TUTORIAL DE GEOGEBRA: “GEOGEBRA APOYO TECNOLOGICO PARA LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO”

Autora: Murcia Rincón Myriam Liliana

Asesor: Benjamín Sarmiento

Profesor de planta del DMA de la Universidad Pedagógica Nacional

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C., 2012

TUTORIAL DE GEOGEBRA: “GEOGEBRA APOYO TECNOLOGICO PARA LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO”

Monografía para optar el título de

Licenciado en Matemáticas

Autora: Murcia Rincón Myriam Liliana

Asesor: Benjamín Sarmiento

Profesor de planta del DMA de la Universidad Pedagógica Nacional

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C., 2012

NOTA DE ACEPTACIÓN

____

____

____

____

ASESOR

____

JURADO

____

JURADO

____

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Tutorial de Geogebra*:* **“**Geogebra A*poyo tecnológico para la enseñanza del cálculo*”
Autor(es)	Myriam Liliana Murcia Rincón
Director	Benjamín Sarmiento
Publicación	Bogotá, 2012, 139p
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Recta secante, recta tangente, límite, derivada, monotonía, concavidad, Rolle, Lagrange, Weierstrass, Darboux, Bolzano, L`hopital y optimización.

2. Descripción

En este trabajo se presentan algunas herramientas del software Geogebra útiles para la construcción de actividades para la enseñanza del cálculo. Se dan ejemplos del uso de las diferentes herramientas del programa en la construcción de applets diseñados con el objetivo de complementar una serie de talleres sobre los principales teoremas del cálculo diferencial, los conceptos de límite y la derivada con sus aplicaciones. También se anexa un CD ejecutable que contiene el tutorial, los talleres, demostraciones de los teoremas y numerosos applets relacionados con los talleres.

3. Fuentes

1. Adams, L. y Antonio. A. (2006). Consecuencias de las TI en la educación. U. de las Américas Puebla y Texas Christian University.
2. Buxarrais, Ll. B, M... (2005). Las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) y los adolescentes. *Revista OEI. Ciudadanía, democracia y valores en sociedades plurales Línea temática: Valores y tecnologías de la información y comunicación Número 5.*
3. Castiblanco. P. A. (2002). Proyecto “Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia” y sus avances. Dirección de Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media. Ministerio de Educación Nacional
4. Hohenwarter. M, Hohenwarter. J. (2009). Documento de ayuda de Geogebra. Manual oficial de la versión 3.2.
5. PÁEZ, H. G. (2001). Alfabetización en Informática para Docentes De Educación de Postgrado. Un Estudio de Caso Venezolano. Facultad de Ciencias de la Educación,

Universidad de Carabobo. Valencia, Estado Carabobo, Venezuela
4. Contenidos
El documento está conformado por dos capítulos: *El primer capítulo* muestra una descripción detallada de algunas herramientas de Geogebra útiles no solo para diseñar actividades para la enseñanza de la geometría sino también para la enseñanza del cálculo. *El segundo capítulo* presenta las herramientas descritas en base a los talleres realizados para el estudio del cálculo diferencial, como lo son los teoremas de concavidad, monotonía, Lagrange o del valor medio, Bolzano, Darboux, derivadas y optimización. Finalmente se anexan las demostraciones de los diferentes teoremas abordados en el trabajo.
5. Metodología
Para el desarrollo de este trabajo se siguieron los siguientes pasos: Se realizó una exploración detallada del software de Geogebra, el cual es un software libre y de fácil acceso a la comunidad en general. Se crearon talleres sobre teoremas y temas del cálculo diferencial aprovechándose Geogebra para diseñar los applets que apoyan a estos talleres, que a su vez se convierten en ejemplos sobre el uso de las diferentes herramientas del programa. Finalmente se diseñó una versión digital del tutorial mediante un CD ejecutable que contiene los 15 talleres, demostraciones de los teoremas y los applets correspondientes.
6. Conclusiones
Geogebra es un software que favorece el proceso de aprendizaje de conocimientos matemáticos abstractos, ya que por medio de la construcción de applets y en unión con el diseño de talleres, estimulan y exigen al estudiante ser siempre activo en la construcción de su propio conocimiento junto a un aprendizaje más significativo. Es importante notar que el software no puede ni debe remplazar la labor del docente ya que es un mediador entre la máquina y el estudiante, el docente debe ser guía para lograr los objetivos del proceso de enseñanza. Se pretende que la creación de los talleres junto con los applets permita tener un acercamiento más visual de los elementos desarrollados particularmente en el cálculo diferencial, ya que es una experiencia que no está normalmente en las aulas de clase.

Elaborado por:	Myriam Liliana Murcia Rincón
Revisado por:	Benjamín Sarmiento

Fecha de elaboración del Resumen:	23	11	2012

Tabla de Contenido

INDICE DE GRAFICAS

INDICE DE TABLAS

INTRODUCCION

Pensando siempre en el mejoramiento de la calidad de la educación, se diseñó este trabajo titulado “*Tutorial de Geogebra:* Geogebra *Apoyo tecnológico para la enseñanza del cálculo”*, el cual busca fortalecer el uso de las tecnologías en las aulas de clase y más en la educación matemática, ya que esta para la gran mayoría de los estudiantes es difícil y compleja. Por otro lado se observa que el papel del docente debe estar siempre encaminado a ser guía del estudiante, pero para que esto se de, este debe estar preparado, eso significa que este trabajo muy seguramente le será útil en las preparaciones de clase y en el entendimiento de algunos conceptos matemáticos.

El trabajo busca brindar un tutorial, en el que se presentan algunas herramientas del software Geogebra para la construcción de applets, que posteriormente se proponen para algunas actividades concretas del cálculo diferencial a partir de su creación como visualizador y no como enseñanza de construcción.

Con ayuda de las herramientas de Geogebra se crearon applets dinámicos para dar más significación a los teoremas tratados del cálculo diferencial, lo cual permite un acercamiento entre el docente y los estudiantes a la hora de desarrollar las actividades creadas, esto gracias a las diversas utilidades que presenta el software Geogebra, para la enseñanza del concepto matemático.

El documento está organizado en dos capítulos; en el primer capítulo se describen las herramientas que se utilizan en la creación de los applets que modelan los diferentes conceptos matemáticos como la idea de límite, la de derivada con sus aplicaciones y diferentes teoremas del cálculo diferencial entre otros. El segundo capítulo comprende el diseño de quince talleres sobre los principales teoremas del cálculo diferencial, complementados con applets dinámicos que fueron construidos con algunas herramientas de Geogebra para dar más significado a los conceptos tratados.

Al final del documento se anexan las demostraciones de cada uno de los talleres que serán de utilidad para los docentes a la hora de formalizar con sus estudiantes los teoremas vistos.

Finalmente para complementar el documento se presenta un CD ejecutable que contiene los talleres, las demostraciones de los teoremas y numerosos applets. Por otro lado se anexa también un manual del CD para facilidad del usuario.

OBJETIVO GENERAL

Explicar las funciones matemáticas de Geogebra y ejemplificar su uso en el cálculo diferencial.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

- Explorar detalladamente el programa GeoGebra.
- Describir y crear actividades para el funcionamiento de algunas sentencias de GeoGebra.
- Escribir un tutorial para el uso y el manejo de GeoGebra en el cálculo diferencial.

USO DE LA TECNOLOGIA EN LA ENSEÑANZA.

En la actualidad la tecnología se ha ido extendiendo por todos los rincones y forma parte del diario vivir del ser humano. Es por ello que los docentes en sus clases deben aprovechar esta herramienta para crear una ruta de aprendizaje efectiva entre los conocimientos y el estudiante.

Ahora, "De la participación pasiva modelada por la llamada enseñanza tradicional, progresivamente se pasa a la participación activa en la enseñanza asistida por computadores. Este rol activo se acrecienta en la actualidad con la utilización de las redes de comunicación, particularmente, a través de la red de redes, Internet. La posibilidad de interactuar, de compartir experiencias e información con millones de pares, ha influido en el comportamiento académico de los estudiantes obligando, como ya se ha dicho, al docente a asumir también nuevos papeles" Páez (2001)

Con la construcción de los applets en Geogebra se pueden crear actividades que permitan tener un acercamiento más visual del concepto, lo cual es el fundamento de este tutorial, ya que esté permite que se aproveche la tecnología particularmente con los temas tratados del cálculo diferencial.

Es importante notar que "estas tecnologías son simplemente un elemento curricular más y por tanto dependerán de cómo se apliquen o en dónde se apliquen para que tengan relevancia en un buen proceso educativo." (Adams, 2006). No es suficiente con tener el mejor software de aprendizaje si no hay alguien que le guie.

GEOGEBRA

Geogebra es un software matemático creado por Markus Hohenwarter, disponible desde el año 2001, se puede descargar fácilmente desde su página principal www.geogebra.at, ya que este es un software libre y de fácil acceso. Se destaca principalmente por sus cálculos simbólicos y numéricos en los que estarían también programas como Derive, Mapple, mathematica y mathlab. Por otro lado también encontramos que Geogebra es un software Dinámico como Cabri y Cinderella entre otros. Con lo que se puede apreciar la multiplicidad del software que permite realizar cálculos simbólicos, numéricos y crear applets dinámicos, que finalmente podrán ser visualizados como páginas web interactivas, al ser exportado como (applet de Java).[1]

Actualmente en la internet se puede encontrar un *manual oficial de la versión 3.2, Documento de ayuda de Geogebra*. El cual fue documento base para la creación del trabajo.

Geogebra permite crear applets dinámicos como se describen en este tutorial en el que por medio de ellos se fortalecen los conceptos para que le den más significación a los teoremas tratados del cálculo diferencial.

---

[1] LOSADA. Liste Rafael. Geogebra: la eficiencia de la intuición. [Consultado 10 May. 2012. geogebra.pdf

[2] CHILE. MINISTERIO DE EDUCACIÓN. Enlaces, Centro de Educación y Tecnología. [Artículo

MARCO TEÓRICO

A continuación se presentan los fundamentos teóricos presentes en la construcción de los applets y los elementos del cálculo desarrollados en los talleres.

Para la construcción de los applets se puede proceder desde la ventana algebraica o gráfica, “en la pantalla algebraica se encuentran todos los elementos construidos en la pantalla geométrica, con sus respectivas coordenadas, colores, etiquetes, además de sus respectivas magnitudes y ecuaciones según corresponda a una recta, cónica u otra figura. GeoGebra tiene la potencia de manejarse con variables vinculadas a números, vectores y puntos; permite hallar derivadas e integrales de funciones y ofrece un repertorio de comandos propios del análisis matemático, para identificar puntos singulares de una función, como Raíces o Extremos”.[2]

Durante el primer capítulo del documento se describen cada una de las herramientas presentes en la construcción de los applets y además se desarrolla un paso a paso de la construcción de algunos de ellos.

Finalmente con los applets puede crear páginas web interactivas al “exportarse como una aplicación interactiva (applet de Java) embebida en una página web con un simple clic. Para los usuarios avanzados, Geogebra también dispone de una lista de parámetros ajustables en el código html del applet incrustado. Si usted es de los exigentes y todavía pide más versatilidad, Geogebra le ofrece todo un repertorio de métodos de JavaScript que le permitirán comunicar los

---

[2] CHILE. MINISTERIO DE EDUCACIÓN. Enlaces, Centro de Educación y Tecnología. [Artículo en Línea]. [Consultado 12 Jun. 2012]. Disponible en: <http://www.enlaces.cl/tp_enlaces/portales/tp0bd91cdfey63/uploadImg/File/3%20Dimension%20Pedagogica.pdf>

objetos y propiedades de la aplicación con comandos html u otras aplicaciones"[3]

Los conceptos del cálculo diferencial desarrollados en los talleres se presentan de acuerdo a los libros de cálculo de Apostol [4] y Leithol [5] así:

1. Teorema de Bolzano

Sea f una función tal que es continua en el intervalo $[a, b]$, y $f(a)\,f(b) < 0$. Entonces existe por lo menos un número c en el intervalo (a, b), tal que

$$f(c) = 0.$$

2. Teorema de Darboux

Sea f una función tal que es continua en el intervalo $[x_1, x_2]$, Si x_1, x_2 son dos puntos cualesquiera de $[a, b]$ tales que $f(x_1) \neq f(x_2)$, entonces la función f toma valores entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$ por lo menos una vez en el intervalo (x_1, x_2).

3. Teorema de Rolle

Sea f una función tal que: Es continua en el intervalo $[a, b]$, es diferenciable en el intervalo (a, b), $f(a) = 0$ y $f(b) = 0$. Entonces existe un número c en el intervalo (a, b), tal que $f'(c) = 0$.

---

[3] LOSADA. Liste Rafael. Geogebra: la eficiencia de la intuición. [Consultado 10 May. 2012. geogebra.pdf

[4] Apostol. Tom. M. Calculus. Volumen 1. Editorial Reverté.1984.

[5] Leithold, Louis. El cálculo. Séptima edición. Oxford University Press. 1998

4. Teorema de Lagrange

Sea f una función tal que es continua en el intervalo $[a, b]$ y es diferenciable en el intervalo (a, b). Entonces existe un número c en el intervalo (a, b), tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

5. Teorema de monotonía

Sea f una función tal que: Es continua en el intervalo $[a, b]$, y es diferenciable en el intervalo (a, b). Si $f'(x) > 0$ para todo x en (a, b), entonces f es creciente $[a, b]$. Si $f'(x) < 0$ para todo x en (a, b), entonces f es decreciente $[a, b]$

6. Teorema de concavidad

Sea f una función tal que es continua en el intervalo $[a, b]$, y es diferenciable en el intervalo (a, b). Si $f''(x) > 0$ para todo x en (a, b), entonces f es cóncava hacia arriba en $(c, f(c))$. Si $f''(x) < 0$ para todo x en (a, b) entonces f es cóncava hacia abajo en $(c, f(c))$.

7. Teorema de Weierstrass

Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, existen dos puntos x_1 y x_2 en $[a, b]$ tales que f alcanza valores extremos absolutos, $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para cualquier x en $[a, b]$

8. Teorema de Cauchy

Sean f y g son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$, y derivables en el intervalo abierto (a, b). Para toda x del intervalo abierto (a, b), $g'(x) \neq 0$. Entonces existe un z que pertenece a (a, b), tal que: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f\prime(z)}{g\prime(z)}$

9. Definición de Límite

Consideremos un intervalo abierto que contiene a a. Sea f una función definida en todos los números del intervalo excepto posiblemente en a y sea L un número real. La afirmación $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que: Si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$

10. Definición de Derivada

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a x, entonces la derivada de f en x, denotada por $f'(x)$, está dada por $f'(x) = \lim_{h \to 0} f(x + h) - f(x)$. Si este límite existe.

11. Triángulo inscrito en una semicircunferencia

Determine las dimensiones del mayor triángulo rectángulo que se puede inscribir en una semicircunferencia de radio 20 cm.

12. Caja con superficie mínima

Se quieren construir cajas con forma de paralelepípedo rectángulo que tengan una capacidad de $72\ dm^3$ y en donde los lados de la base han de estar en relación 1:2 ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la caja, para que el material gastado en su manufactura sea el menor posible?

13. Mínima suma de áreas

Se tiene un alambre de longitud 24 cm, con el que se quiere construir un cuadrado y un triángulo equilátero. ¿Cómo se debe dividir el alambre para que la suma de las áreas de las figuras construidas sea la menor posible?

14. Mínima hoja con texto impreso

En una página de libro, el texto impreso debe ocupar 12 dm^2.Las márgenes deben ser iguales a $0.5\ \mathrm{dm}$. Si se toma en consideración la economía del papel, ¿Qué dimensiones son las más ventajosas?

15. Menor suma de áreas

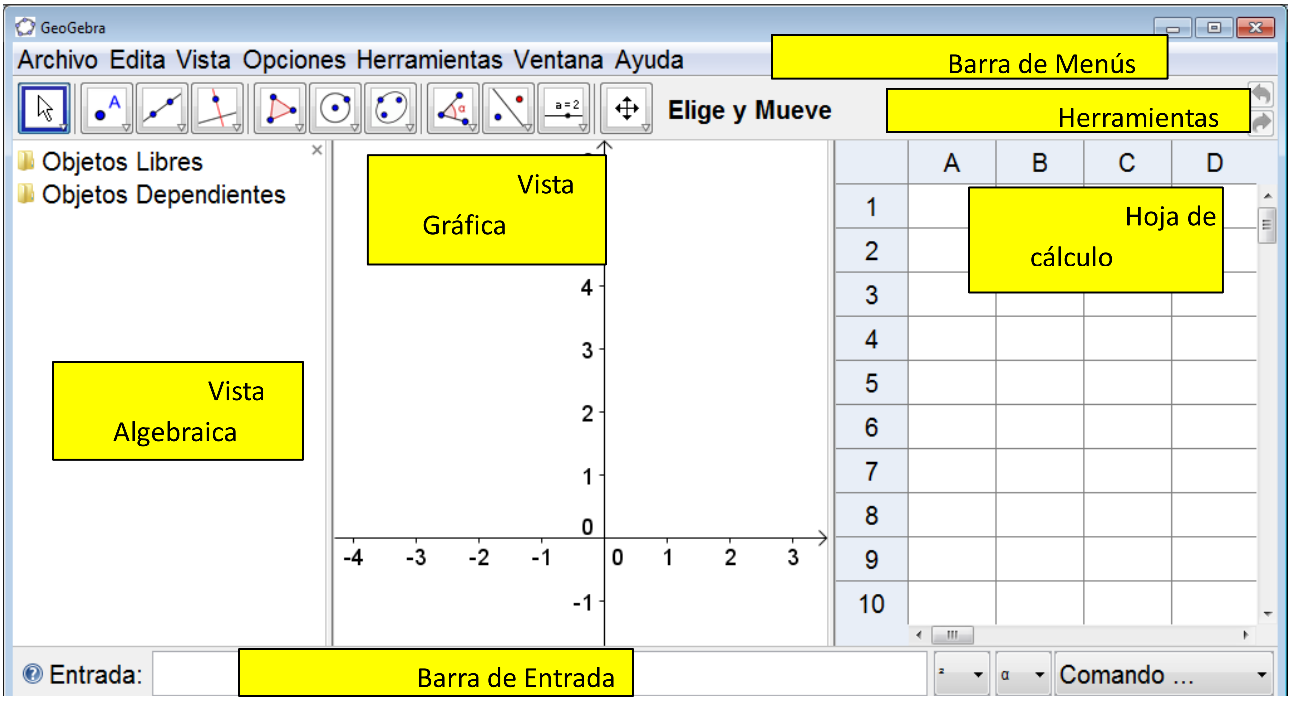
Un alambre de longitud de 20 cm se corta en dos partes para bordear un círculo y un hexágono regular. ¿Por dónde debe cortarse el alambre para que la suma de las áreas de las figuras bordeadas sea mínima?

CAPITULO 1

A continuación se presenta una descripción de las herramientas con que cuenta el software Geogebra junto con sus imágenes correspondientes que le permitirá tanto a los docentes como a los estudiantes interesados en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo diferencial a confrontar lo teórico con lo aplicativo.

GeoGebra cuenta con una barra de menús y submenús que se irán explicando con forme se reconoce este software educativo.

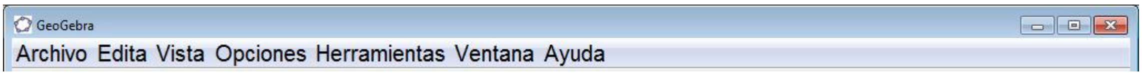
Cuando se ejecuta el software Geogebra aparece en la siguiente ventana sus componentes que son la barra de menús, las herramientas, la vista gráfica, la vista algebraica, la hoja de cálculo y la barra de entrada.



Gráfica 1

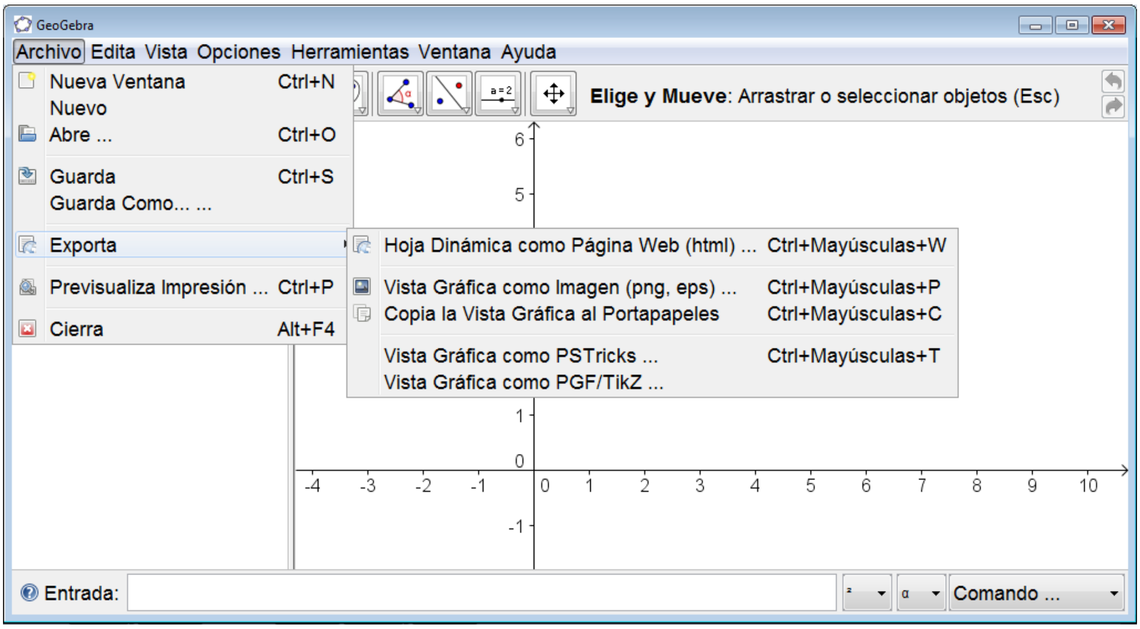
1.1 Barra de menús

Está conformada por siete menús (Archivo, Edita, Vista, Opciones, Herramientas, Ventana, Ayuda) cada uno de estos contiene opciones para trabajar con GeoGebra así:



Gráfica 2

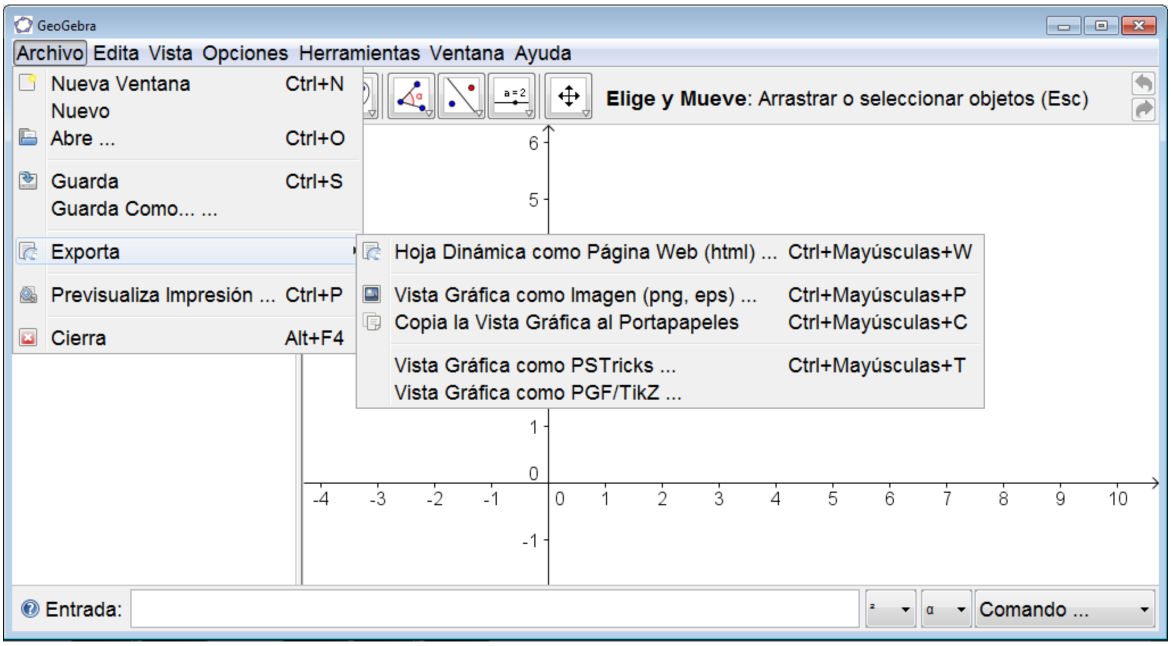
Al hacer clic sobre este menú aparecen seis opciones que le permitirán abrir una nueva ventana, crear un nuevo documento, guardar archivos, pre visualizar para imprimir o cerrar documentos.



Gráfica 3

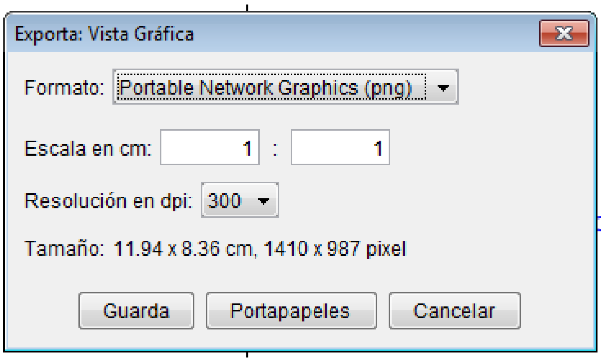
Al hacer clic en *Exportar*, despliega un menú que contiene cinco opciones que le permiten:

Exportar una hoja Dinámica como página Web (HTML) exporta el archivo como un applet de ***máquina virtual de Java.***



Gráfica 4

Vista gráfica como imagen (png.eps) permite guardar la imagen que se tiene en la Vista gráfica, al dar clic sobre este icono aparece una ventana, mostrando las especificaciones de la copia como el formato (png), la escala (cm), la resolución (dpi) y el tamaño (pixeles)de la imagen.



Gráfica 5

Copia la vista gráfica al portapapeles, es decir copia la imagen que se tenga en la Vista gráfica al portapapeles para ser utilizada en cualquier otro documento.

Vista gráfica como PSTricks (conjunto de macros TEX) permite visualizar la imagen como un formato de látex desde la vista gráfica

Vista gráfica como PGF/Tikz (***Portable Graphics Format***) guarda la imagen de la vista algebraica como un formato de látex

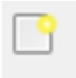
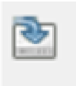
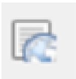
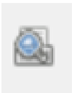
SIMBOLO	DESCRIPCION	ACCESO
	**Nueva ventana:** Permite acceder rápidamente a otra ventana	**Archivo**/nueva ventana
	**Abrir:** Elija este botón para abrir documentos ya antes guardados.	**Archivo**/Abre
	**Guardar:** Utilice esta opción para guardar su trabajo realizado de GeoGebra en algún espacio de su computador.	**Archivo**/Guarda
	**Exportar:** aparecerá otra ventana con submenus que le permiten exportar documentos así: -Hoja dinámica como pagina web (html) -Vista gráfica como imagen (png. Eps) -copia la vista gráfica al portapapeles -Vista gráfica como PSTricks -Vista gráfica como PGF/Tiks	**Archivo**/Exporta
	**Previsualizar impresión:** Muestra una nueva ventana con la vista del trabajo realizado en GeoGebra para su impresión.	**Archivo**/Previsualiza impresión
	**Cierra:** Elija esta opción para salir de GeoGebra o si lo prefiere oprima - Alt+F4	**Archivo**/ cierra

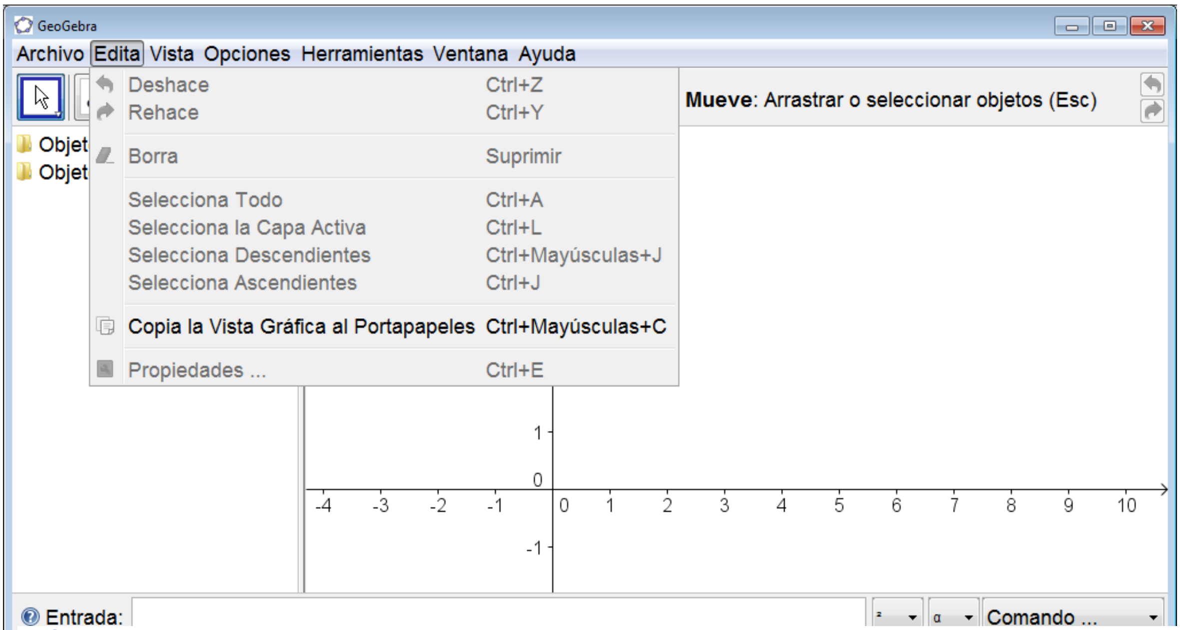
Tabla 1

1.1.2 Menú Edita

Este menú le permitirá deshacer o rehacer algunas acciones que se dieron tal vez equivocadas, permitiendo recuperar líneas, trazos o puntos. Puede también borrar los objetos que sean seleccionados desde la vista que el usuario desee, ya que puede borrar todo lo que se encuentre en la vista gráfica desde la vista algebraica o desde la misma vista gráfica.

Este menú le permite seleccionar todos los objetos que dependan del objeto seleccionado (descendiente) o también los objetos de los que es dependiente el objeto seleccionado (ascendiente).

Por otro lado la opción propiedades le permite personalizar algunas características del objeto creado y si lo desea puede copiar el documento desde la vista grafica al portapapeles para luego editarlo.

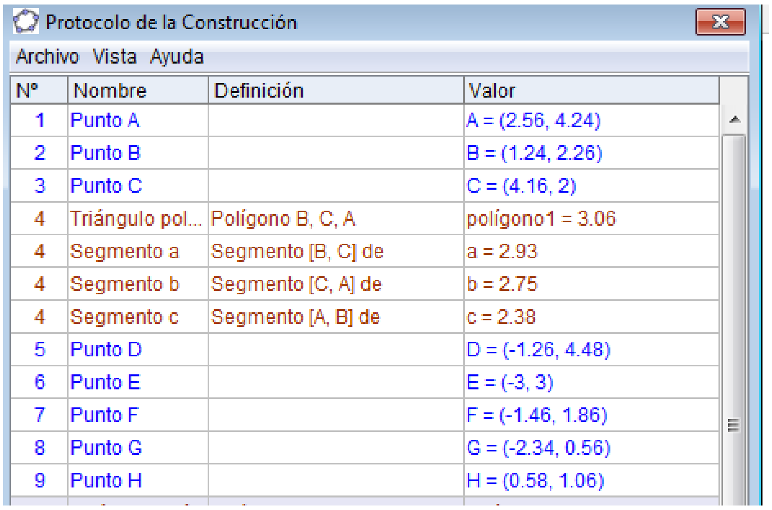


Gráfica 6

1.1.3 Menú Vista

Este menú le permite al usuario predefinir la vista de la ventana, ya que le permite mostrar u ocultar cada zona determinada anteriormente como la *vista gráfica, vista hoja de cálculo, barra de entrada, objetos auxiliares y lista de comandos*.

La división horizontal muestra en la pantalla las vistas: algebraica, gráfica y hoja de cálculo, horizontalmente de arriba hacia abajo o verticalmente de izquierda a derecha. La opción *protocolo de construcción* permite ver los pasos que se dieron para la construcción del objeto, se debe tener en cuenta que si se modifican los pasos desde esta ventana la figura también se modificará.



Protocolo de la Construcción

Archivo Vista Ayuda

Nº	Nombre	Definición	Valor
1	Punto A		A = (2.56, 4.24)
2	Punto B		B = (1.24, 2.26)
3	Punto C		C = (4.16, 2)
4	Triángulo pol...	Polígono B, C, A	polígono1 = 3.06
4	Segmento a	Segmento [B, C] de	a = 2.93
4	Segmento b	Segmento [C, A] de	b = 2.75
4	Segmento c	Segmento [A, B] de	c = 2.38
5	Punto D		D = (-1.26, 4.48)
6	Punto E		E = (-3, 3)
7	Punto F		F = (-1.46, 1.86)
8	Punto G		G = (-2.34, 0.56)
9	Punto H		H = (0.58, 1.06)

Gráfica 7

Barra de navegación por pasos de construcción: permite visualizar los pasos que fueron realizados para la construcción del objeto. Y se presenta por medio del siguiente controlador en el que reproduce, detiene, rebobina y avanza según la creación del objeto.

Gráfica 8

1.1.4 Menú Opciones

Este menú le brinda diferentes opciones para escoger el tamaño de la letra, el idioma en que desea ver el programa o por otro lado modificar la vista gráfica si lo desea.

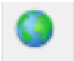
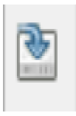
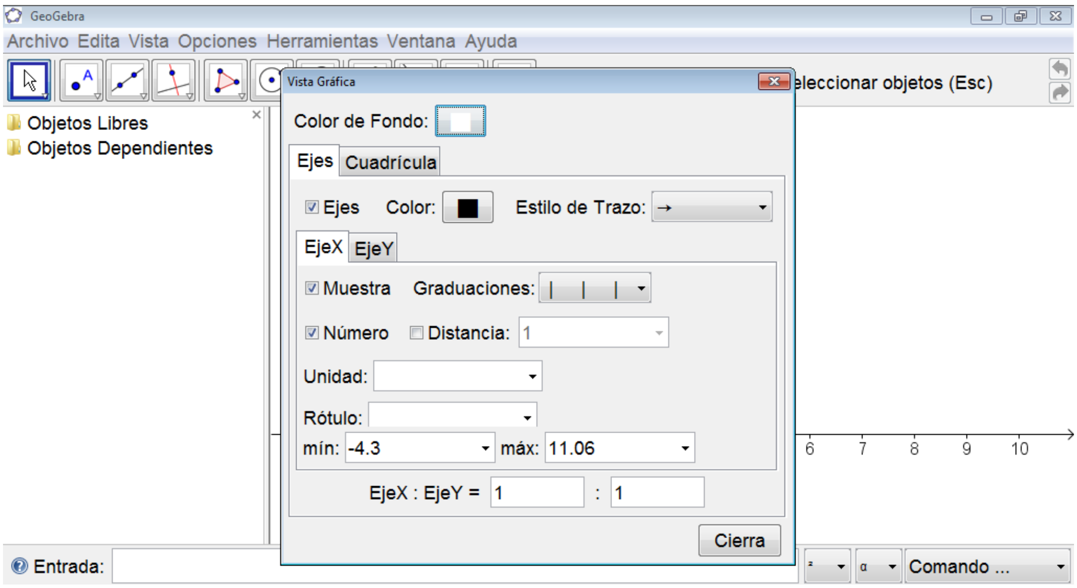
SIMBOLO	DESCRIPCION	ACCESO
	**Tamaño de la letra:** Muestra los diferentes tamaños de letra que serán utilizados en los rótulos y en las ventanas.	**Opciones/** Tamaño de la letra
	**Idioma:** Permite escoger el idioma utilizado por el usuario. Los idiomas determinados son un total de 54 ordenados de forma alfabética.	**Opciones/** Idioma
	**Vista gráfica:** Por medio de las propiedades se puede modificar la vista gráfica.	**Opciones/** Vista gráfica
	Cuando se establece una configuración nueva y se desea continuar con ella se hace clic en **Guardar configuración** o si de lo contrario desea las configuraciones establecidas por GeoGebra se hace clic en el icono **Restablecer la configuración original.**	**Opciones/**Guardar configuración

Tabla 2

- Vista gráfica: Al hacer clic sobre este icono aparece la siguiente ventana:



Gráfica 9

1.1.5 Menú Herramientas

Este menú es de gran utilidad a la hora de realizar algunas construcciones que ameritan la creación de herramientas nuevas porque le pueden llegar a simplificar numerosos pasos y tal vez repetitivos.

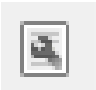
SIMBOLO	DESCRIPCION	ACCESO
	**Creación de herramienta nueva:** Cuando se selecciona este icono aparece una nueva ventana que permite crear una herramienta a partir de los objetos de salida o de entrada	**Herramientas/** Creación de herramienta nueva
	**Gestión de herramientas:** Al seleccionar este botón aparece una ventana que permite cambiar el nombre de la herramienta o modificar su icono.	**Herramientas/** Gestión de herramientas
	Personalizar barra de herramientas: Permite quitar , cambiar o añadir las herramientas que desee.	**Herramientas/** Personalizar barra de herramientas

Tabla 3

1.1.6 Menú Ventana

Al hacer clic sobre este menú permite abrir una nueva ventana sin tener que cerrar el documento actual, como sí lo haría cuando hace clic en el menú archivo y abrir un nuevo documento.

SIMBOLO	DESCRIPCION	ACCESO
	**Nueva ventana:** Permite acceder rápidamente a otra ventana	**Ventana/** Nueva ventana

Tabla 4

1.1.7 Menú Ayuda

Geogebra cuenta con una comunidad de usuarios que están constantemente actualizados en términos de construcciones novedosas y creativas. En este menú se encuentran los hipervínculos a la página web de Geogebra, foro, wikis y ayudas en línea.

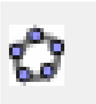
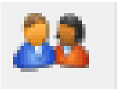
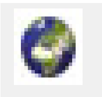
SIMBOLO	DESCRIPCION	ACCESO
	**Ayuda:** Muestra un documenta de ayuda de GeoGebra.	**Ayuda/** Ayuda
	**www.geogebra.org:** Permite ver la pagina de GeoGebra en internet.	**Ayuda/ www.geogebra.org**
	**GeoGebra Forum:** Accede al foro de usuarios de GeoGebra	**Ayuda/** GeoGebra Forum
	**GeoGebraWiki:** Accede al Wiki de usuarios de GeoGebra	**Ayuda/**GeoGebraWiki
	**Acerca de GeoGebra / Licencia:** Abre una ventana que permite ver los nombres de los creadores del software, sus traducciones y en general todo lo relacionado con la licencia de GeoGebra.	**Ayuda/** Acerca de GeoGebra / Licencia

Tabla 5

1.2. HERRAMIENTAS

Geogebra es un programa en el que se pueden modelar construcciones geométricas por su gran contenido en herramientas útiles como el gráfico de puntos libres o de intersectos, el trazo de segmentos, rectas perpendiculares o paralelas, rectas tangenciales entre otras, cuenta con una gran ayuda en la construcción de polígonos o circunferencias, arcos o sectores circulares, sin olvidar el apoyo que le brinda en las construcciones al mostrar cálculos de pendientes, distancias o áreas de diferentes objetos matemáticos.

A continuación se describen cada una de las herramientas con que cuenta el programa.

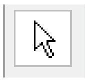
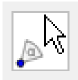
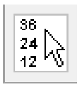
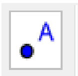
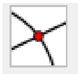
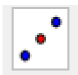
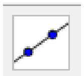
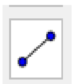
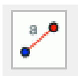
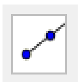
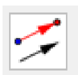
SIMBOLO	DESCRIPCION	ACCESO
	**Elige y Mueve:** Al pulsar sobre este icono puede señalar objetos y moverlos libremente.	_._
	**Rota en torno a un punto:** Permite elegir un punto como centro de cualquier objeto libre que deseemos girar alrededor de este.	**Rota**
	**Registra cambios en la hoja de cálculo:** Contiene el registro de los valores de cualquier objeto en la hoja de calculo.	_._
	**Nuevo punto:** Al hacer clic presenta un punto sobre la vista gráfica.	**Punto**
	**Intersección de dos objetos:** crea un punto fijando la intersección entre dos objetos.	**Interseca**
	**Punto medio o centro:** Ofrece el punto medio de un segmento y el centro de cualquier circunferencia.	**Centro y PuntoMedio**
	**Recta que pasa por dos puntos:** Utilicelo para crear una recta al dar clic sobre dos puntos que desea contenerlos.	**Recta**
	**Segmento entre dos puntos:** Elija este botón para que al dar clic sobre dos puntos se crea un segmento.	**Segmento**
	**Segmento dados punto extremo y longitud:** Al dar clic sobre un punto parecerá una ventana emergente para escribir la longitud del segmento deseado.	**Segmento**
	**Semirrecta que pasa por dos puntos:** Se presenta una semirrecta que pasa por dos puntos.	**Semirrecta**
	**Vector entre dos puntos:** Crea un vector al dar clic sobre dos puntos.	**Vector**
	**Vector desde un punto:** Esta opción permite crear un vector semejante a otro, se debe dar dar clic sobre un punto y sobre un vector a copiar.	**Vector**

Tabla 6

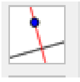
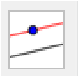
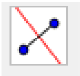
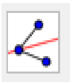
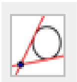
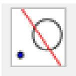
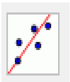
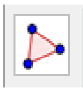
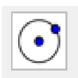
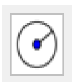
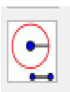
SIMBOLO	DESCRIPCION	COMANDO
	**Recta perpendicular:** Muestra la recta perpendicular al dar clic sobre un punto y la recta que desea cortar con la perpendicular.	**Perpendicular**
	**Recta paralela:** Permite crear una recta paralela a otra, se debe seleccionar la recta y el punto por donde quiere que pase la otra recta.	**Recta**
	**Mediatriz:** Este icono permite mostrar la mediatriz al dar clic sobre dos puntos del segmento.	**Mediatriz**
	**Bisectriz:** Para ver la bisectriz de un ángulo	**Bisectriz**
	**Tangentes:** Cuando selecciona un punto y una circunferencia muestra todas las rectas que pasan por el punto y son tangentes a la circunferencia.	**Tangente**
	**Recta polar o diametral:** Para obtener la recta polar es necesario seleccionar un punto y la cónica	**Polar**
	**Ajuste lineal:** Al seleccionar los puntos muestra el mejor ajuste lineal.	**AjustetLineal**
	**Lugar Geométrico:** Proporciona información del lugar geometrico que presenta una funcion o un punto.	**LugarGeométrico**
	**Polígono:** Al hacer clic permite crear un polígono cualquiera.	**Polígono**
	**Polígono regular:** Al hacer clic sobre dos puntos, muestra una ventana emergente para ingresar el numero de vértices que se desea tener en el polígono regular.	**Polígono**
	**Circunferencia dados su centro y uno de sus puntos:** Al seleccionar este botón muestra una circunferencia especificando el centro y un punto de la circunferencia.	**Circunferencia**
	**Circunferencia dados su centro y radio:** Al dar clic sobre un punto, aparece una ventana emergente para ingresar el valor del radio que se desee.	**Circunferencia**
	**Compás:** Elija este botón para que al dar clic sobre dos puntos, tome esta distancia para crear una circunferencia con este radio.	**Circunferencia**

Tabla 7

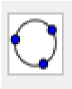
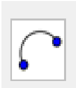
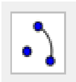
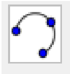
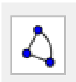
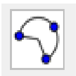
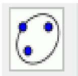
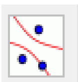
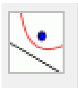
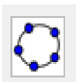
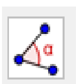
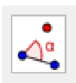
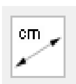
SIMBOLO	DESCRIPCION	ACCESO
	**Circunferencias dados tres de sus puntos:** Puede hacer clic sobre tres puntos y creara una circunferencia que los contiene.	**Circunferencia**
	**Semicircunferencias dados dos puntos:** Permite crear una semicircunferencia al dar clic en dos puntos.	**Semicirunferencia**
	**Arco de circunferencia dados su centro y dos extremos:** Utilice este botón para crear un arco con tres puntos uno de los cuales sera su centro.	**ArcoCircuncircular**
	**Arco de circunferencia dados tres de sus puntos:** Crea un arco de circunferencia al dar clic sobre tres puntos.	**ArxoCircumcircular**
	**Sector circular dados su centro y dos puntos:** Esta opción permite	**SectorCircular**
	**Sector circular dados tres puntos y su arco:** Para ver el sector circular y su arco al dar clic sobre tres puntos.	**SectorCircumcircular**
	**Elipse:** Permite crear una elipse que pasa por sus focos.	**Elipse**
	**Hipérbola:** Presenta una hipérbola fijando sus focos.	**Hipérbola**
	**Parábola:** Aparecerá una parábola al seleccionar un foco y su directriz.	**Parábola**
	**Cónica dados cinco de sus puntos: C**rea una sección cónica al dar clic sobre sus cinco puntos.	**Cónica**
	**Ángulo:** Elija este botón para medir el ángulo al dar clic sobre tres puntos.	**Angulo**
	**Ángulo dada su amplitud:** Al dar clic sobre dos puntos aparece una ventana emergente que le pide la amplitud del ángulo a graficar.	**Angulo**
	**Distancia o longitud:** Utilice este botón para medir la distancia entre dos puntos o rectas.	**Distancia y longitud**

Tabla 8

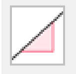
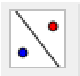
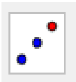
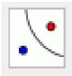
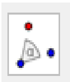
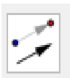
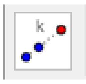
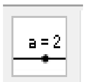
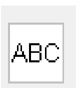
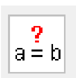
SIMBOLO	DESCRIPCION	ACCESO
	**Área:** Elija este botón para calcular el área de cualquier polígono	**Area**
	**Pendiente:** Cuando selecciona este icono le proporciona la pendiente de cualquier recta.	_-_
	**Refleja objeto en recta:** Cuando selecciona el objeto y luego la recta, el objeto quedara reflejado sobe la recta.	**Refleja**
	**Refleja objeto por punto:**Utilice este botón para reflejar un objeto tomando como base de reflexión.	**Refleja**
	**Refleja punto en circunferencia:** Al hacer clic sobre un punto y sobre una circunferencia se crea otro punto.	**Refleja**
	**Rota objeto en torno a punto el ángulo indicado:** Al hacer clic sobre un objeto a rotar y sobre un ángulo aparece una ventana con el ángulo de rotación y crea el objeto rotado.	**Rota**
	**Traslada objeto por un vector:** Elija este botón para realizar una traslación al hacer clic sobre un objeto y el vector dado.	**Traslada**
	**Homotecia desde un punto por un factor escala:** Al hacer clic sobre dos puntos muestra una ventana emergente para escribir el numero de alejamientos que quiere guardando la distancia de los dos puntos.	**Homotecia**
	**Deslizador:** Cuando se selecciona se abre una ventana emergente que permite crear un deslizador en un determinado intervalo.	_-_
	**Inserta texto:** Utilice esta herramienta para insertar texto en la vista gráfica. Para crear un texto dinámico con la variable A así: +A , Para crear un texto estático o mixto solo agregue comillas así: " hola " + A.	_-_
	**Inserta imagen:** Al hacer clic permite importar imágenes	_-_
	**Relación entre dos objetos:** Muestra la relación existente entre dos objetos en una ventana emergente.	**Relación**

Tabla 9

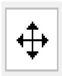
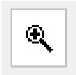
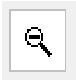
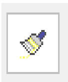
SIMBOLO	DESCRIPCION	ACCESO
	**Desplazar vista gráfica:** Permite realizar un desplazamiento libre de la zona gráfica.	_._
	**Zoom de acercamiento:** Muestra un acercamiento de la zona gráfica.	_._
	**Zoom de alejamiento:** Puede alejar la zona gráfica.	_._
	**Expone / oculta objeto:** Al hacer clic sobre el objeto permite activar o desactivar su forma visual.	_._
	**Expone / oculta rotulo:** Cuando selecciona permite nombrar un objeto u ocultarlo.	_._
	**Copia estilo visual:** Utilice esta herramienta para copiar el estilo de un objeto a otro.	_._
	**Elimina objeto:** Elija este botón para eliminar cualquier objeto de la zona gráfica.	**Borra**

Tabla 10

Para ejemplificar mejor el uso de cada una de las herramientas de Geogebra en el cálculo diferencial se presenta a continuación las siguientes actividades para el diseño de applets.

Actividad 1 construcción de la definición de derivada:

Para la construcción del applet siga los siguientes pasos:

1. En la barra de entrada digite la siguiente función:

$$f(x) = \frac{4 - (x - 3)(x - 7)(x + 3)}{20}$$

2. Ubique el punto A sobre el eje x para ello puede utilizar el comando Punto[EjeX]

3. Utilice la herramienta deslizador para crear uno en la parte superior derecha de la ventana gráfica, con un valor mínimo de 0.01 y un valor máximo de 5 y un incremento de 0.001. Llámelo h

4. Trace una circunferencia con centro en A y radio h

5. Con la herramienta punto de intersección encuentre el intersecto de entre la circunferencia y el eje x. Llame a este punto B

6. Trace la $recta\ a$ que pase por el punto A y que sea perpendicular al eje x.

7. Trace la *recta b* que pase por el punto B y perpendicular el eje x.

8. Con la herramienta punto de intersección determine el punto de intersección entre la gráfica de la función y la $recta\ a$. Llame a este punto C

9. Con la herramienta punto de intersección determine el punto de intersección entre la gráfica de la función y la $recta\ b$. Llame a este punto D

10. Trace la $recta\ d$ que pasa por los puntos C y D.

11. Trace la $recta\ e$ que pase por C y sea perpendicular al eje y.

12. Grafique la circunferencia g con centro en C y radio 1

13. Halle la intersección entre la circunferencia g y la *recta e*. A este punto llámelo E.

14. Trace la $recta\ i$ perpendicular que pasa por el punto E a la $recta\ e$.

15. Digite en la barra de entrada el comando interseca [d,i] para hallar el punto de intersección entre $la\ recta\ d$ y $la\ recta\ i$. A este punto llámelo F.

16. Trace el segmento que pasa por los puntos E y F.

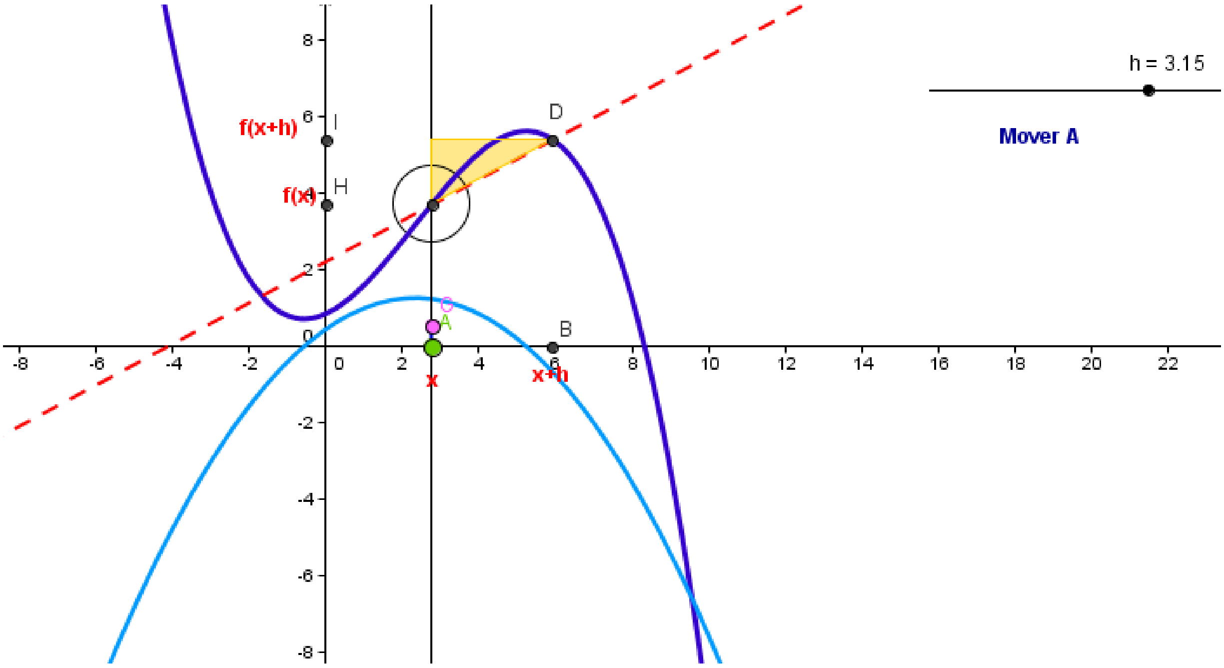
17. Trace la $recta\ k$ que pasa por los puntos E y A.

18. Con ayuda de las herramientas de Geogebra trace una $recta\ l$ que pase por el punto F y sea paralela a la recta k.

19. Trace el punto de intersección entre *las rectas a y l.* A este punto llámelo G.

20. Trace el segmento que pasa por los puntos A y G.

21. En la barra de entrada digite $f'(x)$, para que en la ventana gráfica se grafique la derivada de la función.



22. Con la herramienta texto digite: x, x+h, f(x), f(x+h) y ubíquelos en la posición A, B, H, I respectivamente.

23. Trace la $recta\ n$ que pase por el punto C y que sea perpendicular al eje y.

24. Trace la *recta p* que pase por D y que sea perpendicular al eje y.

25. Halle la intersección entre la recta n y el eje x. A este punto llámelo P.

26. Halle la intersección entre el punto P y el eje x. A este punto llámelo I.

27. Encuentre el punto de intersección entre el punto P y la $recta\ a$.

28. Con la herramienta polígono trace el triángulo CJD.

29. Una vez construido el applet oculte lo que no sea necesario.

Actividad 2 construcción

Para la construcción del applet siga los siguientes pasos:

1. En la barra de entrada digite la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 1$$

2. Ubique el punto F sobre el eje x.
3. Digite en la barra de entrada el siguiente comando Punto[EjeX]. Llame a este punto E.
4. Trace el segmento que únelos puntos E y F.
5. Delimite la función $f(x)$ escribiendo el comando $g(x) = Función[f, -3{,}3]$, para que solo se vea una parte de la función.
6. Oculte f(x), dando clic derecho al mouse y en ocultar objeto.
7. Ubique un punto A sobre la función g
8. Ahora, trace la recta a_1 que pasa por el punto A y es tangente a la curva g.
9. Ubique dos puntos sobre la recta a_1 separados más o menos 4 cm entre ellos. Llame a estos puntos B y D respectivamente.
10. Trace el segmento que une los puntos BD
11. En la barra de entrada digite

$$f'(x) = f'(x)$$

12. Luego digite en la barra de entrada

$$f''(x) = f''(x)$$

13. Trace la *recta a* que pasa por el punto C y que sea perpendicular al eje x.
14. Digite en la barra de entrada el punto $G = (0, f(x(C)))$
15. Trace la *recta b* que pasa por el punto G y que sea perpendicular al eje y.
16. Determine el punto de intersección entre las *rectas b y a.* A este punto llámelo H
17. Trace el segmento e que pasa por los puntos CH
18. Trace el segmento h que pasa por los puntos GH
19. En la herramienta texto crea un texto dinámico escribiendo así:

“f(”x(C)+””””)=”f(x(C))+””

20. Ahora otro texto dinámico para f’’ así:

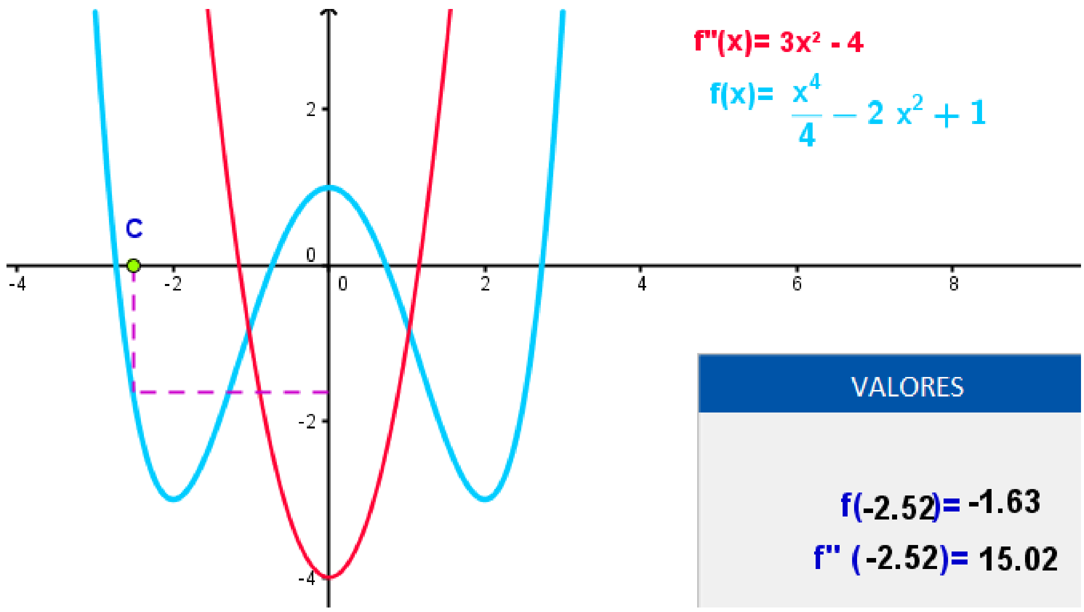
“f’’(”x(C)+””””)=”f’’(x(C))+””

21. Para que aparezca las ecuaciones de las funciones escribimos asi en la herramienta texto:

“f(x)=”f+””

“f’’(x)=”f’’+””

La tabla que aparece con título de valores es una imagen, pero si se desea se puede construir con la herramienta polígono.



Actividad 3 construcción de la definición de límite:

2. Para la construcción del applet siga los siguientes pasos:

1. En la barra de entrada digite la siguiente función:

3. $f(x) = -(x - 5)^2 + 6$
4. En la barra de entrada digite el comando Punto[EjeX]. Este punto llámelo a. Ubíquelo en el origen.
5. Trace el punto B sobre el eje x. Ubíquelo a dos unidades del punto A. Este punto llámelo b.
6. Trace el segmento ab.
7. Trace las rectas perpendiculares que pasan cada una por los puntos a y b con el eje x. Llámelas recta a y recta b
8. Con la herramienta intersección de dos objetos halle los intersectos entre las rectas perpendiculares y la función. llámelos C y D.
9. Luego trace las rectas c y d perpendiculares que pasen por los puntos C y D con respecto al eje y.
10. Ubique un punto E, sobre el segmento ab.
11. Encuentre los intersectos de la recta c y la recta d con respecto al eje y. Llámelos f y g respectivamente.
12. Ubique un punto H, sobre la recta c detrás del punto C y trace su perpendicular I
13. Halle el punto de intersección de la perpendicular I con la recta c.
14. Ahora ubique el punto J sobre la recta a y abajo del punto A.
15. Trace la recta f que pase por J y que sea perpendicular a la recta a.
16. Grafique el punto k de intersección entre la recta f y la recta b.
17. Con la herramienta texto digite $\delta, \varepsilon, f(a)$ y $f(b)$ y ubiquelos en los puntos F, H, G y F, respectivamente.
18. Una vez construido el applet oculte lo que no sea necesario.

CAPITULO 2

Este capítulo comprende el diseño de quince talleres sobre los principales teoremas del cálculo diferencial y algunos problemas de optimización, están complementados con las construcciones de applets en Geogebra que permiten tener un acercamiento más visual del concepto a tratar. Estos talleres están dirigidos a estudiantes de primer semestre de universidad que estén cursando la materia cálculo diferencial.

Los temas de los talleres fueron escogidos desde la experiencia del docente Benjamín Sarmiento y de la estudiante Liliana Murcia, estos se presentan ordenados en el documento de la siguiente forma: primero se exponen los teoremas, segundo los problemas de optimización y por último las definiciones de límite y derivada. Los teoremas se presentan de acuerdo a los libros de cálculo de Apostol (Apostol. Tom. M. Calculus. Volumen 1. Editorial Reverté.1984.) y Leithol (Leithold, Louis. El cálculo. Séptima edición. Oxford University Press. 1998).

Se pretende que estos talleres sirvan de guía tanto a los docentes en las planeaciones e implementaciones de sus clases de cálculo diferencial como a los estudiantes en el aprendizaje de los temas a tratar.

Nombre:	Código:	Fecha:

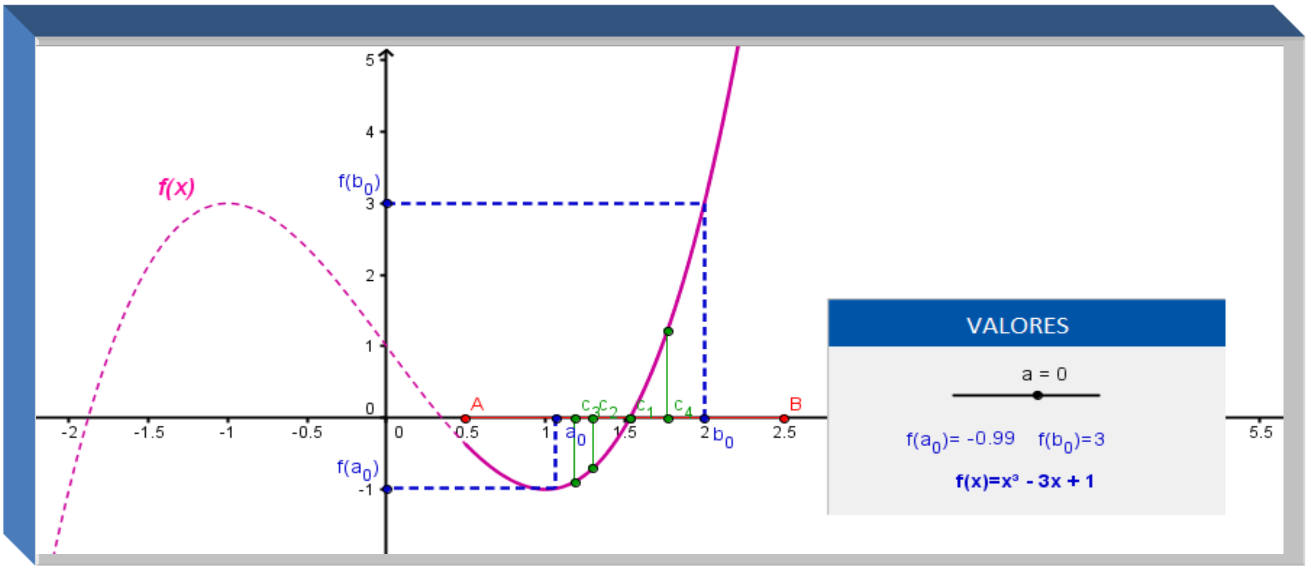
Teorema de Bolzano.

El applet Nº 1 muestra la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 3x + a$ en el intervalo $[1,2]$, los puntos los puntos $A, a_0\ B, y\ b_0$ son libres, el punto C es libre y se ubica en la mitad de cualquier intervalo dado por los puntos anteriores. Por otro lado se presenta un cuadro de convenciones con texto dinámico para algunos valores específicos de la función

Prerrequisitos:

- Continuidad
- Diferenciabilidad

Herramientas de Geogebra presentes en la construcción de los applets:



Gráfica 10

Actividades:

1. Desplace los puntos A y B hasta determinar el intervalo [0,2]
2. Desplace a_0 y b_0 en los extremos del intervalo $[1,\ 2]$ y al deslizador $a = 0$.

3. ¿Qué valores toma f cuando $x = a_0$ y $x = b_0$?

____

____

4. Complete la siguiente tabla:

Signo de $f(a_0)$	**Signo de$f(b_0)$**	**Signo de $f(a_0) * f(b_0)$**	**¿La gráfica de f corta al eje x en $(1,2)$?**

Tabla 11

5. Cuando mueve los extremos del intervalo aparecen unos segmentos, con ayuda de las herramientas de GeoGebra encuentre la longitud de al menos tres de ellos y complete la siguiente tabla (de mayor a menor).

Segmento	Longitud
1	
2	
3	

Tabla 12

6. ¿A qué valor se aproximan las longitudes de los segmentos y qué relación tiene con la tabla 1?

7. Analicé como se pueden construir esos segmentos

8. Ahora Ubique los puntos a_0 y b_0 respectivamente en los puntos extremos del intervalo [1,2], y el deslizador en $a = 1$.

9. ¿Qué valores toma f cuando $x = a_0$ y $x = b_0$?

10. Complete la siguiente tabla:

Signo de $f(a_0)$	Signo de $f(b_0)$	Signo de $f(a_0) * f(b_0)$	¿La gráfica de f corta al eje x en ? $(1, 2)$

Tabla 13

11. Haga uso de las herramientas de GeoGebra para hallar la longitud de al menos tres segmentos y complete la siguiente tabla (de mayor a menor la longitud de los segmentos).

Segmento	Longitud
1	
2	
3	

Tabla 14

12. Según el análisis anterior qué se puede concluir de:
    - $f(a_0) * f(b_0) < 0$
    - $f(a_0) * f(b_0) > 0$

Realiza el siguiente procedimiento analítico, ubicando $a_0\, y\, b_0$ en los extremos del intervalo [1, 2] y al deslizador a en cero. Luego saque sus propias conclusiones con respecto al apartado anterior.

13. Cuánto vale C_1 si:

$$C_1 = \left\{ \frac{a_0 + b_0}{2} \right.$$

$C_1 =$_____

- Con ayuda de la herramienta punto medio ubica a C en la gráfica

14. Después de calcular $f(C_1)$ se puede afirmar que su valor es:

- Cero
- Positivo
- Negativo

15. $Si\ f(C\_1) = 0$, entonces calcule S:

$S = f(a_0) * f(C_1)$

16. Si $\boldsymbol{S} < \boldsymbol{0}$, remplace $a_0 = C_1$ en el intervalo $[a_0\,, b_0]$ por $[C_1, b_0]$.

- Ubique los puntos $a_0\, y\, b_0$ respectivamente en el nuevo intervalo $[C_1\,, b_0\,]$.

17. Cuánto vale C_2 si:

$$C_2 = \left\{ \frac{c_1 + b_0}{2} \right.$$

18. ¿Qué valor tiene $f(C_2)$?

Entonces:

Describa la posición de C_2 respecto a la gráfica de la función y al eje de coordenadas.

____

____

19. Si $\boldsymbol{S} > \mathbf{0}$, remplace $b_0 = C_1$ en el intervalo $[a_0\,, b_0]$, $[a_0, C_1]$.

- Ubique los puntos $a_0\ y\ b_0$ respectivamente en el nuevo intervalo $[a_0\,, C_1\,]$.

20. Cuánto vale C_2 si:

$$C_2 = \left\{ \frac{a_0 + C_1}{2} \right.$$

21. ¿Qué valor tiene $f(C_2)$?

22. Si $f(C_2) = 0$, C_2 es la raíz de Bolzano.

Entonces:

Describa la posición de C_2 respecto a la gráfica de la función y al eje de coordenadas.

____

____

23. Si $f(C_2) = 0$, C_2 es la raíz de Bolzano.

24. Si $f(C_1) = 0$, C es la raíz según Bolzano de $f(x) = 0$.

Entonces:

Describa la posición de C_1 respecto a la gráfica de la función y al eje de coordenadas.

____

____

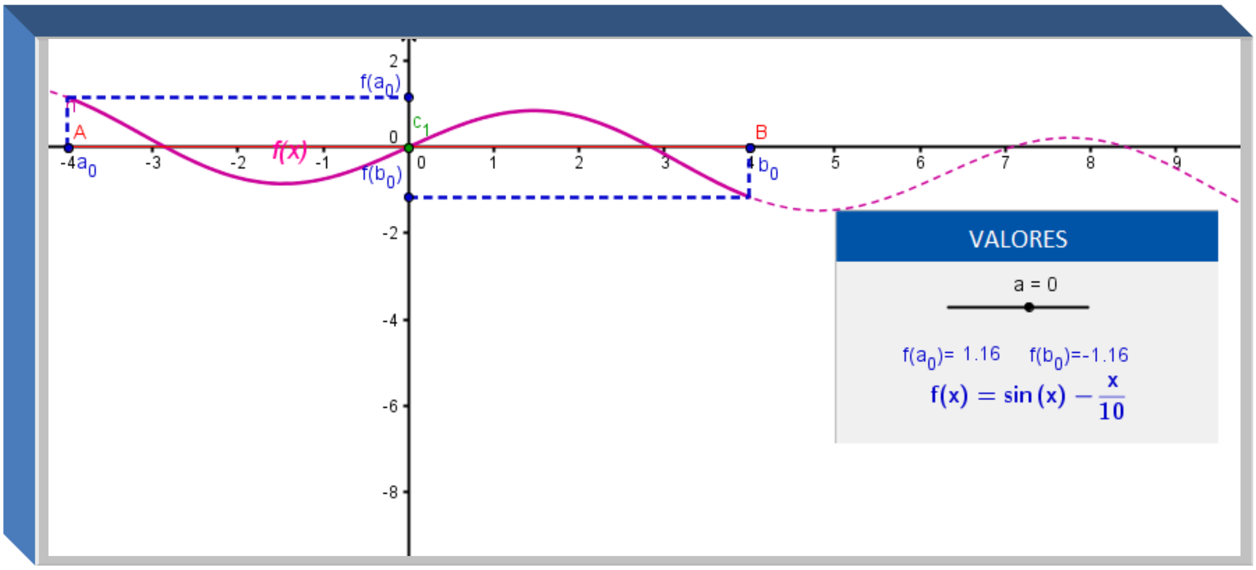
- ✓ Se podrían repetir los pasos de los puntos anteriormente indefinidamente de ser necesarios hasta encontrar las raíces de Bolzano $f\left(C_{x_0}\right) = 0$

25. ¿Qué característica tiene el valor encontrado anteriormente con el eje de

coordenadas?

26. Haga una conjetura en donde se relaciones las ubicaciones de C, C_1, C_2 .... Al que hace referencia el teorema según Bolzano.

27. Abra el applet Nº2, este muestra la función $f(x) = \sin(x) - \frac{x}{10}$ en el intervalo $[-4,4]$



Gráfica 11

28. Complete la siguiente tabla:

Intervalo	Relación de orden $f(a_0) * f(b_0)$	Nº raíces de Bolzano
$[-4, -2]$		
$[-2, 2]$		
$[2, 4]$		
$[-4, 4]$		

Tabla 15

29. Si las condiciones se dan el teorema de Bolzano nos garantiza:

- ✓ Exactamente una raíz
- ✓ A l menos 3 raíces
- ✓ Al menos una raíz

30. Después de revisar la conjetura, ¿Cómo modificaría su proposición? Trate de generalizar.

31. Explique el significado geométrico de su proposición.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Licenciatura de Matemáticas

Nombre:	Código:	Fecha:

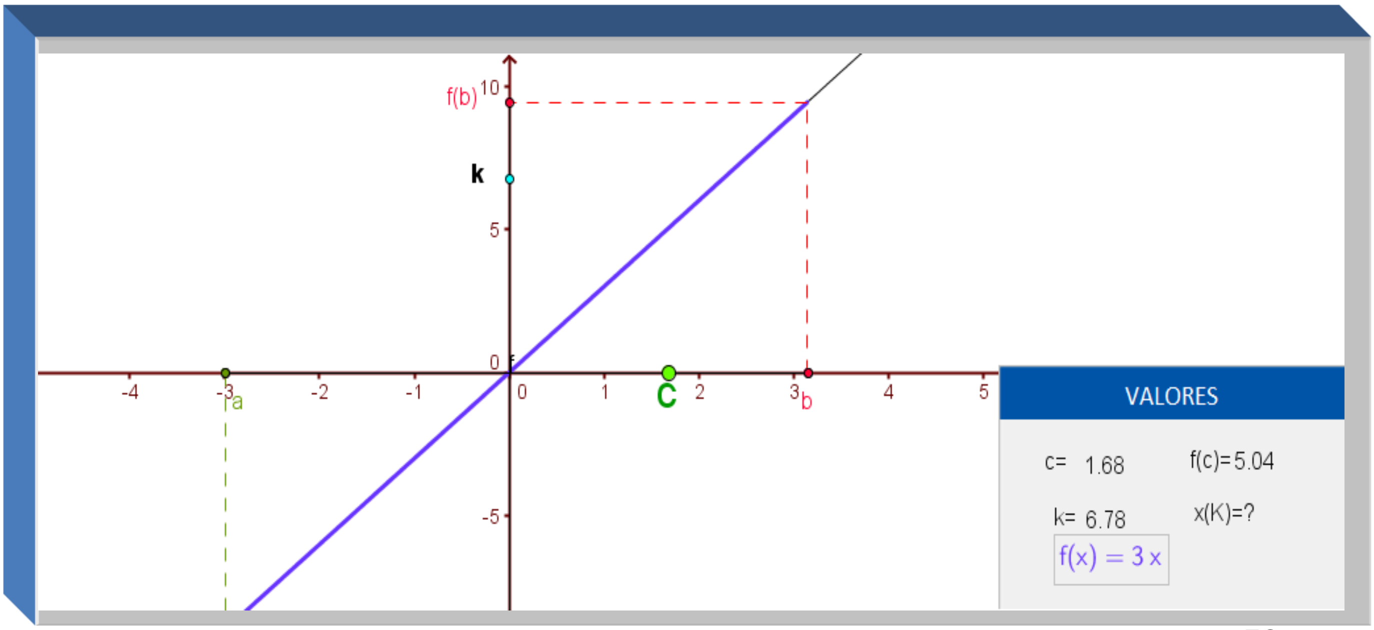
Teorema de Darboux.

El applet Nº 3 muestra las gráficas de las funciones $f(x) = 3x$, el punto C es un punto libre sobre el eje x y el punto k, un punto libre sobre el eje y.Por otro lado se presenta un cuadro de valores con texto dinámico para algunos valores específicos de la función en el punto c.

Prerrequisitos:

- Continuidad
- Diferenciabilidad

Herramientas de Geogebra presentes en la construcción de los applets:



Gráfica 12

Actividades:

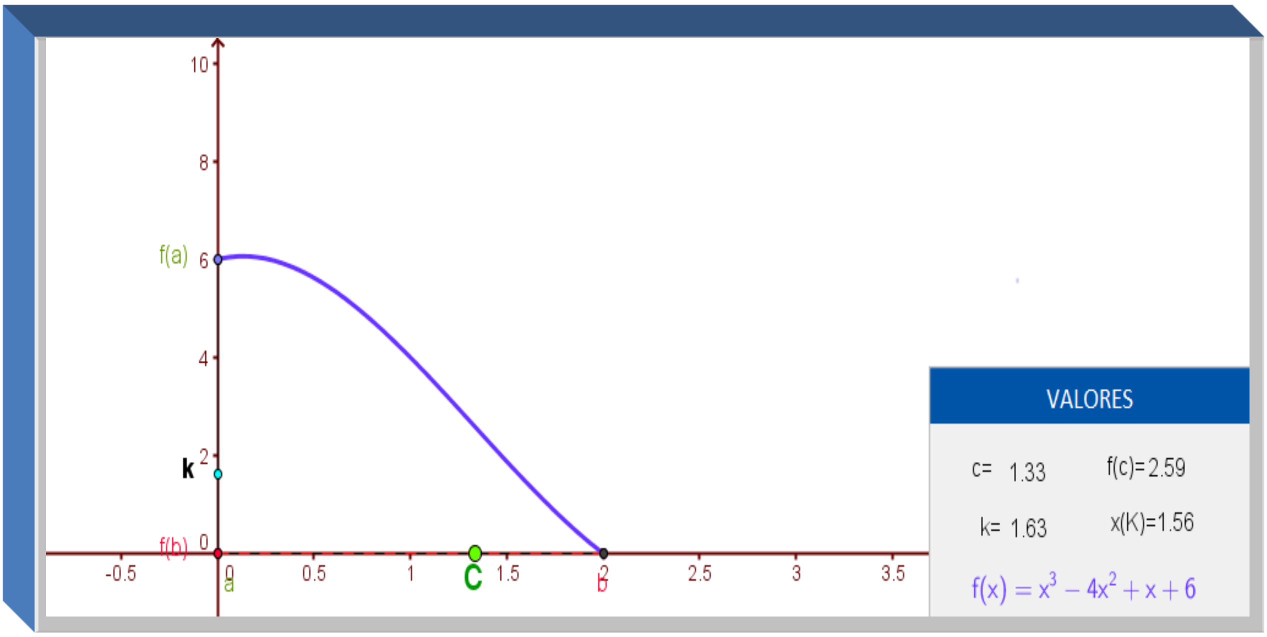
1. Considere la función del applet.
2. Ubique k por fuera de $(f(a), f(b))$
3. ¿Dónde queda la preimagen de K?

   - [ ] $(-\infty, a)$
   - [ ] (a, b)
   - [ ] (b, ∞)

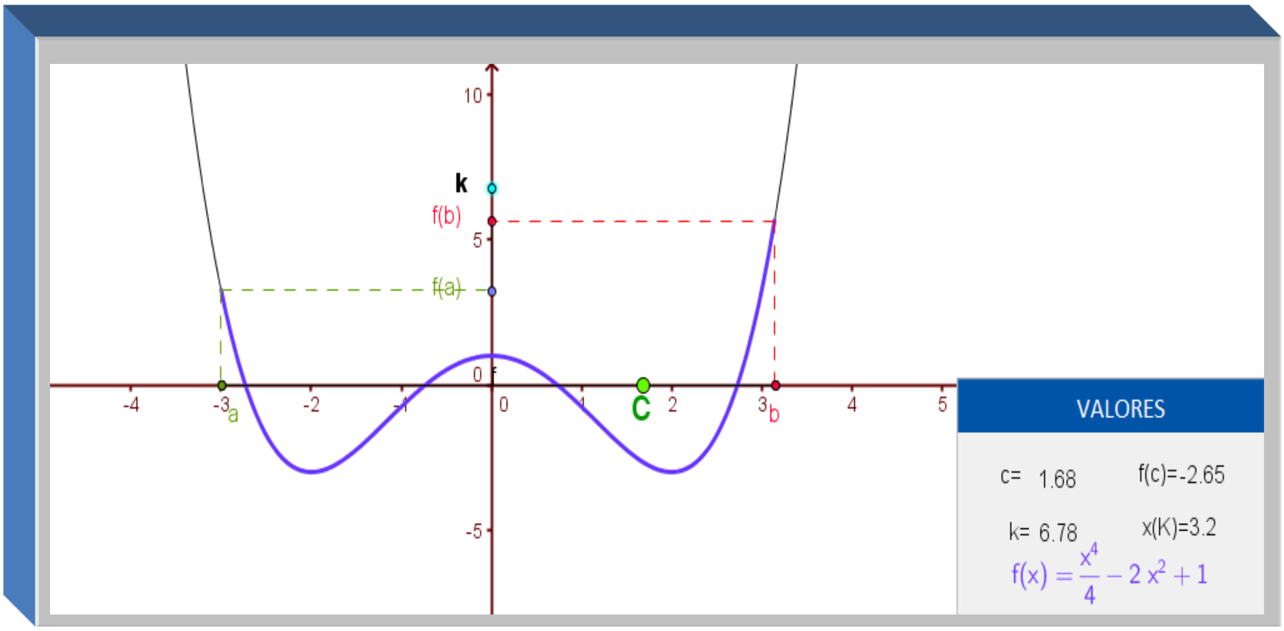
4. Ubique k entre $(f(a), f(b))$
5. ¿Dónde queda la preimagen de K?

   - [ ] $(-\infty, a)$
   - [ ] (a, b)
   - [ ] (b, ∞)

6. Para las siguientes funciones repita el proceso anterior.



Gráfica 13



Gráfica 14

7. ¿Cuántas preimagenes puede tener k?

____

____

____

____

8. ¿Dónde están ubicadas estas preimagenes?

☐ $(-\infty, a)$
☐ (a, b)
☐ (b, ∞)

9. Haga una conjetura en donde se relaciones las ubicaciones de k y c.

____

____

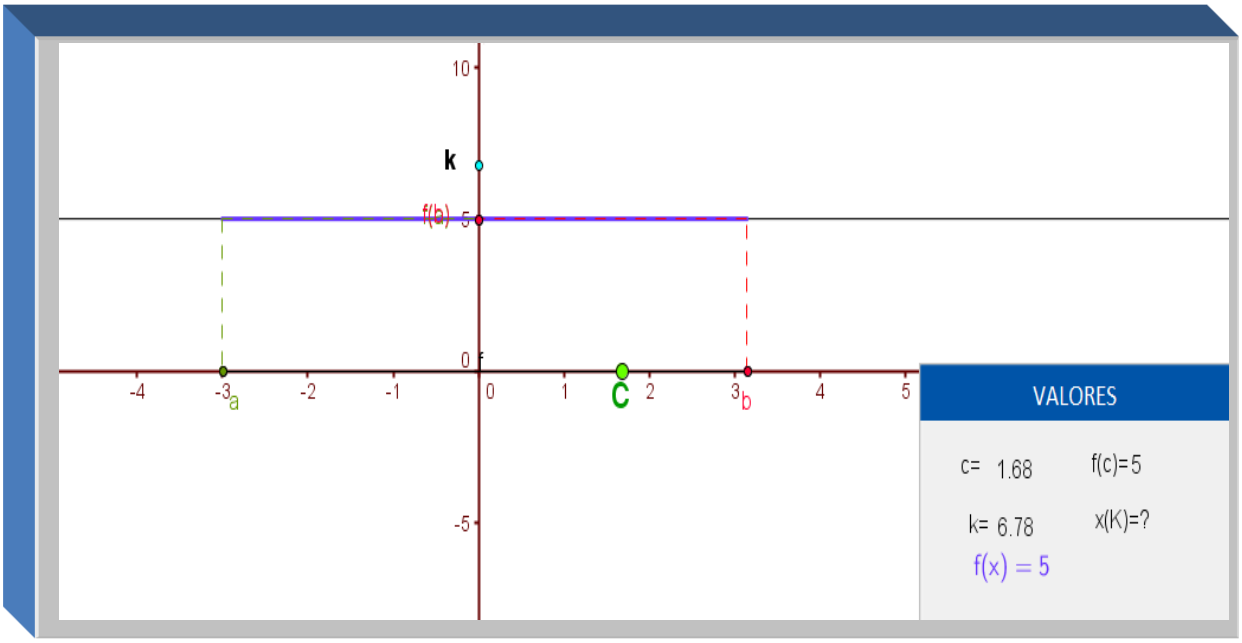
____

____

____

____

10. Realice los pasos indicados y conteste las mismas preguntas, por los puntos del 2 al 5, para cada una de las siguientes funciones.

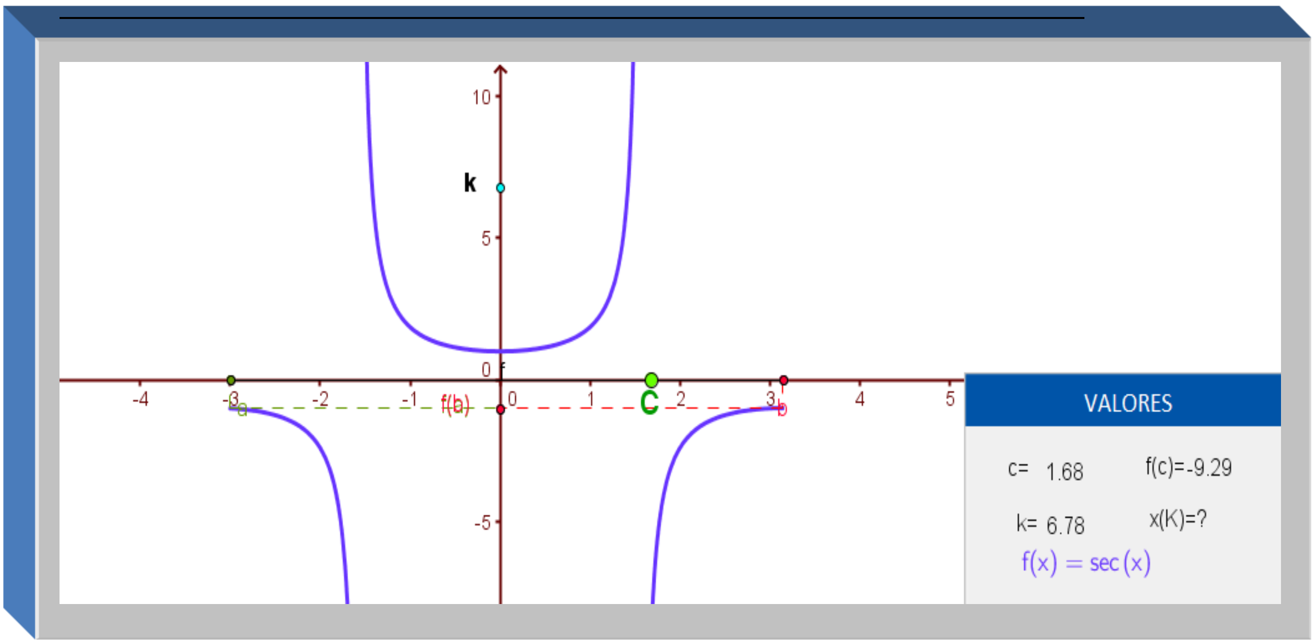


Gráfica 15

11. ¿Cuántas preimagenes tiene k?

___

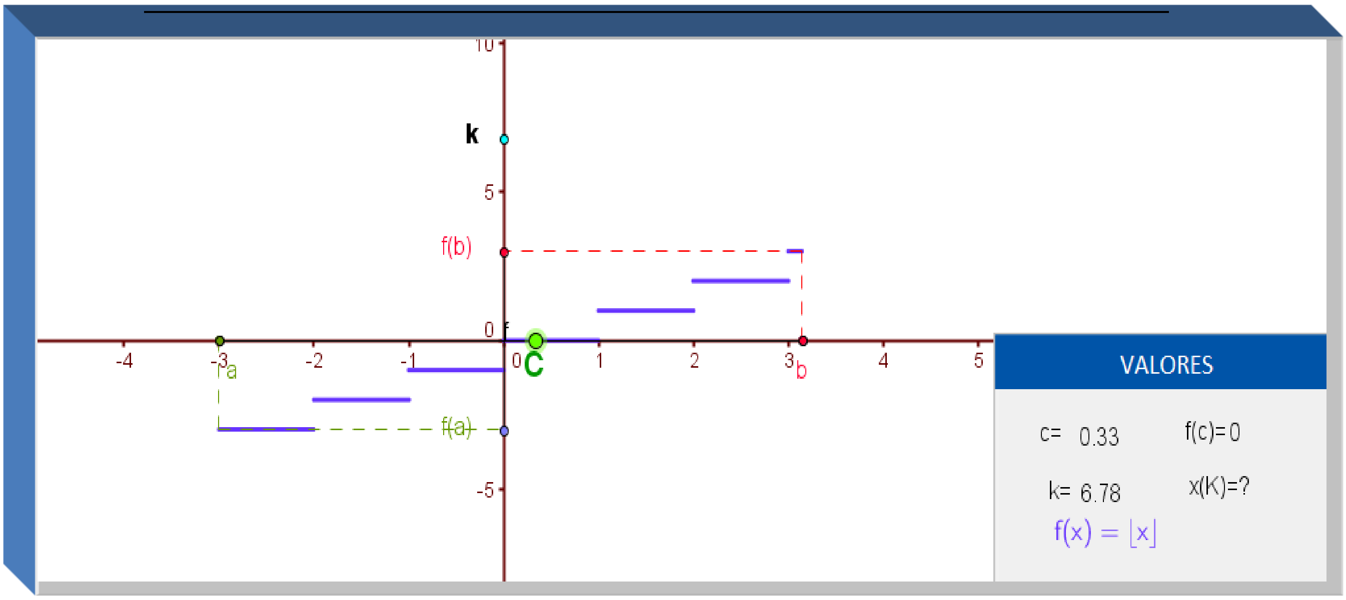
___



Gráfica 16

12. ¿Es necesario darle una condición a f para que exista al menos una c,

como preimagen de k?



Gráfica 17

13. ¿Es necesario darle una condición a f para que exista al menos una c, como preimagen de k?

14. Con base en los anteriores resultados, modifique su conjetura y escriba una nueva proposición.

15. Explique el significado geométrico de su proposición.

Nombre:	Código:	Fecha:

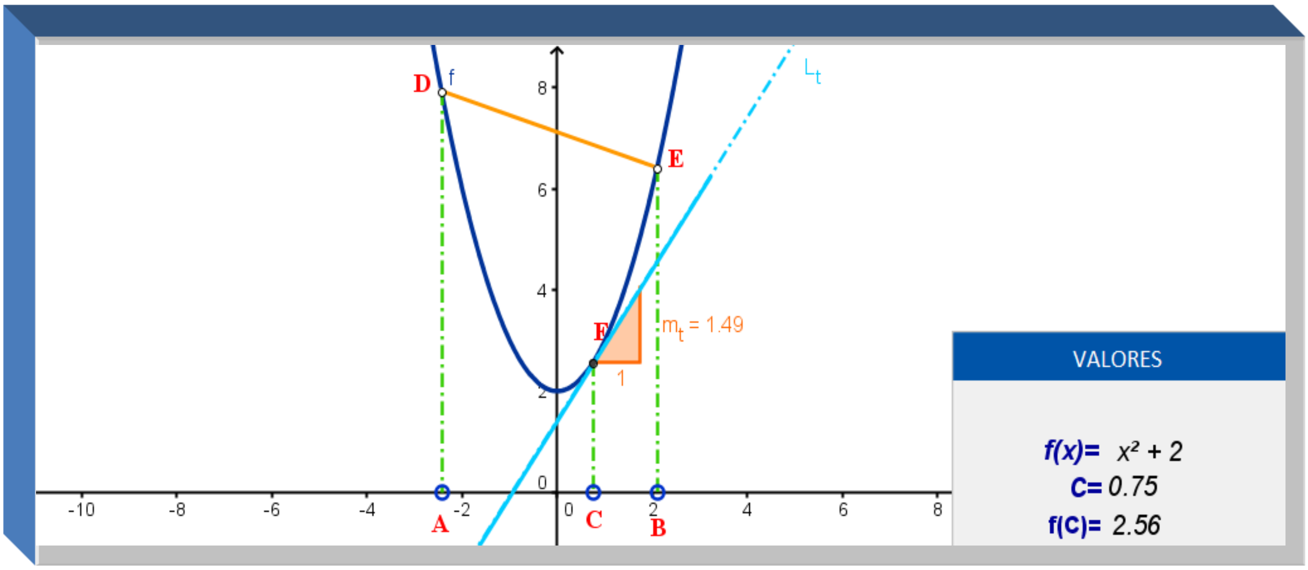
Teorema de Rolle.

El applet Nº 4 muestra la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2$ en el intervalo $[-2,2]$, los puntos A, B y C son libres, el punto C mueve la recta tangente L_t a la curva de la función por el punto F y se puede observar el segmento determinado por los puntos D y E. Por otro lado se presenta un cuadro de convenciones con texto dinámico para algunos valores específicos de la función, en este se debe tener presente que la letra C se refiere al valor $x(C)$.

Prerrequisitos:

- Recta paralela
- pendiente
- Teorema del valor medio de Lagrange
- Continuidad
- Diferenciabilidad

Herramientas de Geogebra presentes en la construcción de los applets:



Gráfica 18

Actividades:

1. Desplace los puntos A y B tal que $D < E$.

2. Trace la recta secante L_s que pase por D y E.

3. Grafique la pendiente m_s de la recta L_s

4. Desplace el punto C sobre el eje x, para que la recta L_t tangente a f sea paralela a la recta L_s
5. ¿En qué intervalo está ubicado C?

___

___

6. ¿Cuánto vale $x(C)$?

___

___

7. ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta L_s?

___

___

8. ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta L_t?

___

___

9. Desplace A y B tal que $D > E$

10. Desplace el punto C sobre el eje x , para que la recta L_t tangente a f sea paralela a la recta L_s
11. ¿En qué intervalo está ubicado C?

___

___

12. ¿Cuánto vale $x(C)$?

___

___

13. ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta L_s?

___

___

14. ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta L_t?

15. Ahora desplace A y B tal que $D = E$.

16. Desplace el punto C sobre el eje x para que la recta L_t tangente a f sea paralela a la recta L_s

17. ¿En qué intervalo está ubicado C?

18. ¿Cuánto vale $x(C)$?

19. ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta L_s?

20. ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta L_t?

21. Si el punto de tangencia F tiene coordenada $(x(C), y(C))$, dónde queda siempre ubicado $x(C)$ con respecto a los puntos A y B.

22. ¿Qué relación existe entre las pendientes m_s y m_t ?

23. ¿Qué relación existe entre $f\,'(C)$ y m_t?

24. ¿Encuentre alguna similitud o diferencia entre esta situación y las situaciones estudiadas en el taller del teorema de lagrange? Explique.

____

____

25. Enuncie una proposición donde relacione las pendientes m_s, m_t y el punto C.

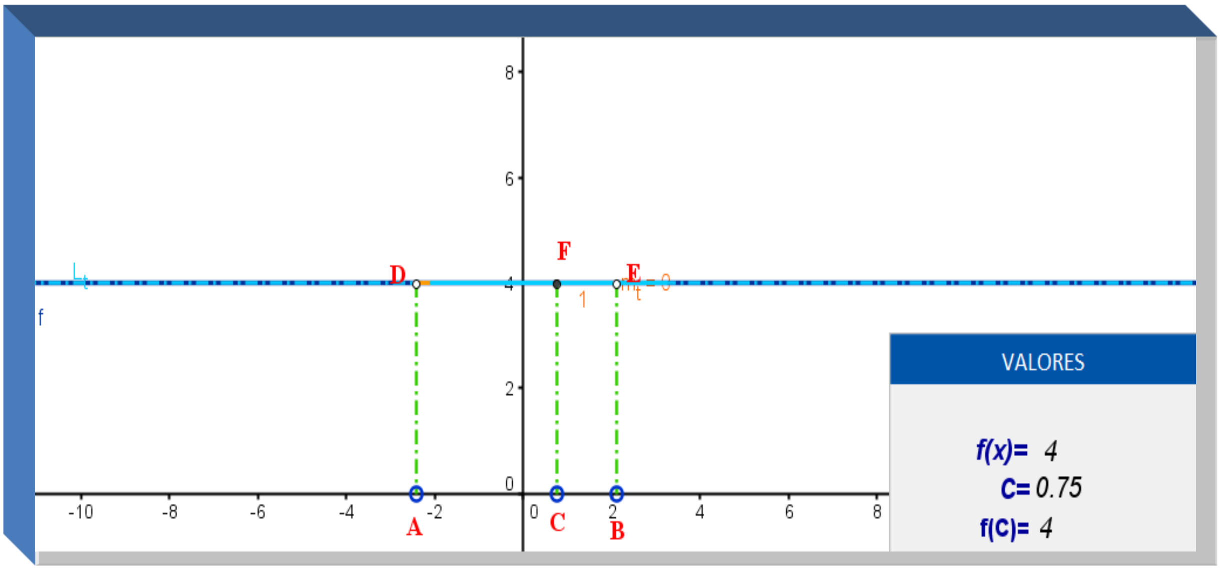
____

____

____

26. Repita el anterior proceso y conteste las mismas preguntas para las siguientes funciones:

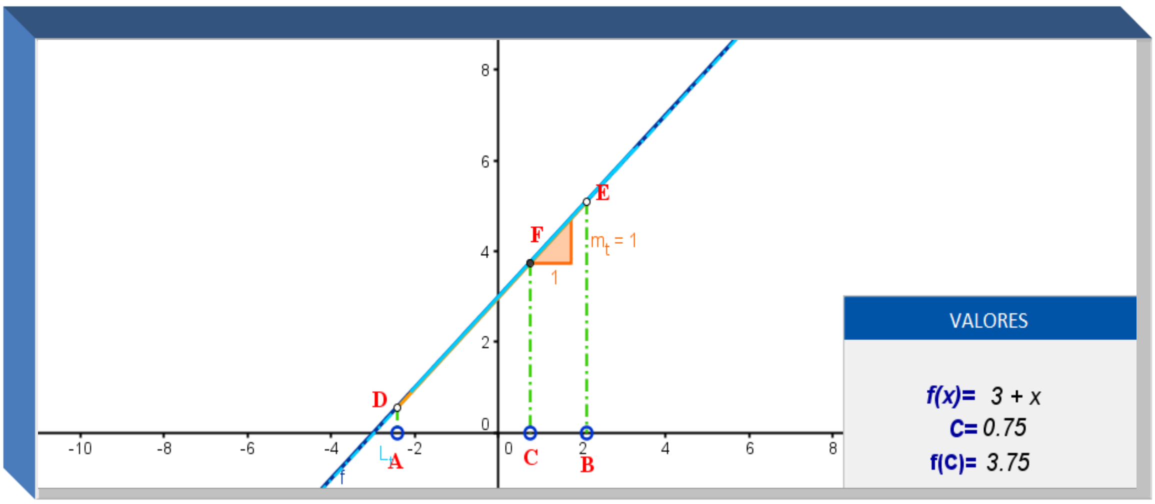
a).



Gráfica 19

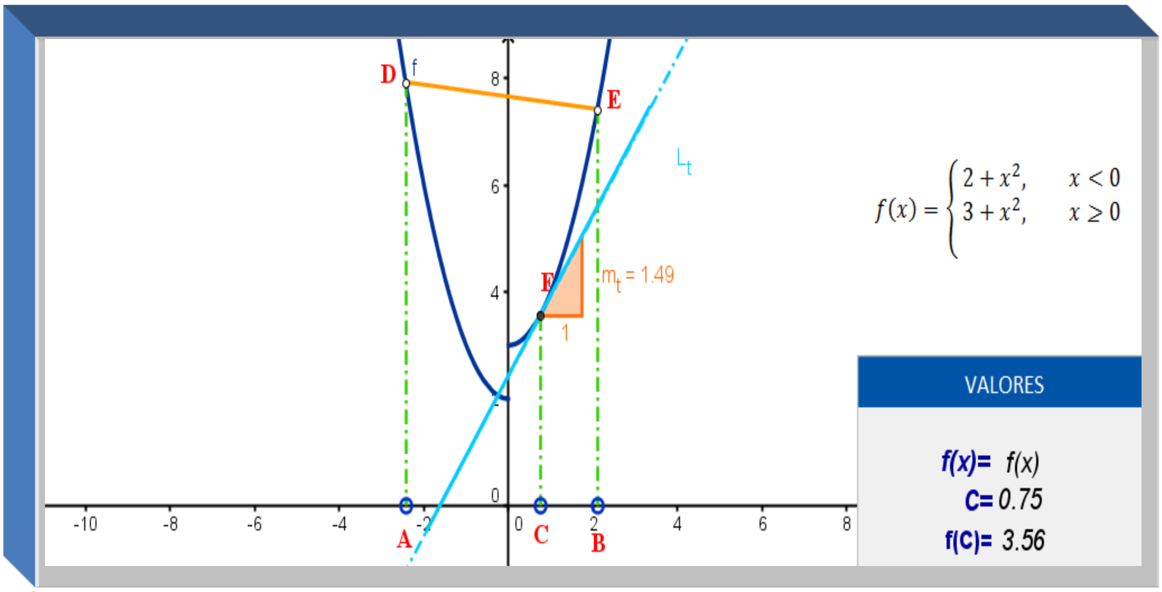
- ¿Satisface la conjetura que hizo? Explique que se cumple y que no se cumple.

b).



Gráfica 20

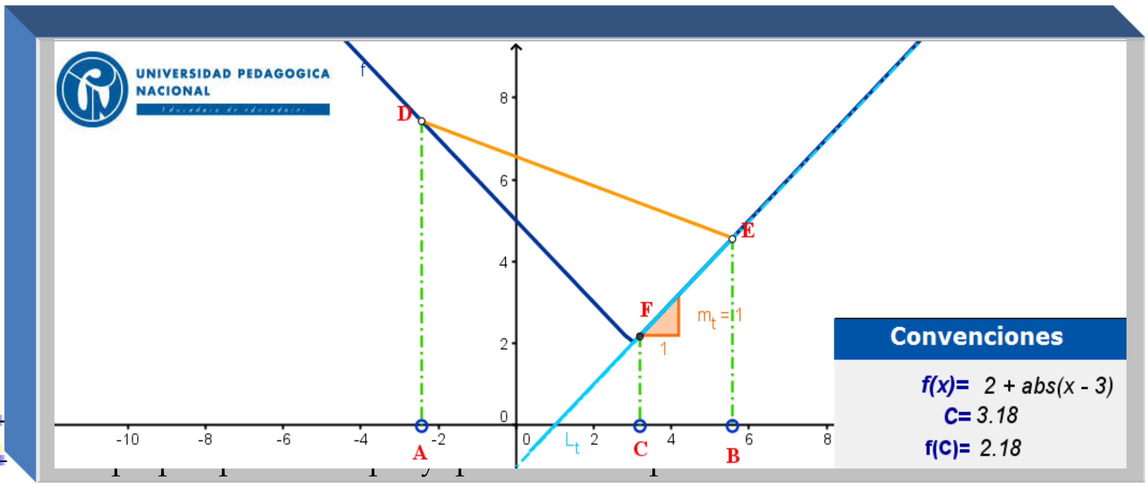
c).



Gráfica 21

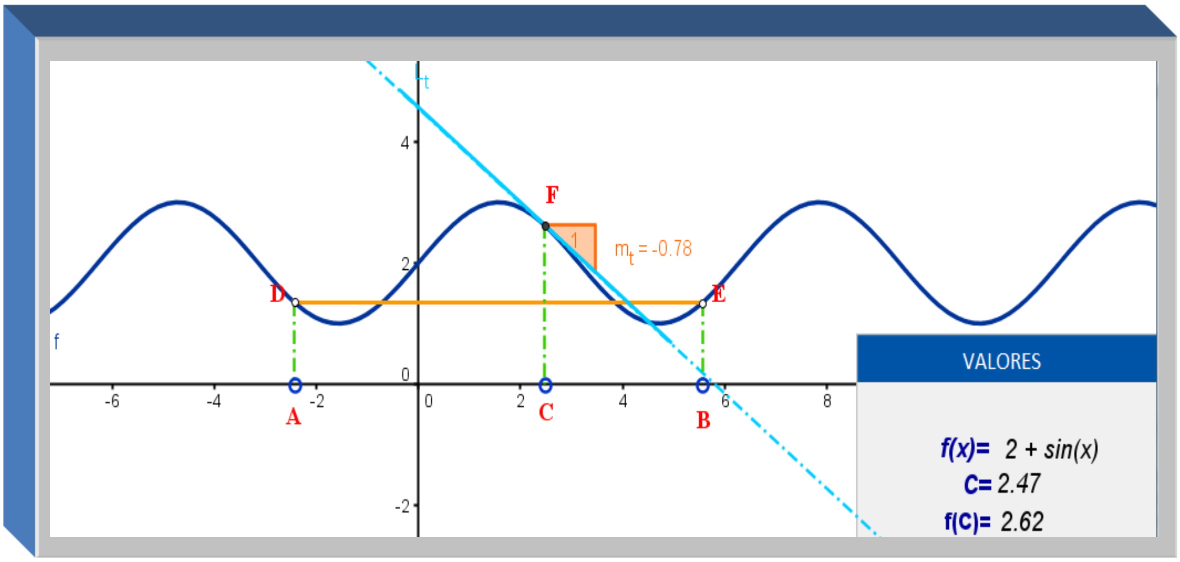
- ¿Satisface la conjetura que hizo?
- Explique que se cumple y que no se cumple.

d).



Gráfica 22

e).



Gráfica 23

- ¿Satisface la conjetura que hizo?
- Explique que se cumple y que no se cumple.

27. Después de revisar la conjetura con las funciones, ¿Cómo modificaría su proposición? Trate de generalizar.

28. Explique el significado geométrico de su proposición.

Nombre:	Código:	Fecha:

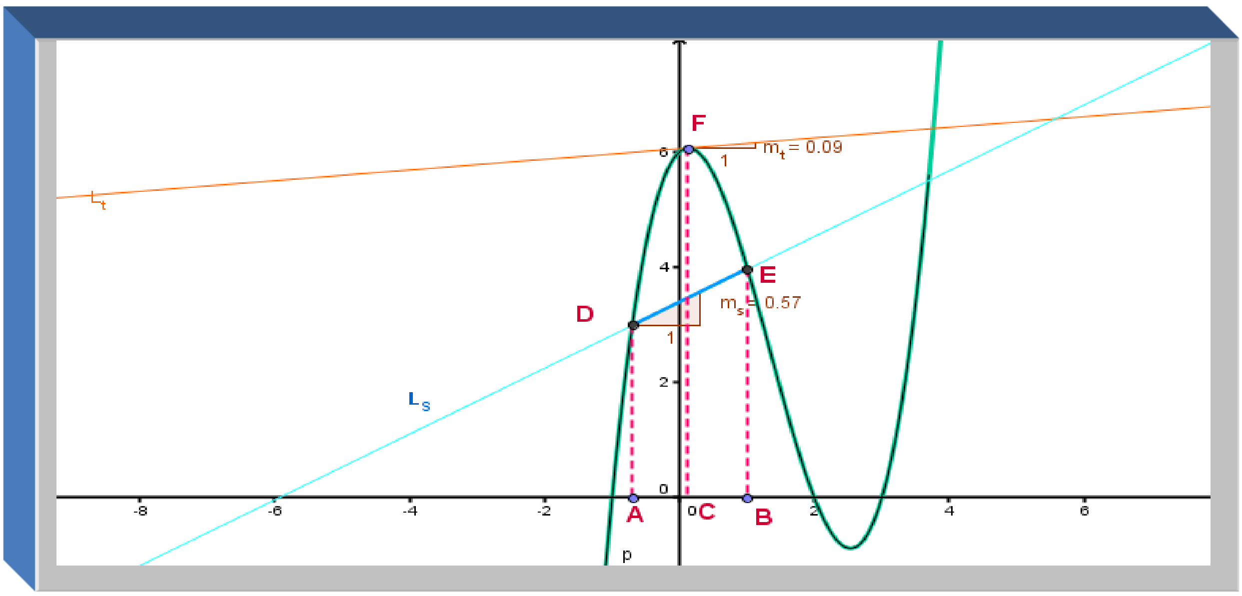
Teorema de Lagrange o del valor medio.

El applet Nº 5 muestra la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 4\,x^2 + x + 6$, los puntos A, B y F son libres, el segmento determinado por los puntos D y E , la recta L_s , la recta tangente L_t de la función en el punto F y las pendientes m_t y m_s de las rectas L_t y L_s respectivamente.

Prerrequisitos:

- Recta paralela
- Continuidad
- Diferenciabilidad

Herramientas de Geogebra presentes en la construcción de los applets:



Gráfica 24

Actividades:

Actividades:

1. Desplace el punto A y ubíquelo en cualquier parte del eje x, ¿Cuál es la pendiente de la recta secante que pasa los puntos $D\ y\ E$?

2. Ahora desplace el punto B y ubíquelo en cualquier parte del eje x, ¿Cuál es la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $D\ y\ E$.

3. Desplace el punto F que está sobre la gráfica de f y observe los cambios de la pendiente m_t, luego fíjelo en cualquier parte de la gráfica de la función.

4. Para el punto F fijado, ¿Cuánto vale la pendiente m_t de la recta tangente L_t?

5. Para está recta tangente ¿Dónde está ubicado C?

6. Mueva los puntos A y B. Observe cuál es la pendiente de la recta secante (L_S) que contiene al segmento (DE)

7. Mueva F. ¿Existe una recta tangente a $f(x)$ por F que sea paralela a L_S ? Explique.

8. En caso de que exista una recta tangente ¿Dónde está ubicado C?

9. ¿Qué se puede decir del punto C, cuándo m_t es igual a m_s ?

10. ¿Es posible que cuando m_t es igual a m_s, C quede por fuera del intervalo (A, B)?

11. ¿Es posible que cuando m_t es igual a m_s, C quede dentro del intervalo (A, B)?

12. Repita el anterior proceso y conteste las mismas preguntas para otras ubicaciones de los puntos A y B.

13. Analíticamente ¿cuál es la pendiente m_s de la recta secante que pasa por los puntos D y E?

14. Analíticamente ¿cuál es la pendiente m_t de la recta tangente que pasa el punto F?

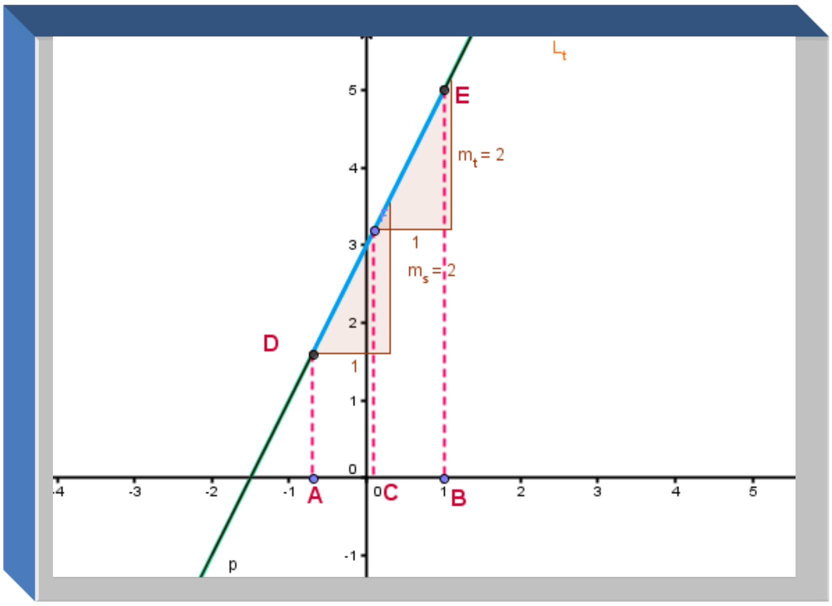
15. ¿Qué relación existe entre los valores de m_s y m_t?

16. Con base en la función del applet enuncie una conjetura que relacione las pendientes m_s y m_t, determine si existe alguna condición par f.

17. Observe los siguientes gráficos, estos muestran diferentes tipos de funciones. Para cada una de ellas verifique si se cumple su conjetura y de ser necesario compleméntela.

- $f(x) = 2x + 3 \; en \; [-2,2]$

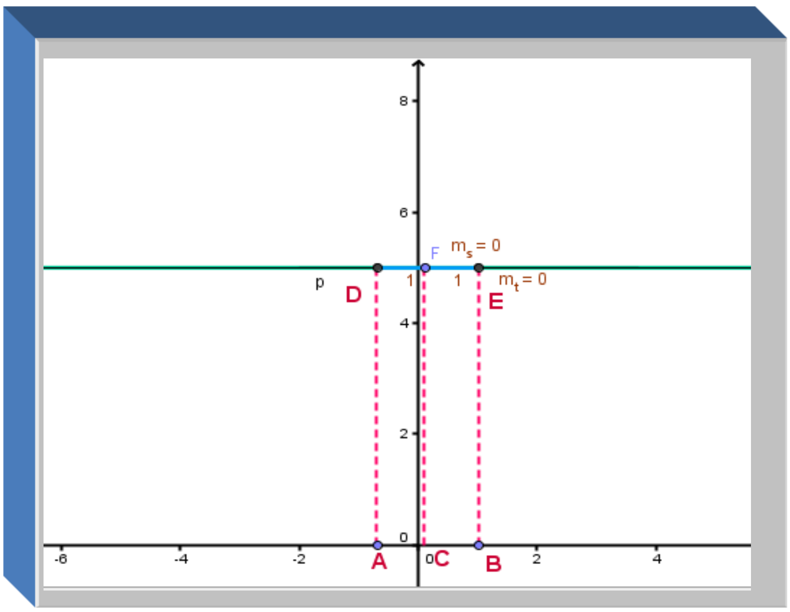
¿Qué se cumple y que no se cumple de su conjetura? Explique



Gráfica 25

- g(x)= 5 $en \; [-3,2]$

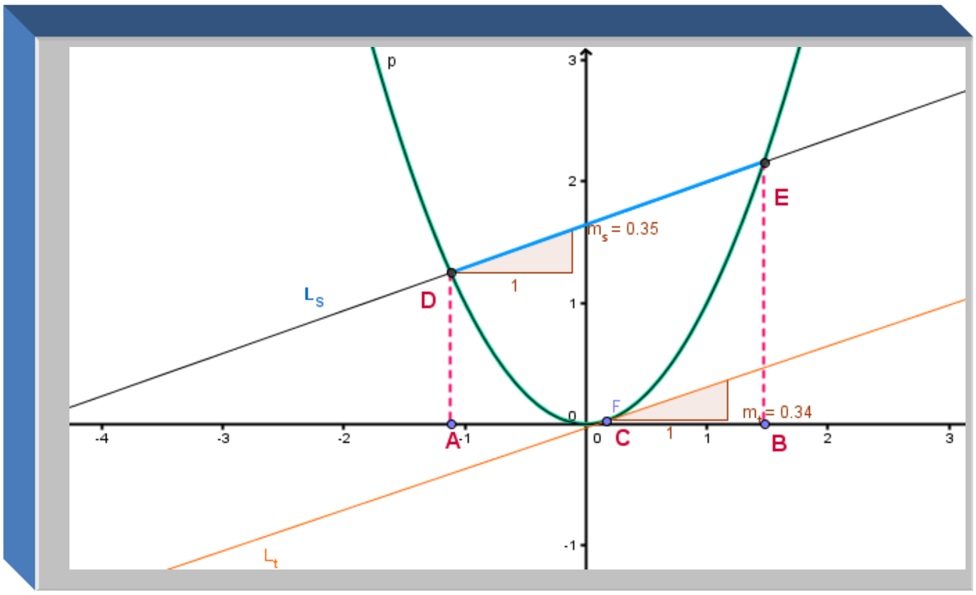
¿Qué se cumple y que no se cumple de su conjetura? Explique



Gráfica 26

○ $h(x) = x^3\ en\ [-2,2]$

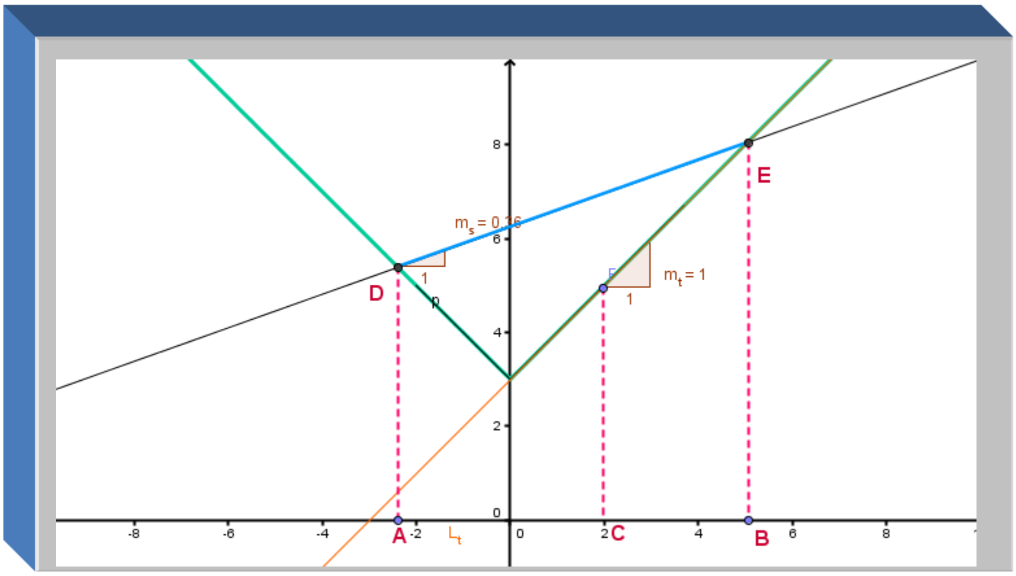
- ¿Qué se cumple y que no se cumple de su conjetura? Explique



Gráfica 27

○ $i(x) = 3 + |x|\ en\ [-1,2]$ ¿Qué pasa en (0,0)? Explique.

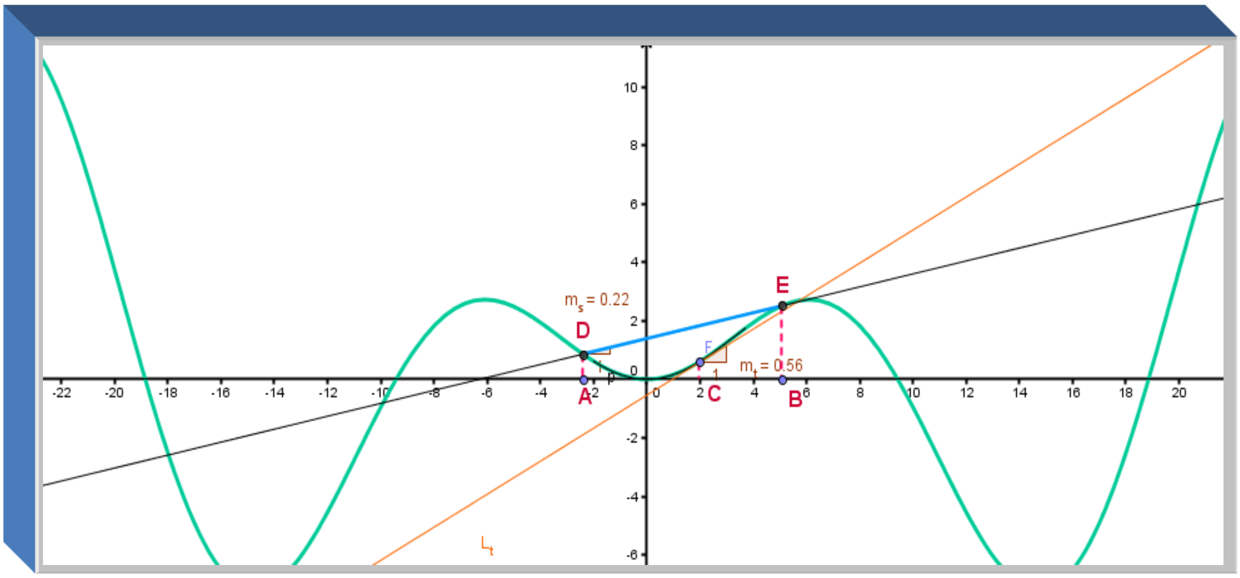
- ¿Qué se cumple y que no se cumple de su conjetura? Explique



Gráfica 28

- $j(x) = \frac{1}{2}\, x \sin\left(\frac{x}{3}\right)\ en\ [0,4\pi]$

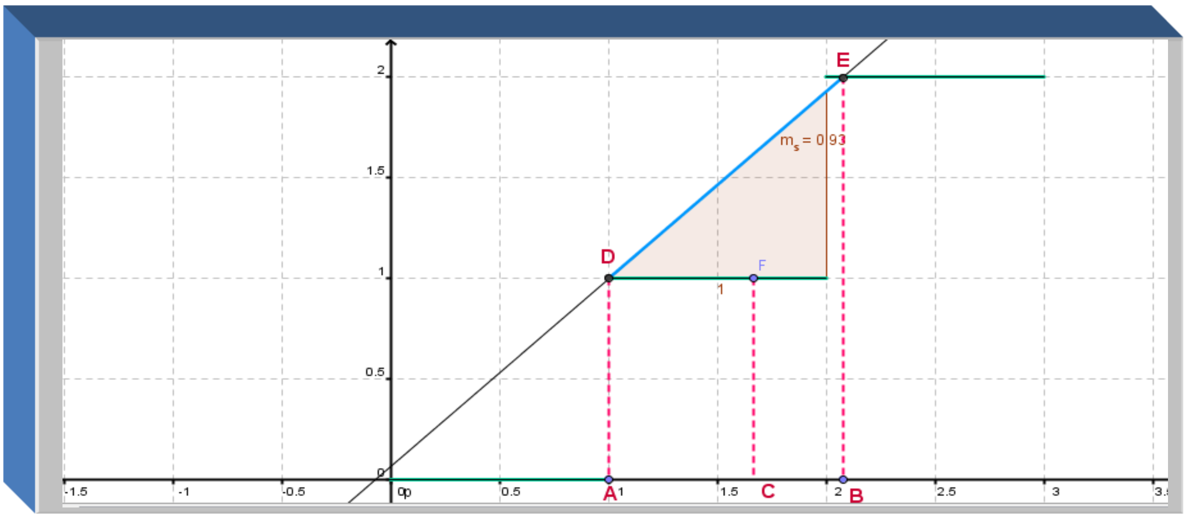
- ¿Puede existir más de un punto $\left(c, f(c)\right)$?
- ¿Qué se cumple y que no se cumple de su conjetura? Explique



Gráfica 29

- $k(x) = [\![x]\!]\ en\ [2,3]$

- ¿Qué se cumple y que no se cumple de su conjetura? Explique



Gráfica 30

18. Después de revisar la conjetura con las funciones dadas ¿Cómo modificaría su proposición? Trate de generalizar.

19. Explique el significado geométrico de su proposición.

Nombre:	Código:	Fecha:

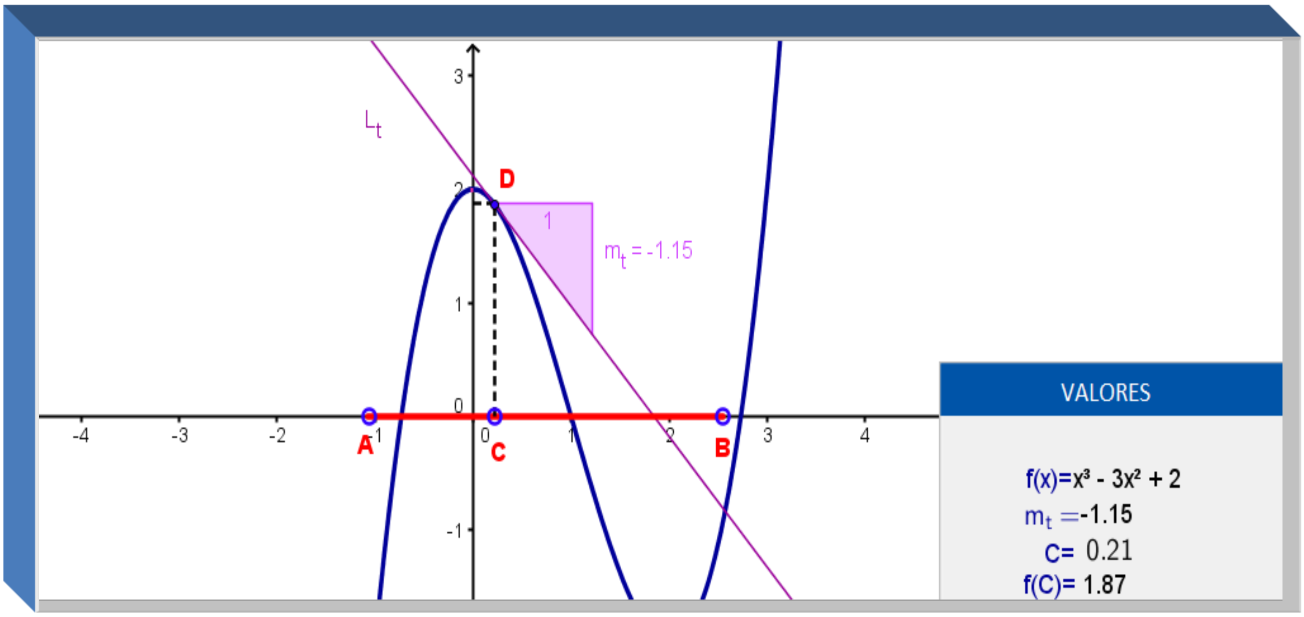
Teorema de Monotonía.

El applet Nº 6 muestra la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ en el intervalo $[-3,3]$, los puntos A, B y C son móviles, el punto C mueve la recta tangente L_t a la curva de la función por el punto D, este muestra la pendiente de la recta tangente m_t a la curva. Por otro lado se presenta un cuadro de convenciones con texto dinámico para algunos valores específicos de la función, en este se debe tener presente que la letra C se refiere al valor $x(C)$.

Prerrequisitos:

- pendiente
- Continuidad
- Diferenciabilidad

Herramientas de Geogebra presentes en la construcción de los applets:



Gráfica 31

Actividades:

1. Desplace el punto C sobre el intervalo (A, B), y complete la siguiente tabla de acuerdo a la información que aparece en el applet para cada uno de los valores dados.

C	$f\,'(C)$	$f(C)$
-1.0		
-0.8		
-0.6		
-0.4		
-0.2		
0		
0.2		
0.4		
0.6		
0.8		
1		
1.2		
1.4		
1.6		
1.8		
2		
2.2		
2.4		
2.6		
2.8		
3		

Tabla 16

Con base en la tabla conteste:

2. ¿Cómo es el signo de $f\,'$ en el intervalo $(-1{,}0)$?

____

____

3. ¿Cómo es la gráfica de f en el intervalo $(-1{,}0)$?

☐ Creciente
☐ Decreciente
☐ Constante

4. ¿Cómo es el signo de f' en el intervalo (0,1)?

____

5. ¿Cómo es la gráfica de f en el intervalo (0,1)?

- [ ] Creciente
- [ ] Decreciente
- [ ] Constante

6. ¿Cómo es el signo de f' en el intervalo (1,2)?

____

7. ¿Cómo es la gráfica de f en el intervalo (1,2)?

- [ ] Creciente
- [ ] Decreciente
- [ ] Constante

8. ¿Cómo es el signo de f' en el intervalo (2,3)?

____

9. ¿Cómo es la gráfica de f en el intervalo (2,3)?

- [ ] Creciente
- [ ] Decreciente
- [ ] Constante

10. ¿En qué valores de C, cambia el signo de f' ?

____

11. Escriba los intervalos abiertos determinados por los puntos donde cambia el signo de f'

____

____

12. ¿Cómo es el signo de f' en cada uno de los intervalos? Escríbalos.

INTERVALO	SIGNO DE f'

Tabla 17

13. Cómo es la gráfica de f en cada uno de los intervalos:

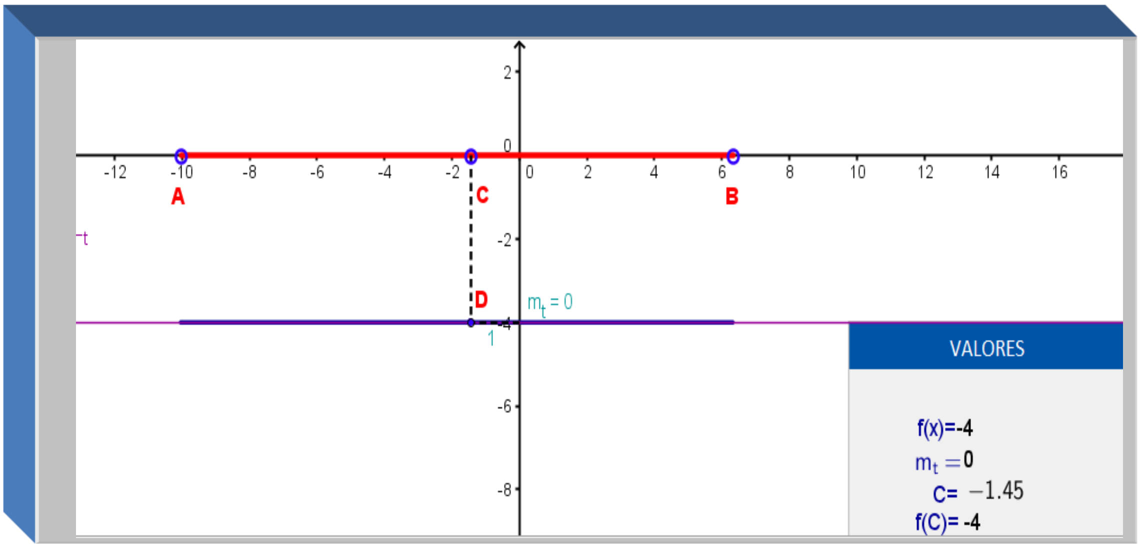
¿Creciente? ¿Decreciente? ¿Constante?

INTERVALO	MONOTONIA DE f'

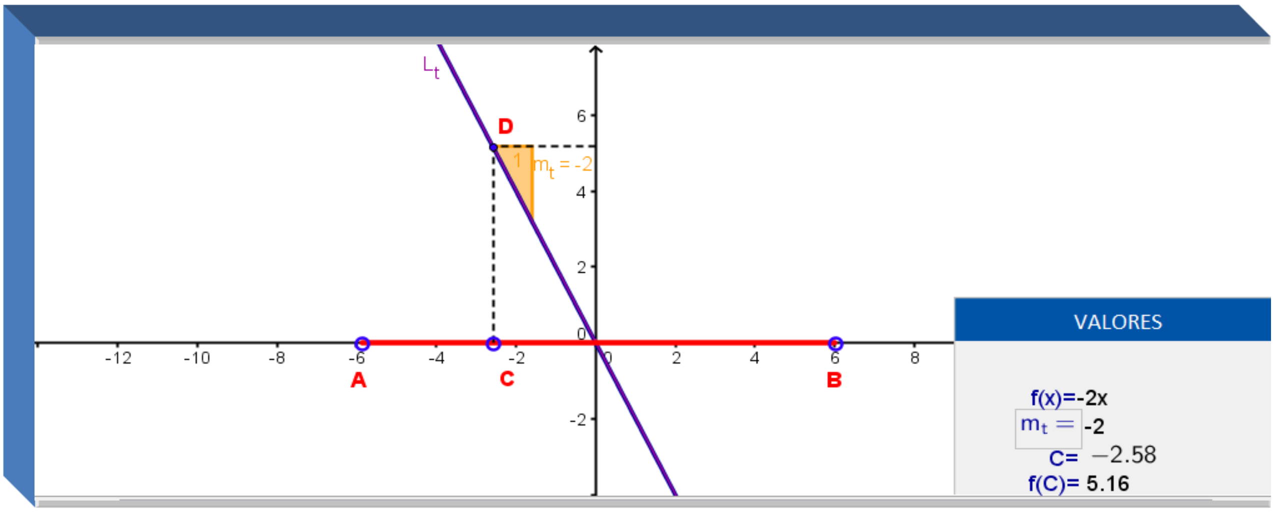
Tabla 18

14. Con base en lo observado escriba una conjetura en donde se relacione el signo de la derivada f' y la monotonía de f.

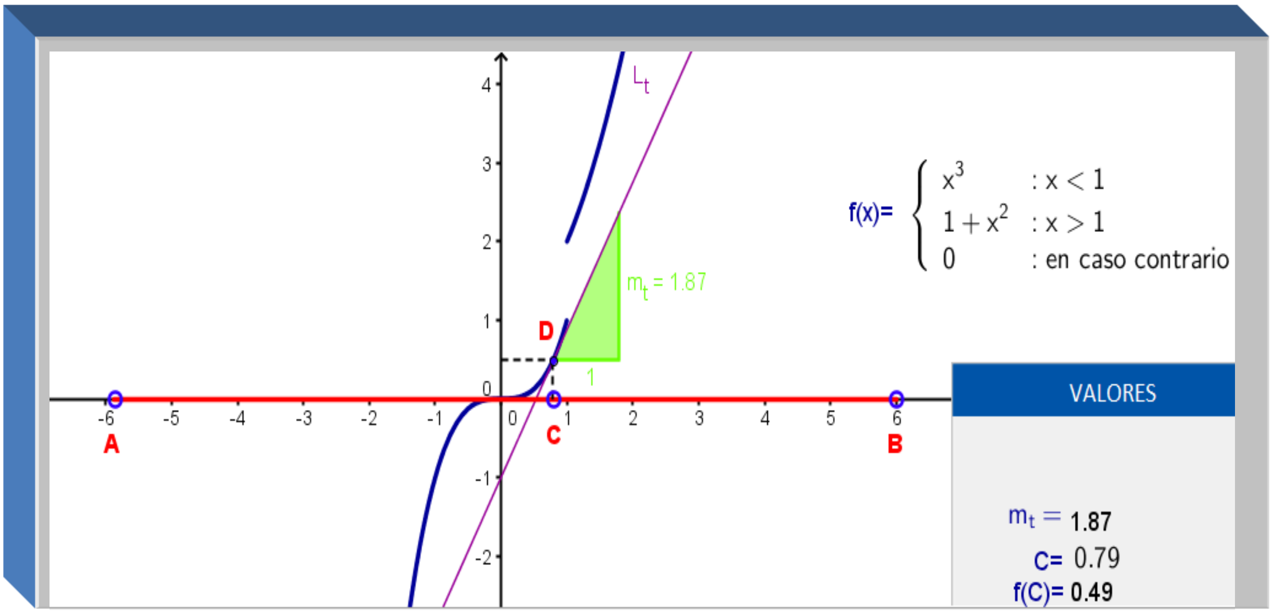
15. Repita los anteriores pasos y conteste las mismas preguntas para las siguientes funciones:



Gráfica 32

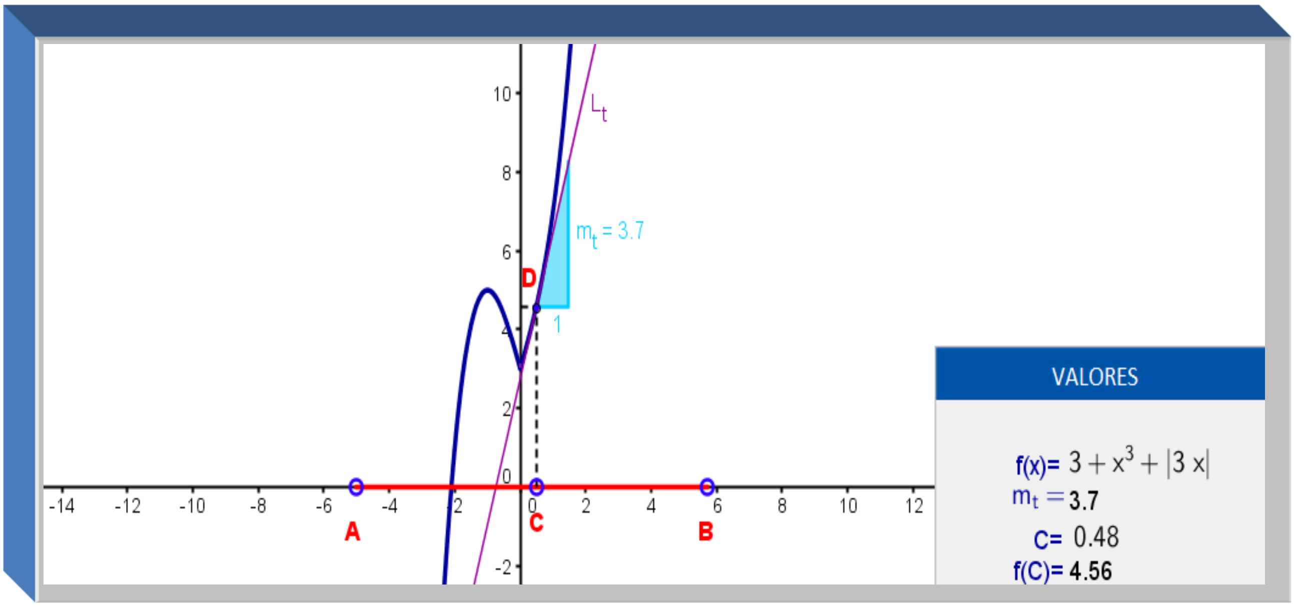


Gráfica 33



Gráfica 34

- ¿Qué pasa con $f'(C)$ en $C = 2$?



Gráfica 35

- ¿Qué pasa con $f'(C)$ en $C = 0$?

____

____

16. Revise su conjetura ¿Qué condiciones sobre la función debe agregar en su conjetura?

____

____

____

____

17. Escriba una nueva proposición en donde se relacione el signo de f', la monotonía de f y el intervalo abierto o cerrado.

____

____

____

____

18. Explique el significado geométrico de su proposición.

____

____

____

Nombre:	*Código:*	*Fecha:*

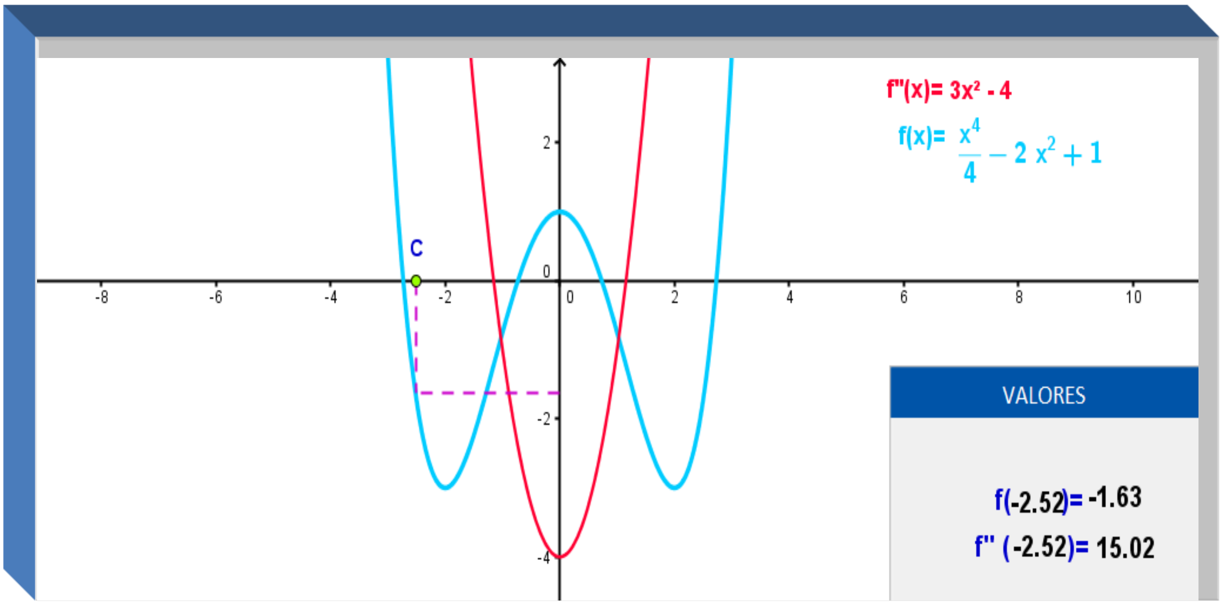
Teorema de Concavidad.

El applet Nº 7 muestra las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 1$ y $f''(x) = 3x^2 - 4$, el punto C es móvil sobre el eje x. Por otro lado se presenta un cuadro de valores con texto dinámico específico de la función en el punto c.

Prerrequisitos:

- Continuidad
- Diferenciabilidad

Herramientas de Geogebra presentes en la construcción de los applets:



Gráfica 36

Actividades:

1. Desplace el punto C sobre el eje x y observe los valores que toma f y f'' a medida que cambia el valor de c. Complete la siguiente tabla.

C	*f '' (C)*	*f (C)*
-3.0		
-2.5		
-2		
-1.5		
-1		
-0.5		
0		
1		
1.5		
2		
2.5		
3		

2. Marque las intersecciones de f y f'' con el eje x, y llámelas M y N respectivamente.
3. Con base en la tabla ¿Cómo es el signo de f'' antes de M?

____

____

____

4. ¿Cómo es la gráfica de f antes de M?

☐ Cóncava hacia arriba
☐ Cóncava hacia abajo

5. ¿Cómo es el signo de f'' entre M y N?

____

____

____

6. ¿Cómo es la gráfica de f entre M y N

☐ Cóncava hacia arriba
☐ Cóncava hacia abajo

7. ¿Cómo es el signo de f'' después N?

____

____

8. ¿Cómo es la gráfica de f después N

☐ Cóncava hacia arriba
☐ Cóncava hacia abajo

9. ¿En qué valores de c cambia el signo de f''?

____

____

10. Escriba los intervalos abiertos determinados por los puntos donde cambia el signo de f''

____

____

11. ¿Cómo cambia el signo de f'' en cada uno de los intervalos? Escríbalos

Intervalo	Signo de f ʺ

Tabla 19

12. ¿Cómo es la gráfica de f en cada uno de los intervalos?¿cóncava hacia arriba?¿cóncava hacia abajo?

Intervalo	Concavidad

Tabla 20

13. Con base en lo observado escriba una conjetura en donde relacione el signo de f'' con la concavidad de la gráfica de f.

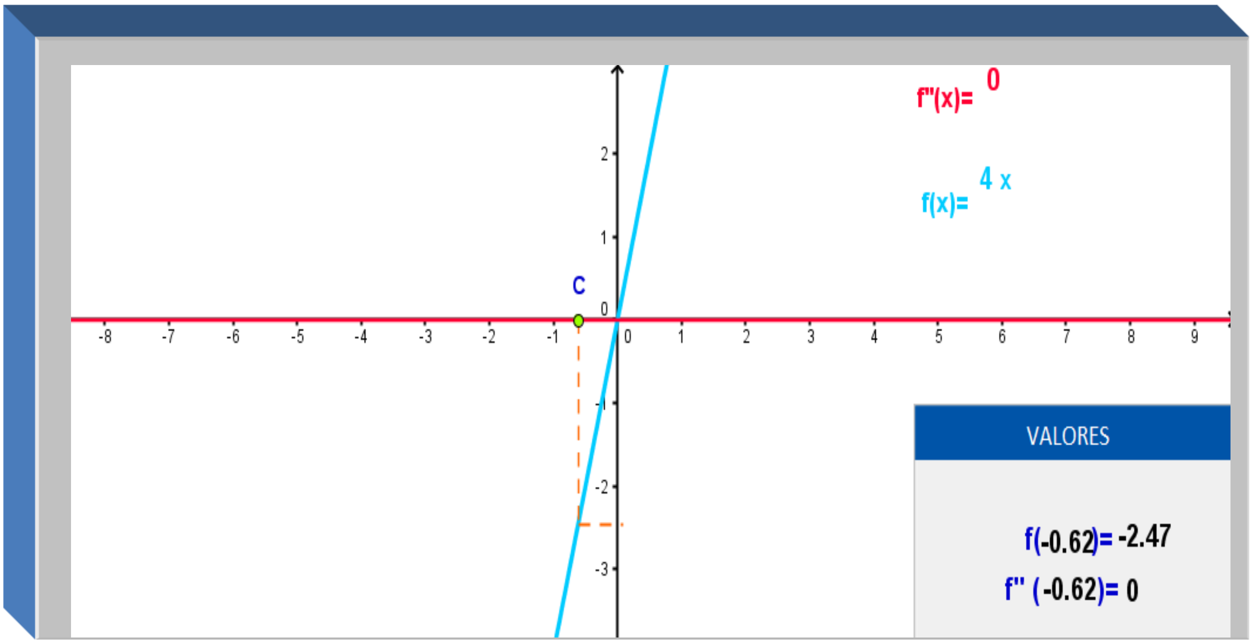
____

____

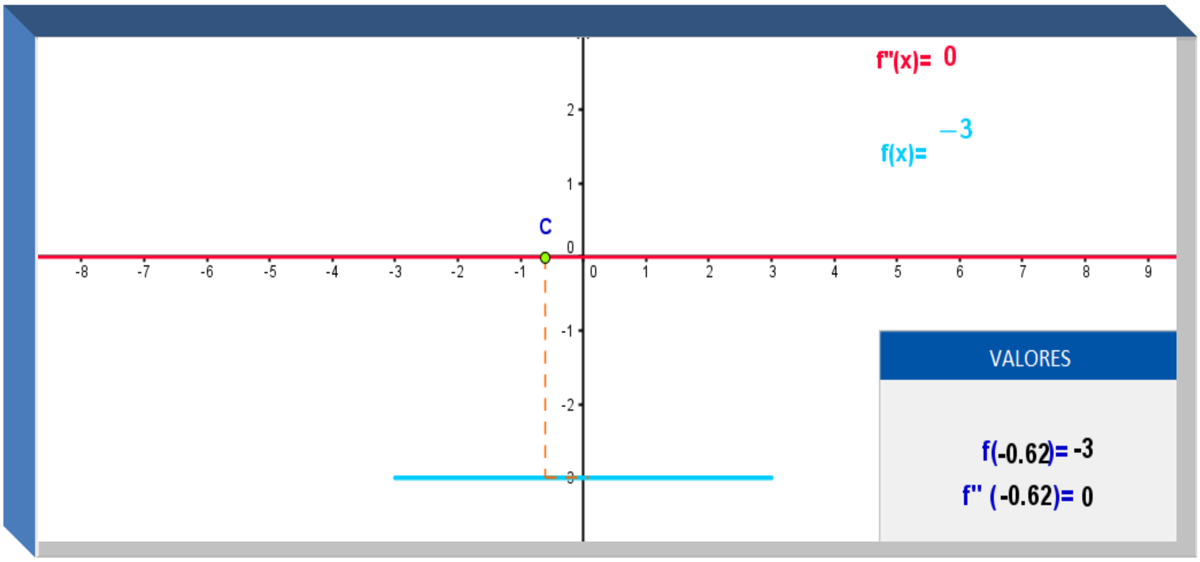
____

____

14. Analiza la concavidad en cada una de las siguientes funciones, repitiendo el anterior proceso.



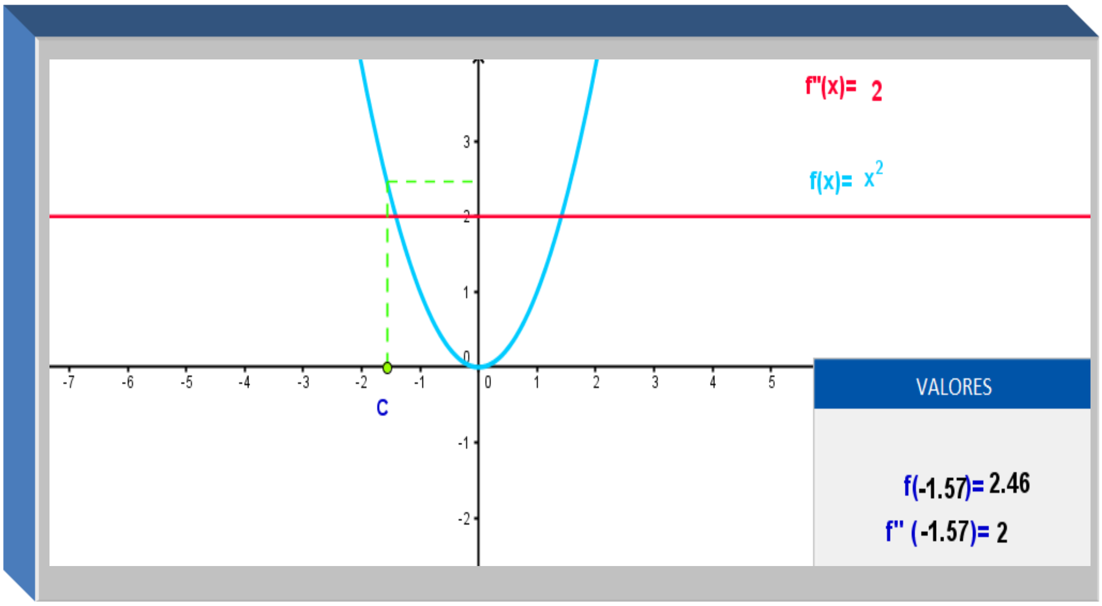
Gráfica 37



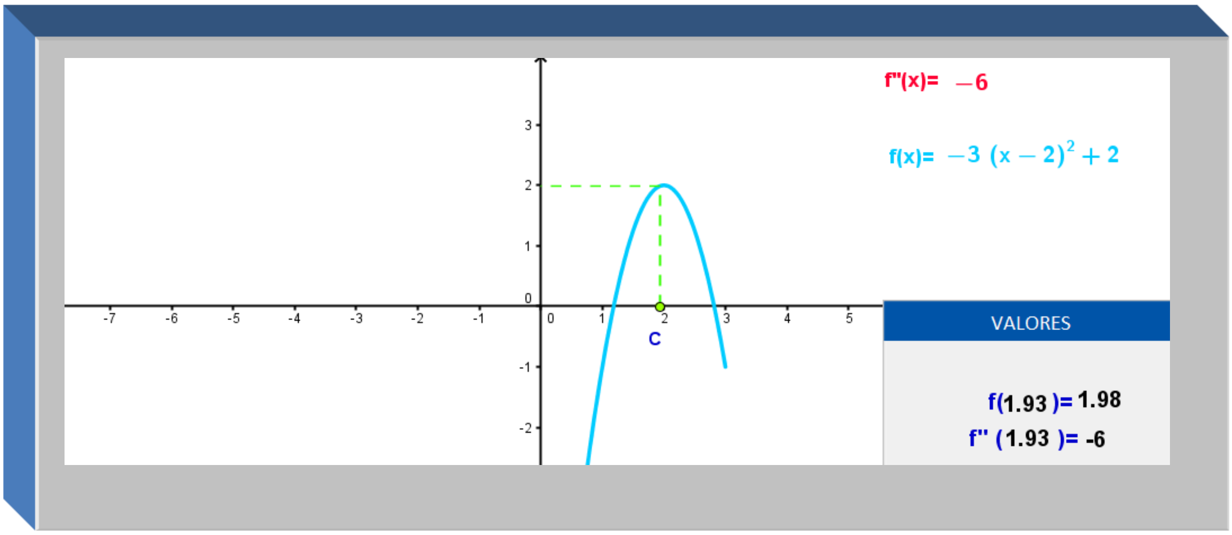
Gráfica 38

15. Que se puede generalizar con respecto a la concavidad en funciones constantes y lineales.

___



Gráfica 39



Gráfica 40

16. ¿Hay cambios de concavidad en funciones cuadráticas? Explique en función de la segunda derivada.

17. ¿Qué condiciones requiere f para que tenga algún tipo de concavidad en un punto o en un intervalo?

18. Escriba una nueva proposición en donde se relacione el signo de f'' con el tipo de concavidad

19. Explique el significado geométrico de su proposición.

Nombre:	Código:	Fecha:

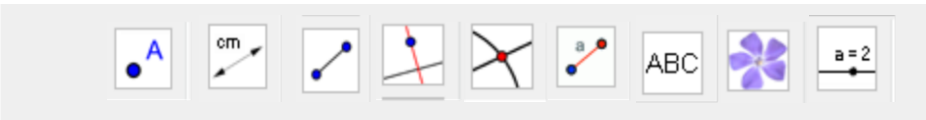
Teorema de Weierstrass.

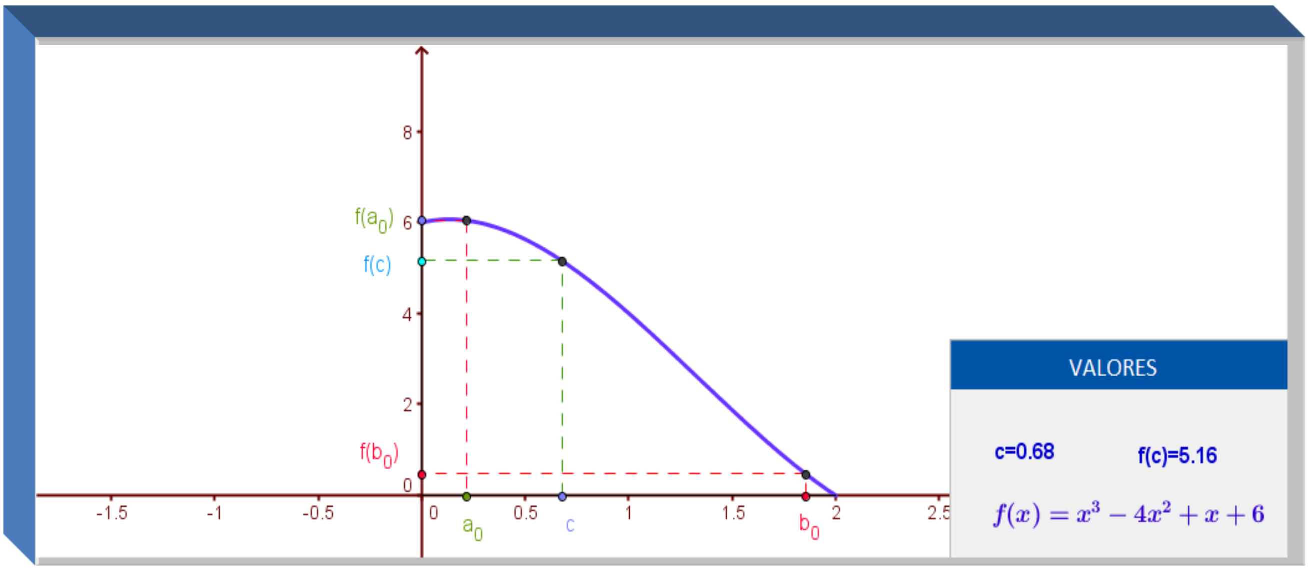
El applet Nº 8 muestra la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ en el intervalo $[0,2]$, los puntos a_0, b_0 y c son móviles en el intervalo $[a_0, b_0]$ y los puntos $f(a_0), f(b_0)$ y $f(c)$ son las imágenes respectivamente.
Se muestra también un cuadro de valores con texto dinámico específico de la función en el punto c.

Prerrequisitos:

- Funciones trigonométricas
- Continuidad
- Diferenciabilidad

Herramientas de Geogebra presentes en la construcción de los applets:





Gráfica 41

Actividades:

1. Complete la siguiente tabla para el applet Nº 8, a medida que desplaza el punto c.

Nº	c	$f(c)$
1		
2		
3		
4		
…		
n		

2. ¿Cuál es el valor máximo de f en $[a_0, b_0]$?

___

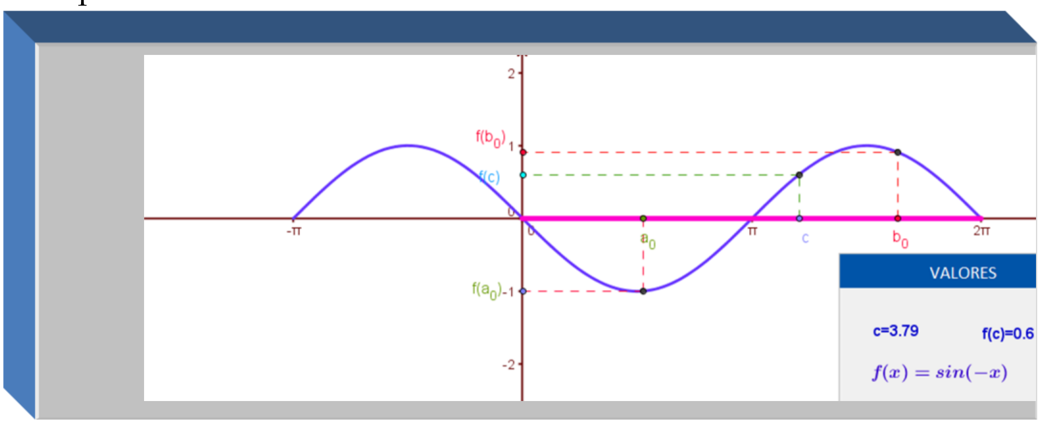
___

3. ¿Cuál es el valor mínimo de f en $[a_0, b_0]$?

___

___

4. Complete la siguiente tabla para el siguiente gráfico, a medida que desplaza el punto c.



Gráfica 42

Nº	c	$f(c)$
1		
2		
3		
4		
…		
n		

Tabla 21

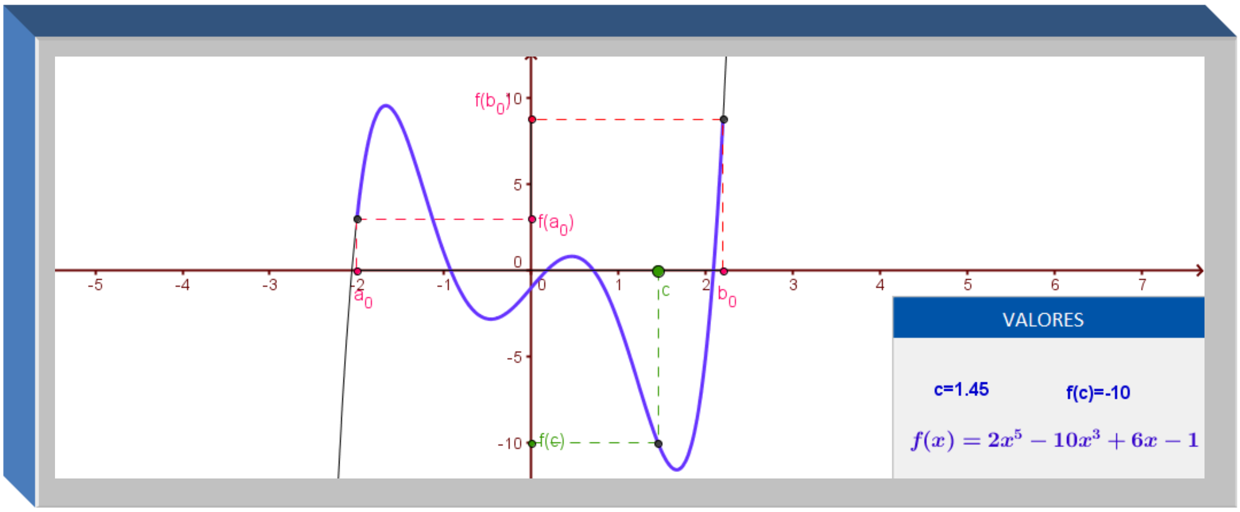
5. ¿Cuál es el valor máximo de f en $[a_0, b_0]$?

____
____
____
____

6. ¿Cuál es el valor mínimo de f en $[a_0, b_0]$?

____
____
____
____

7. Complete la siguiente tabla para el siguiente gráfico, a medida que desplaza el punto c.



Gráfica 43

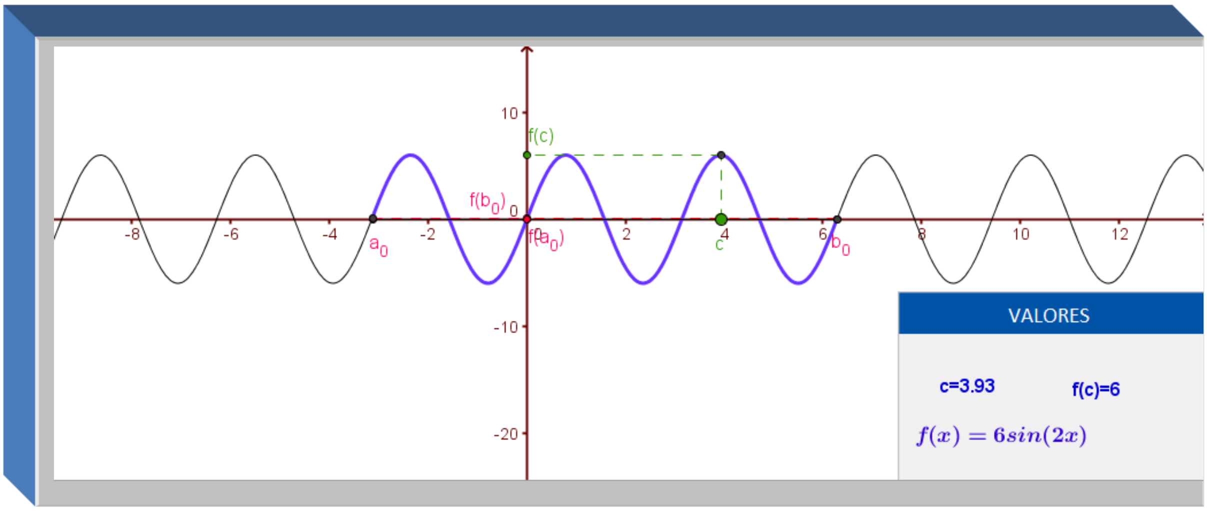
Nº	c	$f(c)$
1		
2		
3		
4		
…		
n		

Tabla 22

8. ¿Cuál es el valor máximo de f en $[a_0, b_0]$?

9. ¿Cuál es el valor mínimo de f en $[a_0, b_0]$?

10. Complete la siguiente tabla para el siguiente gráfico, a medida que desplaza el punto c.



Gráfica 44

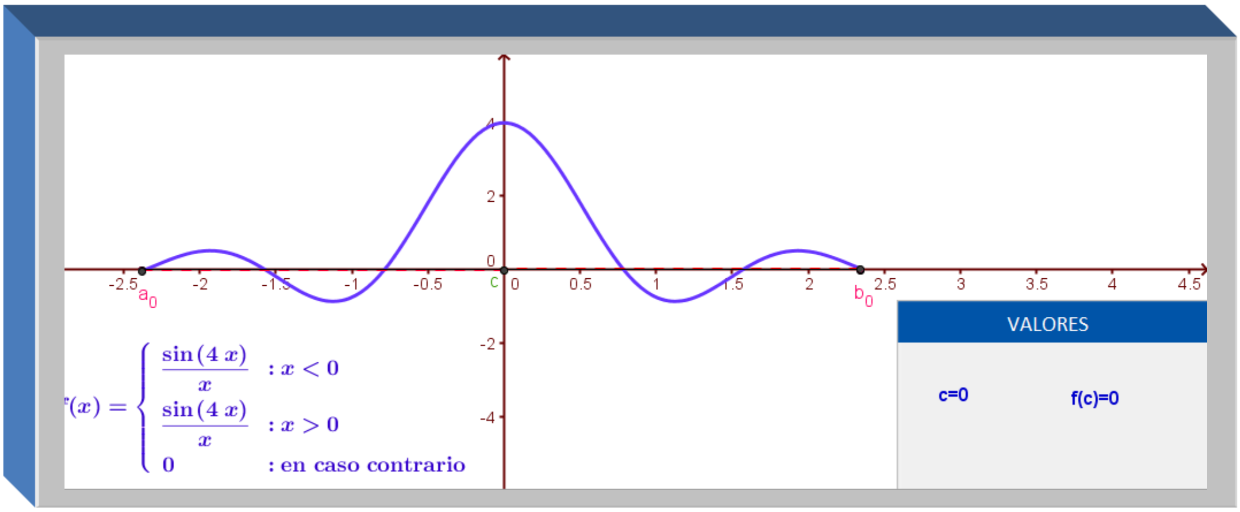
Nº	c	$f(c)$
1		
2		
3		
4		
…		
n		

Tabla 23

11. ¿Cuál es el valor máximo de f en $[a_0, b_0]$?

12. ¿Cuál es el valor mínimo de f en $[a_0, b_0]$?

13. Complete la siguiente tabla para el siguiente gráfico, a medida que desplaza el punto c.



Gráfica 45

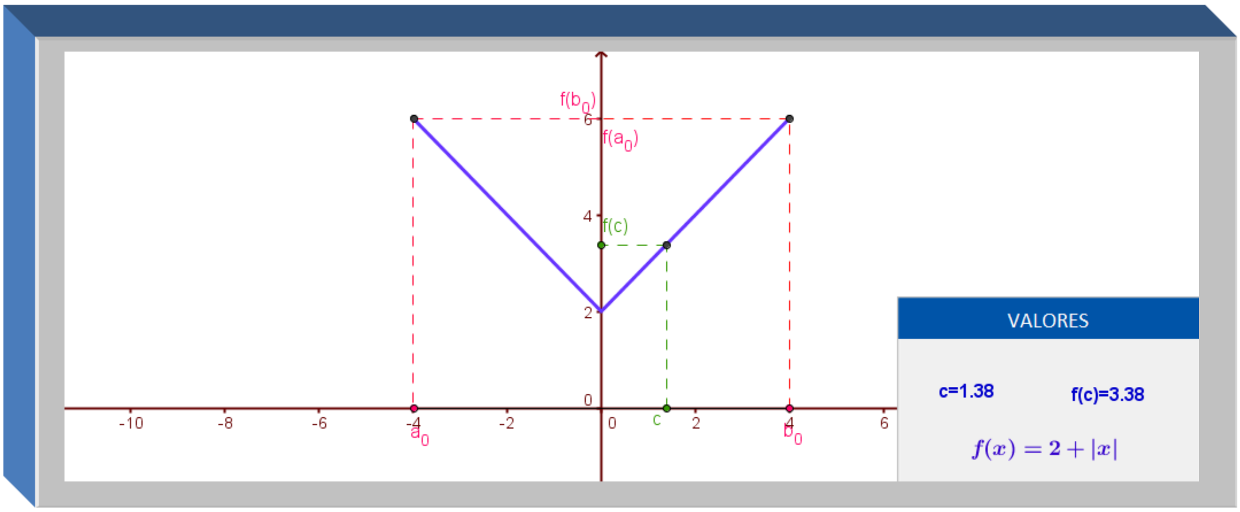
Nº	c	$f(c)$
1		
2		
3		
4		
...		
n		

Tabla 24

14. ¿Cuál es el valor máximo de f en $[a_0, b_0]$?

15. ¿Cuál es el valor mínimo de f en $[a_0, b_0]$?

16. Complete la siguiente tabla para el siguiente gráfico, a medida que desplaza el punto c.



Gráfica 46

Nº	c	$f(c)$
1		
2		
3		
4		
…		
n		

Tabla 25

17. ¿Cuál es el valor máximo de f en$[a_0, b_0]$?

___

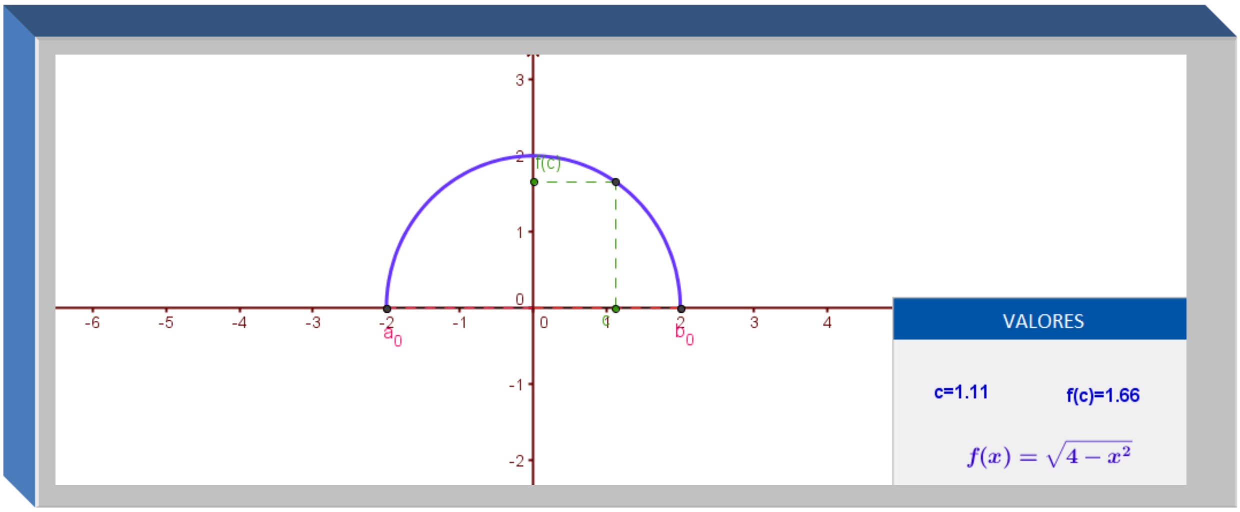
___

18. ¿Cuál es el valor mínimo de f en $[a_0, b_0]$?

___

___

19. Complete la siguiente tabla para el siguiente gráfico, a medida que desplaza el punto c.



Gráfica 47

Nº	c	$f(c)$
1		
2		
3		
4		
…		
n		

Tabla 26

20. ¿Cuál es el valor máximo de f en $[a_0, b_0]$?

____

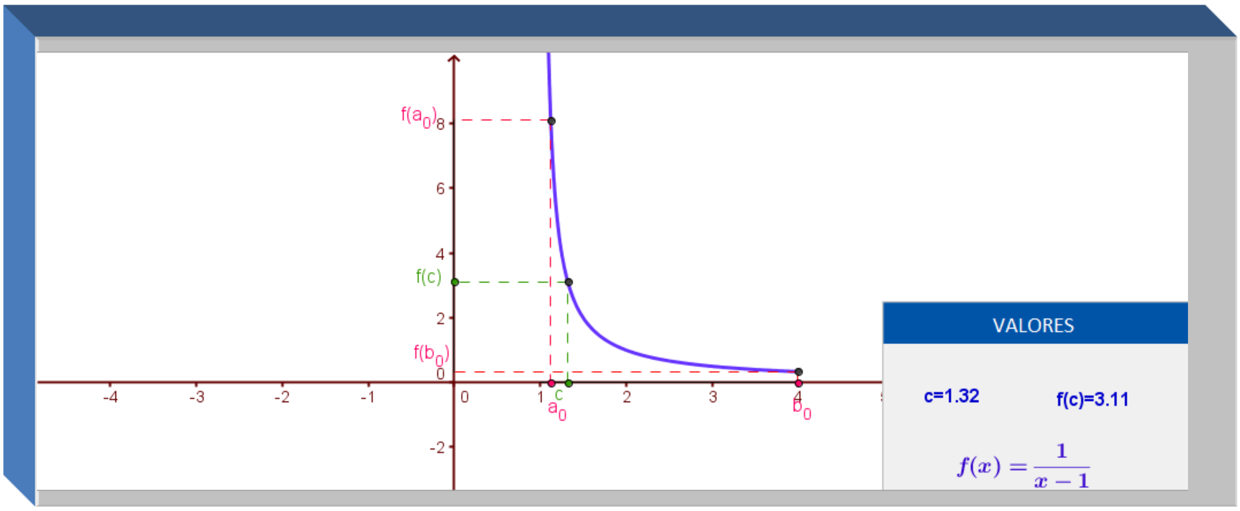
____

21. ¿Cuál es el valor mínimo de f en $[a_0, b_0]$?

____

____

22. Complete la siguiente tabla para el siguiente gráfico, a medida que desplaza el punto c.



Gráfica 48

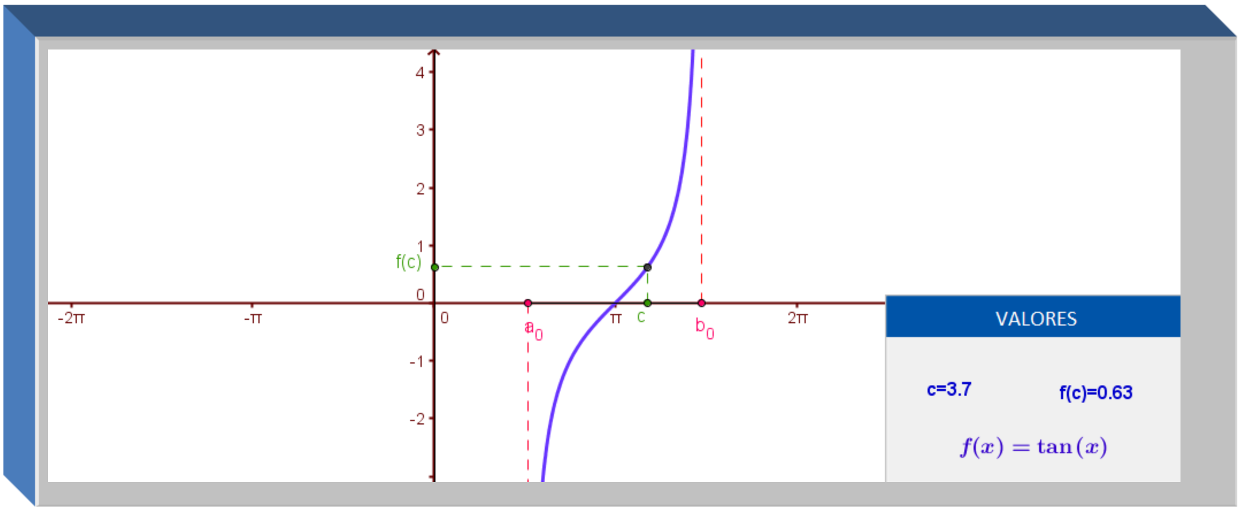
Nº	c	$f(c)$
1		
2		
3		
4		
…		
n		

Tabla 27

23. ¿Cuál es el valor máximo de f en $[a_0, b_0]$?

24. ¿Cuál es el valor mínimo de f en $[a_0, b_0]$?

25. Complete la siguiente tabla para el siguiente gráfico, a medida que desplaza el punto c.



Gráfica 49

Nº	c	$f(c)$
1		
2		
3		
4		
…		
n		

26. ¿Cuál es el valor máximo de f en $[a_0, b_0]$?

27. ¿Cuál es el valor mínimo de f en $[a_0, b_0]$?

28. ¿La función es acotada en el intervalo $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$? Explique.

29. ¿Qué característica tiene cada función cuando tiene valor mínimo de f?

30. ¿Qué característica tiene cada función cuando existe un valor máximo de f?

31. ¿Qué característica tiene cada función cuando tiene un valor mínimo y un valor máximo en (a_0, b_0)de f?

32. Haga una conjetura con los hechos observados anteriormente.

33. ¿Es necesario que sea continua en el intervalo para que tenga un valor mínimo y un valor máximo en $[a_0, b_0]$? Explique.

34. ¿Es necesario que sea diferenciable f en el intervalo para que tenga un valor mínimo y un valor máximo en (a_0, b_0)? Explique.

35. Modifique su conjetura si es necesario en donde se tenga en cuenta los puntos 29 y 30.

36. Explique el significado geométrico de su proposición.

Nombre:	Código:	Fecha:

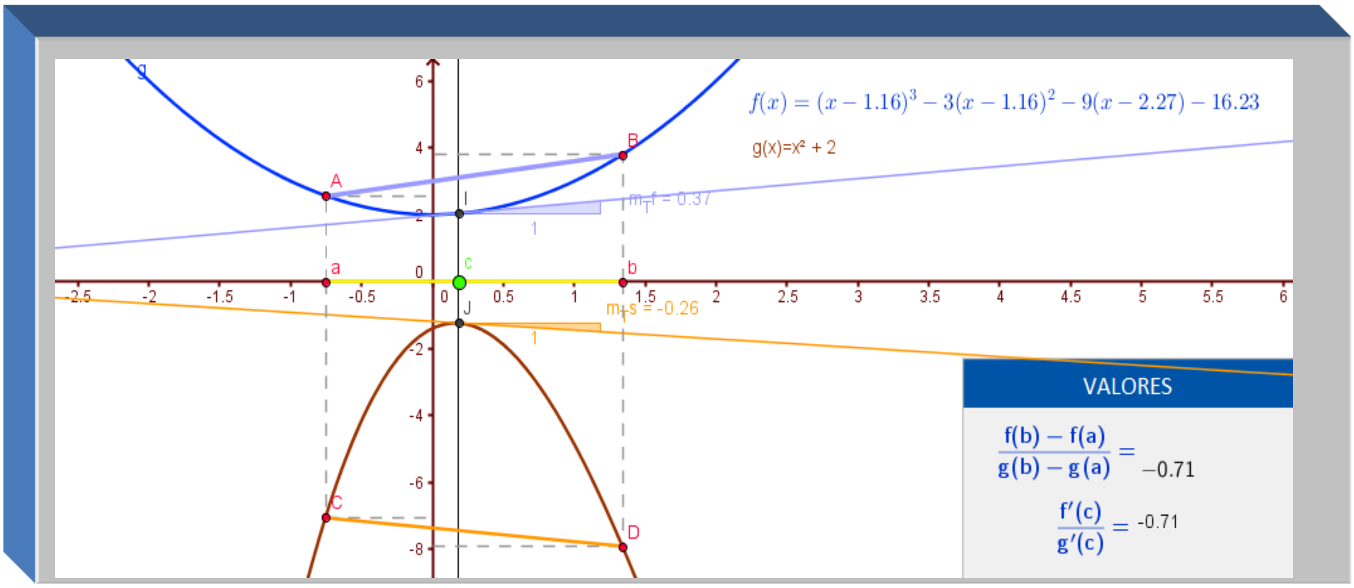
Teorema de Cauchy

El applet Nº 9 muestra las gráficas de las funciones $f(x) = (x - 1.16)^3 - (3x - 1.16)^2 - 9(x - 2.27) - 16.23$ y $g(x) = x^2 + 2$, los puntos a y b mueven las rectas secantes (S_f y S_g) que pasan por los puntos AB y CD, C es un punto libre sobre el eje x y desplaza las rectas tangentes sobre cada una de las funciones. Se muestra también un cuadro de valores con texto dinámico específico de la función en el punto c.

Prerrequisitos:

- Continuidad
- Diferenciabilidad

Herramientas de Geogebra presentes en la construcción de los applets:



Gráfica 50

Actividades:

1. ¿Cuál es la pendiente de la recta secante S_{AB}?

____

____

2. ¿Cuál es la pendiente de la recta secante S_{CD}?

____

____

3. Desplace el punto P y fíjelo en cualquier lugar del eje x.

4. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a f en P (m_{Tf})?

____

____

5. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a g en P (m_{Tg})?

____

____

6. Complete la siguiente tabla con las preguntas anteriores para otras ubicaciones de P.

Punto P	(m_{Tf})	(m_{Tg})

Tabla 28

7. Al mover el punto P sobre el eje x ¿cambian las pendientes de las rectas tangentes?

____

8. Calcule las siguientes razones para diferentes posiciones de P sobre el eje x, de tal forma que P quede por fuera del intervalo (a, b):

   - $\frac{S_f}{S_g}$

- $\frac{m_{Tf}}{m_{Tg}}$

Punto P *fuera* (a, b)	$\frac{S_f}{S_g}$	$\frac{m_{Tf}}{m_{Tg}}$

Tabla 29

9. Mueva el punto P sobre el eje x, de tal forma que P quede por dentro del intervalo (a, b) y complete:

Punto P *dentro* (a, b)	$\frac{S_f}{S_g}$	$\frac{m_{Tf}}{m_{Tg}}$

Tabla 30

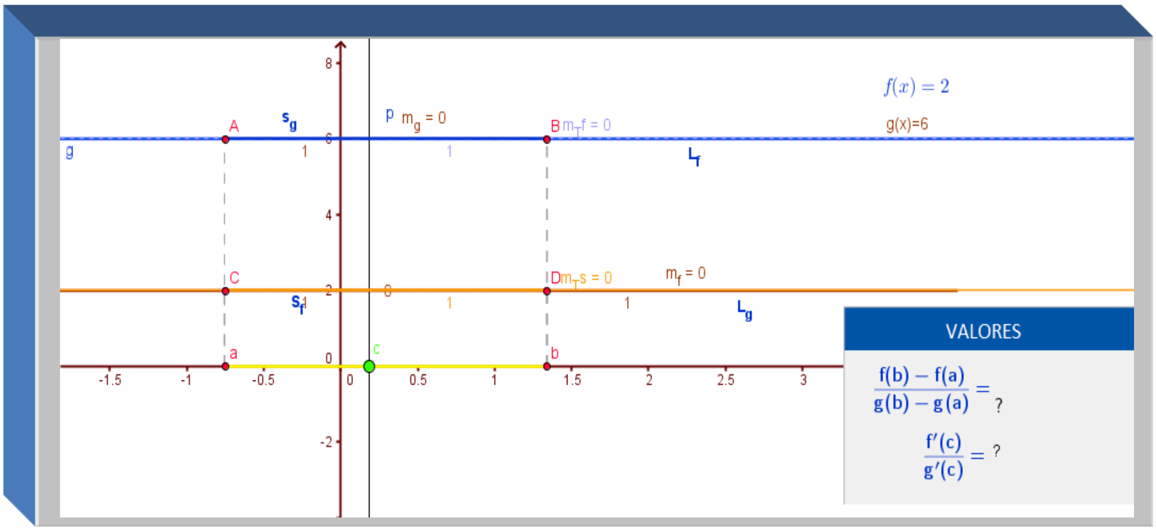
10. ¿Existe algún punto P, para el cual las razones $\frac{S_f}{S_g}$ sean iguales? Explique.

____

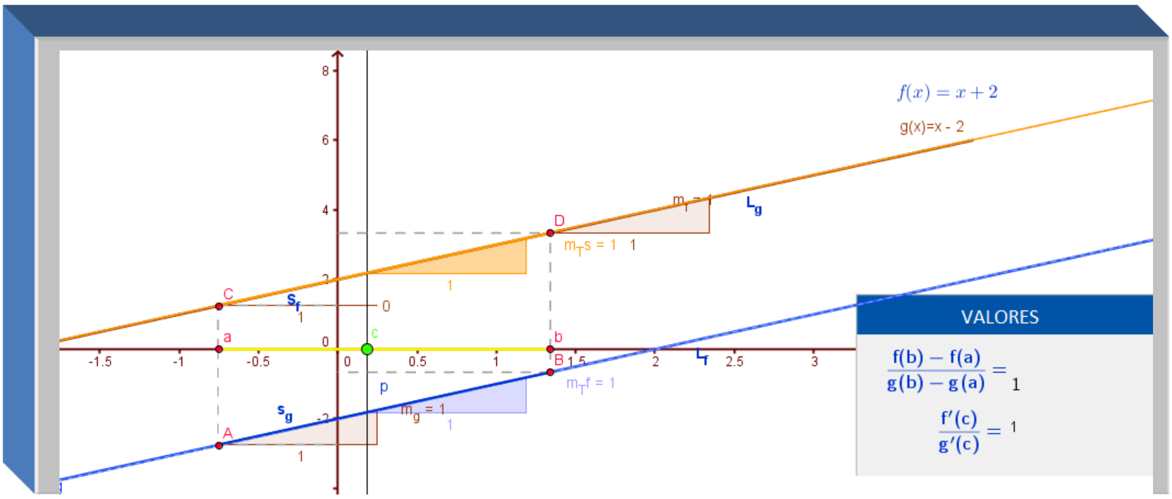
____

____

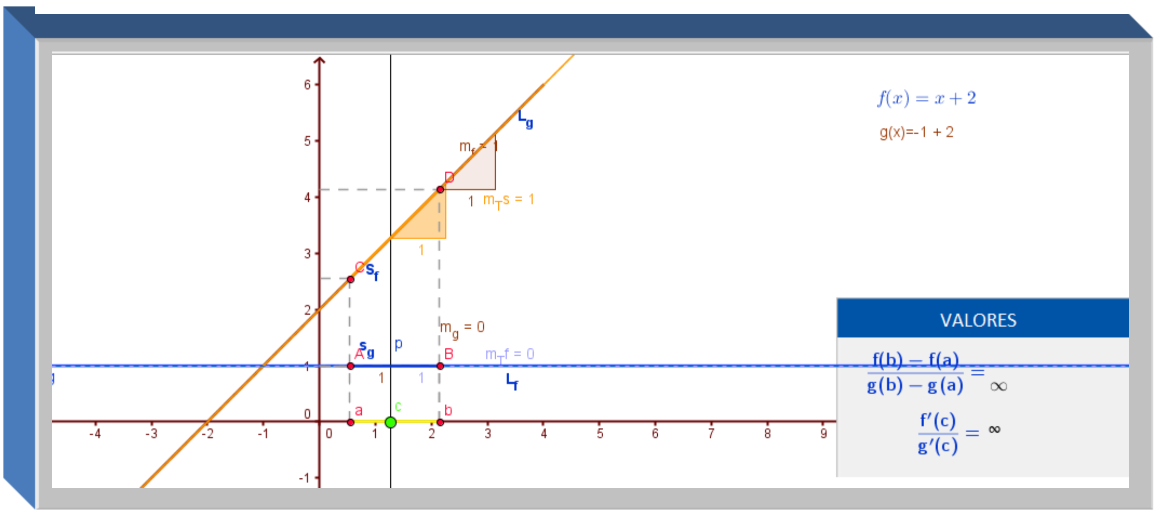
11. Haga una conjetura que describa lo observado anteriormente.
12. Realice los procesos anteriores para las siguientes funciones:



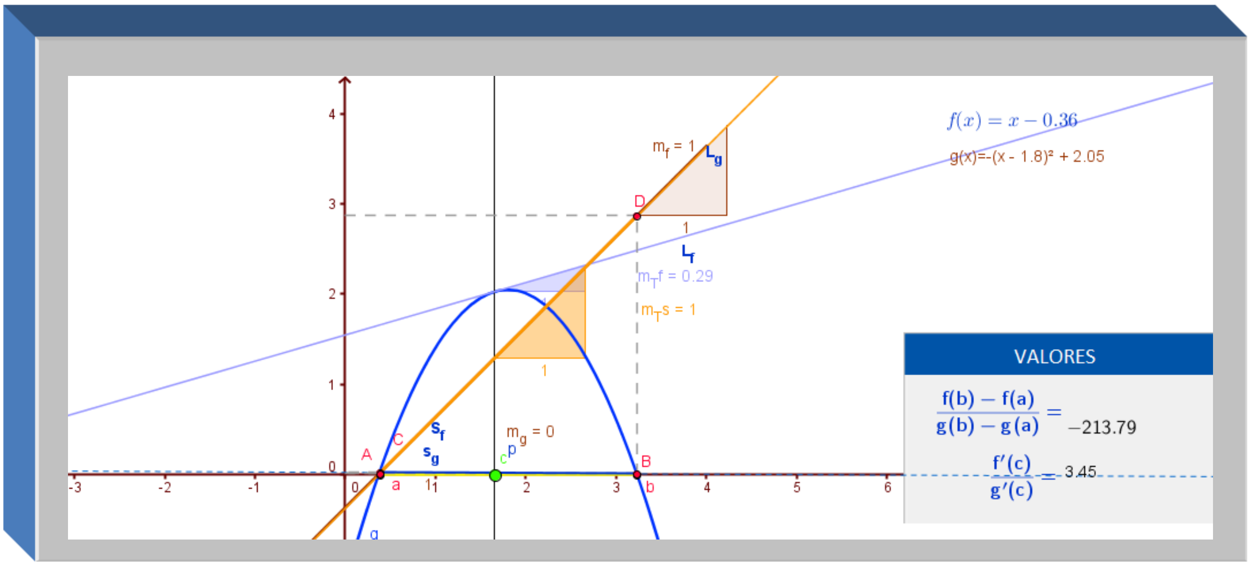
Gráfica 51



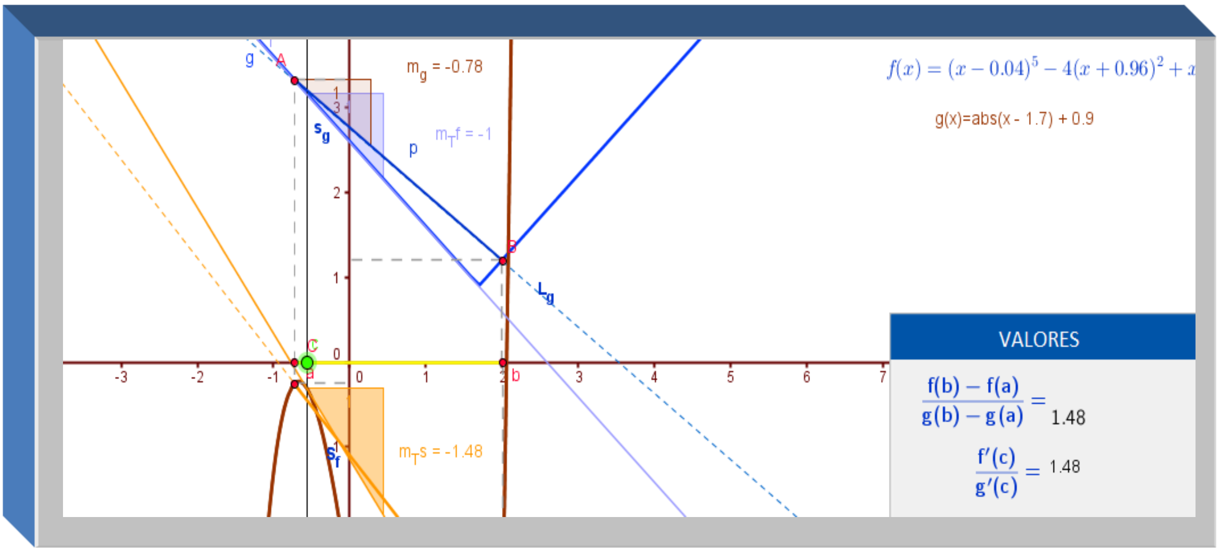
Gráfica 52



Gráfica 53



Gráfica 54



Gráfica 55

13. Después de repetir el proceso con las anteriores funciones, revise su conjetura para verificar si requiere condiciones especiales para f y g. Descríbalas.

____

____

____

____

____

14. Formule una proposición con base en su conjetura y en lo observado con las anteriores funciones.

15. Explique el significado geométrico de su proposición.

Nombre:	Código:	Fecha:

Triangulo inscrito en una semicircunferencia

En el applet Nº10 se muestran los puntos $A(0,0)$, $B=(20,0)$ y D=(x(A), curva), vértices del triángulo inscrito. El punto $C=(x,0)$ es un punto libre sobre el lado del triángulo $\overline{AB}$. La semicircunferencia es de diámetro $\overline{AB}=20$cm y el punto H muestra el lugar geométrico de los puntos A y D. Se muestra también un cuadro de valores con texto dinámico específico.

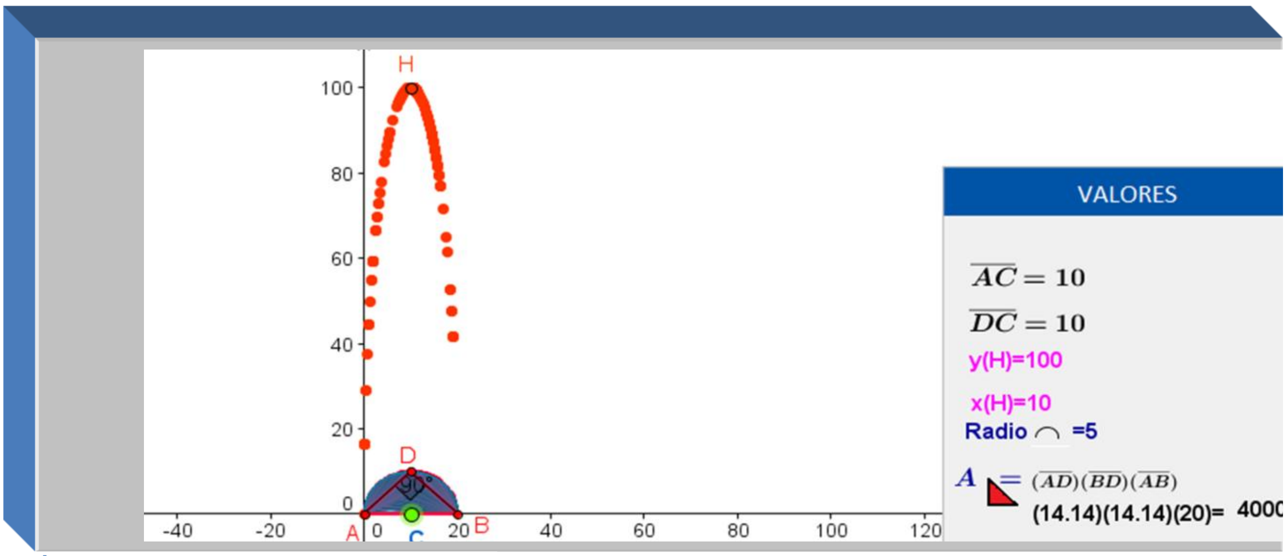
Prerrequisitos:

- Lugar Geométrico
- Triangulo rectángulo
- Media Geométrica

Herramientas de Geogebra presentes en la construcción de los applets:

Lea atentamente:

Enunciado del problema: Determine las dimensiones del mayor triángulo rectángulo que se puede inscribir en una semicircunferencia de radio 20 cm.



Gráfica 56

Considere un sistema coordenado en donde en el eje x ubicaremos la longitud del segmento $x = \overline{AC}$ y en el eje y ubicaremos el área del triángulo cuya altura es $\sqrt{x(20-x)}$.

1. Observe el lugar geométrico, de los puntos $(x, A(x))$ a medida que se desplaza $x(C)$ sobre el segmento AB.

2. Al mover el punto C por el intervalo [0,20], ¿los triángulos inscritos son siempre rectángulos? ¿Por qué?

   ____
   ____
   ____
   ____

3. Complete la siguiente tabla con los valores que aparecen en el applet a medida que mueva el punto C.

$\overline{AC} = X$	$\overline{AB}$	$\overline{AD}$	$\overline{DB}$	$\overline{DC}$	ÁREA
2					
4					
5					
6					
8					
10					
12					
14					
16					
18					
20					

Tabla 31

4. ¿Qué observa?

   ____
   ____
   ____
   ____

5. ¿Para qué valores de x y $h = \overline{DC}$ en la tabla se tiene el área máxima?

   ____
   ____

6. ¿Podrá existir un triángulo inscrito con mayor área diferente al que aparece en la tabla?

____

____

____

____

7. Mueva el punto C y observe cuidadosamente otros valores para $h = \overline{DC} = \sqrt{x(20-x)}$
8. Observe en el gráfico que la altura es la media geométrica de AC y CB entre $h = \sqrt{x(20-x)}$
9. Según lo anterior, el área del triángulo ABD es:

   - $A(x) = 5\sqrt{x(20-x)}$

   - $A(x) = 10\sqrt{x(20-x)}$

   - $A(x) = 10\sqrt{x(10-x)}$

10. Para determinar los valores de x, para los cuales se optimiza $A(x)$, hacemos $A'(x) = 0$.

11. ¿Cuánto vale x, en la función del punto 8?

____

____

12. Fije el punto $C = 10$, y observando el applet determine si se maximiza o se minimiza A(x).

____

____

13. ¿Cuál es el área máxima de $A(10)$?

____

____

14. Observe el lugar geométrico para $C = 10$, y escriba ¿en dónde la función A alcanza su máximo?

____

____

15. ¿Qué tiene que ver el punto 14 con el punto 15?

Solución analítica:

Observe que el área del triángulo es:

$$A = \frac{b \ \times h}{2}$$

Luego del triángulo inscrito se tiene que:

$$A = \frac{20\ \sqrt{x(20-x)}}{2}$$

La función estaría dada por

$$A(x) = 10\sqrt{x(20 - x)}$$

Buscamos los puntos críticos

$$A'(x) = \frac{10(20-2x)}{2\sqrt{20x-x^2}}$$

$$A'(x) = \frac{20(10-x)}{2(20x-x^2)}$$

$$A'(x) = \frac{10(10-x)}{\sqrt{20x-x^2}}$$

$$A'(x) = \frac{10(10-x)}{h}$$

Si $h = 0$, entonces $A = 0$, no habría un triángulo por tanto $h \neq 0$

$$A'(x) = 0 \ \leftrightarrow \frac{10(10 - x)}{h} = 0$$

$$\leftrightarrow (10 - x) = 0$$

$$\leftrightarrow x = 10$$ Entonces

Observe que:

$$A'(x) = \frac{10(10 - x)}{\sqrt{20x - x^2}}$$

$$A''(x) = \frac{-10\sqrt{(20x - x^2\ )} - \dfrac{20 - 2x}{2\sqrt{(20x - x^2\ )}} \times 10(10 - x)}{\left(\sqrt{20x - x^2}\right)^2}$$

$$A''(x) = \frac{\dfrac{-10\sqrt{(20x - x^2\ )}}{1} - \dfrac{2(10 - x)}{2\sqrt{(20x - x^2\ )}} \times 10(10 - x)}{\left(\sqrt{20x - x^2}\right)^2}$$

$$A''(x) = \frac{-10(20x - x^2) - 10(10 - x)^2}{(20x - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Para $x = 0$. $A''(x = 10) = \frac{-10(200-100)}{(200-100)^{\frac{3}{2}}} = -1$

Como $A''(x = 10) = -1 < 0$, en $x = 10$ hay un máximo en

$$A(10) = 100$$

Como $A''(x) < 0$ hay un máximo y su área máxima es:

$$A(x) = 10\sqrt{x(20 - x)}$$

$$A(10) = 10\sqrt{10(20 - 10)}$$

Por tanto para $x = 10$, el $A = 100\ cm^2$

16. ¿Será esta la máxima área?

____

____

____

____

Nombre:	Código:	Fecha:

Caja con superficie mínima

En el applet Nº11 se muestra la superficie de una caja, donde a y b son las aristas de la base, siendo b = 2 a, y c la altura de la caja. El punto b es libre sobre el eje x. Se presenta también la función $f(x) = \frac{32}{x^2}$. Por otro lado se presenta un cuadro de valores con texto dinámico.

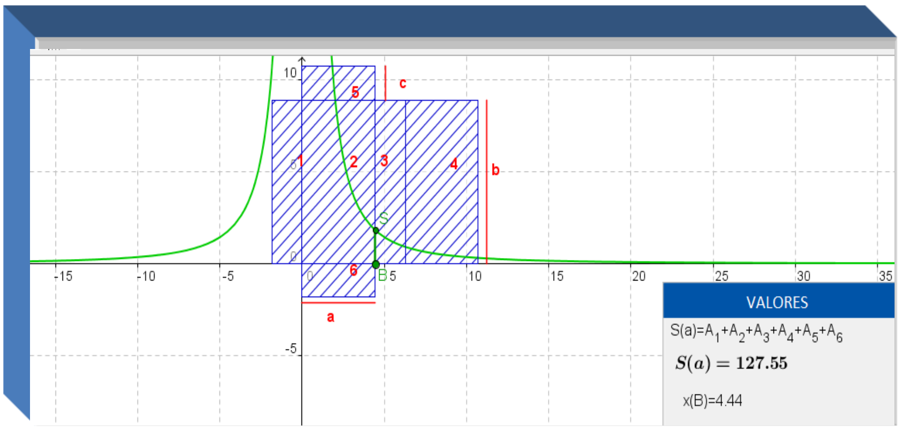
Prerrequisitos:

- Áreas
- Volumen

Herramientas de Geogebra presentes en la construcción de los applets:

Actividades:

Enunciado del problema: Se quieren construir cajas con forma de paralelepípedo rectangular que tengan una capacidad de $72\ dm^3$ *y en donde los lados de la base han de estar en relación 1:2 ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la caja, para que el material gastado en su manufactura sea el menor posible?*



Gráfica 57

1. Mueva el punto B para considerar diferentes valores del lado a y complete la siguiente tabla según el applet y los cálculos siguientes:

Como $b = 2\,a$ y el volumen de la caja es

$$V = abc = 72,$$

Entonces

$abc = 2\,a^2\,c\ = 72,$

De donde

$$c = \frac{72}{2a^2}$$

Así tenemos que: $b = 2\,a$ y,

$$c = \frac{36}{a^2}$$

Con estos cambios la superficie $S = 2(ab + ac + bc)$ se convierte en:

$$s = 2\left[(a)(2a) + (a)\left(\frac{36}{a^2}\right) + (2a)(\frac{36}{a^2})\right]$$

Simplificando:

$$s = 2\left[(2a^2) + \left(\frac{36}{a}\right) + (\frac{72}{a})\right]$$

$$s = 2[(2a^2\ ) + \frac{108}{a}]$$

$$s = 4a^2\ + \frac{216}{a}$$

Base		altura	volumen	superficie
X(B)=a	$b = 2a$	c	abc	$S = 2ab + 2ac + 2bc$
1		36	72	
	4	9	72	
2.5	5		72	
3		4	72	
4	8		72	
5	10		72	
6		1	72	

Tabla 32

2. Tenga en cuenta que la cantidad de material gastado es la superficie de la caja. (ver applet)

$$S = 2ab + 2ac + 2bc$$

3. ¿Según la tabla para que valores de a se tiene menor superficie?

____

____

____

4. ¿Cuándo se gasta menor material en la fabricación de las cajas?

____

____

____

Solución analítica:

$$S(a) = 4a^2 + \frac{216}{a}$$

$$S'(a) = 8a - \frac{216}{a^2}$$

$$S'(a) = \frac{8a^3 - 216}{a^2}$$

Como $a \neq 0, \quad a^2 \neq 0$

$$S'(a) = \frac{8a^3 - 216}{a^2} = 0 \leftrightarrow 8a^3 - 216 = 0$$

$$a^3 = \frac{216}{8} = 27 \rightarrow a = 3$$

Si $a = 3, \qquad b = 6 \qquad\qquad c = \frac{36}{a^2} = \frac{36}{9} = 4$

$a = 3, \qquad b = 6 \qquad\qquad c = 4$

Así $V = 3.6.4 = 72$

$$S'(a) = 8a - \frac{216}{a^2}$$

$$S''(a) = 8 - \frac{432}{a^3}$$

$$S''(3) = 8 - \frac{432}{27} = 24 > 0$$

S se minimiza cuando $a = 3$

S Mínima es:

$$S(3) = 4(3)^2 + \frac{216}{3}$$

$$S(3) = 36 + 72 = 108 \text{ dm}$$

5. Según el applet, ¿Para a = 3 se tiene la mínima cantidad de material gastado?

____
____
____

6. ¿De acuerdo al applet para que valor de a se presenta S mínimo?

Nombre:	Código:	Fecha:

Mínima suma de áreas

En el applet Nº12 se muestra el lugar geométrico de los puntos w y c. Las superficies del cuadrado y del triángulo. El punto C es libre sobre el eje x. Por otro lado se presenta un cuadro de valores con texto dinámico.

Prerrequisitos:

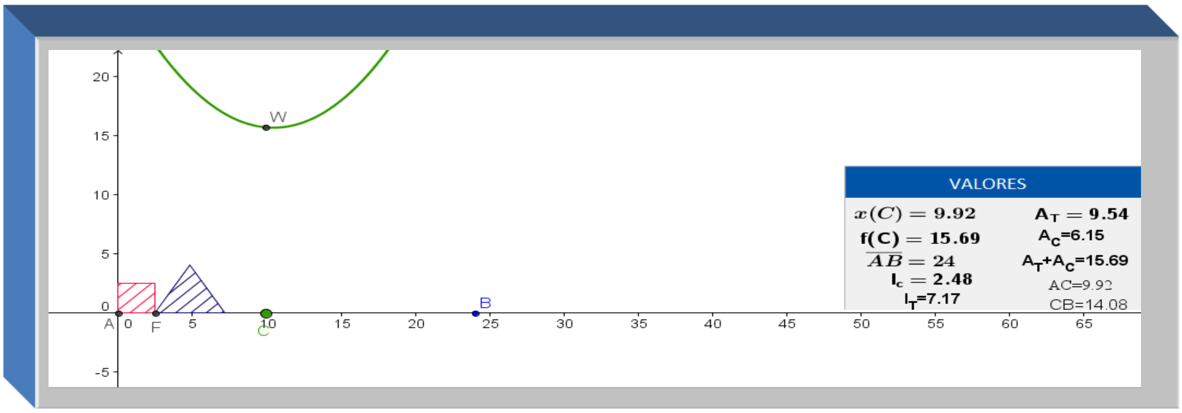
- Áreas
- Derivada

Herramientas de Geogebra presentes en la construcción de los applets:

Actividades:

1. Lea atentamente:

Enunciado del problema: *se tiene un alambre de longitud 24 cm, con el que se quiere construir un cuadrado y un triángulo equilátero. ¿Cómo se debe dividir el alambre para que la suma de las áreas de las figuras construidas sea la menor posible?*



Gráfica 58

1. Consideremos varios casos de división del alambre. Escribe en la siguiente tabla la medida del primer pedazo y del segundo pedazo.

Caso Nº	*Medida del pedazo 1=AC*	*Medida del pedazo 2=CB*
1		
2		
3		
4		
5		
General		

Tabla 33

2. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado para cada caso y el lado del triángulo?

Caso Nº		*Lado del cuadrado*	*Lado del triángulo*
1			
2			
3			
4			
5			
General:			

Tabla 34

3. En la siguiente tabla escribe el área de la figura y la suma de las áreas.

Caso Nº	*Área del cuadrado*	*Área del triángulo*	*Suma de las áreas*
1			
2			
3			
4			
5			
General:			

Tabla 35

4. ¿En qué casos se presenta una suma de áreas máxima?

____
____
____
____

5. ¿En qué casos se presenta una suma de áreas mínima?

____
____
____
____

6. ¿Desplace el punto C y encuentre el valor en que se presenta la menor suma de áreas?

____
____

7. ¿Con el dato encontrado en el punto anterior complete la siguiente tabla?

	Cuadrado	*Triángulo*
Alambre	*x*=______	*(24-x)*=______
Lado		
Área		
Suma		

Solución analítica:

8. Observe que:

$$S'(x) = \frac{2x}{16} + \frac{\sqrt{3}}{36}(2)(24-x)(-1)$$

$$S'(x) = \frac{x}{8} - \frac{\sqrt{3}}{18}(24-x)$$

$$S'(x) = 0$$

$$S'(x) = \frac{x}{8} - \frac{\sqrt{3}}{18}(24-x) = 0$$

$$S'(x) = \frac{x}{8} - \frac{\sqrt{3} \times 24}{18} + \frac{\sqrt{3}}{18}\,(x) = 0$$

$$S'(x) = x\left(\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{18}\right) = \frac{\sqrt{3} \times 4}{3}$$

$$x = \frac{\frac{\sqrt{3} \times 4}{3}}{\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{18}} = \frac{288\sqrt{3} - 388}{11}$$

Con

$$x = \frac{288\sqrt{3} - 388}{11}$$

Luego

$$24 - x = \frac{648 - 288\sqrt{3}}{11}$$

$$S''(x_0) = \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{18}\,(-1) = \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{18} = \frac{9 + 4\sqrt{3}}{72}$$

$S''(x_0) > \frac{9+4\sqrt{3}}{72}$ La suma se minimiza.

Con los anteriores valores responde:

9. El lado del cuadrado es:

____

____

10. El lado del triángulo es:

____

____

11. El área del cuadrado es:

____

____

12. El área del triángulo es:

____

____

13. La suma de las áreas del cuadrado y del triángulo es:

____

____

14. Compare este resultado con la menor suma que aparece en la tabla.
15. Verificamos que para x=_________ la función se minimiza.

Nombre:	Código:	Fecha:

Mínima Hoja con texto impreso

En el applet Nº13 se muestra la superficie de una caja, donde a y b son las aristas de la base, siendo b = 2 a, y c la altura de la caja. El punto b es libre sobre el eje x. Se presenta también la función $f(x) = \frac{32}{x^2}$. Por otro lado se presenta un cuadro de valores con texto dinámico.

Prerrequisitos:

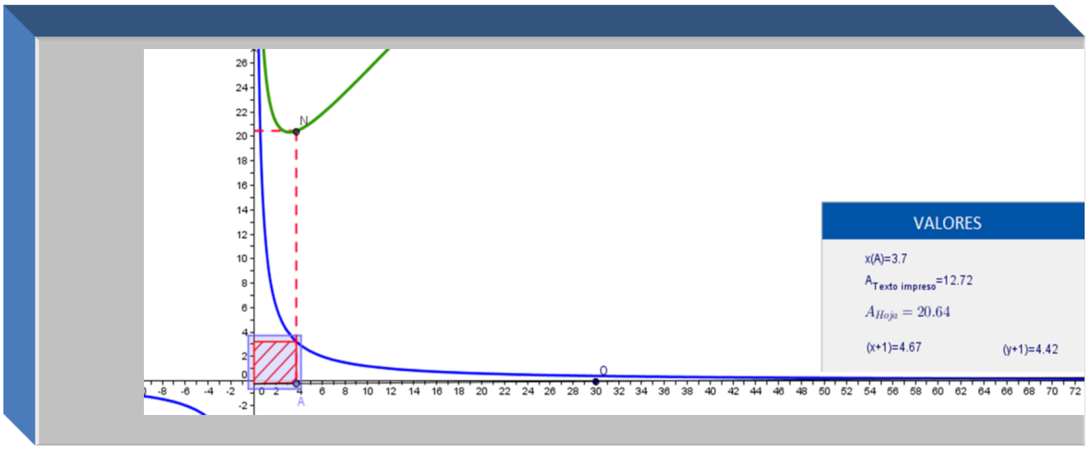
- Lugar Geométrico
- Media Geométrica

Herramientas de Geogebra presentes en la construcción de los applets:

Actividades:

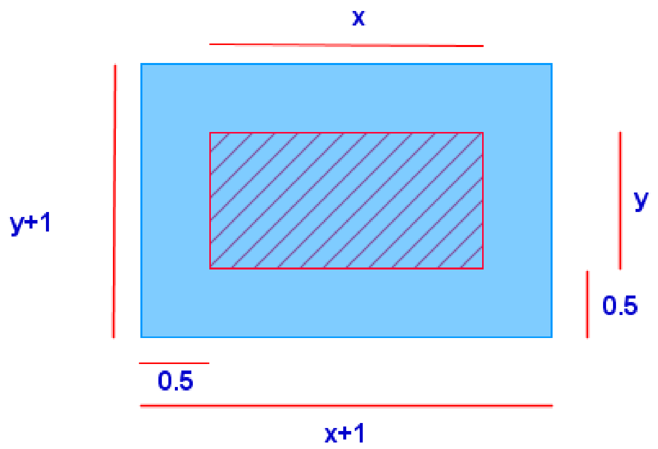
1. Lea atentamente:

Enunciado del problema: en una página de libro, el texto impreso debe ocupar 12 dm^2*.Las márgenes deben ser iguales a* $0.5\ dm$*. Si se toma en consideración la economía del papel, ¿Qué dimensiones son las más ventajosas?*



Gráfica 59

2. Consideremos varios casos suponiendo que la región impresa tiene forma rectangular:
    - x la base del texto impreso
    - y la altura del texto impreso



Si el área del texto es $xy = 12\ dm^2$
- la base de la hoja será $x + 1$
- la altura de la hoja será $y + 1$
- El área de la hoja = $(x + 1)(y + 1)$ con $x \neq 0$ y $y \neq 0$.

$$Área = [x + 2(0.5)] \times [y + 2(0.5)]$$

$$Área = \_\_\_\_\ dm^2$$

3. ¿Cuál es el área del rectángulo con medidas $x = 2$ y $y = 6$?

____

____

4. ¿Cuál es el área del rectángulo con medidas $x = 3$ y $y = 4$?

____

____

5. ¿Cuál es el área del rectángulo con medidas $x = 4$ y $y = 3$?

____

____

6. ¿Serán 20 dm^2 el área de la hoja más pequeña?

7. Complete la siguiente tabla:

Base texto x	*Altura texto y*	*Base hoja X+1*	*Altura hoja Y+1*	*Área hoja (x+1)(y+1)*
1	*12*			
2	*6*			
3	*4*			
4	*3*			
x	*y*			

Tabla 36

Por tanto $Área = (x+1)(y+1)$

Solución analítica:

Como $xy = 12 \rightarrow y = \frac{12}{x}$

$$A(x) = (x+1)(\frac{12}{x}+1)$$

$$A(x) = 12 + x + \frac{12}{x} + 1$$

$$A(x) = x + \frac{12}{x} + 13$$

$$A(x) = 1 - \frac{12}{x^2} = 0$$

$$A(x) = \frac{x^2-12}{x^2} = 0$$

Como $x \neq 0$ y $x^2 \neq 0$.

$$A'(x) = 0 \leftrightarrow x^2 - 12 = 0$$
$$X = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

El área de la base del texto:

$$X = 2\sqrt{3}$$

Altura del Texto:

$$y = \frac{12}{x} = \frac{12}{2\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

8. Luego la hoja debe ser cuadrada, entonces las dimensiones de la hoja son:

- Base:_______________

- Altura:_____________

9. Con las anteriores medidas el área de la hoja es:_____________________

10. ¿Para $x = 2\sqrt{3}$ se tendrá la hoja de área mínima?

    Sabiendo que:

$$A'(x) = 1 - \frac{12}{x^2}$$

$$A''(x) = \_\_\_\_\_\_\_$$

    El área mínima es cuando x=______________

Nombre:	Código:	Fecha:

Menor suma de áreas

En el applet Nº14 se muestra el lugar geométrico de los puntos U y C. Las superficies del círculo y del hexágono. El punto C es libre sobre el eje x. Por otro lado se presenta un cuadro de valores con texto dinámico.

Prerrequisitos:

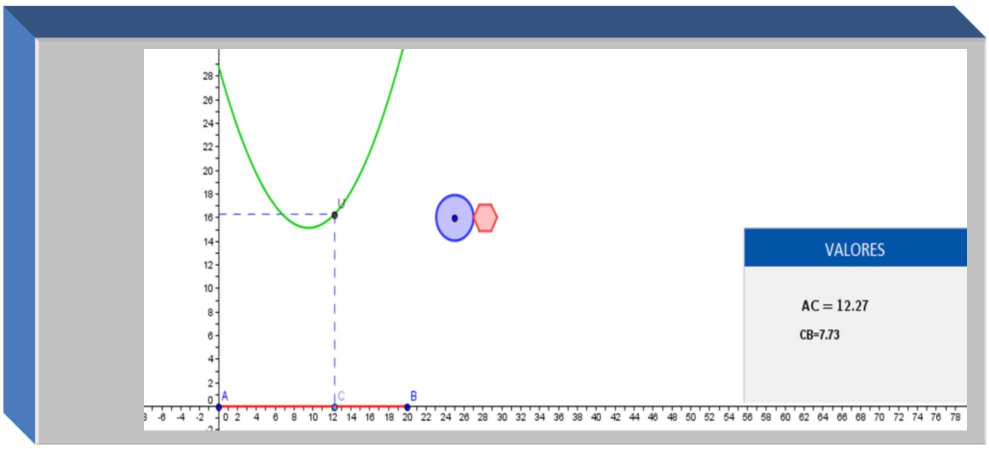
- Áreas
- Derivada

Herramientas de Geogebra presentes en la construcción de los applets:

Actividades:

1. Lee atentamente:

Enunciado del problema: Un alambre de longitud 20 cm se corta en dos partes para bordear un círculo y un hexágono regular. ¿Por dónde debe cortarse el alambre para que la suma de las áreas de las figuras bordeadas sea mínima?



Gráfica 60

2. Complete la siguiente tabla considerando varios casos:

Caso Nº	*Medida del pedazo 1*	*Medida del pedazo 2*
1	0	
2		15
3	10	
4		5
5	20	
General		

Tabla 37

3. ¿Cuánto mide el radio del círculo y del hexágono en los casos observados del punto anterior?
   - P_1=pedazo 1
   - P_2=pedazo 2

Caso Nº	*Radio círculo* $R=\frac{P_1}{2\pi}$	*Lado hexágono* $L=\frac{P_2}{6}$
1	0	$20/6$
2		
3	$10/2\pi$	
4		
5		
General		

Tabla 38

4. En la siguiente tabla escriba el área de cada figura y la suma de áreas para cada caso.

Caso Nº	*Área del circulo* πr^2	*Área del hexágono* $\frac{3\sqrt{3}}{2}L^2$	*Suma de las áreas*
1			
2			
3			
4			
5			
General:			

Tabla 39

5. ¿En qué casos se presenta una suma de áreas mínima?

____
____
____
____

6. ¿En qué casos se presenta una suma de áreas máxima?

____
____
____
____

7. ¿Desplace el punto C y encuentre el valor en que se presenta la menor suma de áreas?

____
____
____
____

8. ¿Con el dato encontrado en el punto anterior complete la siguiente tabla?

	Circulo	*Hexágono*
Alambre	*x*=______	(24-*x*)=______
Lado		
Área		
Suma		

Tabla 40

Solución analítica:

9. Observe que:

El perímetro del círculo es:

$$2\pi r = x$$

Entonces el radio del círculo es:

$$r = \frac{x}{2\pi}$$

Ahora el perímetro del hexágono es:

$$6L = 20 - x$$

Y por tanto el área del hexágono es:

$$\frac{20 - x}{6} = L$$

Luego

$$S(x) = \pi \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{20 - x}{6}\right)^2$$

Derivando

$$S'(x) = 2\pi \left(\frac{x}{2\pi}\right)\left(\frac{1}{2\pi}\right) + \frac{2 * 3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{20 - x}{6}\right)\left(\frac{-1}{6}\right)$$

$$S'(x) = \left(\frac{x}{2\pi}\right) + \frac{\sqrt{3}}{12}(20 - x)$$

$$S'(x) = 0$$

Entonces:

$$x = \frac{20\sqrt{3}\pi}{6 + \sqrt{3}\pi}$$

Luego:

$$S''(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right) + \frac{\sqrt{3}}{12} > 0$$

La suma se minimiza.

Con los anteriores valores responde:

10. El radio del circulo es:

____

____

11. El lado del hexágono es:

____

____

12. El área del círculo es:
____
____

13. El área del hexágono es:
____
____

14. La suma de las áreas del circulo y del hexágono es:
____
____

15. Compare este resultado con la menor suma que aparece en la tabla.
16. Verificamos que para x=_________ la función se minimiza.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Licenciatura de Matemáticas

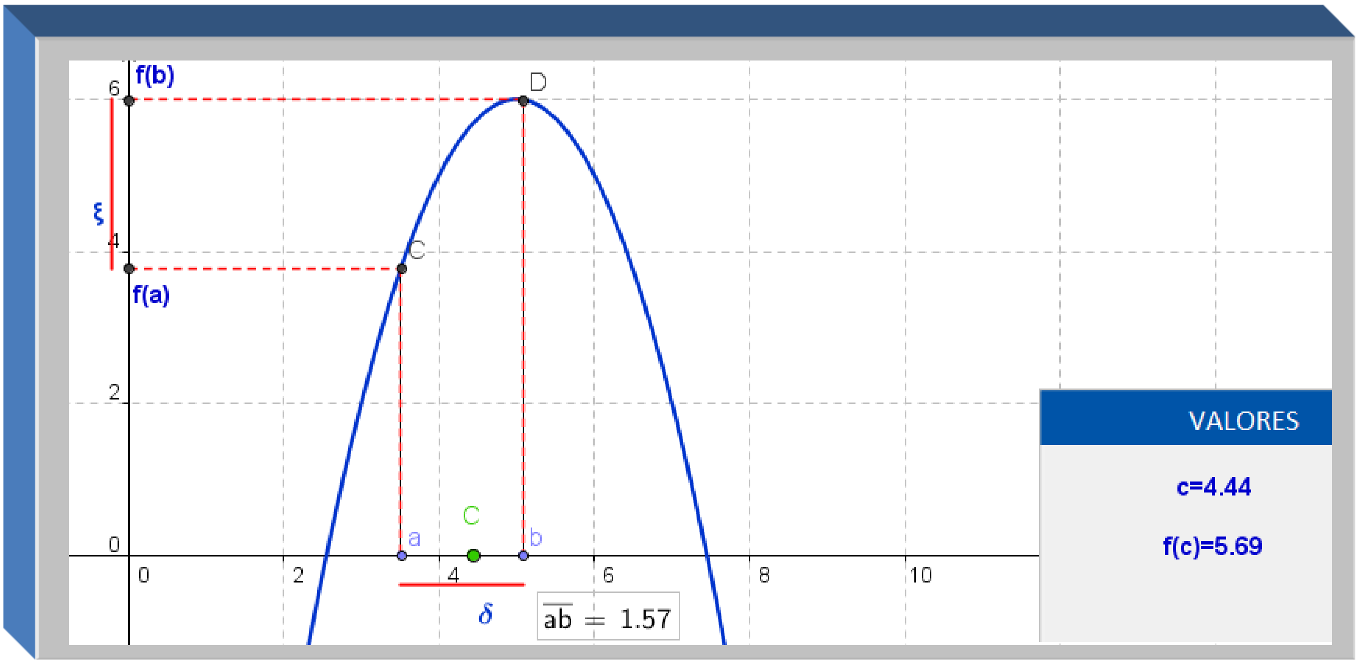
Nombre:	Código:	Fecha:

Límite

El siguiente taller está diseñado para que el estudiante construya un applet utilizando la definición de límite.

Prerrequisitos:

- Continuidad



Gráfica 61

Actividades:

Para la construcción del applet siga los siguientes pasos:

1. En la barra de entrada digite la siguiente función:

$$f(x) = -(x - 5)^2 + 6$$

2. En la barra de entrada digite el comando Punto[EjeX]. Este punto llámelo a. Ubíquelo en el origen.
3. Trace el punto B sobre el eje x. Ubíquelo a dos unidades del punto A. Este punto llámelo b.
4. Trace el segmento ab.
5. Trace las rectas perpendiculares que pasan cada una por los puntos a y b con el eje x. Llámelas $recta\ a$ y $recta\ b$
6. Con la herramienta intersecto en un punto halle los intersectos entre las rectan perpendiculares y la función. llámelos C y D.
7. Luego trace las $rectas\ c\ y\ d$ perpendiculares que pasen por los puntos C y D con respecto al eje y.
8. Ubique un punto E, sobre el segmento ab.
9. Encuentre los intersectos de la $recta\ c$ y la $recta\ d$ con respecto al eje y. Llámelos f y g respectivamente.
10. Ubique un punto H, sobre la recta c detrás del punto C y trace su perpendicular I
11. Halle el punto de intersección de la perpendicular I con la $recta\ c$.
12. Ahora ubique el punto J sobre la recta a y abajo del punto A.
13. Trace la recta f que pase por J y que sea perpendicular a la recta a.
14. Grafique el punto k de intersección entre la recta f y la recta b.
15. Con la herramienta texto digite $\delta, \varepsilon, f(a) y\ f(b)$y ubiquelos en los puntos F, H, G y F, respectivamente.
16. Una vez construido el applet oculte lo que no sea necesario.
17. Describa el applet según lo observado en su construcción, mueva los puntos a y b .

18. Ubique el deslizador en a=2.5, y determine si la imagen de C queda dentro del intervalo ε , o por fuera de ε .

19. Ubique el deslizador en b=7, y determine si la imagen de C queda dentro del intervalo ε , o por fuera de ε .

____
____

20. Ubique el deslizador en a=5, y si la imagen de C queda dentro del intervalo ε , o por fuera de ε .

____
____

21. ¿A que tiende δ cada vez que hacemos más pequeño este intervalo?

____
____

22. ¿Se podría afirmar que siempre quedan las imágenes de C en el intervalo determinado por ε?

____
____

23. Realice una conjetura con lo observado en el applet.

____
____
____

24. Ahora digite en la barra de entrada las siguientes funciones y conteste las preguntas anteriores.

- $f(x) = 3$
- $f(x) = 2x$
- $Si[x < 0, 2 + x^2, Si[x > 0, 3 + x^2, 0]]$
- $f(x) = \tan(x)$ en el intervalo $(\pi, 2\pi)$

25. Revise su conjetura y realice una proposición teniendo en cuenta los resultados anteriores.

____
____
____

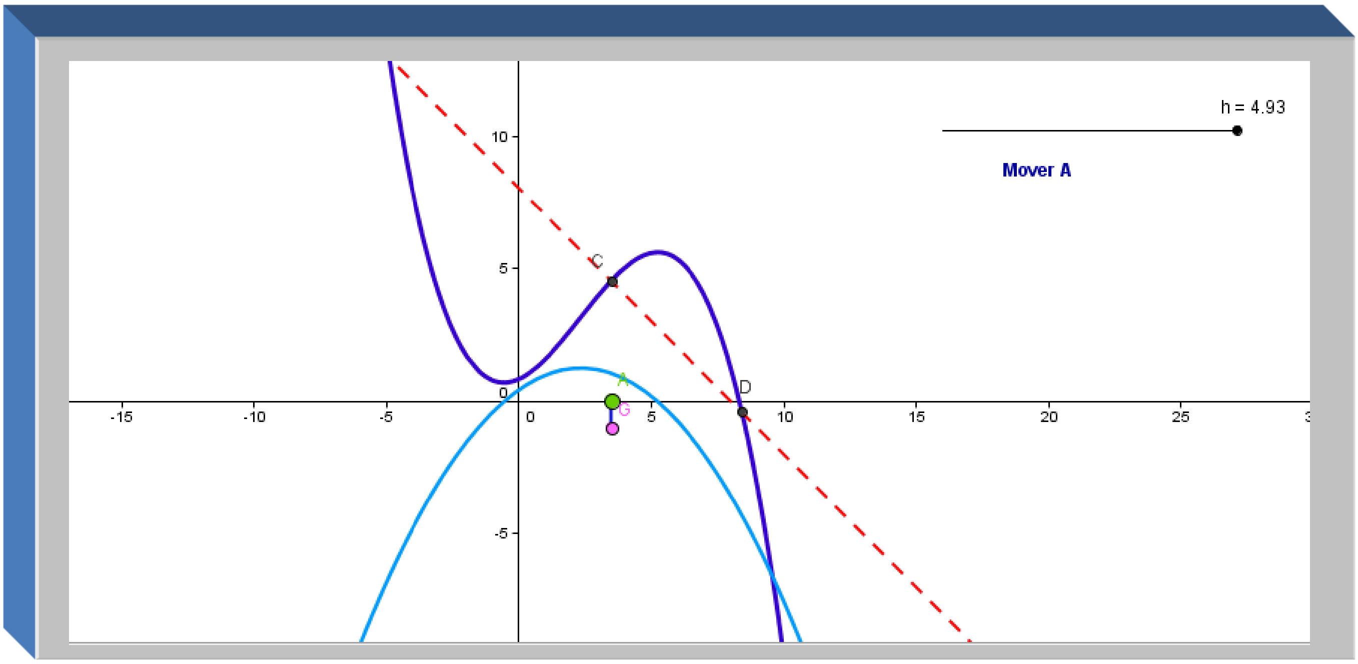
Nombre:	Código:	Fecha:

Derivada

El siguiente taller está diseñado para que el estudiante construya un applet utilizando la definición de derivada.

Prerrequisitos:

- Continuidad
- Diferenciabilidad



Gráfica 62

Actividades:

Para la construcción del applet siga los siguientes pasos:

2. En la barra de entrada digite la siguiente función:

$$f(x) = \frac{4 - (x - 3)(x - 7)(x + 3)}{20}$$

3. Ubique el punto A sobre el eje x para ello puede utilizar el comando Punto[EjeX]

4. Utilice la herramienta deslizador para crear uno en la parte superior derecha de la ventana gráfica, con un valor mínimo de 0.01 y un valor máximo de 5 y con un incremento de 0.001. Llámelo h

5. Trace una circunferencia con centro en A y radio h

6. Con la herramienta punto de intersección encuentre el intersecto de entre la circunferencia y el eje x. Llame a este punto B

7. Trace la recta perpendicular que pase por el punto A y el eje x. llámela $recta\ a$. Llame a este punto C

8. Trace la recta perpendicular que pase por el punto B y el eje x. llámela $recta\ b$. Llame a este punto D

9. Con la herramienta punto de intersección determine el punto de intersección entre la gráfica de la función y la $recta\ a$

10. Con la herramienta punto de intersección determine el punto de intersección entre la gráfica de la función y la $recta\ b$

11. Trace la $recta\ d$ que pasa por los puntos C y D.

12. Trace la $recta\ e$ que pase por C y sea perpendicular al eje y.

13. Grafique la circunferencia g con centro en C y radio 1

14. Halle la intersección entre la circunferencia g y la recta e. A este punto llámelo E.

15. Trace la $recta\ i$ perpendicular que pasa por el punto E y la $recta\ e$.

16. Digite en la barra de entrada el comando interseca [d,i] para hallar el punto de intersección entre $la\ recta\ d$ y $la\ recta\ i$. A este punto llámelo F.

17. Trace el segmento que pasa por los puntos E y F.

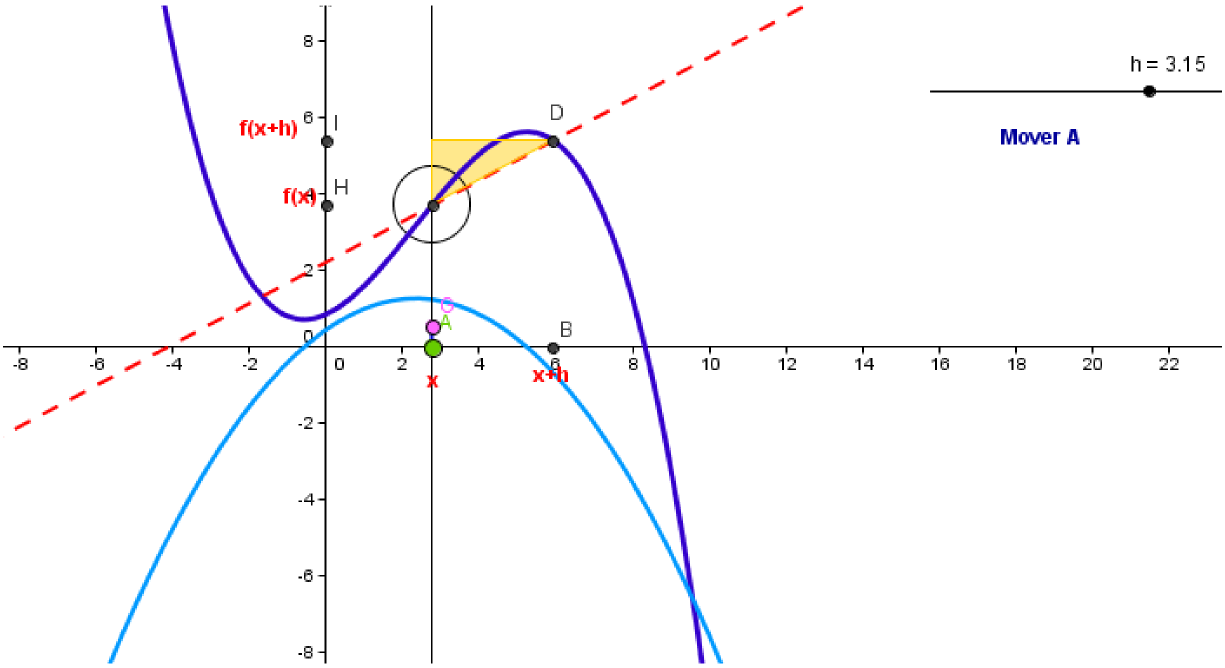
18. Trace la *recta k* que pasa por los puntos E y A.

19. Con ayuda de las herramientas de Geogebra trace una *recta l* que pase por el punto F y sea paralela a la recta k.

20. Trace el punto de intersección entre las rectas a y l. A este punto llámelo G.

21. Trace el segmento que pasa por los puntos A y G.

22. En la barra de entrada digite $f'(x)$, para que en la ventana gráfica se vea.



23. Con la herramienta texto digite: x, x+h, f(x), f(x+h) y ubíquelos en la posición A, B, H, I respectivamente.

24. Trace la *recta n* que pase por C y sea perpendicular al eje y.

25. Trace la recta p que pase por D y sea perpendicular al eje y.

26. Halle la intersección entre la recta n y el eje x. A este punto llámelo P.

27. Halle la intersección entre el punto P y el eje x. A este punto llámelo I.

28. Encuentre el punto de intersección entre el punto P y la $recta\ a$.

29. Con la herramienta polígono trace el triángulo CJD.

30. Una vez construido el applet oculte lo que no sea necesario.
31. Describa el applet según lo observado en su construcción, mueva
El punto A.

32. Ubique el deslizador en h=5, y determine la pendiente m_s de la recta que pasa por los puntos CD.

33. Ubique el deslizador en h=3, y determine la pendiente m_s de la recta que pasa por los puntos CD.

34. Ubique el deslizador en h=1, y determine la pendiente m_s de la recta que pasa por los puntos CD.

35. ¿Trigonométricamente a qué es igual $tan\beta$ en un triángulo?

36. ¿Si el cateto adyacente es igual a uno, la $tan\beta$ a qué es igual?

37. ¿Qué tiene que ver este valor con la pendiente de los puntos P y Q cuando su distancia h es mínima?

38. ¿Qué podemos decir de la pendiente y de la derivada cuando h tiende a cero?

CONCLUSIONES

Geogebra es un software potencialmente estimulador en el proceso de aprendizaje de conceptos matemáticos abstractos, ya que por medio de la construcción de applets dinámicos se puede lograr dar más significado en los temas a tratar.

Geogebra es un software con diversos usos en la geometría, el cálculo y el álgebra, es por esto que la creación del tutorial aplicativo en el cálculo diferencial es un ejemplo para aprovechar las multiplicidades de Geogebra. Con las construcciones de los applets dinámicos se pueden proponer nuevas actividades como visualizadores que permitan dinamizar los conceptos matemáticos como los teoremas tratados en este documento.

Al interactuar los estudiantes con los applets, pueden observar algunas funciones de Geogebra y ver su importancia en cada uno de los talleres.

Se pretende que la creación de los talleres junto con los applets permita tener un acercamiento más visual de los elementos desarrollados particularmente en el cálculo diferencial, ya que es una experiencia que no está normalmente en las aulas de clase.

REFERENCIAS

Adams, Larry y Antonio Sánchez Aguilar. Consecuencias de las TIC en la educación. - U. de las Américas Puebla y Texas Christian University. Septiembre 2006

ANDRADE, Luisa; PERRY, Patricia; GUACANEME, Edgard y FERNANDEZ, Felipe. La Enseñanza de las Matemáticas: ¿En camino de Transformación?. Bogotá D.C.: Universidad de los Andes, Grupo de Investigación “Una empresa docente”. 2003. 19 p.

APOSTOL. Tom. M. Calculus. Volumen 1. Editorial Reverté.1984.

ARGENTINA. DIRECCION GENERAL DE CULTURA Y EDUCACIÓN. Diseño Curricular para la Educación Secundaria Ciclo Superior 4to año. [Artículo en Línea]. [Consultado 26 Jun. 2012]. Disponible en: <http://www.fmmeducacion.com.ar/Sisteduc/Buenosaires/Secundario/4to_Materias_comunes/4_matematica.pdf>

ARIAS, José y MAZA, Ildefonso. Tema 3 Razones trigonométricas. [Artículo en Línea]. [Consultado 12 Jun. 2012]. Disponible en: <http://cipri.info/resources/1bct03T.pdf>

ARIAS, José y MAZA, Ildefonso. Tema 4 Resolución de Triángulos. [Artículo en Línea]. [Consultado 12 Jun. 2012]. Disponible en: <http://cipri.info/resources/1bct04T.pdf>

ARIAS, José y MAZA, Ildefonso. Tema 5 Geometría Analítica. [Artículo en Línea]. [Consultado 12 Jun. 2012]. Disponible en: <http://cipri.info/resources/1bct05T.pdf>

BECERRA, José y BRICEÑO, César. Uso de software enfocado a Geometría Dinámica dentro del Colegio de Matemáticas de la ENP. Ciudad de México: Universidad Nacional Autónoma de México. 2011. 8 p.

BOTANA, Francisco y VALCARCE, José. Escaleras deslizantes flexibles: Un repaso actualizado y específico al puente entre Geometría Dinámica y Álgebra Computacional. [Artículo en Línea]. [Consultado 5 Jul. 2012]. Disponible en: <http://www.geogebra.es/materiales/escFlexFinal.pdf>

CALIGARIS, Marta; SCHIVO, María y ROMITI, María. Una ayuda para las clases de Geometría Analítica. Colón, San Nicolás (Arg.): Grupo Ingeniería & Educación, Facultad Regional San Nicolás, Universidad Tecnológica Nacional. 2010. 6 p.

CASTRO, Luis. Apuntes Cálculo Diferencial, Capítulo 11 Máximos y Mínimos. [Artículo en Línea]. [Consultado 15 Mar. 2012]. Disponible en: <http://www.eduweb20.com.ve/Matem%C3%A1tica%20I_Apuntes%20de%20calculo%20diferencial_11_Derivadas_Maximos%20y%20minimos_Prof.%20Luis%20Castro%20Perez.pdf>

CHAVES, Eduardo. Alcances y limitaciones del Geogebra para la enseñanza de conceptos elementales de la Geometría Analítica. Santo Domingo de Heredia (Costa Rica): Universidad Estatal a Distancia, Escuela de Ciencias Exactas y Naturales. 2008. 10 p.

CHILE. MINISTERIO DE EDUCACIÓN. Enlaces, Centro de Educación y Tecnología. [Artículo en Línea]. [Consultado 12 Jun. 2012]. Disponible en: <http://www.enlaces.cl/tp_enlaces/portales/tp0bd91cdfey63/uploadImg/File/3%20Dimension%20Pedagogica.pdf>

CHRYSANTHOU, Irini y ROWLAND, Tim. The use of ICT in primary mathematics in Cyprus: The case of Geogebra. The Old Schools, Trinity Lane: Cambridge university, Faculty of Education. 2008. 94 p.

ESPAÑA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN. Geogebra en la Enseñanza de las matemáticas. [Artículo en Línea]. [Consultado 14 May. 2012]. Disponible en: <http://geogebra.es/cvg/13/4.html>.

FALCON, Raúl; RIOS, Ricardo; BARRENA, Eva y RAMIREZ, Rosana. Aplicaciones de Geogebra al Análisis. Sevilla: Universidad de Sevilla. 2011. 5 p.

GEOGEBRA, Manual. [Artículo en Línea]. [Consultado 15 Mar. 2012]. Disponible en: <http://www.google.com.co/url?sa=t&rct=j&q=aulademate.com+%2B+geogebra+manual&source=web&cd=2&ved=0CC8QFjAB&url=http%3A%2F%2Fwww.aulademate.com%2Fforo%2Fdownload.php%3Fid%3D367%26sid%3De6f757bbdca31d35d5976512c2295170&ei=xbxUKWEMoza9ATFwoDwCA&usg=AFQjCNGlC6ZcxyNj5P6E3q4v14Ruhwp7w&cad=rja>

GONZALEZ, María. Construcciones Geométricas con Geogebra. [Artículo en Línea]. [Consultado 10 Abr. 2012]. Disponible en: <http://www.estalmat.unican.es/documentos/Actividades_2008_09/enero/EstalmatMJ_hojasAlumnosparte1.pdf>

GUTIÉRREZ, Ángel. Enseñanza de las Matemáticas en entornos informáticos. Valencia: Universitat de Valencia. Departamento de Didáctica de la Matemática. 2009. 18 p.

HOHENWARTER, Judith y HOHENWARTER, Markus. Documento de Ayuda de Geogebra, Manual de la versión 3.2. [Artículo en Línea]. [Consultado 5 Jul. 2012]. Disponible en: < http://www.geogebra.org/help/docues.pdf>

HOHENWARTER, Judith y HOHENWARTER, Markus. Geogebra Introduction for Middle and High School Teachers. [Artículo en Línea]. [Consultado 10 May. 2012]. Disponible en: <http://www.ul.ie/cemtl/>

HOHENWARTER, Markus y SAIDON, Liliana. Ayuda de geogebra 2.5. [Artículo en Línea]. [Consultado 14 May. 2012]. Disponible en: <http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/3/Usrn/matematicas/geogebra/Ayuda%20GeoGebra.pdf>

JOHNSON, Paddy y BROPHY, Tim. Algebraic Input, Functions & First Principals. [Artículo en Línea]. [Consultado 10 May. 2012]. Disponible en: ***http://www.geogebra.org***

LEITHOL, Louis. El cálculo. Séptima edición. Oxford University Press. 1998

LOSADA, Rafael. Aprender Investigando, Enseñar aprendiendo. [Artículo en Línea]. [Consultado 3 Sep. 2012]. Disponible en <http://geogebra.es/agc.htm>

LOSADA, Rafael. Cursillo Avanzado de Geogebra 3.1.226.0. Cantabria: Instituto Geogebra de Cantabria. 2009. 26 p.

LOSADA, Rafael; RECIO, Tomás y VALCARCE, José. Sobre el descubrimiento automático de diversas generalizaciones del Teorema de Steiner-Lehmus. [Artículo en Línea]. [Consultado 6 May. 2012]. Disponible en: ***http://geogebra.es/pub/ bisectores.pdf***

LOSADA. Rafael. Geogebra: la eficiencia de la intuición. [Consultado 10 May. 2012. geogebra.pdf

MANIZADE, Agida y MASON, Margie. Choosing Geogebra applications most appropriate for teacher's current geometry classroom: pedagogical perspective. Ithaca (NY, USA): Ithaca College. 2010. 5 p.

PACHECO, José. Aprender de los Errores. En: Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas. Vol. 46. (Junio 2001). p.49-54.

PÁEZ, Haydée G. Alfabetización en Informática para Docentes de Educación de Postgrado. Un Estudio de Caso Venezolano. Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Carabobo. Valencia, Estado Caraboo, 2001, Venezuela

PREINER, Judith. Introducing Dynamic Mathematics Software to Mathematics Teachers: the Case of GeoGebra. Slazburg: University of Salzburg. 2008. 264 p.

RECIO, Tomás. El proyecto europeo de geometría dinámica Intergeo. Cantabria: universidad de Cantabria. 2008. 5 p.

RUÍZ, Giovanni; SEOANE, Andrea y DI BLASI, Mario. Uso de recursos informáticos para potenciar las diferentes representaciones del concepto teorema fundamental del cálculo. Santa Rosa, La Pampa (Arg.): Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional General Pacheco. 2008. 6 p.

SÁNCHEZ, Andrés. Estrategias didácticas para el aprendizaje de los contenidos de trigonometría empleando las TICS. Maracaibo (Ven.): Universidad Rafael Belloso Chacín. 2010. 19 p.

SANTANA, María. Geometría Analítica Plana con Geogebra. En: Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas. Vol. 75. (Noviembre 2010). p.131-142.

VALCARCEL, Ana y GONZALEZ, Luis. Uso pedagógico de materiales y recursos educativos de las TIC: Sus ventajas en el aula. Salamanca: Universidad de Salamanca, Departamento de Didáctica. 2006. 47 p.

VERA, Miguel y ARJONA, Doris. Innovación evaluativa desde la perspectiva de un entorno virtual para la enseñanza y el aprendizaje de cualquier ciencia objeto. San Cristóbal (Ven.): Universidad de los Andes Venezuela. 2006. 38 p.

VILCHEZ, Enrique. Sitio web: funciones cuadráticas una experiencia de desarrollo, implementación y evaluación. San José: Universidad Nacional de Costa Rica, División de Educología. 2005. 21 p.

VILLA, Jhony y RUIZ, Mauricio. Pensamiento variacional: seres humanos con GeoGebra en la visualización de noción variacional. Sao Paulo: Educ. Matem. Pesq.v.12, n.3, p. 514-528, 2010.

http://inn-edu.com/Red/IntroduccionGeogebra.pdf

ANEXOS