Fig. 8.

Figura 7. Al desplazar la persona sobre la parábola, genera el lugar geométrico.

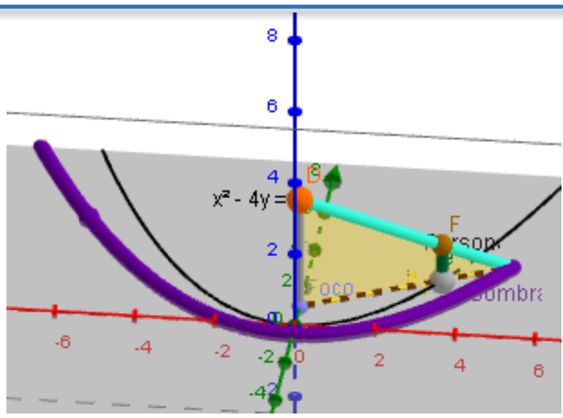
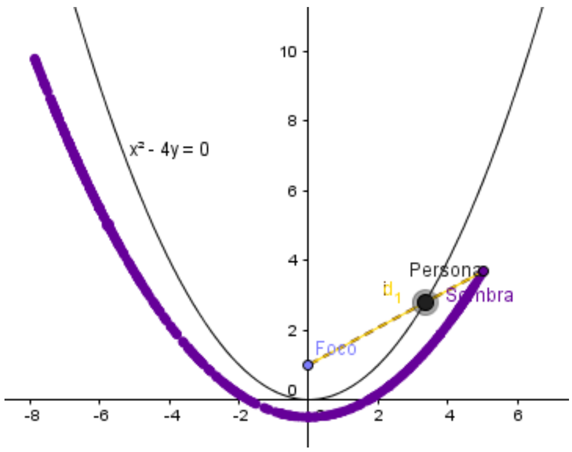


Figura 8. Vista en XY del lugar geométrico.



Este software, permite ubicar la semejanza que se genera entre los triángulos perpendiculares al plano XY y de catetos el poste de luz y la persona con sus respectivas hipotenusas que se ubican en el rayo de luz que proyecta el foco sobre la cabeza de la persona, como se puede apreciar en la fig. 9.

Figura 9. Semejanza de triángulos.

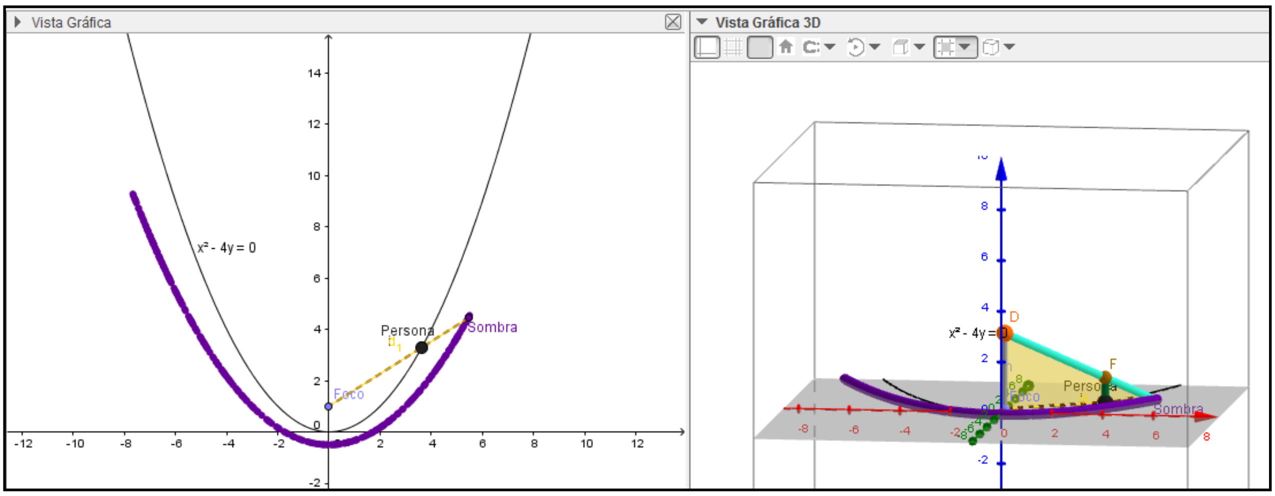
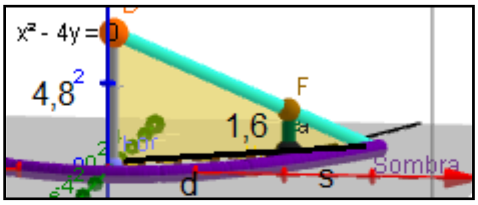


Figura 10. Vista de triángulo.

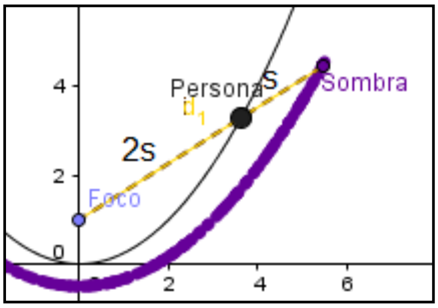


Seguidamente de la Fig. 10 se establecen las proporciones

$$\frac{4{,}8}{1{,}6}=\frac{s+d}{s}\Rightarrow d=2s$$

Como se muestra en la Fig. 11.

Figura 11. Vista en el plano XY.



Suponiendo que el punto donde se ubica la persona es (m, n) y sea P(x, y) las coordenada de la sombra de la persona, entonces se cumple la siguiente relación

$$\frac{y-n}{n-1}=2\Rightarrow n=\frac{y+2}{3} \text{ y}$$
$$\frac{x-m}{m}=2\Rightarrow m=\frac{x}{3}$$

Reemplazando en la parábola donde camina la persona tenemos $\left(\frac{x}{3}\right)^2=4\left(\frac{y+2}{3}\right)$, simplificando $x^2=12(y+2)$.

CONCLUSIONES

Se logró mejorar la visualización de los diferentes lugares geométricos mediante la herramienta dinámica de GeoGebra y dar solución a las actividades solicitadas.

El rendimiento académico fue mejor en los temas de geométria abordados con esta metodología.

El promedio de notas alcanzado por el grupo piloto en los temas de geométrica fue mayor que en el grupo de control.

Se estimuló la capacidad de análisis de los estudiantes, se logró que incrementen su visión geométrica para así dar solución al problema con mayor seguridad.

COMENTARIOS

Las nuevas herramientas tecnológicas brindan la oportunidad de proponer y dar solución a problemas que son difíciles de comprender graficando solamente en el papel.

Las herramientas que poseen el software permiten comprobar las diversas propiedades y resultados.

Finalmente este tipo de experiencia también estimula la creatividad del docente y del alumno.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Chau, J., Gaita, C., Medina, N., Sánchez y R. Villogas, E. (2010). *Matemáticas básicas.* Texto del curso. Lima: PUCP.

Duval, R. (2006).*Un tema crucial en la educación matemática*. La habilidad para cambiar el registro de representación. La Gaceta de la RSME, Vol. 9.1. 143–168.

Gonzaga, M.; Montealegre, J. Rodríguez, C. y Sánchez, R. (2011). *Matemáticas Básicas*. Lima: PUCP.

GeoGebra (2015) Recuperado el 04 de abril de 2015 de http://www.geogebra.org/cms/es/

Lehmann, C. (1980). *Geometría analítica*. México: Limusa.