PROPORCIONES EN LAS CÓNICAS DE APOLONIO

Presentado por:

NANCY EDITH TOVAR OJEDA

EDUARDO ALEXANDER UMBARILA FORERO

Asesor:
Edgar Alberto Guacaneme Suárez

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C.

2014

PROPORCIONES EN LAS CÓNICAS DE APOLONIO

Presentado por:

NANCY EDITH TOVAR OJEDA

CÓD. 2007140059

C.C. 1070596993

EDUARDO ALEXANDER UMBARILA FORERO

CÓD. 2007240069

C.C. 80098802

Trabajo de grado presentado como requisito para optar por el título de Licenciado en Matemáticas

Asesor: Edgar Alberto Guacaneme Suárez

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C.

2014

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	PROPORCIONES EN LAS CÓNICAS DE APOLONIO
Autor(es)	TOVAR OJEDA, Nancy Edith; UMBARILA FORERO, Eduardo Alexander
Director	GUACANEME SUÁREZ, Edgar Alberto
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2014. P. 117
Unidad Patrocinante	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Sección Cónica, Círculo, Subcontraria, Parábola, Hipérbola, Elipse, Historia de las Matemáticas, Conocimiento del profesor de Matemáticas.

2. Descripción

Los propósitos del presente trabajo de grado, es el estudio y la descripción de cómo las proporciones son utilizadas para definir y caracterizar las secciones cónicas, para esto se traduce y se estudia el capítulo *The cone* del documento *Apollonius of Perga: Treatise on Conic Sections; a* partir de este se describe en el presente documento, el cono, las secciones cónicas y los elementos de estas secciones. Teniendo presente constestar las siguientes preguntas de ¿Cómo define Apolonio, a través de proporciones, la parábola, la elipse y la hipérbola?, ¿Qué papel tienen las proporciones en estas definiciones? y la utilidad de este estudio, en el conocimiento del docente en formación de Matemáticas.

3. Fuentes

Las principales referencias bibliográficas son:

1. Heath, T. L. (1896). *Apollonius of Perga: Treatise on Conic Sections*. Cambrige: University Press.
2. Guacaneme, E. (Junio, 2011). La Historia de las Matemáticas en la educación de un Profesor: razones e intenciones. En A. Ruiz (Presidencia). XIII CIAEM - IACME, Recife, Brazil.
3. Arbeláez, Arce, Guacaneme, y Sánchez. (1999). *Análisis de Textos Escolares de Matemáticas.* Cali: Universidad del Valle.

4. Contenidos

El documento se desarrolla a través de cinco capítulos, a saber:

1. Preliminares. En este capítulo se realiza una descripción del problema y se establecen los objetivos del estudio.

2. Contextualización. Se presentan un marco histórico sobre el desarrollo de las cónicas, hasta Apolonio y dos líneas del tiempo:

a. Línea del tiempo, personajes que desarrollaron las proporciones. En la cual se presenta los aportes y aplicaciones de diversos matemáticos antes de Apolonio.

b. Línea del tiempo, tres problemas clásicos. Donde se enuncian algunos métodos para la solución de los tres problemas griegos (cuadratura, trisección y duplicación.

3. Interpretación de la teoría de Apolonio sobre las cónicas a través de Heath, es el resultado del estudio en la cual se presentan las observaciones y componentes de aplicación de las construcciones de las secciones cónicas (Applet).

4. Las ventajas que se obtienen del estudio de las definiciones de las cónicas de Apolonio para el conocimiento del docente de matemáticas. Son los aportes y reflexiones a nivel personal en la formación de docentes de Matemáticas.

5. Conclusiones. Se exponen los resultados más relevantes encontrados en el estudio, no solo a nivel académico, sino también a nivel personal.

5. Metodología

Para el desarrollo del Trabajo de grado primero se hizo un estudio del documento Heath (1896), el cual implicó no solo la traducción sino además, identificar y estudiar fuentes adicionales en las que se especificaran algunos conceptos matemáticos que ameritaban un estudio más profundo y comprensivo. También, utilizando el software de geometría Cabri 3D para la realización y comprensión de las construcciones, permitiendo que el documento digital, del presente trabajo de grado, contenga Applets que son componentes de la aplicación Cabri 3D y que se ejecuta en el contexto de Word dando como agregado una mejor interpretación y exploración de las construcciones al lector. Algunas de las ideas y comprensiones que fueron surgiendo se constituyeron en las ideas principales de una ponencia presentada en el XXXIII Jornada del Educador Matemático en la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia, por último el artículo: ¿Monogamia o poligamia entre definiciones y objetos matemáticos? publicado en la Revista Ejes de la Universidad del Tolima. Para la contextualización se presenta un apartado sobre los antecedentes de las cónicas de Apolonio complementado con dos líneas del tiempo que pueden ser consultadas por medio de sus vínculos en la internet y descritas en el presente trabajo que permiten, de una forma breve, conocer algunas características del desarrollo de las proporciones antes de Apolonio y los métodos de solución de los tres problemas clásicos (duplicación del cubo, trisección de un ángulo y la cuadratura del círculo). Se analizaron los aportes que este estudio genera a la formación de futuros docentes de Matemáticas, al realizar un ejercicio de reflexión sobre el proceso y los resultados.

6. Conclusiones

Retomando las antiguas definiciones y proporciones dadas por Apolonio se reconoce la importancia de estas como un lenguaje para comunicar las relaciones de las magnitudes de los segmentos y de su uso como herramienta para la teorización de las secciones cónicas. También, se reconoce y se describe el conocimiento adquirido en el estudio realizado, su utilidad para el docente de matemáticas y la necesidad de este de modificar su visión de la actividad matemática y sus objetos, al estudiar y comprender la historia de las matemáticas; lo que transforma su manera de enseñar y utilizar los recursos para este fin, además de

brindarle nuevas competencias y fortalecer las que posee.

Elaborado por:	TOVAR OJEDA, Nancy Edith; UMBARILA FORERO, Eduardo Alexander
Revisado por:	GUACANEME SUÁREZ, Edgar Alberto

Fecha de elaboración del Resumen:	6	11	2014

Tabla de contenido

INTRODUCCIÓN

El presente documento corresponde al trabajo de grado que se presenta a la Licenciatura en Matemáticas como requisito para optar al título de Licenciado en Matemáticas. El trabajo de grado se adscribe a las actividades académicas del grupo RE-MATE (*Research on Mathematics Teacher Education*), perteneciente al Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Este trabajo, como su nombre lo indica, estudia las proporciones que utiliza Apolonio para definir las secciones cónicas, pero no solo trata el desarrollo y definición de las secciones cónicas por medio de las proporciones en un marco histórico, también establece las ventajas que se obtienen del estudio de estas definiciones para el conocimiento del docente de Matemáticas.

Este trabajo de grado se divide en cinco capítulos: preliminares, contextualización, interpretación de la teoría de Apolonio sobre las cónicas, ventajas que se obtienen del estudio de las definiciones de las cónicas de Apolonio para el conocimiento del docente de matemáticas y conclusiones.

En el primer capítulo establecemos las generalidades del estudio, donde se reconocen la justificación y descripción del problema, y los objetivos de nuestro estudio.

El segundo es la contextualización, donde presentamos un marco histórico sobre el desarrollo de las cónicas hasta Apolonio, junto con dos líneas del tiempo: la primera sobre los personajes que desarrollaron las proporciones y la segunda sobre los tres problemas clásicos griegos.

En el tercero desplegamos la interpretación de la teoría de Apolonio sobre las cónicas a través de Heath (1896) donde se insertan en el documento Applets[1] que ilustran las proposiciones que se encuentran en Heath (1896), lo que nos permite presentar un escrito

[1] Los archivos originales de estos Applets (en Cabri 3D) se encuentran en el cd adjunto al trabajo.

no estático en el cual se pueden explorar los Applets, para lo cual el archivo de Word tiene la extensión .docm.

En el cuarto capítulo proponemos, a manera personal, las ventajas que se obtienen del estudio de las definiciones de las cónicas de Apolonio para el conocimiento del docente de Matemáticas, sus visiones sobre la actividad matemática, sobre los objetos matemáticos y sus competencias profesionales.

Y por último, el capítulo de las conclusiones expone los resultados más relevantes encontrados en el estudio, no solo a nivel académico y pedagógico sino también a nivel personal.

1 PRELIMINARES

1.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

El objeto del trabajo de grado propuesto es estudiar las traducciones de los documentos donde se encuentra el estudio de las definiciones de Apolonio para la elipse, la parábola y la hipérbola, mostrar el papel de las proporciones en estas definiciones y hacer una reflexión sobre la utilidad de este tipo de definición, a favor del conocimiento del docente de Matemáticas.

En síntesis, se responderán los siguientes interrogantes:

1. ¿Cómo define Apolonio, a través de proporciones, la parábola, la elipse y la hipérbola?
2. ¿Qué papel tienen las proporciones en estas definiciones?
3. ¿Qué ventajas se obtienen del estudio de las definiciones de las cónicas de Apolonio para el conocimiento del docente de matemáticas?

1.2 JUSTIFICACIÓN

La justificación de este trabajo se basa en tres aspectos. El primer aspecto está conformado por dos motivaciones. La primera, es la utilidad de las definiciones de las cónicas, por medio de las proporciones, en el desarrollo posterior de las Matemáticas; esta motivación se debe a que al leer un documento (Camargo & Guzmán, 2005), encontramos que se utiliza una de las propiedades de la parábola, demostradas por Apolonio, para caracterizar la parábola por medio de la tangente, donde la demostración era de carácter geométrico basado en el estudio de las proporciones. Al ver la utilidad de estas definiciones y no conocerlas, encontramos la segunda motivación, que es el hecho del desconocimiento, por parte de nosotros, de las definiciones de las cónicas que se basan en proporciones entre magnitudes geométricas. El desconocimiento y la utilidad de estas definiciones, entonces es el primer aspecto que nos motiva a estudiar la forma en que Apolonio define las secciones cónicas.

El segundo aspecto consiste en responder la pregunta ¿qué potencialidad, a favor del conocimiento del profesor de Matemáticas, tienen las definiciones de cónicas dadas por Apolonio? Ello nos lleva a plantearnos una reflexión sobre la relación de las proporciones de las cónicas de Apolonio y el conocimiento del docente, donde se pretende mostrar cómo favorece el estudio de las definiciones de las cónicas dadas por Apolonio, al conocimiento del docente de Matemáticas.

Y en tercer lugar, debido a que se encuentra poca bibliografía en español que brinde una reflexión y un estudio histórico detallado de las cónicas de Apolonio, consideramos que es importante proporcionarle a la comunidad una traducción al español de los documentos que se utilizarán en este trabajo de grado para que sirvan de referentes en próximos estudios.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo general

Reconocer el papel de las proporciones en las definiciones de Apolonio para la elipse, la parábola y la hipérbola y hacer una reflexión sobre la potencialidad de esta forma de definición de las cónicas para el conocimiento del docente de Matemáticas.

1.3.2 Objetivos específicos

- Brindar a la comunidad una traducción al Español de un apartado del libro *Apollonius of Perg*a: Treatise on Conic Sections de Tomás Heath, que sirva de referencia para próximas investigaciones.
- Reconocer el papel de las proporciones en las definiciones de Apolonio.

- Reconocer la utilidad del papel de las proporciones en las definiciones de Apolonio para el conocimiento del docente de Matemáticas.

2 CONTEXTUALIZACIÓN

Para situarnos en el entorno histórico de Apolonio y tener una perspectiva consciente del valor de su trabajo, presentamos un escrito sobre el desarrollo de las cónicas hasta Apolonio y dos líneas del tiempo: la primera presenta algunos personajes que desarrollaron las proporciones y las utilizaron en la solución de problemas prácticos y la segunda los personajes históricos que estudiaron los tres problemas clásicos. El propósito de las líneas del tiempo es mostrar cómo las cónicas fueron utilizadas como métodos de solución a algunos de los tres problemas clásicos griegos, a través de la historia de las Matemáticas. Para ello se utilizaron dos aplicaciones gratuitas en la Internet que permiten la creación de líneas del tiempo interactivas, esto es, seleccionar la información más relevante sobre un tema y organizarla en orden cronológico. Debido al formato del presente documento se hace una descripción de los personajes considerados en cada línea del tiempo; sin embargo, se puede explorar cada línea del tiempo por medio de los enlaces a páginas web que aparecerán en los siguientes apartados.

2.1 ALGUNOS ANTECEDENTES A LAS CÓNICAS DE APOLONIO

Antes de estudiar las definiciones de Apolonio de las cónicas es conveniente dar un vistazo a la situación, aportes y conocimientos matemáticos de su época, además de algunos detalles de la vida y obra. Se ha tomado como referencia para este apartado a Tapia (2002).

Luego de la muerte de Alejandro Magno (323 a. C.) inició el periodo Helenístico, caracterizado por la desunión de su imperio, debido a que no hubo un líder que lograra mantener la unión. Diferentes reinados conformaron este imperio, entre estos se encontraba Tolomeo en Egipto quien sería el primero de una dinastía de monarcas que colaboró, notablemente, con el nuevo florecimiento de las Matemáticas.

En Alejandría, capital del nuevo Egipto, se formaron y trabajaron pensadores como Euclides, Arquímedes, Eratóstenes y Apolonio, quienes realizaron los aportes más originales y los métodos más significativos en esta etapa alejandrina.

De la ciencia griega se destacan la introducción del pensamiento hipotético-deductivo y el método racional de demostración al uso de técnicas sintéticas en los razonamientos geométricos; pero la matemática de los griegos sufrió un tipo de estancamiento, el cual ha sido reconocido por los especialistas de la historia griega. Según Heath citado por Gonzales, J (s. f)

> … hablando generalmente, los mejores progresos de geometría en líneas generales fueron prácticamente estorbados por las restricciones del método y la forma en la cual fueron inseparables de la geometría clásica griega…los griegos no pudieron avanzar muy lejos… en ausencia de algún sistema de coordenadas y sin medios más libres de la manipulación tales como los que son suministrados por el álgebra moderna. (p. 4)

Según Gonzales, J (s. f.) a este estancamiento se le atribuyen dos factores destacables; el primero, es el uso de un sistema alfabético aditivo, totalmente inoperante tanto para el cálculo matemático como para la representación simbólica, en lugar de adoptar el sistema de numeración babilónico y el legado mesopotámico, que ya conocía el cero y el principio de posición. El segundo factor, se le atribuye a la estructura social de los griegos, donde el estudio teórico de las propiedades de los números era asumido por los sabios griegos y el cálculo rutinario numérico era relegado a los esclavos.

Los predecesores de Apolonio definían el cono como la superficie descrita por la revolución de un triángulo rectángulo alrededor de uno de los lados que contiene el ángulo recto. Se distinguían tres clases de conos según la medida del ángulo vertical, denominados como **cono agudo**, cuyo ángulo vertical es agudo; **cono rectángulo**, con ángulo vertical recto; y **cono obtuso**, ángulo vertical obtuso. Al cortar cada uno de estos conos por un plano perpendicular a una de sus líneas generatrices aparecían las tres secciones cónicas conocidas por los nombres de oxitoma (sección de un cono agudo), ortotoma (de un cono rectángulo) o amblitoma (de un cono obtuso).

La primera persona en estudiar estas secciones es Menecmo, quien estaba en la búsqueda de la solución al problema de la duplicación del cubo (360 o 350 a. C.). Tiempo después Aristeo da a conocer un tratado sobre los lugares sólidos, que se ocupa básicamente de las secciones cónicas.

Euclides estudió las cónicas en cuatro libros que recogen la mayor parte del material estudiado por Apolonio. En su *Phaenomena* Arquímedes se interesa por las cónicas e introduce terminología nueva como parábola y diámetro.

Tras contextualizarnos sobre la situación social y matemática en la que se encontraba Apolonio nos ocuparemos de conocer lo poco que se sabe de su vida.

2.1.1 Apolonio y su obra

Apolonio nació a mediados 262 a. de C. en Perga (ver imagen 1), ciudad situada en Panfilia, Asia Menor. Estudió en Alejandría con discípulos de Euclides, durante el reinado de Tolomeo Evergetes (247 a. C -222 a. C.) y se estableció en Pérgamo, bajo el reinado de Eudemo, ciudad en la que redactó la mayor parte de su obra.

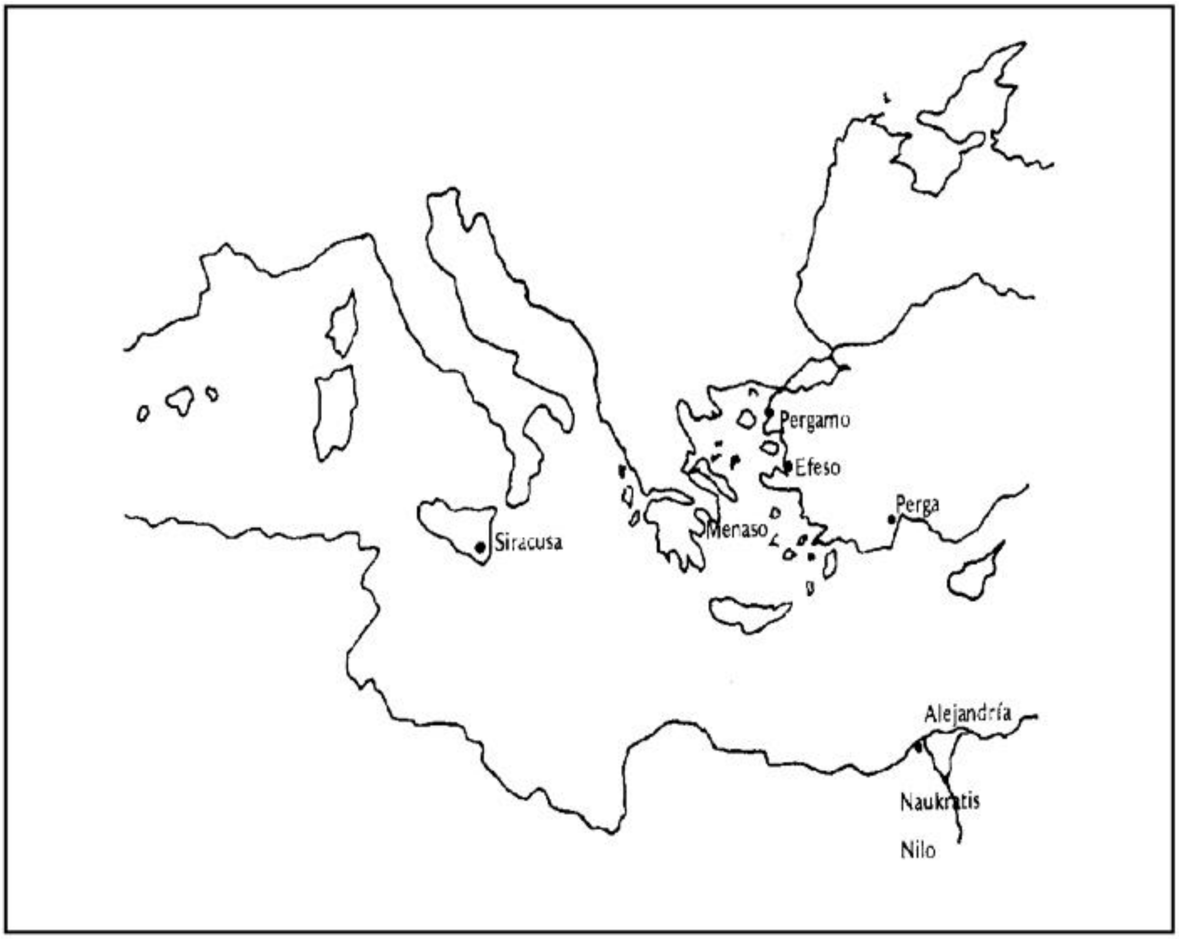


Figura 1. Tomada de Tapia (2002).

La mayor parte de la obra de Apolonio desapareció, a pesar de esto, se conoce parte de su obra debido a los comentarios realizados por Pappus y a la inclusión de seis de sus trabajos en una recopilación de las Matemáticas alejandrinas, llamada *Tesoro del Análisis*. De sus obras se destacan los ocho libros de las cónicas, conocidos como *Las Cónicas*; esta obra fue considerada como el corpus más completo que recopilaba los conocimientos sobre aquellas curvas de toda la antigüedad.

Los ocho libros de *Las Cónicas* de Apolonio se perdieron, así que hemos conocido sus obras de distintas formas. De estos ocho libros solo se conservan los cuatro primeros en griego, del quinto al séptimo existe una traducción al árabe hecha por ThabitibnQurra, y existen varias traducciones al latín de los siete primeros libros, la última hecha por Giacomo Alfonso Borelli en 1661.

Las Cónicas contiene 387 teoremas algunos de ellos conocidos pero la mayoría inéditos. Se dice que la elaboración de esta obra se debe a la petición de Naucrates, quien en Alejandría le hizo esta petición a Apolonio; luego en Pérgamo, Apolonio perfeccionó y pulió el contenido de esa obra. Los ocho libros de *Las Cónicas* se organizan de la siguiente forma: los cuatro primeros libros forman una introducción elemental a las cónicas y el resto de los libros muestran las propiedades de las cónicas.

2.2 LÍNEA DEL TIEMPO PERSONAJES QUE DESARROLLARON LAS PROPORCIONES

Para este trabajo se creó una línea del tiempo sobre los personajes que desarrollaron las proporciones o sus trabajos y aplicaciones se relacionan con estas[2]. Estos personajes anteriores a Apolonio como: Tales de Mileto, Pitágoras de Samos, Los pitagóricos, Hipócrates de Quíos, Arquitas de Tarento, Euclides, Arquímedes de Siracusa y Eratóstenes de Cirene son descritos en este apartado.

En la figura 2, se muestra la primera ficha con el tema: Cánon egipcio de proporciones. Al lado izquierdo de la ficha se presenta una imagen alusiva al tema y al lado derecho una breve descripción de este, en la parte inferior se observa la línea del tiempo en la cual se puede explorar entre las fechas.

[2] Ubicación en la internet de la línea del tiempo de los personajes que desarrollaron las proporciones: http://goo.gl/0Nb5U6.

Figura 2. Cánon Egipcio de proporciones

En la figura 3, se muestran el lugar geográfico de origen de los antiguos matemáticos greco-romanos comprendidos en los siglos 600 A.C.- 400 D.C.

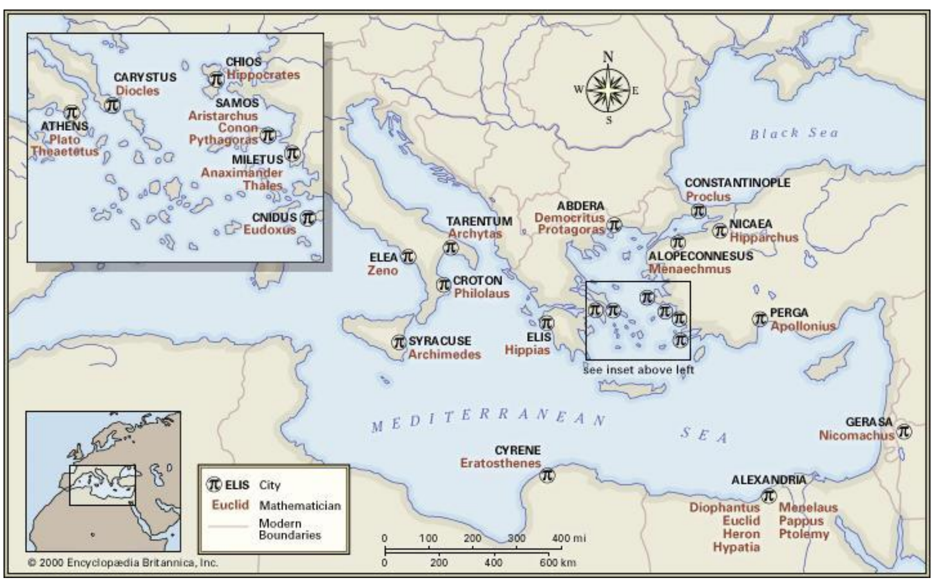


Figura 3. Rome, ancient: Greco-Roman mathematicians, 600 BC - 400 AD, tomado de Encyclopædia Britannica, Inc.

2.2.1 Cánon de proporciones (2800 a.C.)

Para ajustar las figuras a un cánon de proporciones, los egipcios cubrieron algunos relieves con una cuadrícula. Según la interpretación de Lepsius las figuras de Sakkara se cortaban con una línea central o eje vertical y seis líneas horizontales. Pero estos estudios fueron ampliados y actualizados por Inversen quien demostró que el cánon egipcio se basa en la figura humana de pie y que las proporciones de esta se realizan en términos de las medidas de la mano y del brazo. Inversen probó que la medida para el lado de los cuadrados de la cuadricula es el puño, medido desde los nudillos incluyendo el pulgar. De esto se concluye que el módulo de las proporciones de los relieves egipcios es el puño (Anónimo, s.f.).

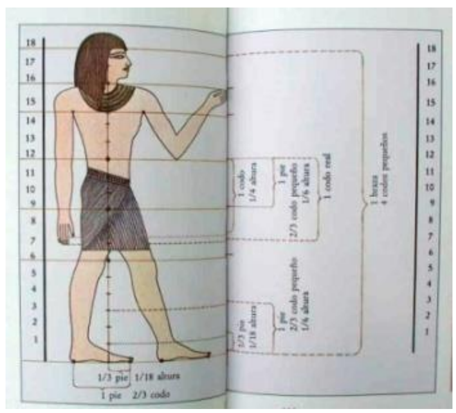


Figura 4. Cánon Egipcio, Tomada de http://goo.gl/iHKdNJ

2.2.2 Tales de Mileto (640 a.C.- 550 a.C.)

Cuando era joven Tales de Mileto viajó a Egipto donde aprendió Geometría y utilizando los conocimientos adquiridos allí elaboró un conjunto de teoremas y razonamientos deductivos sobre la Geometría, de donde se piensa tiene origen el Álgebra. De su obra se destaca: el experimento para determinar la altura de la gran pirámide comparando su sombra con una vara vertical, el teorema de la bisección del círculo con el diámetro y la noción de razones iguales. Tomado de Michot (2009, 19, 03) y Newman (1980).

2.2.3 Pitágoras de Samos (569 a.C. - 475 a.C.)

Este filósofo y matemático griego hizo un aporte a los avances de la Geometría y la Aritmética, derivados particularmente de las relaciones numéricas, aplicadas a teorías como la de pesos y medidos, de la música o a la astronomía. Fue el fundador de la Hermandad Pitagórica, una sociedad predominantemente religiosa (Anónimo, 2014).

Se piensa que Pitágoras aprendió en Babilonia la "proporción perfecta"

$$a:\frac{a+b}{2}=\frac{2ab}{a+b}:b$$

que implica el significado aritmético y armónico de dos números (Newman, 1980).

2.2.4 Los pitagóricos siglo V a. C

Pitágoras de Samos y sus seguidores, los pitagóricos, formaron la Escuela pitagórica que era una secta griega de astrónomos, músicos, matemáticos y filósofos, que consideraban que todas las cosas son, en esencia, números.

Esta escuela descubrió la inconmensurabilidad. El símbolo más representativo de esta escuela es el pentagrama (estrella de cinco puntas), a este símbolo lo denominaban «salud». Tomado de (Anónimo, 2014).

Los pitagóricos demostraron cómo se podía encontrar la media geométrica entre dos magnitudes (Newman, 1980).

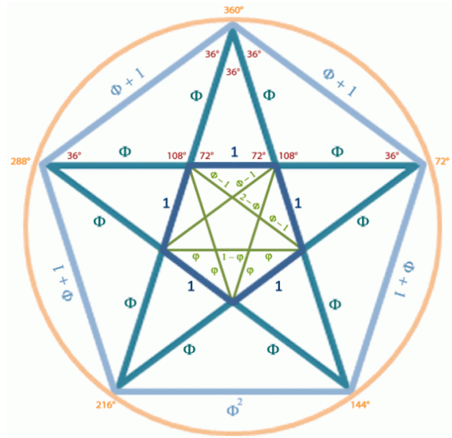


Figura 5. Pentagrama, tomado de http://goo.gl/xcF8YU

2.2.5 Hipócrates de Quíos (470 a.C. – 410 a.C.)

Se dice que este matemático fue el primero en hacer una recopilación de uno de los libros de los *Elementos.* Al tratar de solucionar el problema de la cuadratura del círculo probó la cuadratura de unas clases de lúnulas. También, fue el primero en deducir que el problema de la duplicación del cubo equivale a encontrar dos medias proporcionales en proporción continua entre dos rectas dadas, con b = 2a, es decir

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

Tomado de Collette (1985).

2.2.6 Arquitas de Tarento (430 a.C. – 360 a.C.)

Este personaje llevó la teoría de las proporciones a la armonía musical. Probó que si n y n + 1 son dos números enteros consecutivos, entonces no hay ningún número racional b tales que n: b = b: (n + 1); con esto se pueden definir intervalos de tono en la escala (The Editors of The Encyclopædia Britannica, 2014).

2.2.7 Euclides (365 a.C. –325 a.C.)

Autor de la obra *Elementos* conformada por trece libros. En el libro V de esta obra se estructura el trabajo de Eudoxo sobre proporciones, según Newman (1980) este trabajo se realiza para justificar las propiedades de las figuras semejantes que se tratan en el libro VI. Las siguientes son definiciones de razón y proporción junto con algunas relaciones de las proporciones del libro V de Euclides traducidas por Puertas (1991):

> "Definición 3. Se define como una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas
>
> Definición 4. Se dice que guardan razón entre si las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder a otra.
>
> Definición 5. Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente.
>
> Definición 6. Llámense proporcionales las magnitudes que guardan la misma razón."

2.2.8 Arquímedes de Siracusa (287 a.C. - 212 a.C.)

> Boyer (citado por Cardil, s. f) afirma: "En su trabajo "El Método", Arquímedes escribió sobre su método de descubrimiento. El "método mecánico" de Arquímedes se basa en la ley de la palanca. "En él, Arquímedes muestra el método que presumiblemente usó para obtener mucha de sus conclusiones en problemas sobre áreas y volúmenes. Dándose cuenta de que es muy ventajoso tener una noción preliminar del resultado antes de llevar a cabo la demostración geométrica deductiva, Arquímedes empleó para este propósito, junto con su ley de la palanca, la idea de una

superficie como formada por líneas.". Arquímedes descubrió el área de un segmento parabólico Consideró un segundo triángulo usando una tangente. Este triángulo es 4 veces el primero y el área de este segundo triángulo resulta ser 1/3 el área del segmento parabólico y este segundo triángulo estarán en equilibrio cuando uno de los brazos de la balanza será tres veces más largo:

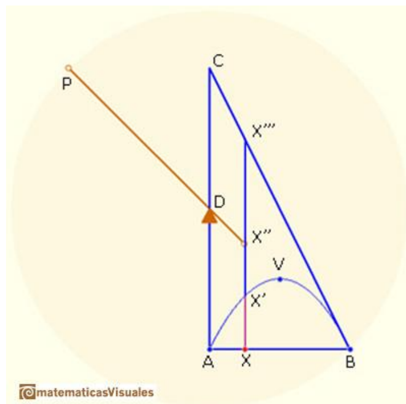


Figura 6. El área de un segmento parabólico, tomado de http://goo.gl/IQUVnk

para cualquier posición de X en la parábola, que es el centro de gravedad de XX''' se tiene la proporción:

$\frac{XX'''}{XX'} = \frac{\mathrm{AB}}{AX} = \frac{BD}{DX''} = \frac{DP}{DX''}$" (Cardil, s. f)

2.2.9 Eratóstenes (Cirene, 276 a. C. –194 a.C.)

Matemático, astrónomo y geógrafo. Creador del procedimiento conocido como la Criba de Eratóstenes, utilizado para obtener de forma fácil todos los números primos menores que un número dado. Referenciado como el primer personaje en medir por primera vez la circunferencia terrestre considerando que si el planeta es una esfera, entonces la línea que une dos lugares cualesquiera es un arco de esta; al medir la longitud de este arco como una proporción de 360 grados (un círculo completo), obtiene una medida a partir de la cual puede calcular la circunferencia total, utilizando la distancia entre Siene y Alejandría, además del hecho de que los rayos provenientes del Sol llegan a la Tierra de forma paralela y las líneas que cortan a las rectas paralelas forman ángulos opuestos iguales. Tomado de Mata (2012, 13, 08) y Arguedas (2004).

$$\frac{360\ grados\ (círculo)}{\theta} = \frac{circunferencia\ de\ la\ tierra}{Distancia\ entre\ Alejandria\ y\ Siene}$$

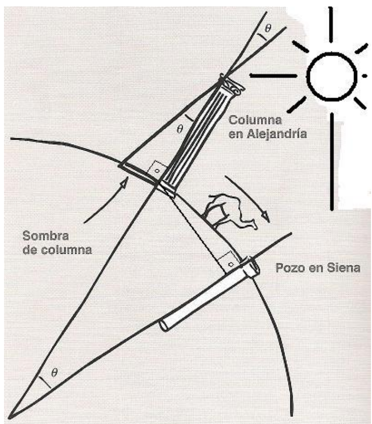


Figura 7. Calculo de la circunferencia de la tierra, tomado de http://goo.gl/fbD3U5

2.3 LÍNEA DEL TIEMPO TRES PROBLEMAS CLÁSICOS

A continuación se presenta una descripción de la línea del tiempo sobre los tres problemas griegos[3]. En esta línea se presentan algunos métodos de los personajes que trataron de solucionar los tres problemas clásicos griegos:

1. La duplicación del cubo o el intento de encontrar la arista de un cubo cuyo volumen sea el doble del de un cubo dado.
2. La trisección de un ángulo dado.
3. La cuadratura del círculo o intento de encontrar un cuadrado cuya área sea igual a la de un círculo dado.

En la figura 8, se muestra una vista general de la línea del tiempo. Esta línea está conformada por imágenes y títulos que al cliquearlos se puede obtener la información del método. También se puede utilizar una barra localizada a la izquierda de la pantalla la cual nos permite ajustar la vista para observar más o menos imágenes en la ventana.

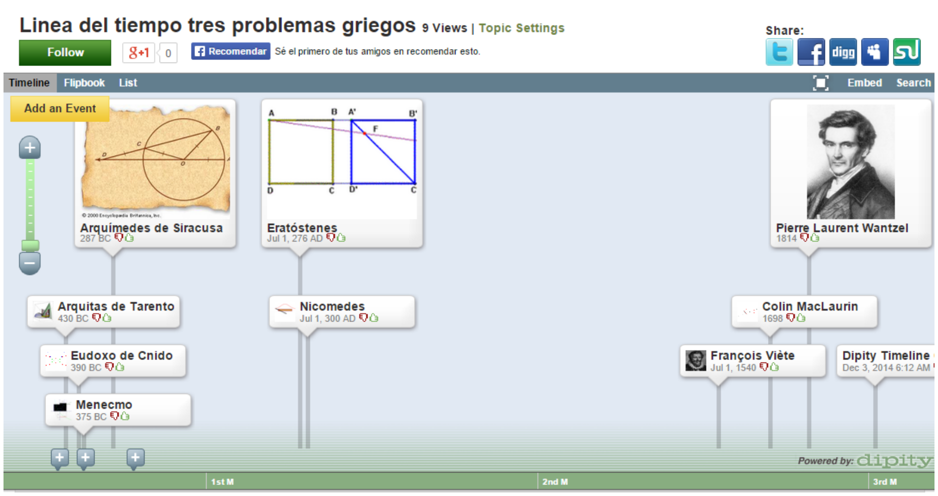


Figura 8. Línea del tiempo sobre los tres problemas clásicos

[3] Ubicación en la internet de la línea del tiempo de los tres problemas clásicos: http://goo.gl/NCEtLX

2.3.1 La cuadratriz de Hipias (500 a. C.)

Hipias de Elis, creó un método para dividir un ángulo en una cantidad de partes deseada. Este método necesita de una curva llamada la cuadratriz de Hipias, la cual se obtiene del rastro que deja un punto que es intersección de dos segmentos de línea en movimiento. Un segmento OC (línea roja) se hace girar a una velocidad constante a través de un ángulo recto AOB alrededor de su vértice O, mientras que el segundo segmento (línea verde) se desliza de manera uniforme a través de una distancia vertical igual a la longitud del primer segmento. Ya que tanto la rotación angular y el desplazamiento vertical son producidos por el movimiento uniforme, cada segmento se mueve a través de la misma fracción de la distancia total en el mismo tiempo. Entonces, encontrar alguna parte (digamos una tercera parte) para un ángulo dado (en este caso ∠COA) es simple: dividir en la misma cantidad de partes el desplazamiento vertical del punto de la cuadratriz en la que los dos segmentos se intersecan (C), localizar el punto (F) en la cuadratriz a esa altura (un tercio de la altura original en este ejemplo), y luego dibujar el nuevo ángulo (∠FOA, indicada en azul), que será la tercera parte del ángulo COA (Heilbron, 2014).

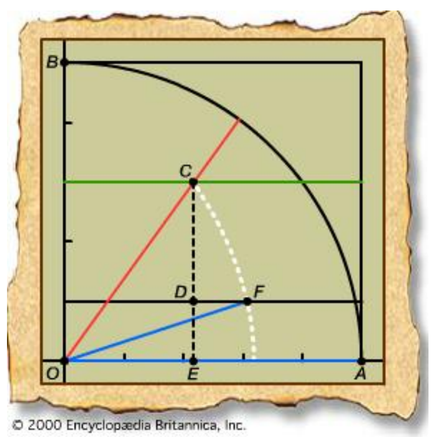


Ilustración 1 Trisección, tomada de Encyclopædia Britannica, Inc.

2.3.2 Hipócrates de Quíos (470 – 410)

En un intento por cuadrar el círculo descubrió que pueden dibujarse dos figuras en forma de luna, de forma tal que la suma de sus áreas es igual a la de un triángulo rectángulo. Este es el primer ejemplo de una solución de cuadraturas, que es denominado el problema de construir un área rectilínea igual a un área limitada por una o más curva. (Newman, 1980). La resolución de la cuadratura de las lúnulas de Hipócrates creó una falsa expectativa entre los matemáticos de la antigüedad, que los llevó a pensar que podría cuadrarse el círculo (Copydays, 2014).

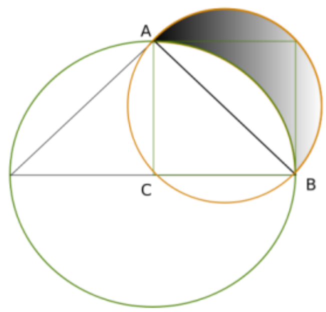


Figura 9. Cuadratura por medio de lúnulas, tomada de http://goo.gl/8xZd3O

2.3.3 Arquitas de Tarento (430 a.C. – 360 a.C.)

Matemático pitagórico, al que se le atribuye haber escrito el primer tratado sistemático de mecánica con base en principios matemáticos. Solucionó el problema de la duplicación del cubo con una construcción espacial, donde interseca tres superficies construidas en el espacio tridimensional (Collette, 1985).

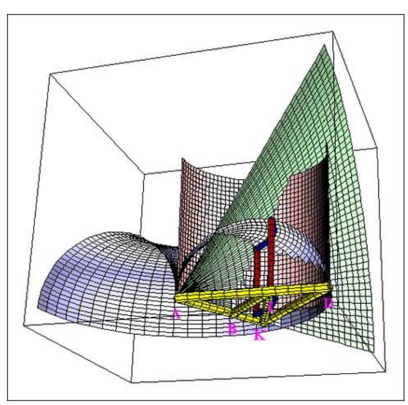


Figura 10. Método de Arquitas para la duplicación del cubo, tomado de http://goo.gl/ITLTMB

2.3.4 Dinóstrato (390 a. C. - 320 a.C)

Este matemático y geómetra griego, hermano de Menecmo. Fue conocido por emplear la cuadratriz para resolver el problema de la cuadratura del círculo. En la resolución de este problema, Dinóstrato emplea la trisectriz de Hippias, que más tarde fue conocida como cuadratriz tras la solución de Dinóstrato. A pesar de resolver el problema de la cuadratura del círculo, esta solución no es aceptada por los griegos de la época debido a que no empleó para ello exclusivamente regla y compás, violando los principios fundamentales de sus matemáticas. Más de dos mil años después se probaría que es imposible resolver el problema de la cuadratura del círculo mediante el uso exclusivo de regla y compás (Addbot, 2013).

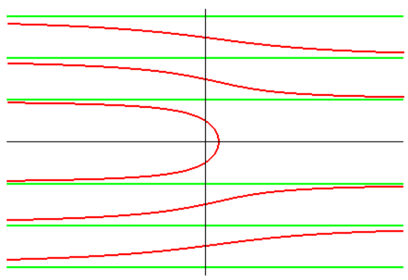


Figura 11. Cuadratriz de Hipias Tomada de http://goo.gl/p4Cn55

2.3.5 Eudoxo de Cnido (390 a.C. – 337 a.C.)

Discípulo de Platón y el primero en describir las constelaciones e inventó el astrolabio. Además de introducir el estudio de la astronomía matemática en Grecia, Eudoxo escribió fórmulas para medir pirámides, conos y cilindros. Resolvió la duplicación del cubo utilizando una curva llamada la kampila de Eudoxo (Anónimo, 1997).

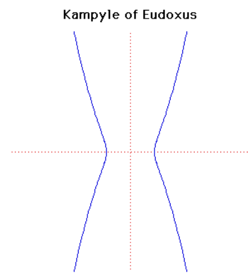


Figura 12. Kampila de Edoxo, tomada de http://goo.gl/9NUZdc

2.3.6 Menecmo (375 a.C. – 325 a.C.)

Nacido en Alopeconnesus (actualmente en Turquía). Dio solución al problema de la duplicación del cubo utilizando la parábola y la hipérbola (Elfix, 2013). Según Heath (1896) la siguiente relación muestra que fue él quien descubrió las secciones cónicas que representa la intersección de una parábola y una hipérbola.

$$\frac{a}{x} = \frac{\mathrm{x}}{y} = \frac{y}{b} con\ a = 2b\ seria\ equivalente\ a\ x^2 = ay, y^2 = bx, xy = ab$$

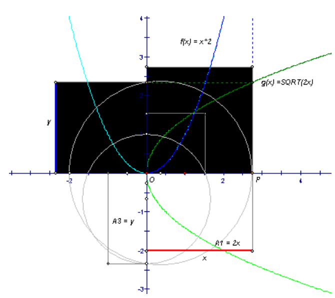


Figura 13. Método de duplicación del cubo por Menecmo, tomada de http://goo.gl/gW5BNY

2.3.7 Diocles (240 a. C. – 180 a. C.)

Matemático y geómetra de la Antigua Grecia. Se cree que Diocles fue el primero en comprobar la propiedad focal de la parábola. Introdujo una curva geométrica llamada Cisoide de Diocles, para resolver el problema de duplicación del cubo. Tomado de (Grillitus, 2013).

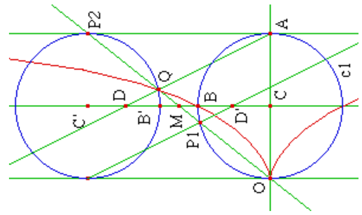


Figura 14. Duplicación del cubo por medio de la Cisoide de Diocles, tomada de http://goo.gl/D4c9dO

2.3.8 Arquímedes de Siracusa (287 a.C. - 212 a.C.)

Sin importar la insistencia de los griegos de la época en utilizar regla y compas de forma exclusiva para la resolución de problemas, Arquímedes hizo uso de neusis (el deslizamiento y las maniobras de una longitud medida o regla marcada) para trisecar un ángulo dado (Heilbron, s. f).

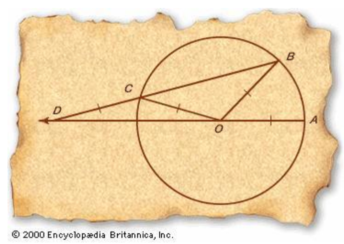


Figura 15. Método de neusis Tomada de Encyclopædia Britannica, Inc

Producto del uso de neusis surge la espiral de Arquímedes, que es definida por Vera (1970) así: "Si permaneciendo fijo uno de los extremos de una recta, esta gira en un plano con velocidad uniforme hasta volver a la posición inicial y un punto, también con velocidad uniforme, recorre al mismo tiempo la recta que gira a partir del extremo fijo, este punto describirá una espiral". Esta espiral puede ser utilizada para trisecar un ángulo y cuadrar un círculo (Vera, 1970).

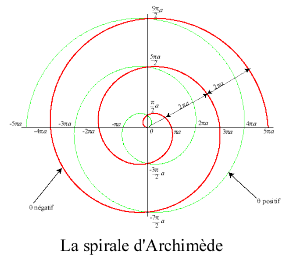


Figura 16, Curva espiral de Arquímedes, tomada de http://goo.gl/wZDBYm

2.3.9 Nicomedes (III a.C.)

Nicomedes dio una construcción que usaba la curva concoide para resolver el problema de trisecar un ángulo. Es reconocido por su tratado "Las líneas de la concoide", y utilizó esta curva para intentar solucionar los problemas clásicos de la trisección del ángulo y la duplicación del cubo. Nicomedes produjo su famosa curva concoide para formalizar el proceso de rotar una regla manteniendo un punto en una línea (Omnipaedista, 2014).

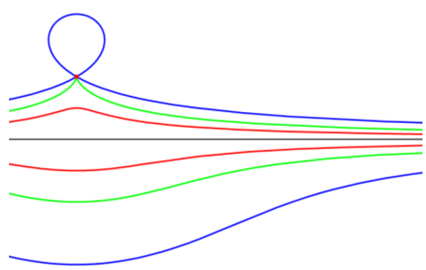


Figura 17. Concoide de Nicomedes, tomado de http://goo.gl/GSRxNC

2.3.10 Eratóstenes (Cirene, 276 a. C. – 194 a. C.)

Para solucionar el problema de la duplicación de un cubo creó un instrumento llamado mesolabium, que permite resolver de manera mecánica el problema al insertar dos medias proporcionales entre dos segmentos designados como DA y C"E.

"Consta de tres regletas rectangulares iguales ABCD, A'B'C'D' y A"B"C"D": la primera se desliza sobre la segunda, y esta sobre la tercera. Un hilo tenso (mediante un peso en un extremo) conecta los puntos A y E e interseca las diagonales A’C’ y A"C" respectivamente en F e G. Las regletas se colocan de modo tal que BC pase por F y B’C’ pase por G. Los segmentos FC y GC’ así obtenidos satisfacen la relación : DA:FC=FC:GC’=GC’:C"E.” (Arguedas, 2004).

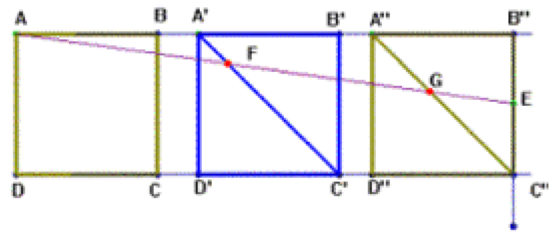


Figura 18. Método del mesolabium para duplicar el cubo, tomada de http://goo.gl/MRcqVG

2.3.11 François Viète (1540 d.C.-1603 d.C)

Matemático francés, considerado uno de los principales precursores del Álgebra, el primero en representar los parámetros de una ecuación mediante letras. Demostró que el famoso problema de trisecar un ángulo dependía, en realidad, de la solución de una ecuación cúbica y redujo el problema de la cuadratura del círculo a evaluar una expresión (Newman, 1980).

2.3.12 Colin MacLaurin (1698 - 1746)

MacLaurin estudió esta curva cuatro años antes de morir, para tratar de solucionar el problema de la trisección del ángulo, por eso es llamada Trisectriz.

Consiguió solucionar el problema de la Trisectriz aunque no de la forma que querían los antiguos griegos, ya que la curva no puede trazarse sólo con regla y compás (González, P. 2004).

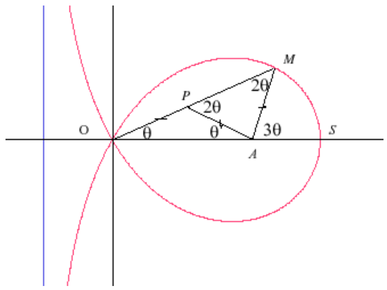


Figura 19. Trisectriz de Maclaurin, tomada de http://goo.gl/zrWiCw

2.3.13 Pierre Laurent Wantzel (1814 - 1848)

Matemático francés, quien demostró que varios problemas geométricos antiguos son imposibles de resolver usando únicamente regla y compás. Wantzel publicó en el año 1837 en una revista de matemáticas francesa la primera prueba completamente rigurosa de la imposibilidad de trisecar un ángulo con la sola ayuda de una regla y un compás. Wantzel demostró igualmente la imposibilidad de resolver la duplicación del cubo y la construcción de un polígono regular cuyo número de lados no es producto de una potencia de dos o distinto a cualquier Número de Fermat (KLBot2, 2013).

Con los anteriores líneas del tiempo, se pretende brindar una idea general del desarrollo de las proporciones hasta la época de Apolonio, lo que nos permite tener un panorama de los conocimientos y herramientas con las que él contaba, las cuales son: las razones iguales, la proporción perfecta, la media geométrica y la solución del problema clásico griegos de duplicación del cubo propuesta por Menecmo por medio de dos medias geométricas, logrando representar la solución por medio de la intersección de una parábola y una hipérbola, también se puede notar el desarrollo del estudio de la teoría de la proporción y sus aplicaciones prácticas al ser utilizadas en la armonía musical e instrumentos de medición. Pero los matemáticos antiguos debían enfrentarse a condiciones para resolver los problemas porque debían ser resueltos utilizando rectas y círculos, únicos instrumentos aceptados en la Geometría de Euclides, a su vez enmarcado con las ideas racionalistas del platonismo las cuales además no concebían la reducción al absurdo y el infinito, según (Newman, 1980) por lo que los griegos consideraron útil adoptar una clasificación especial para sus problemas, denominándolos planos, sólidos y lineales. Los problemas eran planos si su solución solo dependía del uso de líneas, rectas y círculos. Eran sólidos si dependían de secciones cónicas; y eran lineales si dependían además de curvas aún más complicadas, estas curvas eran soluciones con instrumentos y/o dispositivos mecánicos, dando explicación a sus métodos con principios o propiedades físicas como la ley de la palanca y el centro de gravedad como si los objetos matemáticos fueran físicos. El objetivo de la línea del tiempo sobre los tres problemas griegos es de presentar algunas opciones diferentes de solución que aparecieron a través del tiempo como son las curvas generadas por instrumentos o por la intersección de sólidos (geometría sólida) de los cuales dieron origen a las secciones cónicas.

3 INTERPRETACIÓN DE LA TEORÍA DE APOLONIO SOBRE LAS CÓNICAS

En este capítulo se da respuesta a los dos primeros interrogantes establecidos en la descripción del problema de este trabajo, a saber: ¿Cómo define Apolonio, a través de proporciones, la parábola, la elipse y la hipérbola? y ¿qué papel tienen las proporciones en estas definiciones?

Para ello se estudió la primera parte de una traducción al Inglés de la obra de Apolonio, (Heath, 1896) donde se encuentra la interpretación hecha por este historiador y matemático inglés de las definiciones de las cónicas dadas por Apolonio. Se utilizó el programa Cabri 3D como mediador instrumental, debido a que al momento de leer las proposiciones del documento se presentaron varias dudas sobre las condiciones de los elementos presentados que se disiparon al momento de modelar las proposiciones con este programa; asimismo, en algún momento particular del estudio se recurrió a una traducción de *Elementos* (Puertas, 1991), un documento de González, P. M. (s. f). para significar los nombres de algunas secciones cónicas, y para tomar una postura sobre el tipo de definiciones utilizadas por Apolonio nos basamos en Harari (2004) y en Arbeláez, Arce, Guacaneme, & Sánchez, (1999).

Como resultado de tal estudio, además de este documento, se produjo y presentó una ponencia: *Tres, personas distintas un solo Dios verdadero. Tres definiciones distintas un solo objeto matemático*, en el marco de la XXXIV Jornada del Educador Matemático realizada en la Universidad Pedagógica Nacional y el artículo: *¿Monogamia o poligamia entre definiciones y objetos matemáticos?* publicado en la Revista Ejes de la Universidad del Tolima.

Para clasificar las definiciones que se encuentran en Heath (1896) vamos a utilizar, en principio, la clasificación propuesta por Harari (2004) en la cual se plantea que desde la teoría de Aristóteles se pueden identificar dos clases de definiciones: real y nominal. Por definición nominal se entiende la enumeración de las características generales de una cosa o relación y la definición real es aquella que da las condiciones en que un objeto existe.

Basados en lo anterior podemos afirmar que la mayoría de las definiciones dadas por Apolonio son de tipo real, aunque en el momento de tratar las definiciones de parábola, elipse e hipérbola haremos un análisis más detallado sobre la clasificación de estas definiciones.

Las cónicas en las que se centra el estudio de este trabajo de grado son la parábola, la elipse y la hipérbola, debido a que son las únicas secciones cónicas que tienen las proporciones en sus definiciones. Antes de tratar las definiciones de estas cónicas presentaremos el trabajo previo que el autor presenta en Heath (1896) [4], esto con el objetivo de brindar al lector los elementos necesarios para la interpretación adecuada de las definiciones de las cónicas objeto de este estudio. Este trabajo previo se presentará en dos apartados: en el primero se presentan las definiciones de cono y de las primeras secciones cónicas y en el segundo se presentan las proposiciones donde se definen los elementos que se utilizan en las definiciones de la parábola, la elipse y la hipérbola.

3.1 EL CONO Y LAS PRIMERAS SECCIONES CÓNICAS

Las secciones cónicas son producto de cortar el cono con un plano dadas unas condiciones. Para estudiar las definiciones de estas debemos tratar primero la definición de cono y luego hacer con las primeras secciones cónicas, que son diferentes a la parábola, elipse e hipérbola.

3.1.1 El cono

El autor presenta la siguiente forma de construir un cono:

> *Si una línea recta de longitud indefinida, y que pasa siempre a través de un punto fijo, se mueve alrededor de la circunferencia de un círculo que no está en el mismo plano con el punto, de manera que pase sucesivamente a través de cada punto de la circunferencia, al moverse la línea recta trazará la superficie de un cono doble, o dos conos similares situados en direcciones opuestas y*

[4] De ahora en adelante para referirnos a este documento lo llamaremos documento base.

encontrándose en el punto fijo, que es el vértice de cada cono.

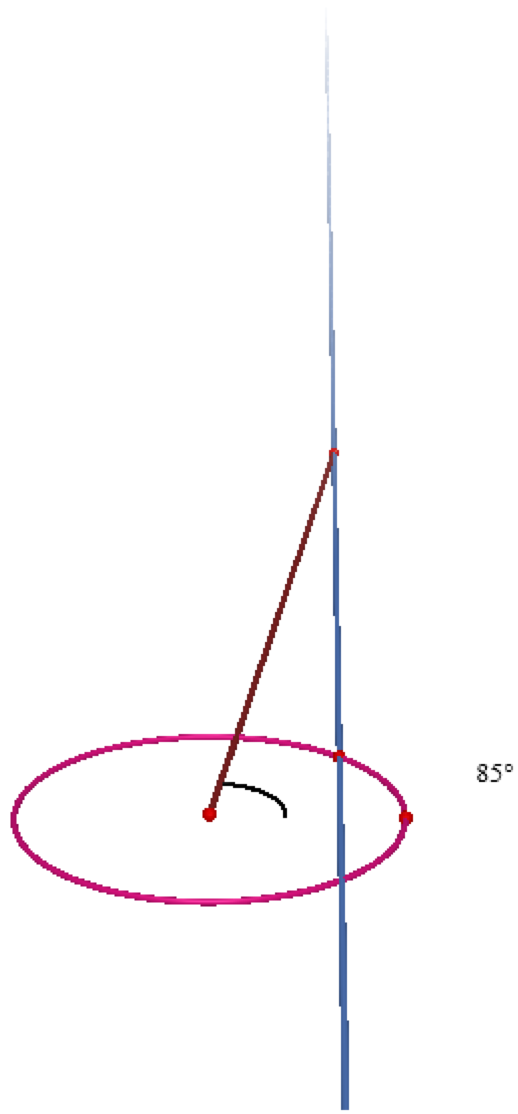


Figura 20. Cono[5]

La primera afirmación que hicimos al terminar de leer los pasos de esta construcción es que Apolonio utiliza la geometría mecánica, debido a que mueve la línea recta alrededor de la circunferencia para construir el cono. Esto lo diferencia de Euclides quien no concebía el

[5] En caso de no poder manipular el applet: dar clic derecho a la imagen, Objeto Cabri3 Active Doc, Manipuler.

movimiento en la geometría; además de no utilizarse el movimiento en esta construcción no sería posible obtener el cono.

La segunda afirmación que quisimos hacer era sobre qué es el cono pero al momento de hacerla surgieron dos interpretaciones distintas de cono. La primera interpretación contempla que el cono es aquel cono doble mencionado en la construcción, porque si para construir el cono se utiliza una recta infinita entonces el cono debe ser el resultado total de la construcción y no una parte de ella. La segunda interpretación considera el cono como parte del resultado de la construcción, es decir, es uno de los conos similares, mencionados en la construcción, que conforman el cono doble. Por el momento no se va a priorizar alguna de las interpretaciones; en el transcurso de este capítulo, de acuerdo con el desarrollo de la teoría, daremos una conclusión de la interpretación de cono que adoptaremos.

Retomando el documento, luego de construir el cono se nombran sus partes que presentamos a continuación en el orden con el que aparecen en el documento base:

Eje: es la semirrecta que tiene por origen el vértice del cono y contiene al centro del círculo base.

Vértice: es el punto que se encuentra fuera del plano que contiene al círculo y por el cual pasa la recta que genera el cono.

Base: es el círculo con el cual se genera el cono.

Y llama al cono construido **escaleno** u **oblicuo** y considera un caso especial llamado **recto** donde el eje es perpendicular a la base.

3.1.2 Sección cónica 1. Triángulo

La primera sección cónica que se construye es el triángulo, que se genera de la siguiente manera:

Si un cono es cortado por un plano que pasa por el vértice, la sección *resultante es un triángulo, dos de sus lados serán líneas rectas que se extiende sobre la superficie del cono y el tercer lado será la línea recta, que es la intersección del plano de corte y el plano de la base.*

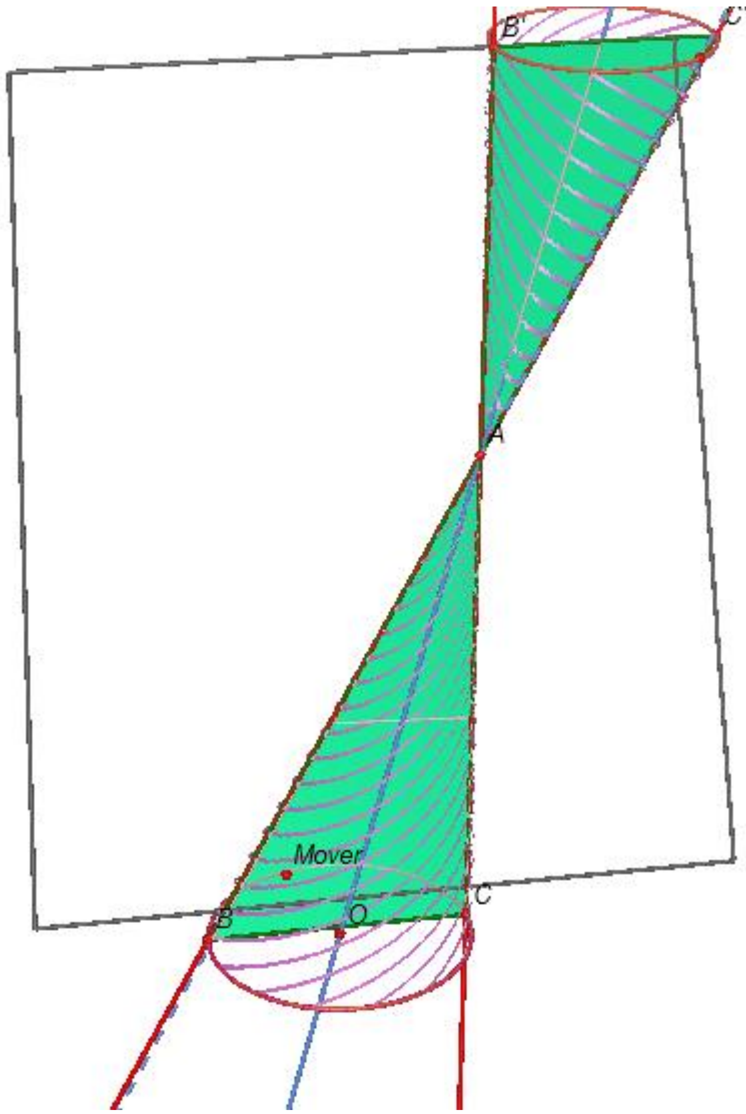


Figura 21. Cono cortado por un plano que pasa por su vértice.

Al estudiar este corte hacemos las siguientes consideraciones:

1. Se puede asegurar que las líneas producto del corte de un plano, que contiene al vértice, con la superficie del cono son líneas rectas, porque estas líneas son la

misma recta que genera al cono en dos momentos distintos del movimiento que hace al recorrer la circunferencia que limita al círculo base. En cuanto a la tercera línea de la base del triángulo, no se da su existencia por la definición del cono, sino por el corte del plano con el círculo base.

2. El producto de este corte no es un triángulo en el caso en el que el plano que corta al cono y el círculo base tienen en común solo un punto o ninguno.
3. Al llegar a esta parte del documento nos sorprende encontrar el triángulo como primera sección cónica, ya que antes de comenzar este trabajo considerábamos que solo existían cuatro secciones cónicas: círculo, elipse, parábola e hipérbola.

3.1.3 Sección cónica 2. Círculo

La segunda sección cónica que se encuentra es el círculo, en el documento base se presenta de la siguiente forma.

> *Proposición I.4*
>
> *Sea un cono cuyo vértice es A y cuya base es el círculo C, y sea O el centro del círculo, de modo que AO es el eje del cono. Supongamos ahora que el cono se corta por cualquier plano paralelo al plano de la base BC, como DE, y dejar que el eje AO se encuentre con el plano DE en o. Sea p cualquier punto de la intersección del plano de DE y la superficie del cono. Unir Ap, que se encuentra con la circunferencia del círculo BC en P. Unir OP y op.*

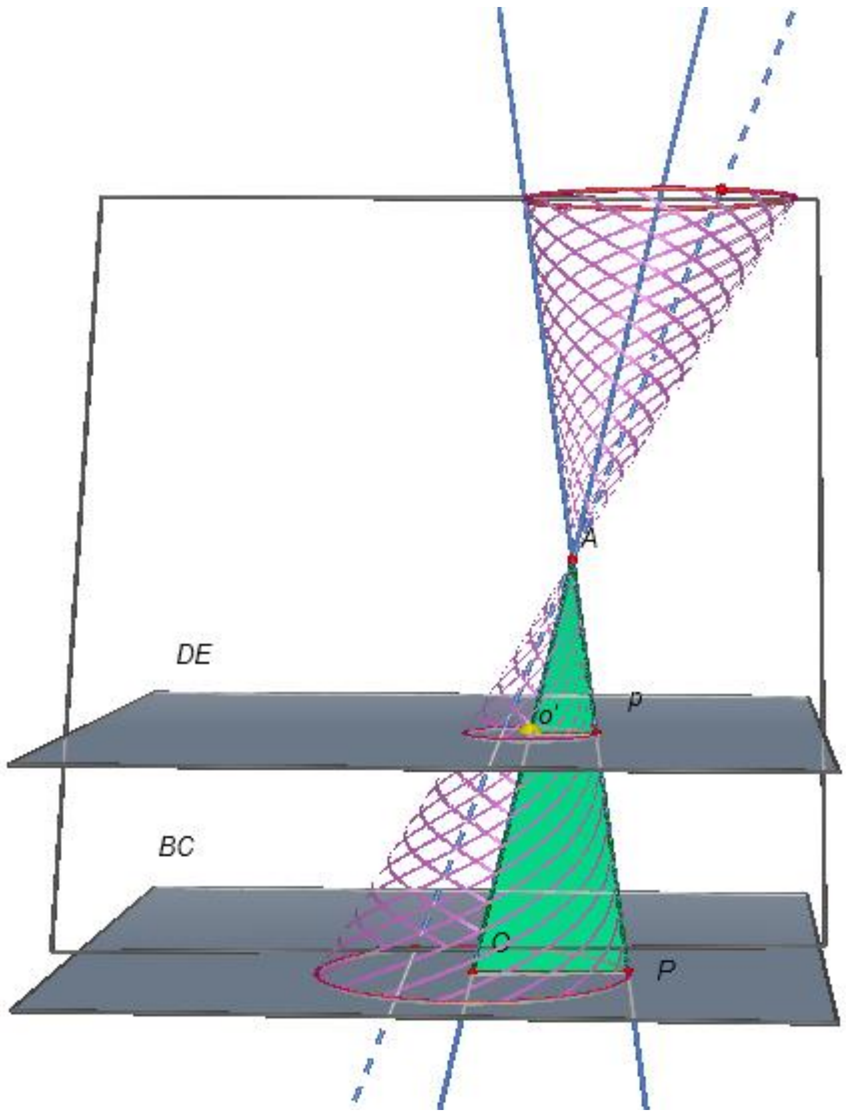


Figura 22. Sección Círculo

Entonces, puesto que el plano que pasa a través de las líneas rectas AO, AP corta los dos planos paralelos BC, DE en las líneas rectas OP y op respectivamente, OP y op son paralelas.

$$\therefore op : OP = Ao : AO$$

Y como BPC es un círculo, OP permanece constante para todas las posiciones de P en la curva de DPE, y la relación Ao: AO también es constante.

Por lo tanto, op es constante para todos los puntos de la sección de la superficie por el plano DE. En otras palabras, dicha sección es un círculo.

De ahí que, todas las secciones del cono que son paralelas a la base circular son círculos.

Para esta sección cónica Apolonio además de obtenerla hace una demostración para asegurar que la sección es un círculo. En esta demostración aparecen por primera vez las proporciones las cuales se utilizan para asegurar que todas las posibles secciones resultantes cumplen con la definición de círculo, de centro y radio constante. Lo particular de esta demostración es que, al unir uno de los puntos de la circunferencia del círculo base con uno de los puntos de la sección y el centro de la base con el vértice del cono, se busca describir el comportamiento de los puntos de la sección resultante, a través del comportamiento de los puntos del círculo base que para este caso es la equidistancia, es decir, se busca "dibujar" la sección resultante a partir del círculo base.

3.1.4 Sección cónica 3. Subcontraria

La tercera sección es la subcontraria, la cual se construye de la siguiente manera teniendo en cuenta el cono y el triángulo ABC que es el resultado de cortar el cono con un plano que contiene al eje del cono.

Proposición I.5

El cono se corta por un plano que pasa a través del eje y es perpendicular al plano de la base BC, y la sección resultante es el triángulo ABC. Sea el plano HK dibujado en ángulo recto al plano del triángulo ABC y obtener de esta intersección el triángulo AHK, tal que AHK es similar al triángulo ABC, pero se encuentra en el sentido contrario, es decir, de tal manera que el ángulo AKH es igual al ángulo ABC. La sección del cono que resulta del corte por el plano de HK se llama sección subcontraria.

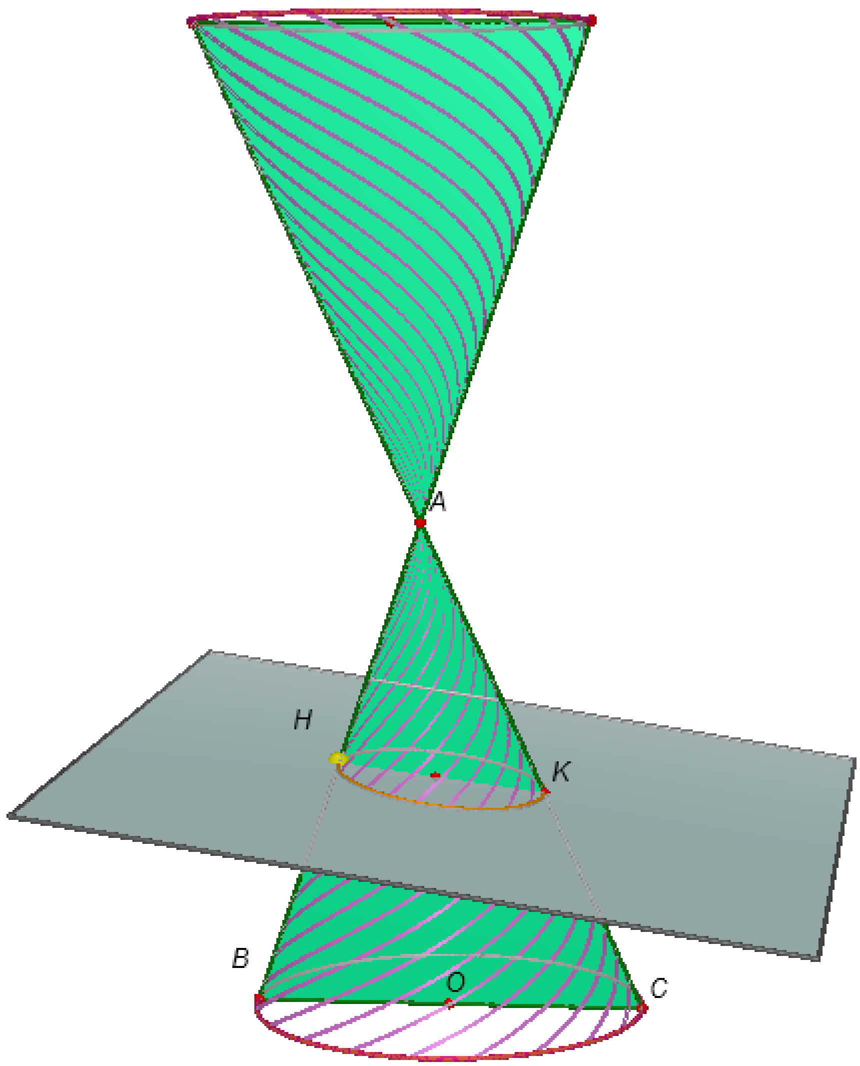


Figura 23. Sección subcontraria

Después de construir esta sección Apolonio demuestra que la subcontraria es un círculo. Para demostrar esto Apolonio utiliza una característica propia de los círculos y halla esta característica en la subcontraria. La demostración que hace Apolonio es la siguiente:

> *Sea P cualquier punto de la intersección del plano de HK con la superficie, y F cualquier punto de la circunferencia del círculo BC. Dibuje PM, FL cada una perpendicular al plano del triángulo ABC, y se intersecan con las líneas rectas HK, BC, respectivamente, en M, L. Entonces PM, FL son paralelas.*

Dibujar a través de M la línea recta DE paralela a BC, y se deduce que el plano a través de DME, PM es paralelo a la base BC del cono.

Así, la sección de DPE es un círculo, y

$$DM.ME = PM^2$$

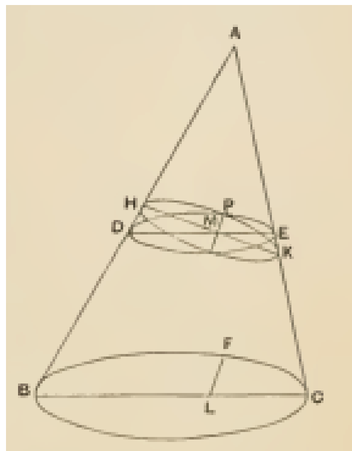


Imagen 1. Ilustración mostrada en el documento base[6].

Pero, como el segmento DE es paralelo a BC, el ángulo ADE es igual al ángulo ABC que por hipótesis es igual al ángulo AKH.

Por lo tanto, en los triángulos HDM, EKM los ángulos HDM, EKM son iguales, como también lo son los ángulos verticales en M.

Por tanto, el HDM triángulos, EKM son similares. De ahí

$$HM\!:\!MD = EM\!:\!MK$$

$$\therefore HM.MK = DM.ME = PM^2$$

Y P es cualquier punto en la intersección del plano de HK con la superficie. Por lo tanto, la sección realizada por el plano de HK es un círculo.

[6] Esta imagen fue tomada de Heat (1896), p. 3.

Así, hay dos series de secciones circulares de una oblicua cono, una serie de ser paralela a la base, y el otro que consiste de las secciones subcontrarias a la primera serie.

La característica del círculo que utiliza para la demostración es la media proporcional entre dos segmentos, con esta proporción

$$DM.ME = PM^2$$

Esta es una característica que ya era conocida en el tiempo de Apolonio y esto lo deja entre ver Euclides en la proposición 13 del libro VI de *Los Elementos* (Puertas, 1994):

"13. Construir la media proporcional entre dos rectas dadas.

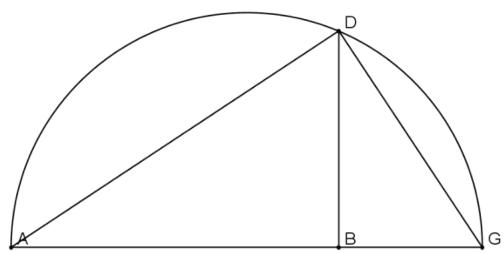


Figura 157.

Si AB y BG son las rectas dadas (Fig. 157), colóquense una a continuación de la otra sobre una recta y descríbase el semicírculo ADG; trácese la BD perpendicular a AG en B; únase el punto D con los A y G, y entonces el triángulo rectángulo ADG es BD media proporcional entre los segmentos AB y BG de la base, l.q.q.h."(Puertas, 1994, p. 814)

Hasta este momento se puede advertir que Apolonio nos ha mostrado cuatro definiciones diferentes de círculo: la primera definición de círculo a partir de un centro y radio constante; la segunda como corte de un cono con un plano paralelo al plano de la base; la tercera como una superficie que satisface la proporción $DM.ME = PM^2$ y la cuarta el círculo como sección subcontraria. Además de mostrar cuatro definiciones diferentes de círculo también presenta dos definiciones diferentes de triángulo: la primera una figura plana de tres lados y la segunda como el corte de un cono con un plano que contiene al vértice. Sobre estas definiciones encontradas se realizaron algunas reflexiones que se ampliarán en el Anexo 3.

Hasta ahora hemos tratado y explicado las condiciones para construir las primeras secciones cónicas, a continuación se explicarán los elementos utilizados por Apolonio para definir las secciones cónicas por medio de las definiciones de tipo nominal.

3.2 ELEMENTOS NECESARIOS PARA DEFINIR PARÁBOLA, HIPÉRBOLA Y ELIPSE

A continuación se muestran unas proposiciones que el autor presenta antes de tratar las secciones cónicas en cuestión. Estas proposiciones contienen elementos que ayudan al lector a comprender mejor las definiciones de las cónicas faltantes.

3.2.1 Triángulo axial:

Cabe destacar que la siguiente definición no es dada por Apolonio, esta se deduce de lo leído en el documento base.

Triángulo axial: es el triángulo que resulta del corte del cono con un plano que contiene al eje.

Las siguientes figuras representan el triángulo axial en un cono doble y un cono sencillo.

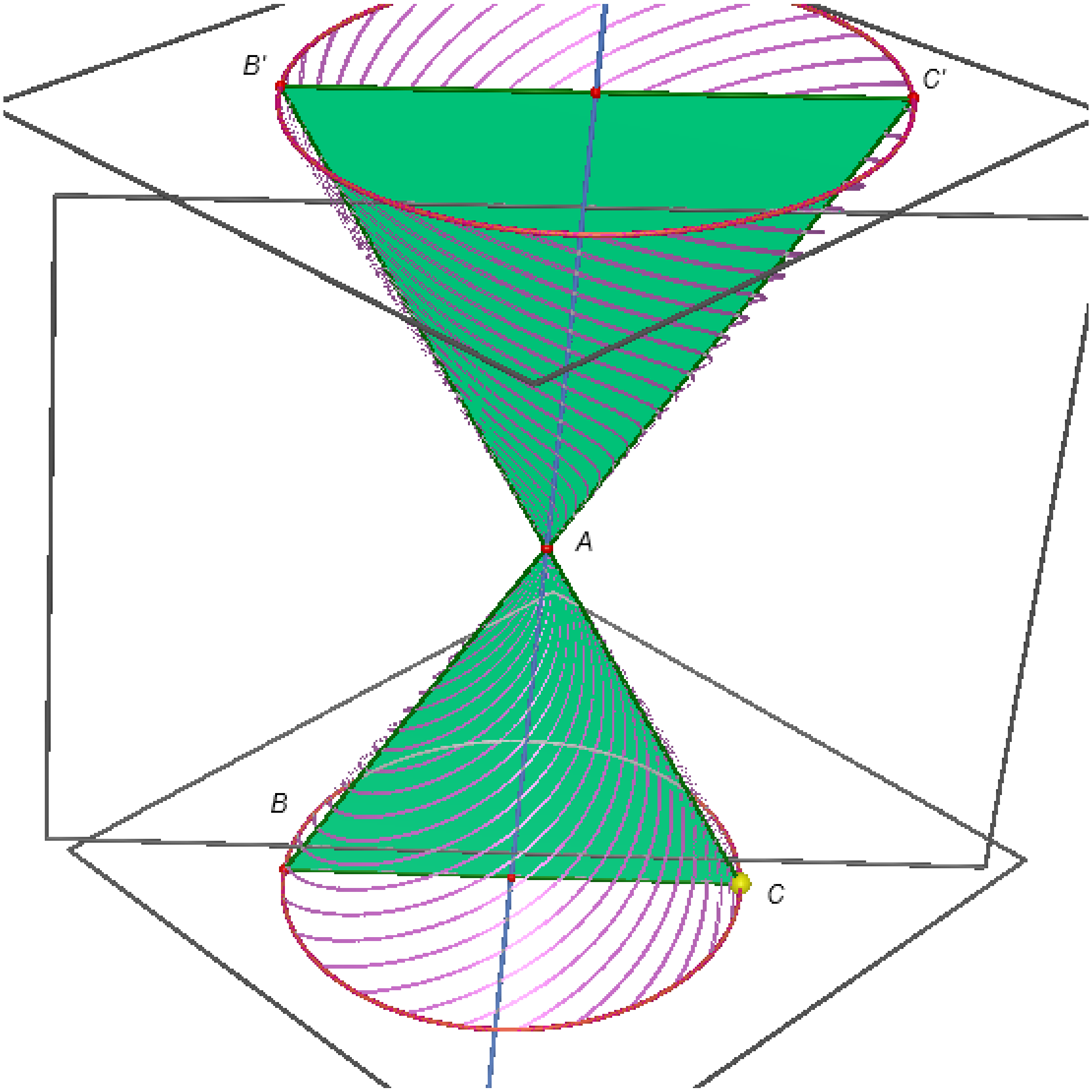


Figura 24. Triangulo axial, cono doble.

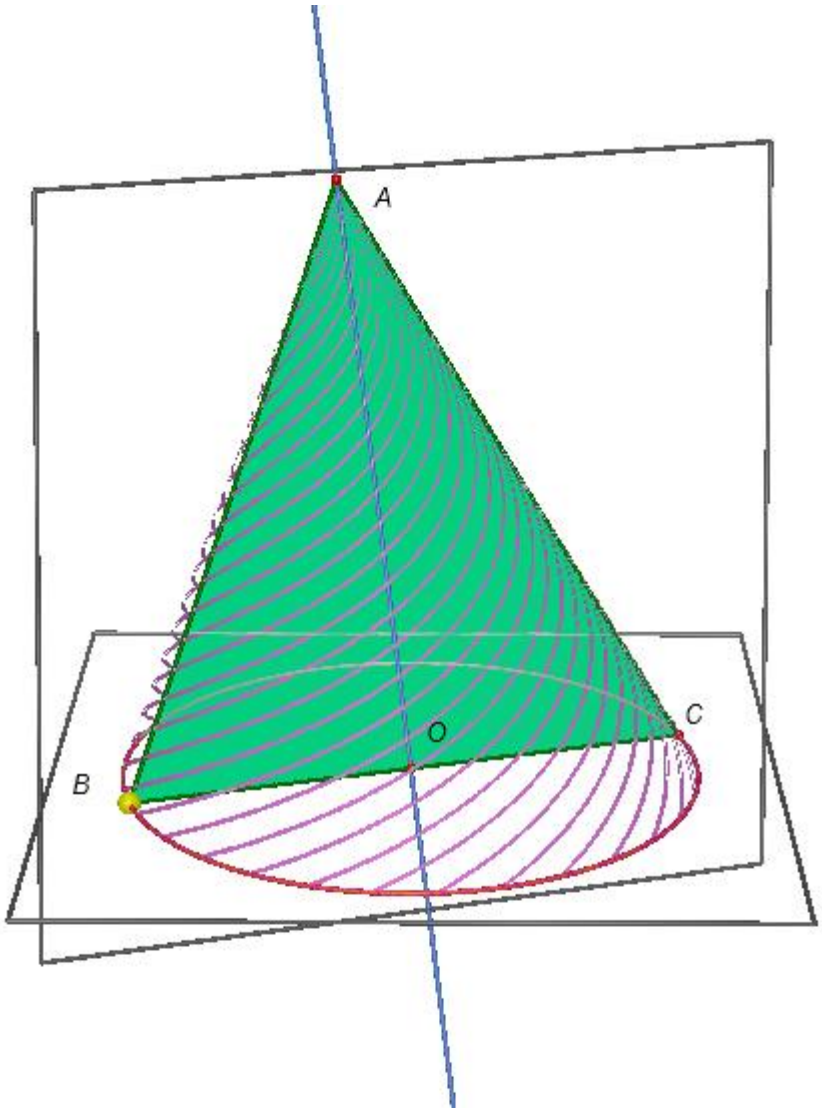


Figura 25. Triangulo axial, Cono sencillo.

3.2.2 Diámetro de una sección cónica

Apolonio presenta las proposiciones I.6 e I.7 que caracterizan al diámetro de una sección el cuál es definido en el último párrafo de la proposición I.7.

Proposición I.6

Sea el triángulo axial ABC y el segmento BC un diámetro de la base circular del cono. Sea H cualquier punto de la circunferencia de la base, traza el *segmento HK perpendicular al diámetro de BC, y trazar una paralela a HK a través de cualquier punto Q en la superficie del cono, pero no situada en el plano del triángulo axial.*

Además, trazar la recta AQ que se interseca con la circunferencia de la base en F, y dejar que FLF' sea la cuerda que es perpendicular a BC. Trazar la recta AV que se interseca con la circunferencia de la base en L y trazar la recta AQ' que se interseca con la circunferencia de la base en F'. Entonces la recta QV es paralela a HK y también es paralela a la recta que contiene a FLF', las rectas AF y AF', ya que yacen en el cono.

Entonces se obtiene

$$QV\!:\!VQ' = FL\!:\!LF' \, y \; FL = LF'$$

$$\therefore QV = VQ'$$

Por lo que, se concluye que el segmento QQ' es bisecado por el plano del triángulo axial.

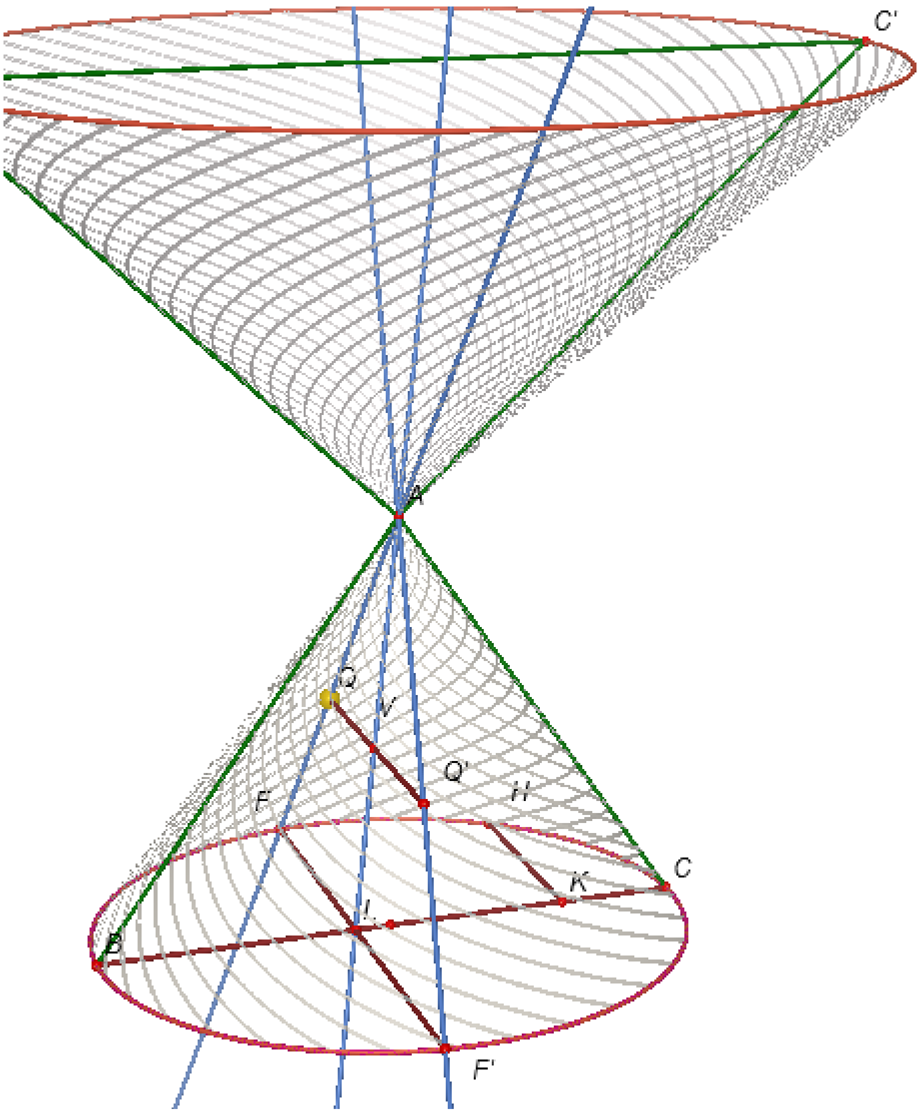


Figura 26. Proposición I.6

Se destaca que Apolonio en sus demostraciones busca comparar elementos de las secciones con los elementos del círculo base para poder caracterizar las secciones cónicas.

Proposición I.7

Nuevamente, sea el cono que se corta con un plano que no contiene el vértice pero intersecta el plano de la base en la recta que contiene a los puntos DME y es perpendicular a BC, la sección resultante es DPE con la base del cono y el triángulo axial, el punto P tendido en cualquiera de los lados AB, AC del triángulo axial. El plano de la sección corta el plano del triángulo axial en la recta PM al unirse a P por el punto medio del segmento DE.

Ahora sea Q cualquier punto de la curva de la sección, y a través de Q se traza una línea recta paralela al DE.

Entonces esta es paralela, y la recta se interseca con la superficie en Q', entonces PM biseca cual cuerda de la sección las cuales son paralelas al segmento DE.

Ahora una línea recta biseca cada una de las series de cuerdas paralelas de una sección de un cono se denomina diámetro.

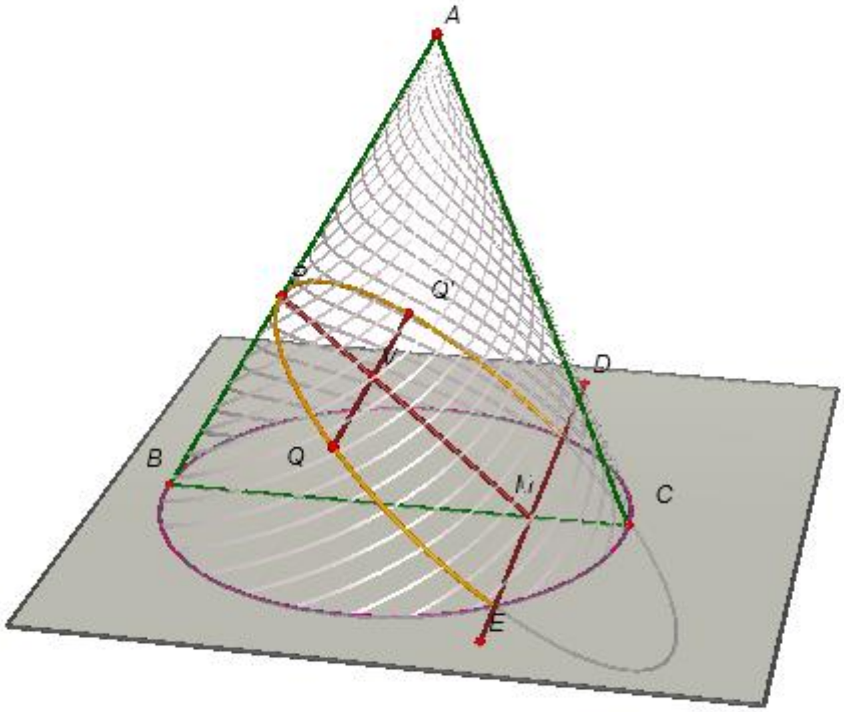


Figura 27. Diámetro de la sección

> *Por lo tanto, si un cono se cortó por un plano que intersecta a la base circular en línea recta perpendicular a la base de cualquier triángulo axial, la intersección del plano de corte y el plano del triángulo axial será un* ***diámetro*** *de la sección resultante del cono.*

En el análisis de este elemento se presentó una situación muy curiosa: debido a que nos concentramos en la imagen que ilustraba la construcción del diámetro llegamos a pensar que no todas las secciones cónicas tendrían diámetro ya que inconscientemente pensamos que solo a un diámetro de la base se le podría trazar rectas perpendiculares y por esto no todas secciones cónicas tendrían diámetro; pero al dejar de lado la imagen y analizar el texto nos percatamos de que el diámetro que muestran las ilustraciones no es el único diámetro que tiene un círculo, que los diámetros del círculo son infinitos y que a cualquier diámetro se le puede trazar una perpendicular.

3.2.3 Sección cónica infinita y finita

A continuación se presentan las proposiciones las cuales establecen cuando una sección cónica es infinita o finita.

> *Proposición I.8.*
>
> *Sea PM el diámetro la sección que está en una dirección tal que su intersección con AC se produce hasta el infinito, es decir, PM es paralelo a AC, o hace con PB un ángulo menor que el ángulo BAC y por lo tanto su intersección con CA producido más allá del vértice del cono, la sección hecha por el dicho plano se extiende hasta el infinito.*

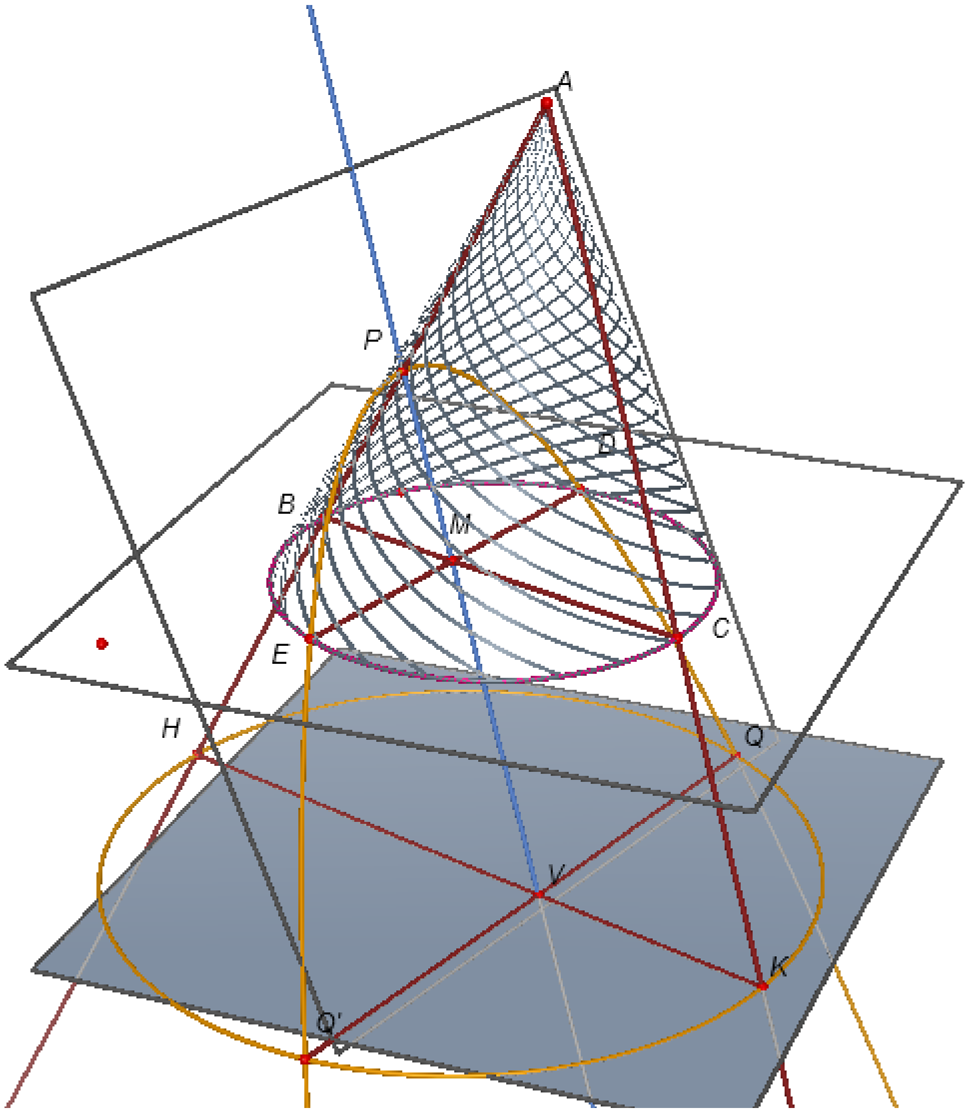


Figura 28. Proposición I.8.

Sea cualquier punto V de PM producido y dibujar a través de él una recta HK paralela a BC y una recta QQ' paralela a DE, entonces el plano que contiene HK y QQ' es paralelo al de la base. Por lo tanto la sección HQKQ' es un círculo. Además D, E, Q, Q 'son todos los puntos sobre la superficie del cono y también están en el plano del corte. Por lo tanto la sección de DPE se extiende al círculo HQK, y de igual manera a la sección circular a través de cualquier punto de PM producido, y por lo tanto a cualquier distancia de P.

Proposición I.9.

Si por el contrario se reúne PM con AC, la sección no se extiende hasta el infinito. En ese caso, la sección será un círculo si su plano es paralelo a la base o subcontraria. Pero, si la sección no es ni paralela a la base ni subcontraria, esta no será círculo.

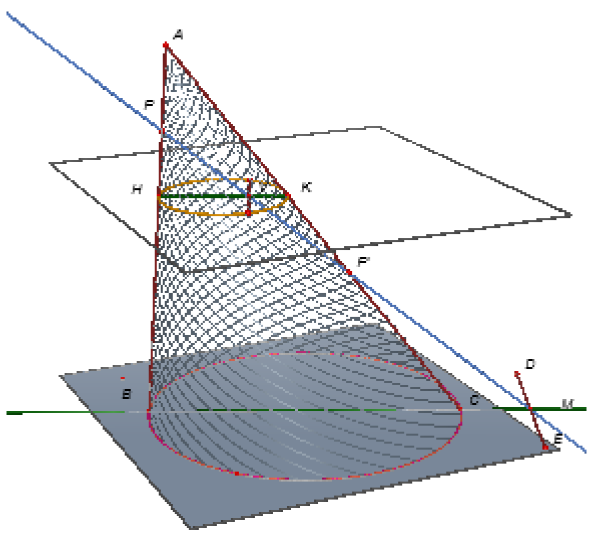


Figura 29. Proposición I.9.

3.2.4 Ordenada correcta y abscisa

Ahora el autor presenta otros elementos importantes para la definición de las siguientes secciones cónicas.

Supongamos que, como de costumbre, el plano de sección corta la base circular en una línea recta y DME y que ABC es el triángulo axial cuya base BC es el diámetro de la base del cono que biseca DME en ángulo recto en el punto M. Entonces, si el plano de la sección y el plano del triángulo axial intersecar en la línea recta PM, PM es un diámetro de la sección bisectriz de *todas las cuerdas de la sección, como QQ', y que se dibujan paralelas al DE.*

Si el segmento QQ' es bisecado en V, se dice que QV es una ordenada, o una ***ordenada correcta*** *trazada en línea recta, al diámetro PM, y la longitud PV cortada del diámetro por cualquier QV será llamada la* ***abscisa*** *de QV.*

Consideramos que la ordenada correcta y la abscisa son una aproximación a las coordenadas que se utilizan en la Geometría analítica; porque se utiliza una longitud, medida en este caso desde el diámetro, para caracterizar un objeto. Personalmente nos sorprende que Apolonio utilice esta aproximación de las coordenadas para definir las cónicas porque pensábamos que las coordenadas en la Geometría se utilizaban solamente en la Geometría analítica.

En los apartados 3.1 y 3.2 se brinda la información necesaria para interpretar de forma adecuada las definiciones de parábola, hipérbola y elipse. Ahora, se tratarán las proposiciones donde se definen las cónicas nombradas.

3.3 SECCIÓN CÓNICA 4. PARÁBOLA

En la proposición I. 11 del documento base se construye una sección cónica que luego es llamada parábola y se presenta la demostración de la característica propia, de esta sección, por medio de la definición de un parámetro PL llamado lado recto.

Proposición I.11

En primer lugar se deja que el diámetro PM de la sección sea paralela a uno de los lados del triángulo axial como AC, y se deja QV sea cualquier ordenada del diámetro PM. Entonces, si una línea recta PL (se supone que se dibuja perpendicular a PM en el plano de la sección) deben tomarse de una longitud tal que $PL\!:PA = BC^2\!:BA \cdot AC$*, esto debe probar que*

$$QV^2 = PL \cdot PV$$

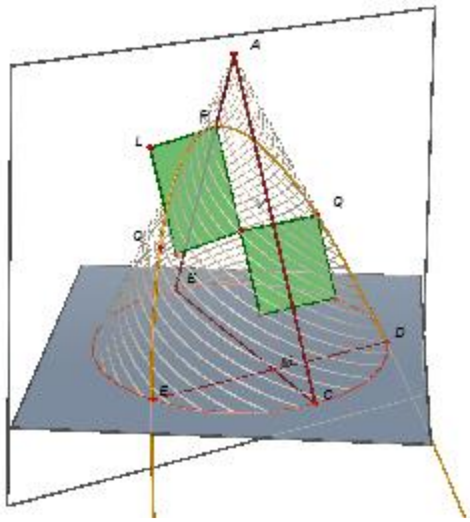


Figura 30. Sección parábola. Proposición I.11

Deje que HK sea dibujada a través de V paralela a BC. Entonces, como QV es también paralela a DE, se sigue que el plano a través de H, Q, K es paralelo a la base del cono y por lo tanto produce una sección circular cuyo diámetro es HK. También QV está en ángulo recto con HK.

$$\therefore HV \cdot VK = QV^2$$

Ahora, por triángulos semejantes y paralelos,

$$HV : PV = BC : AC$$

$$VK \cdot PV = BC : BA$$

y

$$\therefore HV \cdot VK = PV : PA = BC^2 : BA \cdot AC$$

Así

$$QV^2 : PV \cdot PA = PL : PA$$

$$= PL \cdot PV : PV \cdot PA$$

$$\therefore QV^2 = PL \cdot PV$$

De esto se sigue que, el cuadrado en cualquier eje de ordenadas fijo al diámetro PM fijo, es igual a un rectángulo aplicado a la línea recta fija PL, dibujado en ángulo recto a PM con la altitud igual a la correspondiente abscisa PV. Por lo tanto, la sección es llamada una parábola.

La línea recta fija PL es llamada ***lado recto (lactus rectum)*** *o* ***el parámetro de las ordenadas.***

Este parámetro, corresponde al diámetro PM, más adelante se denotará con el símbolo p.

Entonces

$$QV^2 = p \cdot PV$$

o

$$QV^2 \propto PV$$

En el documento base no se encuentra escrito de manera explícita una definición de parábola, pero se puede identificar la definición de parábola a partir de la proposición I. 11. Escribimos una definición de parábola donde se explicita qué característica debe cumplir el segmento PL, para el caso de la parábola, pero consideramos que la definición resulta muy densa de esta forma, por eso decidimos que la mejor forma es redactar una definición de parábola sin explicitar la característica que debe cumplir PL y luego definir PL.

Entonces la siguiente es la definición de parábola:

Parábola es una sección cónica tal que el diámetro PM de la sección es paralelo a uno de los lados del triángulo axial, diferente a la base del triángulo, y el lado recto de la parábola PL es proporcional a la ordenada QV como la ordenada QV es proporcional a la abscisa PV, escrito de otra forma

$$QV^2 = PL \cdot PV$$

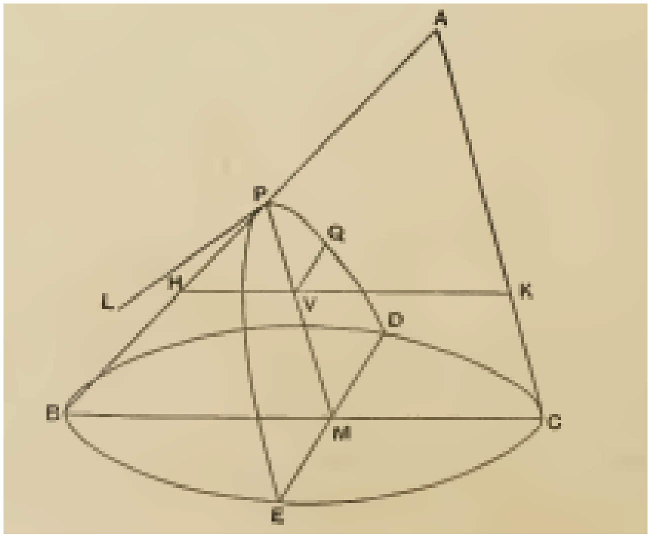


Imagen 2. Ilustración mostrada en el documento base.

Y la definición del segmento PL o lado recto de la parábola es:

El segmento fijo PL o lado recto de la parábola es un segmento perpendicular al diámetro PM, en el mismo plano de la parábola, tal que su longitud es a la longitud del punto P al vértice del cono A como el cuadrado en la base del triángulo axial es al rectángulo aplicado al segundo lado del triángulo axial y con altura igual al tercer lado del triángulo axial, esto se puede expresar así $PL:PA = BC^2:BA \cdot AC$.

En esta definición podemos ver la proporción $QV^2 = PL \cdot PV$ de dos formas: la primera como una proporción entre segmentos donde la ordenada es a la abscisa como el lado recto es a la ordenada, la segunda como una proporción entre áreas donde el área del cuadrado construido sobre la ordenada y el rectángulo aplicado a la abscisa con el parámetro son iguales.

Aunque Apolonio (luego de mostrar cómo se obtiene la igualdad de áreas) dedica un párrafo para destacar la igualdad entre las áreas y llamar a la sección parábola no consideramos esto como una definición, porque hacen falta características importantes de la sección que se deben tener en cuenta para la definición, sino como una explicación de la razón por la cual la llama parábola, que según González, P. M. (s. f) en el lenguaje pitagórico de la solución de ecuaciones cuadráticas, significa equiparación.

Al tratar esta proposición en busca de una definición de parábola dudamos acerca de cómo se determinaría la definición de parábola, porque en esta proposición se presenta la construcción de la sección y una característica de las áreas que cumple dicha sección, lo que nos llevó a reflexionar sobre cuáles son las características que debe tener una definición; para resolver esta duda consultamos a Arbeláez et al. (1999) donde se encuentran diferentes tipos de definiciones, de donde encontramos un tipo de definiciones que se ajusta con las características de la definición de parábola:

> "**Definiciones de la forma T es un U tal que c1, c2, ... , cn**.
>
> En este tipo de definiciones T es un término, U es un conjunto universal y c1, c2, ... , cn. son condiciones matemáticas que se aplican al conjunto U. Miremos algunos ejemplos:
>
> • Ángulo recto es un ángulo cuya medida es 90º
> •Cuadrilátero es una figura plana de cuatro lados.
> • Paralelogramo es un cuadrilátero en el cual ambos pares de lados opuestos son paralelos.
> • Trapecio es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos.
> • Rombo es un paralelogramo cuyos lados son todos congruentes entre sí."
> (Arbeláez, Arce, Guacaneme & Sánchez, 1999, p. 111).

En los ejemplos mostrados anteriormente identificamos la forma T es un U tal que c1, c2,... cn, así como en los siguientes:

- Ángulo recto es un ángulo cuya medida es 90º
  T: ángulo recto
  U: ángulo
  c1: medida es 90º

- Paralelogramo es un cuadrilátero en el cual ambos pares de lados opuestos son paralelos.
  T: paralelogramo
  U: cuadrilátero
  c1: ambos pares de lados opuestos son paralelos.

Este tipo de definición describe las características de la parábola, porque T es el término parábola, U es el conjunto universal compuesto por las secciones cónicas y la condición del corte y la igualdad de las áreas son las condiciones que se aplican al conjunto U.

3.4 SECCIÓN CÓNICA 5. HIPÉRBOLA

En la proposición I. 12 del documento base se construye una sección cónica que luego es llamada hipérbola y se presenta la demostración de la característica propia de esta sección, por medio de la definición de un parámetro PL llamado lado recto. Luego en la proposición I.14 se construye una sección cónica que es llamada brazos opuestos; pero esta no es una cónica nueva es un caso especial de la hipérbola: es una hipérbola doble, ya que al construirse se obtienen dos curvas que son dos hipérbolas congruentes.

Comenzaremos por la hipérbola, que se construye en la proposición I.12.

Proposición I.12

A continuación se deja que PM no sea paralela a AC pero deja que se encuentre con CA producido más allá del vértice del cono en P'. Se dibuja PL en ángulo recto con PM en el plano de la sección de longitud tal que la longitud es de $PL: PP' = BF \cdot FC: AF^2$*, donde AF es una línea recta a través de A paralela a PM y se encuentra con BC en F. Entonces, si VR es dibujada paralela a PL y se produce hasta encontrar VR en R, esto se puede demostrar que*

$$QV^2 = PV \cdot VR$$

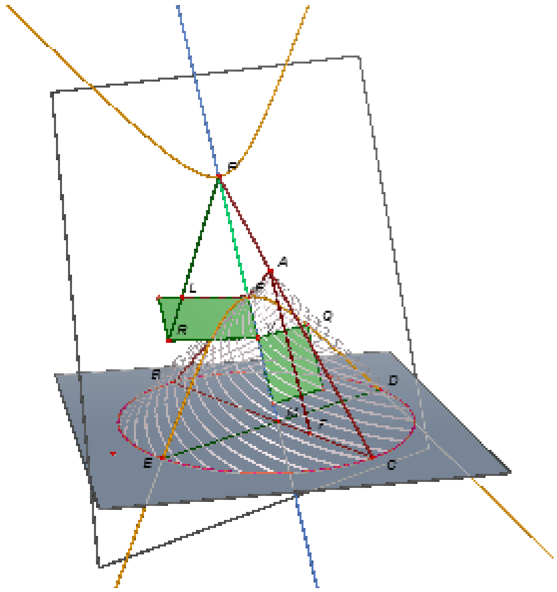


Figura 31. Sección Hipérbola. Proposición I.12

Al igual que antes, HK se dibuja a través de V paralelo a BC, por lo que

$$QV^2 = HV \cdot VK$$

entonces , por triángulos semejantes,

$$HV\colon PV = BF\colon AF$$

$$VK\colon P'V = FC\colon AF$$

$$\therefore HV \cdot VK\colon PV \cdot P'V = BF \cdot FC\colon AF^2$$

$$QV^2\colon PV \cdot P'V = PL\colon PP'$$

$$= VR\colon P'V$$

$$= PV \cdot VR\colon PV \cdot P'V$$

$$\therefore QV^2 = PV \cdot VR$$

De esto se sigue que el cuadrado de ordenada es igual a un rectángulo cuya altura es igual a la abscisa y la base donde se encuentra a lo largo de la línea *recta fija PL pero solapada por una longitud igual a la diferencia entre VR y PL. Así la sección es llamada hipérbola.*

PL es llamado el ***latusrectum*** *o el* ***parámetro de las ordenadas*** *como antes, y PP' es llamado* ***transversa****. La expresión más completa* ***diámetro transversal*** *también se utiliza; y, aún más comúnmente, Apolonio habla del diámetro y junto a el parámetro correspondiente, llamando a este último el* ***lactus rectum*** *(es decir, el lado recto), y el primero el* ***lado transversal*** *de la figura* ***en****, o aplicado a, el diámetro, es decir, del rectángulo comprendido por PL, PP' como se dibujó.*

El parámetro PL en el futuro se denota por p.

[Cor. Esta se desprende de la proporción

$$QV^2 : PV \cdot P'V = PL : PP'$$

que, para cualquier diámetro fijo PP'

$QV^2 : PV \cdot P'V$ *es una razón constante, ó* QV^2 *varía como* $PV \cdot P'V$*]*

Al igual que en el caso de parábola, en el documento base no se encuentra una forma explícita de definición, por lo que, vamos a redactar una definición de hipérbola sin especificar el parámetro del segmento PL o lado recto y la definición del parámetro.

La definición de hipérbola es:

Hipérbola es una sección cónica tal que su diámetro PM no sea paralelo a alguno de los lados del triángulo axial y la intersección del diámetro con uno de los lados, diferente a la base del triángulo, se produce más allá del vértice. Además la abscisa PV debe ser proporcional a la ordenada QV como la ordenada QV es proporcional a la línea recta fija PL, pero solapada por una longitud igual a la diferencia entre VR y PL, donde VR es dibujada paralela a PL por el punto V y se interseca con P'L en R . Escrito de otra forma

$$QV^2 = PV \cdot VR$$

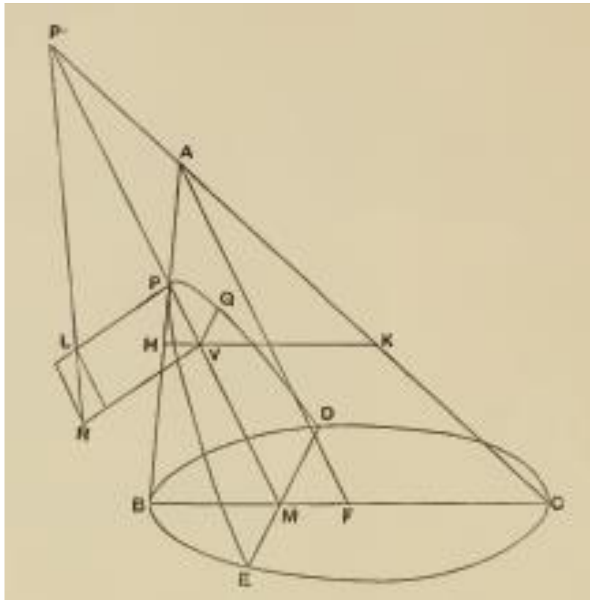


Imagen 3. Ilustración mostrada en el documento base.

La definición del segmento fijo PL o lado recto de la hipérbola es:

El segmento fijo PL o lado recto de una hipérbola es el segmento formando un ángulo recto con PM, tal que su longitud es a la longitud del diámetro transversal como el rectángulo aplicado a los segmentos BF y FC es al cuadrado construido sobre el segmento AF, donde AF es un segmento paralelo al diámetro de la sección, a través de A y se encuentra con la base del triángulo axial BC en F. Esto se puede expresar así $PL:PP' = BF \cdot FC:AF^2$

Apolonio iguala el área del cuadrado construido sobre la ordenada con el área del rectángulo aplicado a la abscisa; la diferencia entre la hipérbola y la parábola es que el segmento, con el que se construye este rectángulo, no es el parámetro de las ordenadas sino un segmento **mayor**. Por esto, Apolonio la llamó hipérbola que significa exceso en el lenguaje pitagórico de la solución de ecuaciones cuadráticas González, P. M. (s. f).

En cuanto al tipo de definición, al igual que la parábola, consideramos que es del tipo de definiciones de la forma T es un U tal que c1, c2, ... , cn, ya que tenemos un término (hipérbola), un conjunto universal (secciones cónicas) y dos condiciones para ese conjunto universal (corte y relación entre áreas).

Ahora que hemos tratado la sección cónica hipérbola, vamos a ver como se define la sección cónica brazos opuestos.

> *Proposición I.14*
>
> *Si un plano corta ambas partes de un cono doble y no pasa a través del ápice, las secciones de las dos partes del cono ambas serán hipérbolas que tendrán el mismo diámetro y recta de igual lateral correspondiente a la misma. Y tales secciones se llaman brazos opuestos.*
>
> *Sea BC el círculo sobre el que gira la línea recta generatriz del cono, y sea B'C' sea cualquier sección paralela que corte a la mitad opuesta del cono. Dejar que un plano seccione las dos mitades del cono, intersecándo la base BC en la línea recta DE y el plano B'C' en D'E'. Entonces D'E' debe estar paralelo a DE.*
>
> *Sea BC el diámetro de la base la cual biseca DE en ángulos rectos, y permitir que pase un plano a través de BC y el vértice A cortando a el círculo B'C' en B'C', por lo tanto será, un diámetro de ese círculo y cortará D'E' a ángulos rectos, ya que B'C' es paralela a BC y D'E' a DE.*
>
> *Dibujar FAF' a través de A paralelo a MM', la línea recta que une los puntos medios de DE, D'E' y encontrándose en CA, B'A, respectivamente, en P, P'.*

Dibujar perpendiculares PL, P'L' a MM' en el plano de la sección y de una longitud que

$$PL: PP' = BF \cdot FC: AF^2$$

$$P'L': P'P = B'F' \cdot F'C': AF^2$$

Desde ahora MP, es el diámetro de la sección DPE, cuando se produce al encontrarse BA más allá del vértice, la sección DPE es una hipérbola.

Asimismo, puesto que D'E' es bisecada en ángulos rectos por la base del triángulo axial AB'C' y M'P en el plano del triángulo axial se encuentra C'A producido más allá del vértice A, la sección D'P'E' es también una hipérbola.

Y las dos hipérbolas tienen el mismo diámetro MPP'M'.

Queda por demostrar que $PL = P'L' = F'C$.

Se tienen por triángulos semejantes

$$BF: AF = B'F': AF'$$

$$FC: AF = B'F': AF'$$

$$\therefore BF \cdot FC: AF^2 = B'F' \cdot F'C': AF^2$$

Así

$$\therefore PL = P'L'$$

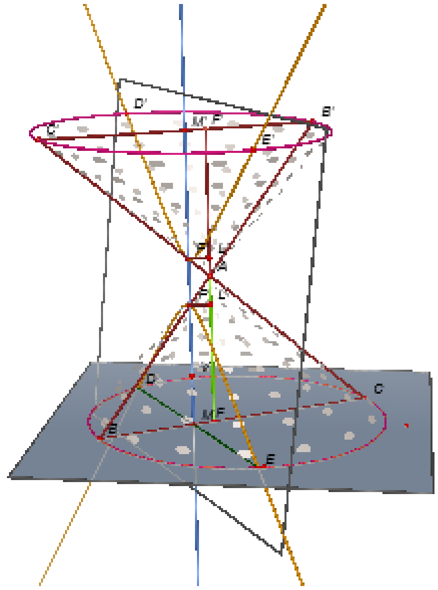


Figura 32. Sección Hipérbola, brazos opuestos.

Al observar que en este corte se nombra el cono doble y se obtienen dos hipérbolas de diámetros iguales, deducimos que el cono es considerado como uno de los conos similares obtenidos de su construcción y no es el producto total de ella. Debido a que la hipérbola se obtiene de cortar un cono, entonces si se obtienen dos hipérbolas eso indica que provienen de dos conos, además el término cono doble utilizado en esta proposición nos sugiere que el cono es la mitad de este cono doble.

3.5 SECCIÓN CÓNICA 6. ELIPSE

En la proposición I. 13 del documento base se construye una sección cónica que luego es llamada elipse y se presenta la demostración de la característica propia, de esta sección, por medio de la definición de un parámetro PL llamado lado recto.

Proposición I.13

Si PM se encuentra con AC en P' y BC en M, se dibuja AF paralela a PM encontrándose en F, y se dibuja PL en ángulo recto a PM en el plano de la sección y de una longitud tal que $PL\!:\!PP' = BF \cdot FC\!:\!AF^2$*. Juntando P'L y se dibuja VR paralelo a PL encontrándose P'L en R. Esto demostró que*

$$QV^2 : PV \cdot VR$$

Entonces, por triángulos semejantes

$$HV : PV = BF : AF$$

$$HK : P'V = FC : AF$$

$$\therefore HV \cdot VK : PV \cdot P'V = BF \cdot FC : AF^2$$

Así,

$$= VR : P'V$$

$$= PV \cdot VR : PV \cdot P'V$$

$$QV^2 = PV \cdot VR$$

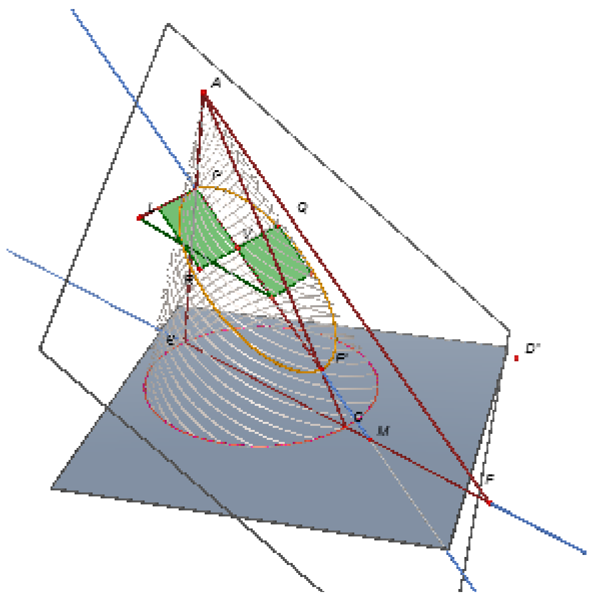


Figura 33. Sección Elipse. Proposición I.13.

De esta forma, el cuadrado en la ordenada es igual a un rectángulo cuya altura es igual a la abscisa y la base se encuentra a lo largo de la línea recta fija PL, pero no llega a él por una longitud igual a la diferencia entre VR y PL. La sección es llamada una elipse.

Como antes, PL se llama el lado recto, o el parámetro de las ordenadas a PP', y PP' es llamado la transversal (con o sin la adición del diámetro o lado de la figura, como se explica en la última proposición).

PL en adelante se denotará por p.

[COR. esto sigue de la proporción

$$QV^2 = PV \cdot PV' = PL{:}\,PP'$$

Que, para cualquier PP' diámetro fijo,

$QV^2 = PV \cdot PV'$ *es una razón constante o* QV^2 *varia como* $PV \cdot PV'$*]*

Del mismo modo en el que definimos parábola e hipérbola definiremos elipse, ya que son secciones cónicas que se presentan de forma similar en el documento base, debido a que se obtienen por un corte y al definir un parámetro se obtiene una característica propia de la sección.

La definición de elipse es la siguiente:

Elipse es una sección cónica tal que su diámetro PM no es paralelo a alguno de los lados del triángulo axial y la intersección del diámetro con uno de los lados del triángulo axial, diferente a la base del triángulo, se produce antes del vértice del cono. Además la abscisa es proporcional a la ordenada como la ordenada es proporcional a la línea recta fija PL pero disminuida por una longitud igual a la diferencia entre VR y PL, donde VR es dibujada paralela a PL por el punto V y se interseca con P'L en R. Escrito de otra forma

$$QV^2 = PV \cdot VR$$

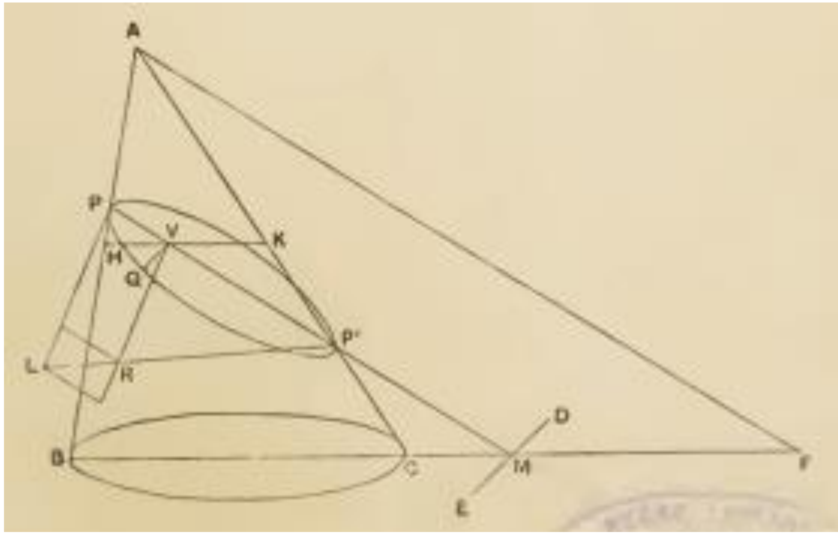


Imagen 4. Ilustración mostrada en el documento base.

La definición del segmento PL o lado recto es:

|El segmento fijo PL o lado recto de una elipse es el segmento dibujado en ángulo recto a PM, tal que su longitud es a la longitud del diámetro transversal como el rectángulo aplicado a los segmentos BF y FC es al cuadrado construido sobre el segmento AF, donde AF es un segmento paralelo al diámetro de la sección a través de A y se encuentra con la base del triángulo axial BC en F. Esto se puede expresar así $PL\colon PP' = BF \cdot FC\colon AF^2$

Apolonio iguala el área del cuadrado construido sobre la ordenada con el área del rectángulo aplicado a la abscisa, la diferencia es que para la elipse, el segmento con el que se construye este rectángulo es de longitud **menor** que la del parámetro de las ordenadas. Por esto, Apolonio la llamó elipse que significa deficiencia en el lenguaje pitagórico de la solución de ecuaciones cuadráticas González, P. M. (s. f).

En cuanto al tipo de definición, al igual que la parábola y la hipérbola, consideramos que es del tipo de definiciones de la forma T es un U tal que c1, c2, ... , cn, ya que tenemos un término (elipse), un conjunto universal (secciones cónicas) y dos condiciones para ese conjunto universal (corte y relación entre áreas).

Desde el apartado 3.1 hasta el apartado 3.5 respondimos la pregunta: ¿Cómo define Apolonio, a través de proporciones, la parábola, la elipse y la hipérbola?, ahora en el siguiente apartado responderemos la pregunta: ¿qué papel tienen las proporciones en estas definiciones?

3.6 EL PAPEL DE LAS PROPORCIONES EN LAS DEFINICIONES DE APOLONIO

Al estudiar el documento de Heath (1896) identificamos tres papeles que cumplen las proporciones en las definiciones y proposiciones de las secciones cónicas de Apolonio: las proporciones como herramienta para demostrar, como herramienta para caracterizar y como lenguaje para comunicar.

3.6.1 Las proporciones como herramienta para demostrar

Concluimos que las proporciones cumplen este papel ya que el autor demuestra o garantiza propiedades de los objetos utilizando las proporciones entre segmentos; por ejemplo en la proposición I.4 (Pág. 32), donde se demuestra que al cortar un cono con un plano paralelo a la base se obtiene un círculo, se traza el segmento op que pertenece a la sección resultante paralelo a un radio de la base OP y por el teorema de Thales obtiene la siguiente proporción

$$\mathrm{op}:\mathrm{OP}=\mathrm{Ao}:\mathrm{AO}.$$

Luego al utilizar esta proporción y el hecho de que la base es un círculo, demuestra que la distancia de los puntos de la sección resultante a un punto fijo es constante, lo que constituye la definición de círculo y por eso afirma que la sección resultante es un círculo.

Esta proposición es un ejemplo de cómo Apolonio demuestra características geométricas presentes en los objetos utilizando proporciones.

3.6.2 Las proporciones como herramienta para caracterizar

Las proporciones también se utilizan en este documento para describir características propias de los objetos. Unas veces estas características se utilizan dentro de una demostración para mostrar que una sección cónica cumple con una definición de un objeto matemático, como es el caso de la proposición I.5, y en otras ocasiones se utilizan para definir una sección cónica, como en la definición de parábola que se concluye de la proposición I.11.

En la proposición I.5 (Pág. 34) se construye la sección cónica subcontraria y luego se presenta una demostración donde se prueba que esta sección es un círculo. Apolonio lo hace hallando en la subcontraria una característica propia de los círculos: la media proporcional.[7]

En la proposición I.11 (Pág. 44) se construye la sección cónica parábola y luego se establece una característica propia de esta sección utilizando un parámetro llamado PL o lado recto. Las proporciones, en este caso y en los casos de las proposiciones I.12 e I.13, son utilizadas tanto para definir el parámetro como establecer la característica que define a la sección.

3.6.3 Las proporciones como lenguaje para comunicar

En el capítulo "*The cone*" del documento base todas las características y relaciones entre los segmentos y entre las áreas están expresadas por medio de proporciones. Un ejemplo es la característica que se utiliza para demostrar que la subcontraria es un círculo (Pág. 35), esta característica es expresada así $DM.ME = PM^2$ que es igual que expresarla de esta forma $DM:PM = PM:ME$, otro ejemplo es la condición que debe cumplir el parámetro PL o lado recto que es $PL:PA = BC^2:BA \cdot AC$ donde se expresa una proporción entre segmentos y áreas.

---

[7] El análisis de cómo la media proporcional caracteriza el círculo se encuentra en la página 35 de este documento.

Es de comprender que se utilicen las proporciones como lenguaje en este capítulo ya que para demostrar y caracterizar utilizan relaciones entre los objetos cuya forma de expresarse son las proporciones, relaciones tales como la semejanza entre triángulo, el paralelismo y el teorema de Thales.

4 IMPLICACIONES DEL ESTUDIO DE LAS DEFINICIONES DE LAS CÓNICAS DE APOLONIO PARA EL CONOCIMIENTO DEL DOCENTE DE MATEMÁTICAS

En este capítulo pretendemos dar respuesta a la pregunta: ¿qué ventajas se obtienen del estudio de las definiciones de las cónicas de Apolonio para el conocimiento del docente de Matemáticas?

Todo estudio tiene una utilidad y este estudio no es la excepción. Expondremos la relación con el estudio de las proporciones en las definiciones de Apolonio para el conocimiento del docente de Matemáticas en seis categorías: visiones de la actividad matemática, visiones de los objetos matemáticos, competencias docentes, transformación en la manera de enseñar matemáticas, recursos o materiales para la enseñanza y fortalecimiento de la valoración y el papel de la profesión docente. Estas categorías fueron tomadas de Guacaneme (Junio, 2011).

Según Guacaneme (Junio, 2011) el estudio de la Historia de las Matemáticas ofrece a los docentes de Matemáticas artefactos que favorecen el conocimiento del docente de matemáticas o que pueden ser usados en el ejercicio docente. Estos artefactos son:

1. Visiones de la actividad matemática. Aquí se considera que así como hay variedad de tendencias y perspectivas en el estudio de las Matemáticas existe variedad de creencias y visiones de la actividad matemática, por eso una perspectiva histórica de las matemáticas logra transformar la visión de la actividad matemática que se obtiene al estudiar únicamente las teorías de las Matemáticas, ya que se considera la

actividad matemática y no solo sus resultados. Esta perspectiva histórica amplía la visión de las Matemáticas del docente de Matemáticas.

2. Visiones de los objetos matemáticos. Estudiar la historia de los objetos matemáticos permite ampliar la visión de estos al reconocer: su evolución a lo largo del tiempo, cambios en su naturaleza y significado, movimientos en su lugar y estatus en las Matemáticas (e incluso en otras disciplinas), aspectos ocultos o no siempre expresables en las teorías matemáticas, la diversidad de ámbitos y contextos de su surgimiento, su incorporación a la solución de los problemas a través de diferentes heurísticas, entre otros aspectos.
3. Competencias profesionales. El estudio de la Historia de las Matemáticas desarrolla en el docente actitudes y aptitudes para la docencia. Estas se pueden organizar en tres grupos: el primero conformado por leer, escribir, escuchar, buscar fuentes, discutir, analizar y hablar sobre las Matemáticas, el segundo lo conforman sensibilidad, tolerancia y respeto hacia maneras no convencionales de expresar ideas o resolver problemas y el tercero es valoración de la persistencia y el ánimo ante la adversidad.

Las próximas tres categorías, más que artefactos, son consideradas instrumentos:

4. Transformación en la manera de enseñar. El estudio de la Historia de las Matemáticas por parte del docente influye en la manera en que este las enseña, cambiando su forma de abordarlas y de promover el pensamiento de sus estudiantes.
5. Recursos o materiales para la enseñanza. Estudiar la Historia de las Matemáticas proporciona al docente de Matemáticas una fuente de problemas, situaciones, anécdotas, tratamientos entre otros para que pueda acudir a ella y usar estos recursos para la enseñanza.
6. Fortalecimiento de la valoración y el papel de la profesión docente. Dentro de la historia se han reconocido materiales que permiten reflexionar sobre la profesión del docente de Matemáticas y conduce a fortalecer la valoración y el papel de la profesión docente.

A continuación presentamos nuestras reflexiones sobre la utilidad de este estudio para el conocimiento del docente de las Matemáticas siguiendo estas categorías.

4.1 VISIONES DE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA

Primero, respecto a los procesos que se realizan en la actividad matemática se produjo una consolidación, ya que procesos como conjeturar, probar, fallar, plantear nuevas hipótesis, etc. los considerábamos parte de la actividad matemática y en el estudio de este documento tuvimos que realizarlos. Al momento de estudiar la proposición de la parábola quisimos devolvernos en la proposición y probar si se podía llegar a la condición del corte a partir del parámetro y la igualdad de las áreas, para ello propusimos: varias formas de hacerlo, las condiciones que deberían tenerse en cuenta; pero fallamos porque no encontramos una forma de hacerlo. Esto que hicimos es lo que consideramos actividad matemática y los objetos de este estudio nos motivaron a realizarla.

Segundo, en el momento de enfrentarnos a las secciones cónicas (parábola, elipse e hipérbola) surgió la pregunta: ¿las Matemáticas se descubren o se elaboran? Esta pregunta surgió debido a que en los cortes del cono anteriores a estas secciones el proceso matemático parecía muy natural, es decir, se cortaba el cono con ciertas condiciones, luego se tomaba la sección resultante y se exploraba la sección buscando definirla. Era un proceso con pocas condiciones. Un proceso de exploración. Por ejemplo, con la sección subcontraria (Pág. 34) se hizo el corte, se obtuvo la sección y luego se descubrió que la sección era un círculo, lo que nos da a entender que las Matemáticas se descubren. En cambio, con la parábola, la elipse y la hipérbola, además del corte, se define un parámetro con unas condiciones para caracterizar la sección a partir de este y así definirla. El hecho de tener que definir un parámetro bajo unas condiciones para caracterizar y definir la sección resultante nos da a entender que las Matemáticas se elaboran y que el proceso de definir algunos objetos no es tan natural como en otros. Por eso nuestra respuesta a la pregunta es: las Matemáticas se descubren y se elaboran, dependiendo de los objetos a los que nos enfrentemos podremos realizar un proceso de descubrimiento, un proceso con pocas condiciones o tendremos que condicionar y crear algunos elementos que nos ayuden a caracterizarlos y definirlos.

Tercero, varios autores han investigado y escrito sobre el papel de la representación en el estudio y la comprensión de los objetos matemáticos. Respecto a esto vivimos una ventaja y una desventaja de utilizar la representación en el estudio de objetos matemáticos. Durante el estudio del documento utilizamos el programa Cabri 3D para recrear las construcciones que se presentan en el documento base, lo cual nos ayudó bastante para entender las proposiciones y por ende los objetos que se presentan en ellas. Por ejemplo, al momento de leer y releer la proposición I.5 (sección subcontraria) no lográbamos comprender el corte ni imaginar la forma que podría tener esta sección. Al contrario del triángulo y el círculo, para obtener este corte se debían hacer más pasos; pero al momento de recrear la construcción en Cabri 3D tuvimos una claridad en el proceso del corte que no habíamos tenido al leer la proposición, debido a que para poder realizar la construcción tuvimos que identificar cada uno de los pasos expresados en la proposición para obtener el corte, además pudimos observar la forma que tiene esta sección.

La representación de las proposiciones nos resultó muy provechosa para comprender las proposiciones presentadas en el documento base pero con una proposición en particular tuvimos que dejar de lado la representación y concentrarnos en la proposición; cuando leímos la proposición I.7 (Pág. 40) para estudiarla y nos guiamos por la representación (ver figura 15) que se encuentra en el documento para comprender cuáles condiciones debe cumplir este elemento, esta estrategia nos produjo un problema al concentrarnos en la representación porque las figuras que se muestran en el documento utilizan solo un diámetro del círculo base y llegamos a pensar que como todas las secciones debían tener un diámetro entonces no todos los cortes del cono, que cumplen las condiciones de la parábola, serían parábolas, porque no todos los cortes podrían ser perpendiculares al diámetro de la base. Pero eso no podía ser por ende dejamos de lado la representación y pensando solo en la proposición logramos entender que el círculo base no solo tiene el diámetro que se mostraba en la representación que tiene infinitos diámetros y que para cada corte del cono existe un diámetro del círculo base que para el cual el diámetro de esta sección sea perpendicular.

Entonces las representaciones pueden darnos claridad sobre las condiciones en las que se produce y las características de un objeto pero si estas representaciones no son lo suficientemente diversas y solo nos concentramos en ellas podemos llegar a conclusiones erróneas.

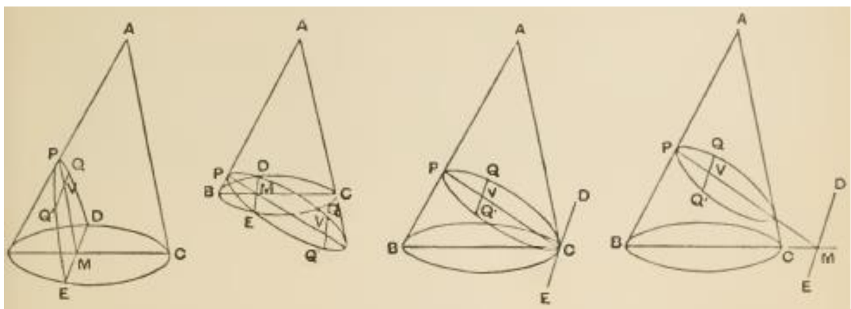


Figura 34. Ilustración mostrada en el documento base.

Cuarto, reconocemos varias formas de hacer Matemáticas, específicamente Geometría. La primera forma es la Geometría sin movimiento, la que estudiamos durante nuestra formación, donde los objetos, definiciones y proposiciones no contemplan el movimiento para ser producidos. La segunda es la Geometría con movimiento donde se hace uso del movimiento de un elemento para obtener un objeto. Estas dos formas de hacer Geometría se ven reflejadas en el documento base: la geometría con movimiento al construir el cono, donde una recta de longitud infinita que pasa a través de un punto fijo se hace mover alrededor de la circunferencia de un círculo, y la geometría sin movimiento en las demás proposiciones del capítulo. Por ejemplo, al momento de hacer los cortes no se evidencia el movimiento del plano para hacer el corte, solamente aparece el plano en el cono y se estudia el corte. La tercera forma, es la Geometría con medidas donde las longitudes y las áreas pueden ser tratadas con números, donde si necesitamos obtener la medida de un segmento o de un área se puede conseguir al hacer unas operaciones o despejar una expresión. La cuarta forma es la contraria de la tercera, la Geometría sin medidas donde existen longitudes y áreas pero estas no se expresan utilizando números sino comparándolas con otras longitudes o áreas. Esta última Geometría es la utilizada por Apolonio en su trabajo con las cónicas. Reconocer estas formas de hacer Matemáticas amplió nuestra visión de las Matemáticas debido a que: primero, habíamos visto el movimiento en la Geometría fuera de una teoría, es decir no habíamos estudiado una teoría en la que se incluyeran objetos producidos a través del movimiento y segundo, no concebíamos la Geometría sin medidas, ya que estábamos acostumbrados a medir las magnitudes y asignar un número para su cantidad y ahora trabajar una Geometría en la cual no podíamos hacer esto fue un reto.

4.2 VISIONES DE LOS OBJETOS

Comúnmente al tratar un objeto traemos a nuestra mente una definición de ese objeto y desconocemos otras definiciones del mismo. Antes de hacer este estudio nos ocurría lo mismo cuando escuchábamos la palabra círculo y venía a nuestra mente la definición de los puntos que equidistan de un punto fijo. Escuchábamos la palabra cono y venía a nuestra mente la definición del sólido que se genera al hacer girar un triángulo rectángulo sobre uno de sus catetos. Ahora, después de este estudio cuando escuchamos estas palabras vienen a nuestra mente varias definiciones que encontramos o que concluimos de este estudio.

Para el cono encontramos la siguiente forma de construirlo: *"Si una línea recta de longitud indefinida, y que pasa siempre a través de un punto fijo, se mueve alrededor de la circunferencia de un círculo que no está en el mismo plano con el punto, de manera que pase sucesivamente a través de cada punto de la circunferencia, al moverse la línea recta trazará la superficie de un cono doble, o dos conos similares situados en direcciones opuestas y encontrándose en el punto fijo, que es el vértice de cada cono.",* de esta construcción surgieron dos interpretaciones, por ende dos definiciones. La primera considera que dicho objeto es el cono doble que surge de la construcción y para la segunda este es uno de los conos similares que se nombran en la construcción; pero debemos advertir que en estas dos interpretaciones los conos se consideran infinitos, una tercera definición de cono basada en la teoría de Apolonio es encontrada en el tomo II del libro

Científicos Griegos: “2. Llamo *cono* a la figura limitada por el círculo y por la superficie cónica comprendida entre el vértice y la circunferencia del círculo” (Vera, 1970, p. 319). Aunque la última definición define un cono finito seguimos considerando que el cono es infinito ya que en el documento base las representaciones de las proposiciones dan la idea de que el cono es infinito, además para poder definir secciones cónicas infinitas el cono debe ser infinito.

Para el círculo identificamos en el documento cuatro definiciones de círculo. La primera la definición de círculo como la porción de plano limitada por el lugar de puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro. La segunda el círculo como sección cónica que se produce al cortar un cono con un plano paralelo a la base del cono. La tercera el círculo como la sección cónica subcontraria. La cuarta como la porción de plano limitada el lugar de puntos que satisfacen la condición $AB.BC = DB$. Cada definición de círculo amplía nuestra visión sobre este objeto ya que cada definición nos muestra una característica distinta del círculo.

Al tratar de clasificar estas definiciones y las que se encontraban en el documento base nos enfrentarnos a un tipo de definición que no habíamos estudiado: las definiciones de parábola, elipse e hipérbola. Por eso tuvimos que investigar sobre los tipos de definiciones matemáticas que se han identificado y esa investigación amplío nuestra visión del objeto definición, ya que antes reconocíamos solo tres tipos de definiciones (definición real, nominal y de la forma si y sólo sí) y ahora identificamos alrededor de seis tipos diferentes de definición matemática: real, nominal, con escritura si p entonces q, con escritura p sólo si q, p si y sólo si q y de la forma T es un U tal que $c_{1,}\ c_{2,}\ \dots ,c_n$.

4.3 COMPETENCIAS PERSONALES Y PROFESIONALES

El primer grupo de competencias está conformado por: leer, escribir, escuchar, buscar diferentes fuentes, discutir, analizar, y hablar sobre las matemáticas. Estas competencias las hemos desarrollado en diferentes momentos de la realización de este trabajo: leer y escribir al momento de redactarlo, buscar diferentes fuentes al momento de hacer la contextualización, debido a que no toda la información que aparece en las líneas del tiempo se encontraba en un mismo lugar. Las competencias escuchar, discutir, analizar y hablar sobre Matemáticas en las discusiones que realizábamos para llegar a acuerdos sobre la postura que se iba a tomar frente a alguna cuestión matemática o frente a la definición que se iba a adoptar de algún objeto, en especial al momento de responder la pregunta qué es cono ya que cada uno de nosotros tenía una postura diferente con muy buenos argumentos.

El segundo grupo de competencias: sensibilidad, tolerancia y respeto hacia maneras no convencionales de expresar ideas o resolver problemas, lo desarrollamos al momento de enfrentarnos al lenguaje y al método utilizado por el autor para expresar las proporciones, demostrarlas y garantizar sus características, ya que al utilizar las proporciones no es posible utilizar medidas y esto era algo a lo que no nos habíamos enfrentado y nos producía descontento al no poder utilizar ejemplos numéricos para comprobar lo que allí se planteaba.

El tercer grupo de competencias: valoración de la persistencia y el ánimo ante la adversidad, lo desarrollamos al momento de tratar de entender el corte del cual era producto la sección subcontraria debido a que no fue fácil comprender las condiciones y debimos leer la proposición y hacer la construcción en Cabri 3D varias veces para poder entender esta sección. Pero no solo con la subcontraria, también en el momento de entender la justificación del último paso de la demostración de la proposición I.9, que después de tanto pensar decidimos preguntarle a nuestro asesor y él nos mostró que era una demostración por reducción al absurdo.

4.4 TRANSFORMACIÓN EN LA MANERA DE ENSEÑAR Y RECURSOS PARA LA ENSEÑANZA.

Respecto a la transformación en la manera de enseñar no identificamos una transformación radical en la forma de enseñar que sea producto de este estudio, identificamos un deseo de enseñar lo que se ha estudiado para que los estudiantes tengan la oportunidad de conocer formas diferentes de hacer matemáticas.

Respecto a los recursos para la enseñanza podemos identificar las construcciones en el programa Cabri 3D como recurso para enseñar la teoría de Apolonio, ya que hacer la construcción de una proposición requiere entender y tener claridad de las condiciones que se establecen en ella.

4.5 FORTALECIMIENTO DE LA VALORACIÓN Y EL PAPEL DE LA PROFESIÓN DOCENTE

Respecto a este instrumento reconocemos dos facetas del docente de Matemáticas. La primera como investigador y la segunda como diseñador curricular. En la faceta de docente como investigador se reconoce la necesidad del docente de ampliar su visión sobre las Matemáticas, de investigar cómo era el pensamiento de otras épocas y quitar de su mente esa idea de las matemáticas lineales y perfectas que se puede crear cuando solo se estudian las teorías Matemáticas, es decir la necesidad del docente de nutrir su intelecto. En la faceta de docente como diseñador curricular se reconoce la necesidad del docente de brindar a los estudiantes la visión de las Matemáticas que se adquiere al estudiar su historia, para ello se requiere modificar el currículo escolar para integrar el estudio de la historia en el plan de estudios del área de Matemáticas.

5 CONCLUSIONES

El objetivo de este trabajo de grado es reconocer el papel de las proporciones en las definiciones de Apolonio para la elipse, la parábola y la hipérbola y hacer una reflexión sobre la potencialidad de esta manera de definición de las cónicas para el conocimiento docente de matemáticas, para presentar las conclusiones las dividiremos en dos grupos: las relacionadas con el papel de las proporciones en las definiciones de Apolonio y las que tienen que ver con la potencialidad de este estudio para el docente de Matemáticas.

Respecto al papel de las proporciones en las definiciones de Apolonio reconocemos tres papeles de las proporciones: como herramienta para demostrar, como herramienta para caracterizar y como lenguaje para comunicar. Las proporciones se utilizan como herramienta para demostrar, porque el autor demuestra o garantiza propiedades de los objetos utilizando las proporciones entre segmentos. También se utilizan para describir características propias de los objetos, unas veces dentro una demostración para mostrar que una sección cónica cumple con una definición de un objeto matemático y en otras ocasiones se utilizan para definir una sección cónica. Y como lenguaje, en las proposiciones todas las características, relaciones entre los segmentos y entre las áreas están expresadas por medio de proporciones; es de comprender que se utilicen las proporciones como lenguaje ya que para demostrar y caracterizar utilizan relaciones entre los objetos cuya forma de expresarse son las proporciones, relaciones tales como la semejanza entre triángulos, el paralelismo y el teorema de Thales.

Respecto a la potencialidad de este estudio para el docente de Matemáticas reconocemos las siguientes utilidades:

- Se transformó nuestra visión de la actividad matemática al encontrar que las Matemáticas pueden hacerse así como descubrirse todo depende del objeto que estemos estudiando, al reconocer varias formas de hacer Geometría: con medidas, sin medidas, con movimiento y sin movimiento, además de reconocer que la representación en la actividad matemática puede brindarnos claridad o limitar nuestra comprensión de los objetos.

- Se transformó nuestra visión sobre los objetos matemáticos al encontrar que existen varias definiciones de un mismo objeto, lo que nos brinda una visión más amplia de los objetos y sus características.
- Desarrollamos competencias personales y profesionales al enfrentarnos a tareas como: investigar, comunicar, llegar a acuerdos y superar dificultades.
- Reconocimos facetas del docente diferentes de la enseñanza en el aula como la faceta de investigador, del docente que estudia para alimentar su intelecto, y la faceta de diseñador curricular, del docente que busca nuevos contenidos para enseñar a sus estudiantes.

Al recapitular los resultados de este trabajo de grado consideramos que el objetivo general ha sido logrado.

6. BIBLIOGRAFÍA

Addbot (2013). Dinóstrato. *Wikipedia, la enciclopedia libre* [versión electrónica]. Fundación Wikimedia, Inc., http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Din%C3%B3strato&oldid=65161486.

Anónimo (s. f). *Arte Egipcio Cánon de Proporciones de La Figura Humana*. Epapontevedra. Recuperado de http://www.epapontevedra.com/arte/arte_egipcio_c%C3%A1non_de_proporcion.htm.

Anónimo. (1997). *Kampyle.* Recuperado el 9 de Octubre de 2014, de http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Curves/Kampyle.html.

Anónimo (2014). Pitagóricos. *Wikipedia, la enciclopedia libre* [versión electrónica]. Fundación Wikimedia, Inc., http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Pitag%C3%B3ricos&oldid=77403847.

Arbeláez, Arce, Guacaneme, y Sánchez. (1999). *Análisis de Textos Escolares de Matemáticas*. Cali: Universidad del Valle.

Arguedas, V. (2004). Erastótenes o un gran β. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, *5(1).* Recuperado de https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/HistoriaMatematica/Vol5n1Jun2004/

Camargo, L. & Guzmán A. (2005*). Elementos para una didáctica del pensamiento variacional*. Cooperativa Editorial Magisterio. Bogotá D. C. Colombia.

Cardil, R. (s. f). *Arquímedes: El área de un segmento de parábola*. Matemáticas Visuales. http://www.matematicasvisuales.com/html/historia/archimedes/parabola.html

Collette, J. (1985). *Historia de las Matemáticas I.* (P. González, Trad.). México: Siglo Veintiuno Editores S. A

Copydays (2014). Hipócrates de Quíos. *Wikipedia, la enciclopedia libre* [versión electrónica]. Fundación Wikimedia, Inc., http://es.wikipedia.org/wiki/Hip%C3%B3crates_de_Qu%C3%ADos#mediaviewer/File:Hipocrat_arcs.svg.ntig%C3%BCedad

Elfix. (2013). Menecmo. *Wikipedia, la enciclopedia libre* [versión electrónica]. Fundación Wikimedia, Inc., http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Menecmo&oldid=68467529.

González, J. (s.f.). *Apolonio de Perga. Las Secciones Cónicas.* Recuperado de http://fundacionorotava.org/archivos%20adjuntos/publicaciones/actas/hgg_pdf_web/cap13_web.pdf

González, P. M. (s. f). *Orígenes y Evolución Histórica de la Geometría Analítica.* Recuperado el 1 de mayo de 2014 de http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/geometriaanalitica.pdf

González, P. (2004). *Trisectriz de MacLaurin (año 1742).* Descartes 2D. http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/trisectrices_pge/maclaurin.html

Grillitus (2013). Diocles (matemático). *Wikipedia, la enciclopedia libre* [versión electrónica]. Fundación Wikimedia, Inc., http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Diocles_(matem%C3%A1tico)&oldid=66125966

Grillitus (2014). Pitágoras. *Wikipedia, la enciclopedia libre* [versión electrónica]. Fundación Wikimedia, Inc., http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Pit%C3%A1goras&oldid=75974384.

Guacaneme, E. (Junio, 2011). La Historia de las Matemáticas en la educación de un Profesor: razones e intenciones. En A. Ruiz (Presidencia). XIII CIAEM - IACME, Recife, Brazil.

Harari, O. (2004). *Knowledge and Demonstration: Aristotle's Posterior Analytics*. Dordrecht; Boston: Kluwer.

Heath, T. L. (1896). *Apollonius of Perga: Treatise on Conic Sections*. Cambrige: University Press.

Heilbron, J. (s. f). Trisecting the Angle: Archimedes' Method. *Encyclopaedia Britannica* [versión electrónica]. New York: Encyclopaedia Britannica, Inc., http://global.britannica.com/EBchecked/topic/724632/Trisecting-the-Angle-Archimedes-Method#ref1074301.

Heilbron, J. (2014). Trisecting the Angle: The Quadratrix of Hippias. *Encyclopaedia Britannica* [versión electrónica]. New York: Encyclopaedia Britannica, Inc., http://global.britannica.com/EBchecked/topic/1688521/Trisecting-the-Angle-The-Quadratrix-of-Hippias#ref956193.

KLBot2 (2013). Pierre Wantzel. *Wikipedia, la enciclopedia libre* [versión electrónica]. Fundación Wikimedia, Inc., http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Pierre_Wantzel&oldid=64468980.

Mata, G. (2012, 13, 08). *Arquímedes, Eratóstenes y sus mediciones* [Web log post]. Recuperado de https://elespaciodefinitivo.wordpress.com/2012/08/13/arquimedes-eratostenes-y-sus-mediciones/

Michot, A. (2009, 19, 03). *El Arte Egipcio* [Web log post]. Recuperado de http://matematicasenelarte.blogspot.com/.

Newman, J. (1980). *Sigma, el mundo de las matemáticas. 1, Historia, biografías, estudio general.* Barcelona: Grijalbo.

Omnipaedista (2014). Nicomedes (mathematician). *Wikipedia, la enciclopedia libre* [versión electrónica]. Fundación Wikimedia, Inc., http://en.wikipedia.org/wiki/Nicomedes_(mathematician)

Puertas, M. (1991). *Elementos: libros X-XIII*. Madrid: Gredos

Tapia, F. (2002). Apolonio, el geómetra de la antigüedad. *Apuntes de historia de las matemáticas, 1(1)*. VOL.1, Pág. 19 - 31.

The Editors of The Encyclopædia Britannica (2014). Architas of Tarentum. *Encyclopaedia Britannica* [versión electrónica]. New York: Encyclopaedia Britannica, Inc., http://www.britannica.com/EBchecked/topic/33072/Archytas-of-Tarentum

Vera, F. (1970). *Científicos Griegos. Tomo II*. Madrid: Aguilar.

ANEXO 1. TRADUCCIÓN CAPÍTULO EL CONO DE THOMAS HEATH LIBRO APOLLONIUS OF PERGA: TREATISE ON CONIC SECTIONS.

EL CONO

Si una línea recta de longitud indefinida, y que pasa siempre a través de un punto fijo, se mueve alrededor de la circunferencia de un círculo que no está en el mismo plano con el punto, de manera que pase sucesivamente a través de cada punto de la circunferencia, al moverse la línea recta trazará la superficie de un **cono doble**, o dos conos similares situados en direcciones opuestas y encontrándose en el punto fijo, que es el **vértice** de cada cono.

El círculo sobre el que la línea recta se mueve se llama la **base** del cono que yace entre dicho círculo y el punto fijo, y el **eje** se define como la línea recta trazada desde el punto fijo o el vértice hasta el centro del círculo de la base.

El cono descrito es **escaleno** o cono **oblicuo** excepto en el caso particular donde el eje es perpendicular a la base. En este último caso se el cono es un cono **recto**.

Si un cono es cortado por un plano que pasa por el vértice, la sección resultante es un triángulo, dos de los lados son líneas rectas que yacen en la superficie del cono y siendo el tercer lado la línea recta , la cual es la intersección del plano de corte y el plano de la base.

Sea un cono cuyo vértice es A y cuya base es el círculo C, y sea O el centro del círculo, de modo que AO es el eje del cono. Supongamos ahora que el cono se corta por cualquier plano paralelo al plano de la base BC, como DE, y dejar que el eje AO se encuentre con el plano DE en o. Sea p cualquier punto de la intersección del plano de DE y la superficie del cono. Unir Ap, que se encuentra con la circunferencia del círculo BC en P. Unir OP y op.

Entonces, puesto que el plano que pasa a través de las líneas rectas AO, AP corta los dos planos paralelos BC, DE en las líneas rectas OP y op respectivamente, OP y op son paralelas.

$$\therefore \text{op} : \text{OP} = \text{Ao} : \text{AO}$$

Y como BPC es un círculo, OP permanece constante para todas las posiciones de P en la curva de DPE, y la relación Ao: AO también es constante.

Por lo tanto, op es constante para todos los puntos de la sección de la superficie por el plano DE. En otras palabras, dicha sección es un círculo.

De ahí que, todas las secciones del cono que son paralelas a la base circular son círculos. [I. 4]*

Ahora, El cono se corta por un plano que pasa a través del eje y es perpendicular al plano de la base BC, y la sección resultante es el triángulo ABC. Sea el plano HK dibujado en ángulo recto al plano del triángulo ABC y obtener de esta intersección el triángulo AHK, tal que AHK es similar al triángulo ABC, pero se encuentra en el sentido contrario, es decir, de tal manera que el ángulo AKH es igual al ángulo ABC. La sección del cono que resulta del corte por el plano de HK se llama sección subcontraria.

*Las referencias en este forma, aquí y en todo el libro, son las proposiciones originales de Apollonius.

Sea P cualquier punto de la intersección del plano de HK con la superficie, y F cualquier punto de la circunferencia del círculo BC. Dibuje PM, FL cada una perpendicular al plano del triángulo ABC, y se intersecan con las líneas rectas HK, BC, respectivamente, en M, L. Entonces PM, FL son paralelas.

Dibujar a través de M la línea recta DE paralela a BC, y se deduce que el plano a través de DME, PM es paralelo a la base BC del cono.

Así, la sección de DPE es un círculo, y

$$DM.ME = PM^2$$

Pero, como el segmento DE es paralelo a BC, el ángulo ADE es igual al ángulo ABC que por hipótesis es igual al ángulo AKH.

Por lo tanto, en los triángulos HDM, EKM los ángulos HDM, EKM son iguales, como también lo son los ángulos verticales en M.

Por tanto, el HDM triángulos, EKM son similares. De ahí

$$HM:MD = EM:MK$$

$$\therefore HM.MK = DM.ME = PM^2$$

Y P es cualquier punto en la intersección del plano de HK con la superficie. Por lo tanto, la sección realizada por el plano de HK es un círculo.

Así, hay dos series de secciones circulares de una oblicua cono, una serie de ser paralela a la base, y el otro que consiste de las secciones subcontrarias a la primera serie. [I. 5]

Supóngase un cono es cortado por un plano a través del triángulo axial ABC y el segmento BC un diámetro de la base circular del cono. Sea H cualquier punto de la circunferencia de la base, traza el segmento HK perpendicular al diámetro de BC, y trazar una paralela a HK a través de cualquier punto Q en la superficie del cono, pero no situada en el plano del triángulo axial.

Además, trazar la recta AQ que se interseca con la circunferencia de la base en F, y dejar que FLF' sea la cuerda que es perpendicular a BC. Trazar la recta AV que se interseca con la circunferencia de la base en L y trazar la recta AQ’ que se interseca con la circunferencia de la base en F’. Entonces la recta QV es paralela a HK y también es paralela a la recta que contiene a FLF’, las rectas AF y AF’, ya que yacen en el cono.

Entonces se obtiene

$$QV{:}\,VQ' = FL{:}\,LF' \text{ y } FL = LF'$$

$$\therefore QV = VQ'$$

Por lo que, se concluye que el segmento QQ' es bisecado por el plano del triángulo axial. [I. 6]

Nuevamente, sea el cono que se corta con un plano que no contiene el vértice pero intersecta el plano de la base en la recta que contiene a los puntos DME y es perpendicular a BC, la sección resultante es DPE con la base del cono y el triángulo axial, el punto P tendido en cualquiera de los lados AB, AC del triángulo axial. El plano de la sección corta el plano del triángulo axial en la recta PM al unirse a P por el punto medio del segmento DE.

Ahora sea Q cualquier punto de la curva de la sección, y a través de Q se traza una línea recta paralela al DE.

Entonces esta es paralela, y la recta se interseca con la superficie en Q', entonces PM biseca cual cuerda de la sección las cuales son paralelas al segmento DE.

Ahora una línea recta biseca cada una de las series de cuerdas paralelas de una sección de un cono se denomina **diámetro**.

Por lo tanto, si un cono se cortó por un plano que intersecta a la base circular en línea recta perpendicular a la base de cualquier triángulo axial, la intersección del plano de corte y el plano del triángulo axial será un **diámetro** de la sección resultante del cono. [I. 7]

Sea PM el diámetro la sección que está en una dirección tal que su intersección con AC se produce hasta el infinito, es decir, PM es paralelo a AC, o hace con PB un ángulo menor que el ángulo BAC y por lo tanto su intersección con CA producido más allá del vértice del cono, la sección hecha por el dicho plano se extiende hasta el infinito.

Sea cualquier punto V de PM producido y dibujar a través de él una recta HK paralela a BC y una recta QQ' paralela a DE, entonces el plano que contiene HK y QQ' es paralelo al de la base. Por lo tanto la sección HQKQ' es un círculo. Además D, E, Q, Q 'son todos los puntos sobre la superficie del cono y también están en el plano del corte. Por lo tanto la sección de DPE se extiende al círculo HQK, y de igual manera a la sección circular a través de cualquier punto de PM producido, y por lo tanto a cualquier distancia de P. [I. 8]

[También es claro que $DM^2 = BM.MC$, y $QV^2 = HV.VK$; y $HV.VK$ se incrementa como V toma más distancia desde P. Para, en el caso donde PM es paralela a AC, VK permanece constante mientras HV se incrementa; y en el caso donde el diámetro PM se encuentra con CA más allá del vértice del cono, tanto HV, VK aumentan junto con V se aleja de P. De este modo aumenta QV indefinidamente como la sección se extiende al infinito.]

Si por el contrario se reúne PM con AC, la sección no se extiende hasta el infinito. En ese caso, la sección será un círculo si su plano es paralelo a la base o subcontraria. Pero, si la sección no es ni paralela a la base ni subcontraria, esta no será círculo. [I. 9]

Se deja que el plano de la sección se encentre con el plano de la base en DME, una línea recta perpendicular a BC, un diámetro de la base circular. Tome el triángulo axial a través de BC que se encuentran con el plano de la sección en la recta PP'. Entonces P, P', M son todos los puntos en el plano del triángulo axial y en el plano

de la sección. Por lo tanto PP'M es una línea recta. Si es posible, sea la sección PP' sea un círculo. Tómese cualquier punto Q en él y trácese QQ' paralela a DME. Entonces PP' si el diámetro del círculo supuesto.

Sea HQKQ' es la sección circular a través de QQ' paralela a la base.

Entonces, desde los círculos, $QV^2 = HV.HV$,

$QV^2 = PV.VP'$,

$\therefore HV.HV = PV.VP'$,

de modo que $\mathrm{HV}.\mathrm{HP} = \mathrm{P}'\mathrm{V}:\mathrm{VK}$.

∴ los triángulos ∴ $\mathrm{VPH}, \mathrm{VKP}'$ son semejantes, y $\angle\mathrm{PHV} = \angle\mathrm{KP}'\mathrm{V}$;

∴ $\angle\mathrm{KP}'\mathrm{V} = \angle\mathrm{ABC}$, y la sección PP' es subcontraria lo cual contradice la hipótesis.

∴ PQP' no es un círculo.

Queda por investigar el carácter de las secciones mencionadas en la páginas anteriores, viz. (a) aquellas que se extienden hasta el infinito, (b) los que son finitos, no son círculos.

Supongamos que, como de costumbre, el plano de sección corta la base circular en una línea recta y DME y que ABC es el triángulo axial cuya base BC es el diámetro de la base del cono que biseca DME en ángulo recto en el punto M. Entonces, si el plano de la sección y el plano del triángulo axial intersecar en la línea recta PM, PM es un diámetro de la sección bisectriz de todas las cuerdas de la sección, como QQ', y que se dibujan paralelas al DE.

Si el segmento QQ’ es bisecado en V, se dice que QV es una ordenada, o una **ordenada correcta** trazada en línea recta, al diámetro PM, y la longitud PV cortada del diámetro por cualquier QV será llamada la **abscisa** de QV.

PROPOSICIÓN 1.

[I. 11]

En primer lugar se deja que el diámetro PM de la sección sea paralela a uno de los lados del triángulo axial como AC, y se deja QV sea cualquier ordenada del diámetro PM. Entonces, si una línea recta PL (se supone que se dibuja perpendicular a PM en el plano de la sección) deben tomarse de una longitud tal que $\mathrm{PL}:\mathrm{PA}=\mathrm{BC}^2:\mathrm{BA}\cdot\mathrm{AC}$, esto debe probar que

$$\mathrm{QV}^2=\mathrm{PL}\ \cdot\mathrm{PV}$$

Deje que HK sea dibujada a través de V paralela a BC. Entonces, como QV es también paralela a DE, se sigue que el plano a través de H, Q, K es paralelo a la base del cono y por lo tanto produce una sección circular cuyo diámetro es HK. También QV está en ángulo recto con HK.

$$\therefore \mathrm{HV}\cdot\mathrm{VK}=\mathrm{QV}^2$$

Ahora, por triángulos semejantes y paralelos,

$$\mathrm{HV}:\mathrm{PV}=\mathrm{BC}:\mathrm{AC}$$

$$\mathrm{VK}\cdot\mathrm{PV}=BC:BA$$

y

$$\therefore HV\cdot VK=PV:PA=BC^2:BA\cdot AC$$

Así

$$QV^2:PV\cdot PA=PL:PA$$

$$=PL\cdot PV\ :\ PV\cdot PA$$

$$\therefore QV^2=PL\cdot PV$$

De esto se sigue que, el cuadrado en cualquier eje de ordenadas fijo al diámetro PM fijo, es igual a un rectángulo aplicado a la línea recta fija PL, dibujado en ángulo recto a PM con la altitud igual a la correspondiente abscisa PV. Por lo tanto, la sección es llamada una parábola.

La línea recta fija PL es llamada **lado recto (lactus rectum)** o **el parámetro de las ordenadas.**

Este parámetro, corresponde al diámetro PM, más adelante se denotará con el símbolo p.

Entonces

$$QV^2 = p \cdot PV$$

o

$$QV^2 \propto PV$$

PROPOSICIÓN 2.

[I. 12]

A continuación se deja que PM no sea paralela a AC pero deja que se encuentre con CA producido más allá del vértice del cono en P'. Se dibuja PL en ángulo recto con PM en el plano de la sección de longitud tal que la longitud es de PL: $PP' = \mathrm{BF} \cdot \mathrm{FC}{:}\, \mathrm{AF}^2$, donde AF es una línea recta a través de A paralela a PM y se encuentra con BC en F. Entonces, si VR es dibujada paralela a PL y se produce hasta encontrar VR en R, esto se puede demostrar que

$$QV^2 = PV \cdot VR$$

Al igual que antes, HK se dibuja a través de V paralelo a BC, por lo que

$$QV^2 = HV \cdot VK$$

entonces , por triángulos semejantes,

$$HV{:}\, PV = BF{:}\, AF$$

$$VK{:}\, P'V = FC{:}\, AF$$

$$\therefore HV \cdot VK : PV \cdot P'V = BF \cdot FC : AF^2$$

$$QV^2 : PV \cdot P'V = PL : PP'$$

$$= VR : P'V$$

$$= PV \cdot VR : PV \cdot P'V$$

$$\therefore QV^2 = PV \cdot VR$$

De esto se sigue que el cuadrado de ordenada es igual a un rectángulo cuya altura es igual a la abscisa y la base donde se encuentra a lo largo de la línea recta fija PL pero solapada por una longitud igual a la diferencia entre VR y PL*. Así la sección es llamada Hipérbola.

* Apolonio describe el rectángulo PR como aplicado al lado recto pero superando por una figura similar y en una situación similar a la contenida por PP' y PL, i.e., superando a el rectángulo VL por el rectángulo LR. Por lo tanto, si QV = y, PV = x, PL = p, y PP'=d,

$$y^2 = px + \frac{p}{d}.x^2,$$

Lo cual es simplemente la ecuación cartesiana de la hipérbola se referente a ejes oblicuo que consta de un diámetro y la tangente en esta extremo.

PL es llamado el **latusrectum** o el **parámetro de las ordenadas** como antes, y PP' es llamado **transversa**. La expresión más completa **diámetro transversal** también se utiliza; y, aún más comúnmente, Apolonio habla del diámetro y junto a el parámetro correspondiente, llamando a este último el **lactus rectum** (es decir, el lado recto), y el primero el **lado transversal** de la figura **en**, o aplicado a, el diámetro, es decir, del rectángulo comprendido por PL, PP' como se dibujó.

El parámetro PL en el futuro se denota por p.

[Cor. Esta se desprende de la proporción

$$QV^2 : PV \cdot P'V = PL : PP'$$

que, para cualquier diámetro fijo PP’

$QV^2 : PV \cdot P'V$ es una razón constante, ó QV^2 *varía como* $PV \cdot P'V$.]

PROPOSICIÓN 3.

[I. 13]

Si PM se encuentra con AC en P' y BC en M, se dibuja AF paralela a PM encontrándose en F, y se dibuja PL en ángulo recto a PM en el plano de la sección y de una longitud tal que $PL : PP' = BF \cdot FC : AF^2$. Juntando P'L y se dibuja VR paralelo a PL encontrándose P'L en R. Esto demostró que

$$QV^2 : PV \cdot VR$$

Entonces, por triángulos semejantes

$$HV : PV = BF : AF$$

$$HK : P'V = FC : AF$$

$$\therefore HV \cdot VK : PV \cdot P'V = BF \cdot FC : AF^2$$

Así,

$$= VR : P'V$$

$$= PV \cdot VR : PV \cdot P'V$$

$$QV^2 = PV \cdot VR$$

De esta forma, el cuadrado en la ordenada es igual a un rectángulo cuya altura es igual a la abscisa y la base se encuentra a lo largo de la línea recta fija PL, pero no llega a él por una longitud igual a la diferencia entre VR y PL*. La sección es llamada una Elipse.

Como antes, PL se llama el lado recto, o el parámetro de las ordenadas a PP’, y PP' es llamado la transversal (con o sin la adición del diámetro o lado de la figura, como se explica en la última proposición).

PL en adelante se denotará por p.

[COR. esto sigue de la proporción

$$QV^2 = PV \cdot PV' = PL : PP'$$

Que, para cualquier PP’ diámetro fijo,

$QV^2 = PV \cdot PV'$ es una razón constante o QV^2 varia como $PV \cdot P'V$]

* Apolonio describe el rectángulo PR como aplicado al lado recto pero siendo inferior por una figura similar y en una situación similar a la contenida por PP' y PL, i.e., inferior a el rectángulo VL por el rectángulo LR. si QV = y, PV = x, PL = p, y PP'=d,

$y^2 = px - \frac{p}{d}.x^2$,

Lo cual es simplemente la ecuación cartesiana de la hipérbola se referente a ejes oblicuo que consta de un diámetro y la tangente como extremidad como (oblicuo) eje.

PROPOSICIÓN 4.

[I. 14]

Si un plano corta ambas partes de un cono doble y no pasa a través del ápice, las secciones de las dos partes del cono ambas serán hipérbolas que tendrán el mismo diámetro y recta de igual lateral correspondiente a la misma. Y tales secciones se llaman brazos opuestos.

Sea BC el círculo sobre el que gira la línea recta generatriz del cono, y sea B'C’ sea cualquier sección paralela que corte a la mitad opuesta del cono. Dejar que un plano seccione las dos mitades del cono, intersecándo la base BC en la línea recta DE y el plano B'C' en D'E'. Entonces D'E' debe estar paralelo a DE.

Sea BC el diámetro de la base la cual biseca DE en ángulos rectos, y permitir que pase un plano a través de BC y el vértice A cortando a el círculo B'C' en B'C', por lo tanto será, un diámetro de ese círculo y cortará D'E' a ángulos rectos, ya que B'C' es paralela a BC y D'E' a DE.

Dibujar FAF' a través de A paralelo a MM', la línea recta que une los puntos medios de DE, D'E' y encontrándose en CA, B'A, respectivamente, en P, P'.

Dibujar perpendiculares PL, P'L' a MM' en el plano de la sección y de una longitud que

$$\mathrm{PL}:\mathrm{PP'} = \mathrm{BF}\cdot\mathrm{FC}:\mathrm{AF}^2$$

$$\mathrm{P'L'}:\mathrm{P'P} = \mathrm{B'F'}\cdot\mathrm{F'C'}:\mathrm{AF}^2$$

Desde ahora MP, es el diámetro de la sección DPE, cuando se produce al encontrarse BA más allá del vértice, la sección DPE es una hipérbola.

Asimismo, puesto que D'E' es bisecada en ángulos rectos por la base del triángulo axial AB'C' y M'P en el plano del triángulo axial se encuentra C'A producido más allá del vértice A, la sección D'P'E' es también una hipérbola.

Y las dos hipérbolas tienen el mismo diámetro MPP'M'.

Queda por demostrar que $\mathrm{PL} = \mathrm{P'L'} = \mathrm{F'C}$.

Se tienen por triángulos semejantes

$$\mathrm{BF}:\mathrm{AF} = \mathrm{B'F'}:\mathrm{AF'}$$

$$\mathrm{FC}:\mathrm{AF} = \mathrm{B'F'}:\mathrm{AF'}$$

$$\therefore \mathrm{BF}\cdot\mathrm{FC}:\mathrm{AF}^2 = \mathrm{B'F'}\cdot\mathrm{F'C'}:\mathrm{AF}^2$$

Así

$$\mathrm{PL}:\mathrm{PP'} = \mathrm{P'L'} \therefore \mathrm{P'P}$$

$$\therefore PL = P'L'$$

ANEXO 2. PONENCIA: TRES PERSONAS DISTINTAS UN SOLO DIOS VERDADERO. TRES DEFINICIONES DISTINTAS UN SOLO OBJETO MATEMÁTICO.

Imaginémonos como sería el mundo si hubiera sido creado en dos dimensiones, ¿Cómo seriamos? ¿Cómo nos veríamos? ¿Cómo nos identificaríamos? Difícil verdad.

Empecemos por lo sencillo ¿cómo identificaríamos un segmento? ¿Cómo identificar un cuadrado? Un rectángulo, un círculo…

Ya después de saber cómo identificarlos, démosle un nombre, llamémoslo Terraplana.

Resulta que en Terraplana como en cualquier mundo se busca la perfección. La perfección en este mundo se mide por la cantidad de lados que tengas. Estos lados no deben tener cualquier medida, es decir debes ser un polígono regular. Si la perfección es proporcional a la cantidad de lados, ¿cuál sería la figura ideal?

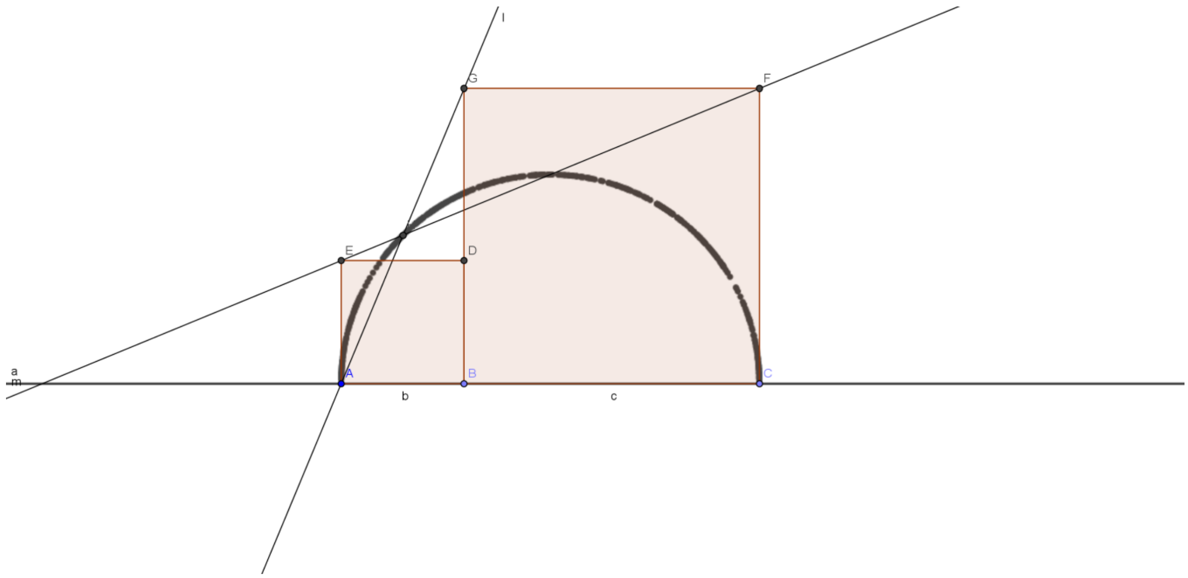
En la búsqueda de esta perfección habían algunos habitantes que tenían formas rectangulares y al no ser polígonos regulares, buscaban serlo. El polígono regular más cercano a su forma es el cuadrado; para poder convertirse en cuadrado iban al "hospital de reconfiguración" donde ellos entraban siendo rectángulos y salían siendo cuadrados. Lo que más sorprendía de este procedimiento es que los rectángulos no perdían cantidad de superficie, solo cambiaban su forma.

El hospital de reconfiguración era el único que podía lograr este cambio. Pero en Terraplana había un chamán que prometía hacer el mismo cambio a un menor costo debido a la clandestinidad en la que funcionaba su establecimiento.

Ambas técnicas según los habitantes de Terraplana eran eficaces, pero la mayoría prefería el hospital de reconfiguración por ser un establecimiento legal y reconocido por el Estado. Como muchos de los habitantes Rectangulina quería convertirse en forma cuadrada, ella junto con su novio Cuadradín pensaban en dónde hacerse la cirugía. Debido a los costos Rectangulina decidió hacerse la cirugía en el establecimiento del chamán. Pero Cuadradín decía que no y le reiteraba que era mejor que se la hiciera en el hospital de reconfiguración, ya que era más confiable. Pero al final ella decidió hacerse la cirugía con el chamán.

Mientras Rectangulina estaba en cirugía, Cuadradín esperaba preocupado en la sala de espera. Pasó el tiempo y Rectangulina no salía de cirugía. Esperó y esperó hasta que el sueño se apoderó de él. En ese sueño tuvo una visión reveladora en la que su cuerpo era trasportado a una tercera dimensión. En esa tercera dimensión podía verlo todo el establecimiento del chamán, el hospital de reconfiguración. Todo. Hasta los límites de Terraplana. Pudo verlo todo de una manera diferente y reveladora.

Observó las formas de su mundo. Quienes conocía dejaron de verse como líneas tenían formas que nunca en su vida había visto. Al recuperarse de tal sorpresa buscó desesperadamente a su novia, allí la encontró recuperándose de la cirugía. Se veía tan diferente, era cuadrada pero nada le faltaba ni un milímetro de superficie. Entonces sorprendido por el resultado miró en la sala de cirugía. Esta tenía diferentes secciones: en la primera median el largo y el ancho de quienes entraban, en la segunda una máquina que trasladaba las medidas tomadas sobre una línea una seguida de la otra y seguía este proceso: se trazan los cuadrados sobre las medidas, con una recta se une la esquina superior derecha del cuadrado de la segunda medida con la esquina superior izquierda del cuadrado de la primera medida, con otra recta se une la esquina superior izquierda del cuadrado de la segunda medida con la esquina inferior izquierda del cuadrado de la primera medida, por el punto de intersección de estas dos rectas se traza una perpendicular a la recta donde están ubicadas las medidas, el segmento, limitado por el punto de intersección de la perpendicular y la recta donde están las medidas y el punto de intersección de las rectas que unen las esquinas, es la medida del lado que debe tener nuestro futuro cuadrado, en la tercera y última sección de esta transformación Cuadradín vería algo impactante, con dos grandes vigas golpeaban a los rectángulos para forzarlos a tomar la forma del cuadrado diseñado, el sonido que se producía en esta sección era aturdidor, peor que golpear una campana con tu cabeza.



Cuadradin impactado por lo que tuvo que pasar su novia se preguntó: ¿qué hubiera pasado si se hubiese hecho la cirugía en el hospital de reconfiguración? Entonces miro en el hospital de reconfiguración, lamentablemente las secciones eran las mismas, los aturdidores golpes no cambiarían, la diferencia era la forma en la que funcionaba la máquina, la máquina del hospital de reconfiguración trasladaba las medidas tomadas sobre una línea una seguida de la otra y para hallar el lado del futuro cuadrado se traza un semicírculo que tiene por diámetro, el segmento limitado por el primer punto de la primera medida y el último punto de la segunda medida, luego se traza una recta perpendicular al diámetro por el punto donde se unen las dos medidas y el lado del futuro cuadrado será el segmento limitado por el punto donde se unen las medidas y el punto de intersección de la perpendicular y el semicírculo.

Entonces ¿por qué es más caro en el hospital de reconfiguración? Porque el proceso de la máquina es más rápido entonces la cirugía tardaría menos, pero con el mismo dolor. La perfección tiene su costo pensó Cuadradín, cuando el llamado de un parlante lo despertó: el acompañante de la señorita Rectangulina por favor dirigirse a recuperación.

¿Por qué funcionan ambos métodos? ¿Cómo argumentarlos en Terraplana? Estos son interrogantes que los dejaremos para ustedes, aquí tienen algo en que gastar su tiempo libre.

Lo que nos ocupa en este momento es la forma en el que el método del hospital de reconfiguración es utilizado por Apolonio para demostrar que una sección cónica en particular es un círculo.

Lo que hace el proceso de la máquina del hospital de reconfiguración es hallar la media proporcional entre dos segmentos. Si observamos lo que se hacía era tomar las medidas de un rectángulo y obtener la medida del lado de un cuadrado que tiene igual cantidad de superficie, es decir

$$AB.BC = DB^2$$

Que es equivalente a

$$\frac{AB}{DB} = \frac{DB}{BC}$$

Y tenemos la forma en la que conocemos a la media proporcional.

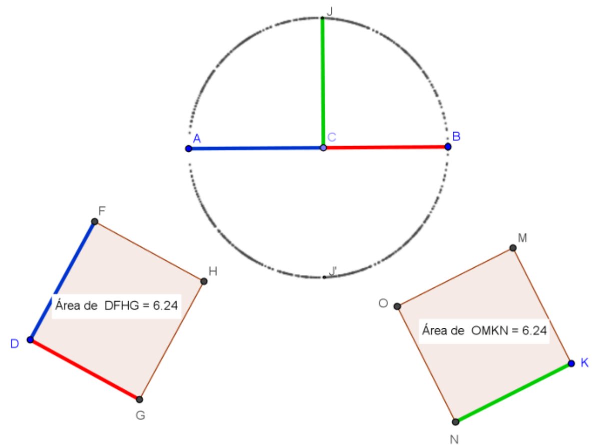
Pero el hospital de reconfiguración no ha sido el único que utiliza una circunferencia para hallar la media proporcional entre dos segmentos, Euclides también lo hizo en la proposición 13 del libro VI de la obra Elementos, donde propone construir la media proporcional entre dos rectas dadas de la siguiente forma:

"Si AB y BG son las rectas dadas, colóquense una a continuación de la otra sobre una recta y descríbase el semicírculo ADG; trácese la BD perpendicular a AG en B; únase el punto D con los A y G, y entonces en el triángulo rectángulo ADG es BD media proporcional entre los segmentos AB y BG de la base." (Puertas, 1991, p. 814)

Lo que nos indica esto es que la media proporcional entre dos segmentos cualesquiera, que conforman el diámetro de una circunferencia o círculo es una característica propia del círculo o circunferencia, para nuestro caso el círculo.

Como podemos advertir Euclides utiliza el semicírculo para trazar la media proporcional a los dos segmentos dados, eso quiere decir que es una característica propia del círculo.

Y para "comprobarlo" miremos esta construcción



Como nos podemos dar cuenta, la traza de las medias proporcionales entre los posibles segmentos, que se encuentran sobre el diámetro, describe un círculo.

¿Qué es una definición? Es una o varias características que tiene un objeto y que solo las posee ese objeto, como la media proporcional es una característica propia del círculo podemos definir círculo utilizando la media proporcional:

Círculo es la porción de plano limitada por la curva ACD y su reflejo respecto al segmento AC que satisface la siguiente proporción $AB.BC = DB^2$.

Esta es la primera definición de nuestra Trinidad del Círculo.

Pero esta definición de círculo no solo fue utilizada por Euclides también fue utilizada por Apolonio en su trabajo Cónicas, antes de mostrarles la forma en la que Apolonio utilizó esta definición vamos a dar un vistazo a algunos elementos anteriores de esta teoría.

Es de conocimiento de la mayoría que Apolonio define y caracteriza las cónicas a partir de cortes de un cono, lo que pocos saben es que la primera de las secciones cónicas es el triángulo y esta sección se obtiene de la siguiente forma:

> *"Si un cono es cortado por un plano que pasa por el vértice, la sección resultante es un triángulo, dos sean líneas rectas sobre la superficie del cono y siendo el tercer lado la línea recta, que es la intersección del plano de corte y*

el plano de la base" (Heath, 1896, p. 1).

De los triángulos que resultan de este corte Apolonio resalta un grupo en especial, es el grupo de los triángulos que resultan de cortar el cono con un plano que contiene el eje del cono y esta sección resultante es llamada triángulo axial.

La segunda sección cónica que presenta Apolonio es el círculo que se obtiene al cortar el cono con un plano paralelo a la base. Esta es la segunda definición de nuestra Trinidad.

La tercera sección cónica que se presenta es la sección subcontraria y se obtiene de la siguiente forma:

> *"A continuación, se corta el cono con un plano que pasa a través del eje y perpendicular al plano de la base BC, y sea el triángulo resultante ABC. Concebir otro plano HK que corta en ángulo recto con el plano del triángulo ABC, resultando la sección AHK triángulo tal que AHK es semejante al triángulo ABC, pero se encuentra en el sentido contrario, es decir, tal que el ángulo AKH es igual al ángulo ABC"* (Heath, 1896, p. 2)

Pero resulta que esta sección subcontraria es círculo, siendo esta la última definición de nuestra Trinidad, para demostrar que la subcontraria es un círculo Apolonio utiliza la primera definición de nuestra Trinidad, veamos la demostración que hace Apolonio

> "*Sea P cualquier punto de la intersección del plano de HK con la superficie, y F cualquier punto de la circunferencia del círculo BC. Dibuje PM, FL cada una perpendicular al plano del triángulo ABC, y se intersecan con las líneas rectas HK, BC, respectivamente, en M, L. Entonces PM, FL son paralelas.*
>
> *Dibujar a través de M la línea recta DE paralela a BC, y se deduce que el plano a través de DME, PM es paralelo a la base BC del cono.*
>
> *Así, la sección de DPE es un círculo, y* $DM.ME = PM^2$
>
> *Pero, como el segmento DE es paralelo a BC, el ángulo ADE es igual al ángulo*

ABC que por hipótesis es igual al ángulo AKH.

Por lo tanto, en los triángulos HDM, EKM los ángulos HDM, EKM son iguales, como también lo son los ángulos verticales en M.

Por tanto, el HDM triángulos, EKM son similares. De ahí

$$HM{:}MD = EM{:}MK$$
$$\therefore HM.MK = DM.ME = PM^2$$

Y P es cualquier punto en la intersección del plano de HK con la superficie. Por lo tanto la sección realizada por el plano de HK es un círculo."(Heath, 1896, p. 3)

En esta demostración nos podemos dar cuenta de que la definición de círculo a través de la media proporcional era conocida y utilizada en esos tiempos, además de utilizar una definición poco conocida de círculo Apolonio nos da otra definición de círculo: la sección subcontraria.

Nuestra Trinidad está compuesta por tres definiciones: La primera es la definición utilizando la media proporcional, la segunda el corte de un cono por un plano paralelo a la base de un cono y la tercera la sección subcontraria.

Lo que buscamos al mostrarles esta Trinidad, además de darles a conocer tres definiciones de círculo que tal vez no conocían, es mostrarles que en Matemáticas los objetos no tienen una definición única, que dependiendo de la teoría podemos definirlos de distintas formas. Y si esto es así ¿por qué en muchas ocasiones enseñamos solo una definición de los objetos matemáticos? ¿Qué ventajas y desventajas tendría enseñar varias definiciones de los objetos matemáticos en el aula? ¿Es apropiado realizar esto en el aula? ¿Qué del pensamiento matemático se desarrollaría al momento de enseñar varias definiciones de un mismo objeto matemático?

Estas son preguntas que no responderemos el día de hoy pero que tal vez provocaran el interés de alguien o de todos en responderlas

Referencias

▸ Flatland - The Film (Eng Subtitle) - YouTube. (2014/11/26/18:24:21). from http://www.youtube.com/watch?v=Mfglluny8Z0

Heath. (1896). *Apollonius of Perga: Treatise on Conic Sections*: Cambrige: University Press.

Puertas Castaños, M. a. L. (1991). *Elementos LIBROS V-IX* Madrid: Gredos.

ANEXO 3. ¿MONOGAMIA O POLIGAMIA ENTRE DEFINICIONES Y OBJETOS MATEMÁTICOS?

Alexander Umbarila Forero, Nancy Edith Tovar Ojeda & Edgar Alberto Guacaneme Suárez

Licenciatura en Matemáticas • Universidad Pedagógica Nacional

Introducción

En el estudio que en el marco de nuestro trabajo de grado realizamos sobre el papel de las razones y proporciones geométricas en la definición de las cónicas en la obra de Apolonio de Perga, nos encontramos con un hecho aparentemente menor: en una obra matemática se emplea más de una definición de un mismo objeto matemático; en efecto, Apolonio, en su magistral obra sobre las secciones cónicas (T. L. Heath, 1896), utiliza diferentes definiciones de circunferencia (aunque también diferentes definiciones de círculo). Este hecho comenzó a cobrar importancia cuando lo contrastamos con nuestra creencia (hasta ese momento un tanto inconsciente) de que a cada objeto matemático le corresponde, de manera monógama (o más técnicamente biyectiva), una y solo una definición. Un nuevo matiz se le agregó a tal hecho, cuando tuvimos acceso a un breve artículo (Van Dormolen & Arcavi, 2000) en el que, desde nuestra interpretación, se plantea que escolarmente las definiciones de los objetos matemáticos deben atender al significado que la actividad matemática realizada sobre el objeto le asigne. Adicionalmente, nuestra reflexión sobre tal hecho se complejizó cuando tuvimos acceso a dos trabajos de grado, uno de pregrado (Espitia Florián & Solano Bernal, 2013b) y otro de postgrado (Ortiz Gómez & Yopasá Murcia, 2013), en donde se ampliaba el repertorio de definiciones de circunferencia (y eventualmente de círculo).

En el presente escrito inicialmente se acopian algunos aspectos sobre las definiciones de circunferencia, para luego presentar algunos elementos de nuestra reflexión sobre la relación monógama o polígama entre definiciones y el objeto matemático circunferencia.

Definiciones de circunferencia

En la obra de Apolonio se identifica la alusión a los objetos círculo y circunferencia desde el inicio de la obra, cuando se establecen estos como parte de los objetos implicados en la construcción de un cono (o más precisamente de un cono doble):

> If a straight line indefinite in length, and passing always through a fixed point, be made to move round the circumference of a circle which is not in the same plane with the point, so as to pass successively through every point of that circumference, the moving straight line will trace out the surface of a **double cone**, or two similar cones lying in opposite directions and meeting in the fixed point, which is the **apex** of each cone. (T. L. Heath, 1896, p. 1)

Suponemos que acá los términos "circunferencia" y "círculo" atienden a la definición euclidiana reportada en *Elementos*[8], hoy en día parafraseada en la definición usual[9] que alude a un radio constante y un punto centro. Esta suposición se basa en que en la demostración de la proposición I.4 (T. L. Heath, 1896, pp. 1-2), a través de la cual establece que la circunferencia (o el círculo) es la sección resultante del corte de un cono con un plano paralelo a la base del cono, Apolonio emplea el hecho de que uno de los segmentos genéricos utilizados es de longitud constante y uno de sus extremos es un punto fijo.

Por otra parte en la demostración de la proposición I.5 (T. L. Heath, 1896, pp. 2-3), a través de la cual se define y caracteriza la sección subcontraria[10], Apolonio emplea una definición alterna de circunferencia al reseñar que se satisface una condición de media proporcional entre unos segmentos; en efecto, en tal demostración señala que se satisface la condición

---

[8] "Un círculo es una figura plana comprendida por una línea [que se llama circunferencia] tal que todas las rectas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí." (Puertas, 1991, p. 193).

[9] Sea P un punto de un plano dado y r un número positivo. La circunferencia con centro P y r radio es el conjunto de todos los puntos del plano que están a la distancia r del punto.

[10] "There are two series of circular sections of an oblique cone, one series being parallel to the base, and the other consisting of the sections subcontrary to the first series." (T. L. Heath, 1896, p. 3)

$DM \cdot ME = PM^2$, o lo que es casi-equivalente que se satisface la proporción $\frac{DM}{PM} = \frac{PM}{ME}$, que establece un vínculo con la circunferencia, como se aprecia en la Figura 35.

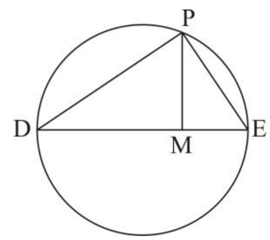


Figura 35 Circunferencia definida a través de la media proporcional

Siendo un tanto laxos, hemos identificado hasta acá en la obra de Apolonio cuatro definiciones de circunferencia. Una alude a los puntos que equidistan de un punto central, otra la establece como sección resultante del corte del cono con un plano paralelo a su base; una tercera la identifica con la sección subcontraria y otra con los puntos que satisfacen una proporción particular.

En un trabajo de grado (Ortiz Gómez & Yopasá Murcia, 2013) de la Especialización en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional, identificamos otras definiciones matemáticas de circunferencia[11]. Allí, por ejemplo se incluye:

- la definición que se da en el ámbito de la Geometría analítica (Una circunferencia es el conjunto de puntos en el plano x, y que están a una distancia fija r de un punto fijo $(h\,, k)$. La distancia r se llama radio y el punto fijo $(h\,, k)$ se llama centro de la circunferencia, además r estará dado por $r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$),
- la definición algebraica asociada a la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + EY + F = 0$ que establece la circunferencia como el conjunto de parejas ordenadas de variable real que satisfacen tal ecuación (bajo algunas condiciones de los coeficientes),
- y la definición topológica que establece que un círculo es un caso particular de una

[11] En ese mismo trabajo se acopian también interesantes definiciones no matemáticas y significados de circunferencia, asociados a actividades culturales y sociales de gentes de diversas épocas y etnias.

bola abierta definida en un espacio métrico (X,d) y, por tanto, una circunferencia es un caso particular de la frontera de dicha bola.

En otro trabajo de grado, este de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, identificamos el reporte de una definición alterna de circunferencia, como "el lugar geométrico de los puntos $C=(x,y)$ para los cuales su distancia a dos puntos dados $A=(x_1,y_1)$ y $B=(x_2,y_2)$ satisface la condición $d(A,C)=a \cdot d(B,C)$ con $a \in \mathbb{R}^+$" (Espitia Florián & Solano Bernal, 2013b, p. 83). Vale la pena reseñar que en esta definición los puntos A y B no pertenecen a la circunferencia ni ninguno de los dos constituye su centro, como lo reseñaron las autoras del trabajo en una ponencia (Espitia Florián & Solano Bernal, 2013a).

Nuestra reflexión (en curso)

Hoy en día tenemos claro que existen diferentes definiciones matemáticas de circunferencia y estamos abiertos a la posibilidad de encontrar otras; por ejemplo, recientemente hemos sido conscientes de que pensar en la trayectoria que describe una bicicleta al moverse con la misma velocidad y teniendo el manubrio inclinado en la misma dirección, nos aproxima a la definición de circunferencia como curva de curvatura constante, en el ámbito de la Geometría diferencial.

La diversidad de definiciones identificada nos lleva a entender que el manejo de un concepto matemático (en este caso el de circunferencia) no se restringe a la comprensión y empleo de una única definición del mismo; igualmente, nos permite entender que cada definición captura algunos aspectos o propiedades del objeto en cuestión, pero no todos los que se expresan en todos sus ámbitos matemáticos de aparición.

Ahora bien, en nuestra calidad de futuros profesores de Matemáticas, este asunto es de vital importancia, pues nos permite ser conscientes que el aprendizaje de un objeto matemático por parte de nuestros estudiantes no se restringe a la repetición y uso de una "buena" definición, sino que incluye la construcción de buenas y variadas definiciones del objeto, a partir del significado que se asocie a diversas actividades matemáticas realizadas con este.

No obstante lo anterior, aún persiste una duda: si suponemos que significados diferentes generan objetos diferentes, y por tanto definiciones diferentes, ¿existirán tantos objetos matemáticos como definiciones y, en consecuencia, relaciones monógamas entre estos? o ¿persistirán las relaciones polígamas entre estos y estas?

Referencias

Espitia Florián, Katherine Tatiana, & Solano Bernal, Angee Samaris. (2013a). ¿Circunferencias sin centro ni radio? Paper presented at the 4a Escuela Colombiana de Historia y Educación Matemática, Santiago de Cali. Ponencia retrieved from

Espitia Florián, Katherine Tatiana, & Solano Bernal, Angee Samaris. (2013b). Dos cursos de Matemáticas-Tecnología analizados desde la perspectiva curricular colombiana. (Licenciatura en Matemáticas Trabajo de grado no publicado), Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C.

Heath, Thomas Little. (1896). Apollonius of Perga. Treatise on Conic Sections. Cambridge: University Press.

Ortiz Gómez, Néstor Javier, & Yopasá Murcia, Marisol (2013). Memorias de un curso sobre historia de las curvas matemáticas. (Especialización en Educación Matemática Trabajo de grado no publicado), Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C.

Puertas, María Luisa. (1991). Euclides. Elementos. Libros I-IV. Madrid: Editorial Gredos S.A.

Van Dormolen, Joop, & Arcavi, Abraham. (2000). What is a circle? Mathematics in School, 29(5), 15-19.

Estudiantes:

Eduardo Alexander Umbarila Forero
Estudiante Lic. en Matemáticas
Código 2007240069
dma217_aumbarila@pedagogica.edu.co

Nancy Edith Tovar Ojeda
Estudiante Lic. en Matemáticas
Código 2007140059
nanis1589@hotmail.com

Director:

Edgar Alberto Guacaneme Suárez
Profesor – Departamento de Matemáticas
Universidad Pedagógica Nacional