PENSAMIENTO TEÓRICO-PRÁCTICO PARA LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL

Maria Guadalupe Vera Soria, Marcela Parraguez González
Universidad de Guadalajara (México), Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)
guadalupe.vera@red.cucei.udg.mx, marcela.parraguez@pucv.cl

Palabras clave: Álgebra lineal, comprensión conceptual, pensamiento teórico, estudio interpretativo, estudiantes universitarios

Key words: Linear algebra, conceptual understanding, theoretical thinking, interpretative research, undergraduate students

RESUMEN: Se presentan los primeros resultados de un proyecto doctoral destinado a estudiar el proceso de comprensión del concepto de base de un espacio vectorial de dimensión finita. En esta investigación, en la que 53 estudiantes universitarios del área de Ingeniería participaron realizando actividades de exploración del concepto en un ambiente gráfico-algebraico, seis de ellos fueron entrevistados para indagar el proceso de construcción del concepto, a través de la valoración de las distintas formas de percibir el significado de base y de otras nociones de las cuales él depende (combinación lineal, conjunto generador e independencia lineal). Se trata de un estudio cualitativo e interpretativo, y el análisis de la evidencia utiliza el modelo de la comprensión en matemáticas de Anna Sierpinska (Sierpinska, 1994) y el modelo de la distinción epistemológica del pensamiento teórico-práctico de Sierpinska y colaboradores (Sierpinska, Nnadozie y Oktaç, 2002).

ABSTRACT: We shall present the first results of a doctoral project that studies the understanding process of the concept of basis of a finite dimension vector space. In this research, which 53 undergraduate engineering students were involving in exploration activities of the concept in a graphic and algebraic environment, six of them were interviewed to quest the construction process of the concept, through the assessment of the different ways of perceiving the meaning of basis and other notions of which depends on (linear combination, spanning set and linear independence). It's a qualitative and interpretative study, and the evidence analysis is based on Sierpinska´s model of understanding in mathematics (Sierpinska, 1994) and Sierpinska and collaborators model of the epistemological distinction of theoretical and practical thinking (Sierpinska, Nnadozie and Oktac, 2002).

INTRODUCCIÓN

La comprensión de los conceptos axiomáticos del álgebra lineal resulta difícil al suponer que éstos deben abstraerse en un proceso que implica la realización de un gran número de inferencias (Dorier y Sierpinska, 2002; Oktaç y Trigueros, 2010). En particular, hasta ahora el estudio acerca de la comprensión de los estudiantes sobre el concepto de base de un espacio vectorial ha sido poco documentado (Chargoy, 2006; Da Silva y Lin, 2002; Kú, Trigueros y Oktaç, 2008), y dado que esta noción es clave para el aprendizaje de los espacios vectoriales se considera pertinente realizar una indagación desde una perspectiva aún no abordada.

El estado del conocimiento del tema, revela que la comprensión del concepto es un fenómeno multideterminado que involucra el uso de distintos lenguajes y representaciones, que se basa en el establecimiento de relaciones que deben ser identificadas y que supone la realización de un número de inferencias en torno a las ideas sintetizadas en las nociones involucradas, por lo que se advierten distintas dimensiones desde donde la aproximación a su estudio podría abordarse.

Esta investigación, asume una perspectiva cognitiva a partir de dos modelos que ubican la comprensión como la fomación mental de objetos, relacionada con un proceso de interpretación que se desarrolla conforme se validan ciertas suposiciones y en este proceso, algunas concepciones del objeto en construcción pueden actuar como obstáculos en la abstracción de las ideas.

En este sentido, el análisis se enfoca en las operaciones de comprensión que los estudiantes llevan a cabo al tratar de captar las características esenciales de conjuntos de vectores que son base un espacio vectorial, y las preguntas de investigación se dirigen a indagar las inferencias que los estudiantes realizan, a partir de los modos de pensamiento sintético y analítico, conforme advierten las relaciones que caracterizan a los conceptos, y a explorar las formas de pensamiento que activan para percibirlas, de forma tal que en su conjunto permitan documentar una visión de proceso.

MARCO TEÓRICO

La comprensión para Sierpinska (1994) es un “acto” relacionado con un proceso de interpretación que se desarrolla conforme se validan ciertas suposiciones mediante la abstracción de objetos matemáticos. De hecho, este proceso puede considerarse como un “entramado de actos de comprensión ligados por razonamientos” (p. 72).

Y para precisar lo que acto de comprensión significa, Sierpinska (1994) refiere la definición propuesta por Ajdukiewicz, para quien la comprensión es un acto mental por el que un *objeto de comprensión* se relaciona con otro objeto que funge como *base de la comprensión* del primero. La autora destaca el papel de cada una de las componentes que conforman un acto de comprensión:

> …el ‘sujeto de comprensión’ (P) – la persona que comprende,[…] lo que P intenta comprender –‘el objeto de comprensión’ […] y a lo que el pensamiento de P se dirige (o se intenta dirigir) en el acto de comprensión: ‘la base de la comprensión’. [Y además], la operación mental que conecta el objeto de comprensión con su base (Sierpinska, 1994, p. 29).

En cuanto a las operaciones mentales se puede decir que para que un concepto matemático se comprenda, éste supone ser identificado, discriminado, generalizado y sintetizado.

Por otra parte, las concepciones de un estudiante sobre los objetos matemáticos en construcción, pueden actuar como obstáculos en la comprensión de las ideas, por lo que se asume que el *pensamiento teórico* es una condición necesaria para el buen aprendizaje del álgebra lineal, ya que se basa en la reflexión consciente de los significados y de sistemas de conceptos (Sierpinska, Nnadozie y Oktaç, 2002).

Sierpinska y colaboradores (2002), a partir de la interpretación de la obra de Vygotsky, elaboran un modelo sobre el pensamiento teórico–práctico en el que, de manera similar a la conformación de los conceptos científicos y espontáneos, argumentan sobre la existencia de dos planos diferentes de construcción de los conceptos del álgebra lineal.

> La comprensión de las teorías matemáticas requiere de ambos, el pensamiento práctico y el pensamiento teórico. El pensamiento práctico es la base en contra de la cual el pensamiento teórico adquiere razón de ser y sin la cual pierde su significado epistemológico y, en este sentido, el pensamiento práctico es un *obstáculo epistemológico*. Esto es, *un fenómeno cognitivo y cultural que en cierta forma impide el desarrollo matemático pero que al mismo tiempo, es componente indispensable en la construcción del conocimiento matemático* (Sierpinska, 1990, 1992 y 1994, citada por Sierpinska et al., 2002, p. 14).

Para dar más detalle al respecto de la inclinación a pensar teóricamente, los autores explican que el pensamiento teórico es contrario al pensamiento práctico en sus objetivos, en su objeto y en sus principales intereses y resultados: el objetivo en el pensamiento práctico es realizar acciones para hacer que algo pase, pero en el pensamiento teórico el objetivo es entender una experiencia y reflexionar sus posibles consecuencias. Además, en tanto que el objeto del pensamiento práctico son fenómenos aislados, en el pensamiento teórico son sistemas de conceptos; y aunque el pensamiento práctico se interesa por dar significado a las acciones, el interés principal del pensamiento teórico es el significado de los conceptos, sus referencias, connotaciones y las posibles consecuencias de ese significado para el significado de otros conceptos relacionados (Sierpinska et al., 2002).

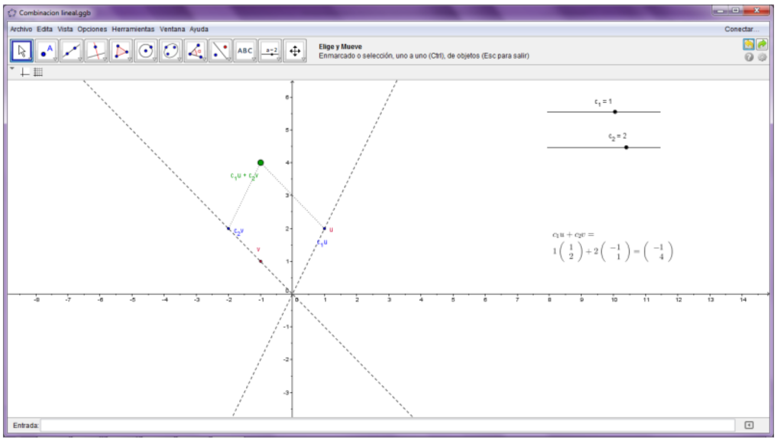
De manera más específica, Sierpinska y colaboradores describen al pensamiento teórico mediante tres categorías principales: el pensamiento teórico es reflexivo, sistémico y analítico, y desarrollan un modelo de pensamiento teórico en el que explican las características de cada una de estas categorías mencionadas.

El pensamiento *reflexivo* se refiere al razonamiento realizado de forma voluntaria con el propósito de adquirir una mejor comprensión de las ideas. Mientras que el pensamiento *sistémico* consiste en pensar acerca de sistemas de conceptos donde el significado de un concepto está basado en sus relaciones con otros conceptos. En cuanto al pensamiento *analítico*, se refiere a la actividad cognitiva realizada de forma consciente para advertir el carácter arbitrario y convencional de los signos y su relación con los objetos que representan (Sierpinska et al., 2002).

MARCO METODOLÓGICO

Desde el punto de vista metodológico, la investigación se sitúa bajo el paradigma cualitativo con la estrategia específica del método hermenéutico-interpretativo. En este sentido, de acuerdo con Merriam (2002), los estudios interpretativos procuran precisamente “comprender un fenómeno o un proceso, la perspectiva de las personas involucradas o una combinación de éstas” (p. 6). Se trata de entender el significado que las personas han construido.

Figura 1. Actividad de exploración de conceptos en Geogebra.



Tomando en cuenta la disponibilidad de tiempo y el consentimiento de los estudiantes para participar en una entrevista, previa información del anonimato y manejo ético de los datos obtenidos en el estudio, se contó con el apoyo de seis estudiantes que realizaron la actividad de exploración de los conceptos y que fueron entrevistados para obtener información sobre las características que advertían de conjuntos de vectores del espacio vectorial R^2 con los que se les propuso trabajar, y sobre la relación de dichos conjuntos con el espacio o subespacio vectorial que era posible construir con ellos.

Específicamente, se condujeron de manera individual seis entrevistas con los estudiantes A1, A2, M1, M2, B1 y B2, cuyos promedios parciales del curso se clasificaron como calificaciones altas (90-100), medias (70-90) y bajas (menos de 70), debido a la intención contar con distintas perspectivas para representar la complejidad del fenómeno en estudio.

Se verificaron los modos de pensamiento que estos estudiantes involucraron en sus respuestas y los argumentos con los que justificaron las características que interpretaban, para tratar de identificar: 1) las ideas que tenían acerca de los conceptos (sus inferencias), 2) la cadena de significados que podían llevarlos a reconocer conjuntos de vectores que son base de R^2 o de un subespacio de R^2, y 3) cómo asociaban los conceptos de combinación lineal, conjunto generador e independencia lineal para establecer las relaciones que conducían a la comprensión del concepto de base.

En lo que sigue, se describe la forma como se evaluaron las inferencias sobre las nociones en el sistema conceptual que los estudiantes realizaron, y las características del pensamiento teórico y práctico que incorporaron en dicha comprensión.

ANÁLISIS DE LA EVIDENCIA

Sierpinska (1990), puntualiza que el significado de un concepto puede advertirse si se analiza el referente y el sentido que los define, es decir, si se examina qué es los que se dice (el sentido) y sobre qué (el referente), y es por este motivo que el análisis de las inferencias sobre el significado de los conceptos por parte de los estudiantes se ha llevado a cabo desde esta lógica.

Las transcripciones de las entrevistas y los documentos de la actividad experimental de los seis estudiantes seleccionados se examinaron para identificar las inferencias sobre las características esenciales que los estudiantes relacionaron al concepto de base y a cada uno de los conceptos germinales, por lo que se asignaron diversos extractos de texto a una o varias de las clases analíticas: combinación lineal, conjunto generador, independencia lineal y base.

Con los extractos de texto obtenidos de cada uno de los estudiantes y clasificados mediante un proceso gradualmente más selectivo, se extrajeron para su reensamble en un arreglo matricial, un número de extractos de texto que se reunieron como material para analizar las inferencias sobre el significado de los conceptos.

Por ejemplo, las inferencias sobre el significado del concepto de *conjunto generador*, obtenidas de la evidencia del estudiante M1, fueron las siguientes:

- El estudiante M1 percibe que un conjunto de vectores linealmente independiente es generador del espacio vectorial, pero además, justifica que aunque los vectores forman un conjunto linealmente dependiente, éstos son vectores generadores de un espacio o subespacio vectorial.

Estas inferencias, emergen de la siguiente evidencia:

1) La entrevistadora anota en una hoja el siguiente conjunto de vectores para su análisis $\{(1,2),(-1,1)\}$ y pregunta:

> E: Bueno, aquí en particular, si te fijas hay dos vectores: el vector (1,2) y el vector (-1,1). Pensemos en este conjunto de vectores ¿sí? (mjum). ¿Hay algún vector del espacio vectorial que no pueda ser generado por ellos?, ¿hay alguno que se excluye?
>
> M1: Mmmm... no que yo lo haya podido encontrar, como son linealmente independientes, tanto el vector “u” como el vector “v”, se… teóricamente, se deberían de poder crear todos los vectores en… pertenecientes al espacio en el que ellos están…

Aquí, para M1 la “independencia lineal” parece ser una propiedad que confiere a los vectores del conjunto la facultad de “teóricamente” poder generar “al espacio en el que ellos están”, por lo que para él, un conjunto generador puede entenderse como:

Referente: un conjunto de vectores (linealmente independiente)

Sentido: cuyos vectores se combinan para formar vectores que en su conjunto conforman un espacio vectorial

2) Y dado que menciona la “independencia lineal”, se le plantea el análisis del nuevo conjunto $\{(1,2),(-1,1),(1,0)\}$. Sus palabras al juzgar si el conjunto puede generar el espacio vectorial son:

   M1: Mmmm... el mismo espacio vectorial que el primero sería muy difícil que lo lográramos volver a crear porque se supone que este espacio vectorial debe de ser completamente diferente a éste, […] pero también existe una parte en Álgebra que dice que, por ejemplo R^2, el espacio vectorial R^2, donde entra éste, puede llegar a tener 3, pero no puede tener uno… solamente, solamente un vector, mínimo deben ser dos para poder generar el espacio, o sea, que este espacio no se vería alterado, no importa hacia donde yo mueva el cursor, y hacia donde yo ponga la bolita va a seguir siendo un espacio generado por el conjunto de los tres vectores.

3) Más adelante en la entrevista, el estudiante es cuestionado respecto al espacio generado a partir del conjunto $\{(-1,3),(2,-6)\}$, a lo que refiere:

   M1: Que son solamente múltiplos de ellos. Todos los vectores que se generen van a tener que ser múltiplos de 3 y de 2. Básicamente… en eso se va a fundamentar todo. Los nuevos vectores van a estar siempre sobre la misma línea, no van a salir de ese campo, entonces, mientras descubras un vector puedes ir multiplicando a ese una y otra y otra y otra y otra vez, y te van a seguir dando va… vectores que se encuentran dentro de este… espacio, se podría decir

4) Y se le pide aclarar específicamente si el conjunto de vectores $\{(-1,3),(2,-6)\}$, es un conjunto generador:

   M1: Sí son generadores, pero no son generadores en sí de un espacio, hasta donde a mí llega el conocimiento de espacio, o hasta donde lo comprendo, es el decir que pueden generar fuera de ellos, o sea que, dado un lugar… cualquier punto que se asigne en ese lugar va a ser un espa... va a ser un vector que se generó por el trabajo con éstos dos, pero si aquí a mí se me ocurre marcar que la bolita verde sale acá, éstos dos jamás la habrían podido generar.. entonces, ellos son generadores solamente de su espacio, el espacio en el que habitan. Y no sé alguna manera apropiada de llamarlo

5) Además, cuando se le pregunta si el conjunto formado por el vector $\{(-1,3)\}$, sigue siendo un conjunto generador argumenta:

   M1: Es igual que en el primero que puso, o sea, va a ser que solamente sean múltiplos de éste vector, entonces solamente va a reproducir otros vectores que estén igual que él, o sea que estén justo en la misma zona que él está, no puede abarcar toda la zona por completo, por así decirlo

Por lo tanto, según se expresa en los anteriores extractos, el estudiante M1 analiza varios conjuntos de vectores y parece apreciar que, aún cuando el conjunto valorado es linealmente dependiente, se trata de conjuntos generadores del espacio vectorial o de un subespacio vectorial “al que pertenecen”.

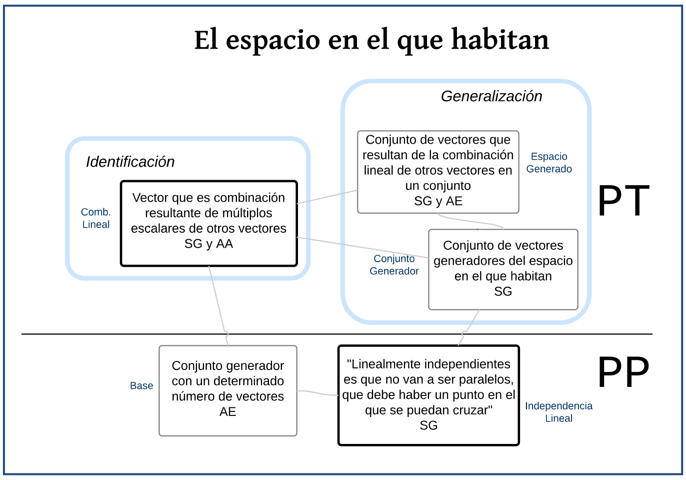
En particular en el segundo extracto, donde M1 expresa que "existe una parte en Álgebra" donde se establece un número mínimo de vectores para los conjuntos generadores, da la impresión de haber evaluado su convicción inicial para poder llegar finalmente a valorar que el conjunto $\{(1,2),(-1,1),(1,0)\}$ sí es generador del espacio vectorial.

Por otra parte, las inferencias sobre el significado de los conceptos, se reunieron en una nueva matriz, llamada matriz de correspondencias teóricas, y en este arreglo se han analizado detenidamente las componentes centrales que intervienen en la construcción del significado de los conceptos: la base de la comprensión (los modos de pensamiento sintético-geométrico, analítico-aritmético y/o analítico-estructural), la operación mental (identificación, discriminación, generalización o síntesis) y el tipo de pensamiento (teórico/práctico).

De esta manera, el proceso que se interpreta de la integración de todas las categorías evaluadas en la matriz de correspondencias teóricas: los significados, la base de la información, las operaciones mentales y las características del pensamiento; da pie a la descripción de la manera en que los estudiantes identifican, discriminan, generalizan o sintetizan el sistema conceptual que advierten a partir de los modos de pensamiento.

El significado de cada noción involucrada en el sistema se pondera y se relaciona con otros conceptos en una red de significados que se organiza y se presenta en términos de una "configuración de los significados" que explicita el proceso que se interpreta (ver figura 2).

Figura 2. Diagrama de la configuración de los significados del estudiante M1.



RESULTADOS

Los primeros resultados de la investigación que se obtienen de la interpretación de la evidencia, desarrollan una explicación sobre la cadena de inferencias que los estudiantes realizaron para lograr sintetizar, generalizar, discriminar o identificar los conceptos del sistema conceptual.

A continuación, por ejemplo, se describen las relaciones en la configuración de los significados de los conceptos que se reconocieron para los estudiantes A2 y M2, quienes lograron sintetizar el sistema conceptual: combinación lineal – conjunto generador – independencia lineal – base:

Primero, los estudiantes identificaron en la articulación de los modos de pensamiento sintético-geométrico y analítico-aritmético, las características de un vector que resulta de sumar "un cierto tanto de veces" los vectores en un conjunto o que es múltiplo de un vector, es decir, han podido establecer, mediante el análisis de las representaciones en los contextos gráfico y algebraico, la relación entre un vector y la suma de múltiplos escalares de los vectores en un conjunto.

Luego de reconocer la noción de combinación lineal, los estudiantes A2 y M2 lograron advertir diferentes combinaciones lineales generadas por un vector o por varios vectores de algunos conjuntos de R^2 (espacio generado), realizando actos de discriminación principalmente en el modo sintético-geométrico.

Sin embargo, aunque la noción de conjunto generador fue intuitivamente revelada en las representaciones gráficas de combinaciones lineales (modo sintético-geométrico), es solo a partir del trabajo que realizado fundamentalmente en el modo analítico-aritmético, con conjuntos de vectores en los que se identificaron las características de independencia o dependencia lineal, que los estudiantes han podido dar cuenta precisa de cuándo un conjunto de vectores era generador de un determinado espacio o subespacio vectorial, es decir, el concepto de conjunto generador se ha sintetizado solo en el caso de antes haber analizado y reconocido en un contexto algebraico la relación entre los vectores en el conjunto.

En particular, en la tabla 1 se destacan dos inferencias, en el primer y último extractos, donde A2 y M2 señalan haber advertido cuál es la relación entre un conjunto de vectores linealmente dependiente y el espacio o subespacio que se genera con este conjunto. Especifican que si un conjunto contiene algún vector que es combinación lineal de otro, o de los otros en el conjunto, entonces ese vector ya está incluido en espacio vectorial generado por el conjunto.

Tabla 1. Conjunto generador en la síntesis del sistema conceptual.

Conjunto generador	**A2:** ...mediante determinante sacamos que son dependientes […] el primer vector que es (1,-2) puede generar al vector (-2,4), o sea que este vector es una combinación lineal de éste, y consideramos que tenemos un vector pero podemos sacar muchas combinaciones lineales.
Se considera que estos extractos contienen inferencias respecto al concepto de conjunto generador que podrían haber sido clave para la comprensión de la noción de base. Los estudiantes A2 y M2, recurren a los modos sintético-geométrico y analítico-aritmético (y analítico-estructural en el caso de M2) para establecer las características de conjuntos	**A2:** …el primer conjunto de vectores [{(1,2), (-1,1)}]…, como no son múltiplos, como ya lo vimos gráficamente, pueden generar cualquier otro vector en cualquier posición. En este caso [el conjunto {(1,2), (-1,1), (1,-3)}] sí generan a R^2 pero tienes un vector que es combinación de los otros dos vectores… **M2:** … se puede generar todo el plano porque son dos vectores totalmente independientes entre sí. Y por lo tanto, la ley nos dice que... que mientras dos vectores en R^2 sean totalmente independientes entre sí entonces se puede generar todo el plano R^2, o sea este vector puede estar en todo el plano dependiendo de la combinación lineal que se haga porque son independientes este vector de éste. **E:** ¿Qué se puede generar a partir de ese conjunto con tres vectores de R^2? **M2:** Pues se puede generar, dependiendo de los vectores que sean, se puede generar un plano, una recta, que es lo más…

de vectores que generan al espacio R^2 o a un determinado subespacio.	**M2:** ...seguimos con las leyes de Álgebra. Al tener tres vectores, y suponiendo que sean independientes, uno de los tres tiene que ser dependiente de alguno de los otros dos o de los dos, […] como estamos generando dos dimensiones… entonces … un tercero, un tercer vector dentro de esas dos dimensiones nos generaría la información que ya está dada por estos dos vectores […] al ser combinación lineal ya no aporta más información, se sigue generando el mismo espacio […] que en este caso sería el … el … todo el R^2.

Lo interesante en este caso, es que la evidencia ha revelado que si un estudiante reflexiona en la inferencia anterior y realiza un análisis de la definición axiomática del concepto de base (modo analítico-estructural), entonces puede llegar a interpretar la base como un “conjunto generador de un determinado espacio con un número mínimo de vectores” posibles, que es como M2 lo ha abstraído; o bien, como A2 lo estableció, puede pensar en un conjunto generador de un espacio en el cual “no existe un vector que sea combinación lineal de otro(s)”, es decir, que contiene un número máximo de vectores linealmente independientes (ver tabla 2).

Tabla 2. Base en la síntesis del sistema conceptual.

Base	**A2:** …si en un conjunto de vectores hay un vector que es múltiplo, no van a ser base porque ese vector múltiplo es combinación lineal de alguno de los otros vectores, entonces la base viene siendo un conjunto de vectores que todos son linealmente independientes.
A partir de las citas de A2 presentadas en esta tabla, se percibe que en este estudiante prevalece la tendencia a verificar si un conjunto de vectores es base de un espacio o subespacio vectorial, al analizar si en el conjunto existe algún vector que sea combinación lineal de otro(s).	**A2:** La base es el conjunto de vectores que están linealmente independientes, o sea, que pueden generar a todo el espacio, ya sea R^2 o a R^3, dependiendo al rango que pertenezcan los vectores. En este caso seria el primer vector, el primer conjunto de vectores [{(1,2), (-1,1)}] debido a que, como no son múltiplos, como ya lo vimos gráficamente, que pueden generar cualquier… cualquier otro vector en cualquier posición.
	A2: En este caso [el conjunto {(1,2), (-1,1), (1,-3)}] sí generan a R^2 pero tienes un vector que es combinación de los otros dos vectores […] creo que, que estos 2 vendrían siendo la base [los dos primeros vectores], pero éste no porque por lo mismo, porque este viene siendo combinación de estos 2
Por otra parte, en las inferencias del estudiante M2, se aprecia que al tomar decisiones acerca de si un conjunto es base, se enfoca en verificar si se tienen los vectores mínimos necesarios	**A2:** El vector (1,-2) es una base, es la base para la recta. En éste… el vector (-2,4) es combinación lineal del (1,-2), no puedes decir que son base porque son… pertenecen… son vectores múltiplos que al graficarlos o al poder apreciarlos puedes multiplicar éste y te puede dar éste, o sea, que no son independientes, son dependientes…
	M2: A eso es a lo que conocemos como base. Una base es… es aquel vector en el que… en el que no es… son vectores independientes y pueden

para generar "la información" del espacio, y descarta de la base a los vectores que "son redundantes", que "ya no aportan información distinta".	generar toda la información, […] por ejemplo, aquí se puede observar [{(1,-2), (-2,4)}] que este segundo vector es combinación lineal del primero, ya lo comprobamos. Entonces, si yo trazo eso en un plano simplemente es una recta. Lo que me está diciendo aquí es hacia… que la recta se me haga más larga o se crezca su magnitud o se reduzca, de acuerdo a los múltiplos. […] se le llama que son vectores redundantes porque ya no aporta información distinta a la que ya se conoce sino que sigue siendo la misma durante la misma trayectoria del vector simplemente lo hace más largo o más corto.
Desde luego, para que el análisis de A2 y M2 sobre los conjuntos y su relación con el espacio que generan condujeran a la significación del concepto de base, antes ya se tenía 1) Una idea intuitiva del espacio que se podía construir con ellos, y que se obtuvo al discriminar los conceptos de combinación lineal y espacio generador, en su interacción en el entorno gráfico-algebraico del *Geogebra*; 2) Y se había logrado distinguir, mediante síntesis de los conceptos combinación lineal, espacio generado y dependencia lineal, distintos casos en los que conjuntos de vectores eran generadores de un determinado espacio o subespacio vectorial.	**M2:** …son 5 vectores que generan un espacio dentro de un plano. De los primeros dos vectores, que son los que están más marcados, son… los que son bases, ya los demás son combinación lineal de estos vectores.
	M2: Este seria una base en R^2 y este igual seria una base en R^2 [se refiere a los conjuntos {(2,1), (3,-3)} y {(1,-2)}]. Es igual se puede considerar que estas son unas bases, son quienes generan la información dentro del plano y ya simplemente dos de los vectores generan… cada uno de los vectores pues tienen base en R^2. E: Pero hace un momentito me decías que este no generaba a todo R^2 [me refiero al conjunto {(1,-2)}]. M2: No, una base dentro del… seria un subconjunto. E: ¿cual es el subconjunto? M2: Una recta.
	M2: …una base por sí sola genera una recta, si tenemos dos bases dependiendo del espacio, por ejemplo si estamos hablando de R^2 ya nos genera un plano, o sea, ya nos está… está generando un espacio vectorial, al decir que es plano en R^3 sería igual. Una base tendrían que ser tres bases para poder generar todo el espacio R^3.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Chargoy, R. M. (2006). *Dificultades asociadas al concepto de base de un espacio vectorial* . Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Da Silva, A. y Lins, R. (2002). An analysis of the production of meaning for the notion of basis in linear algebra. *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level)*. John Wiley Publishers. Crete: Greece. Recuperado de http://www.math.uoc.gr/~ictm2/

Dorier, J. L. y Sierpinska, A. (2002). Research into the Teaching and Learning of Linear Algebra. En D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgraber, J. Hillel, M. Niss y A. Schoenfeld (Eds.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: New ICMI Study Series, 7,* 255-273. doi: 10.1007/0-306-47231-7_24

Merriam, S. and Associates, (2002). *Qualitative Research in Practice: Examples for discussion and analysis.* San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Oktaç, A y Trigueros, M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos del álgebra lineal?. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *13* (4-II), 373-385.

Kú, D., Trigueros, M., Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática*, (20) 2, 65-89.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics (10)* 3, 24-41. Canada: FLM Publishing Association.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London: The Falmer Press.

Sierpinska, A., Nnadozie, A. y Oktaç, A. (2002). *A study of relationships between theoretical thinking and high achievement in linear algebra.* Reporte de Investigación. Montreal, Canadá: Concordia University.