TOPOLOGIAS ASOCIADAS A CONJUNTOS ORDENADOS

LIZETH CAROLINA RODRÍGUEZ GÓMEZ
CÓDIGO: 2008140061
JENNY MARCELA UMAÑA GÓMEZ
CÓDIGO: 2008140070

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C
2012

TOPOLOGIAS ASOCIADAS A CONJUNTOS ORDENADOS

LIZETH CAROLINA RODRÍGUEZ GÓMEZ
CÓDIGO: 2008140061
JENNY MARCELA UMAÑA GÓMEZ
CÓDIGO: 2008140070

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de licenciado en matemáticas.

ASESOR: ALBERTO DONADO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C
2012

AGRADECIMIENTOS

A Dios por todas las bendiciones que nos ha regalado y todo lo que nos ha permitido, a nuestras familias por apoyarnos en todas las etapas de la vida, al profesor Alberto Donado por su dedicación y oportunas orientaciones, además a todos aquellos que contribuyeron en nuestra formación académica para lograr ésta meta.

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Topologías asociadas a conjuntos ordenados
Autor(es)	Rodríguez Gómez, Lizeth Carolina; Umaña Gómez, Jenny Marcela.
Director	Donado Núñez, Gil Alberto de Jesús
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2012, 102 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Conjuntos ordenados, bases para una topología, topologías asociadas al orden, relaciones entre topologías.

2. Descripción

Trabajo de grado que presenta la solución de un ejercicio propuesto por el profesor Gustavo Rubiano en el cual se consideran unas colecciones como bases para generar las topologías asociadas al orden y sus relaciones en conjuntos totalmente ordenados sin elemento mínimo ni máximo, luego de ello se procede a modificar las condiciones de los conjuntos tomando unos totalmente ordenados pero con elemento mínimo o máximo y otros parcialmente ordenados con o sin elemento mínimo y máximo, para evidenciar en ellos si las anteriores colecciones siguen siendo base para una topología, además de notar como cambian las relaciones entre dichas topologías.

3. Fuentes

Rubiano G. (2002). Topología general. (2da ed.).Universidad Nacional de Colombia, Bogotá: Panamericana.

Muñoz J., (2003). Topología Básica. Bogotá: Editora Guadalupe Ltda.

Neira C. (2011). Topología general. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá: Colección de notas de clase.

4. Contenidos

La tesis inicia con una introducción que describe el contenido del trabajo, luego se encuentra la justificación donde se muestra el interés que motivó a desarrollar e indagar sobre este tema; enseguida se presentan los objetivos que se trazaron al inicio de este proceso, a continuación se encuentran los preliminares en donde se evidencian una colección de resultados clásicos en matemáticas que serán utilizados; en el marco teórico se presentan las definiciones y teoremas propios de topología que se requieren en el trabajo. Luego se presentan tres capítulos organizados de la siguiente manera:

En el capítulo uno se aborda el ejercicio propuesto por Gustavo Rubiano sobre las topologías asociadas al orden en un conjunto (X,≤) totalmente ordenado y sin elemento máximo ni mínimo; una vez presentado dicho ejercicio se tomarán tres ejemplos específicos que son el conjunto de números reales, números enteros y el conjunto del plano con el orden lexicográfico, donde se evidenciará las diferentes relaciones entre las topologías.

En el capítulo dos se abordaron dos conjuntos que, aunque son totalmente ordenados, tienen elemento mínimo o elemento mínimo y máximo, éstos son el conjunto de números naturales con el orden usual y un conjunto finito, para así establecer qué colecciones son bases para una topología en dichos conjuntos y de esta manera evidenciar las relaciones entre las topologías asociadas al orden mostrando las similitudes y diferencias con los conjuntos trabajados en el capítulo uno.

En el capítulo tres se muestran dos conjuntos que son parcialmente ordenados, éstos son el conjunto de números naturales con el orden de la divisibilidad y el conjunto del plano con el orden del producto, en ellos se establece qué colecciones son bases para una topología y se señalan las relaciones entre éstas, para así evidenciar aspectos comunes y no comunes entre los conjuntos estudiados.

En seguida se muestran las conclusiones del trabajo donde se notan las principales relaciones y diferencias entre las topologías trabajadas, así como las colecciones que siempre resultan ser base sin importar las condiciones del conjunto; para terminar se presenta la bibliografía utilizada.

5. Metodología

Se inició por resolver el ejercicio 3 de la sección 1.2, del libro “Topología general” escrito por el profesor de la Universidad Nacional Gustavo Rubiano, enseguida se procedió a modificar las condiciones iniciales de éste abordando diferentes conjuntos dónde se buscaba evidenciar lo sucedido con las relaciones de comparabilidad entre las topologías, para ello se abordaron ejemplos específicos y luego se procedía a realizar las diferentes demostraciones. Dichos resultados eran socializados junto con el asesor para de esta manera clasificar los resultados encontrados e irlos recopilando para el documento a entregar.

6. Conclusiones

Se mostró que las colecciones β_d,β_i, β_{ad},β_{ai}, β_+, β_-, β y β_o son base para una topología en el conjunto X totalmente ordenado sin elemento mínimo ni máximo, de esta manera se establecieron 10 topologías asociadas al orden en un conjunto X, involucrando la topología discreta y la grosera, donde siempre se tiene que la topología débil del orden es igual a la topología del orden, además se encontraron distintas cadenas de contenencias entre las dichas topologías.

En el conjunto de los números reales se adoptaron todas las contenencias entre las topologías asociadas al orden evidenciadas en el conjunto X, pero además en las pruebas de contenencias estrictas entre topologías se ve la importancia de la propiedad de densidad de los números reales y la no existencia de elemento máximo y mínimo.

En el conjunto de los números enteros se presentan cinco pares de topologías iguales, debido a esto, en el diagrama de Hasse sólo se evidencian cuatro topologías asociadas al orden, así mismo se mostraron las respectivas contenencias estrictas entre las topologías, teniendo en cuenta que, en las pruebas en el conjunto de los números reales donde se usó la propiedad de densidad, resulta que dichas topologías en el conjunto de los números enteros se vuelven iguales.

En el conjunto del plano con el orden lexicográfico el cual es denso, además de cumplir con las condiciones del conjunto X, lo cual permitió que todos los resultados encontrados en el conjunto de los números reales sean tomados como válidos para este conjunto, así lo interesante en éste conjunto fue presentar los abiertos básicos de las topología trabajadas.

En el conjunto de los números naturales que es totalmente ordenado pero tiene elemento mínimo se encontraron cuatro topologías asociadas al orden, puesto que las colecciones β_{ad}, β_{-} y β_{od} no fueron base ya que fallan en que la unión de todos sus elementos no era igual al conjunto, aun así se arreglaron uniéndole el conjunto y de ello se dio la igualdad entre algunas topologías, unas de ellas porque sus bases resultaban siendo iguales, estas fueron $\beta_d = \beta_{ad}^*$, $\beta_i = \beta_{ai,}$ $\beta_{-}^* = \beta_{od}^*$ y $\tau_+ = \mathfrak{D} = \tau_o$ debido a que sus bases eran equivalentes.

En el conjunto finito $\underline{n} = \{0,1,2, \dots n-1\} \subseteq \mathbb{N}$,, con el orden visto como subconjunto de los números naturales, que es totalmente ordenado pero tiene elemento mínimo y máximo; se encontró que para un conjunto de dos elementos las topologías resultantes son cuatro y son las asociadas al orden teniendo en cuenta que algunas de ellas se arreglaron, de las misma manera se procedió para un conjunto con tres o más elementos manteniéndose que las colecciones β_d, β_i y β_{od} son base para una topología puesto que no necesitan de la no existencia de elemento mínimo y máximo, mientras que el resto de las colecciones no fueron base para una topología pero aún así se lograron arreglar igual que el conjunto anterior dándose la igualdad entre $\tau_d = \tau_{ad}^*$, $\tau_i = \tau_{ai,}^*$ $\mathfrak{D} = \tau_o$.

En el conjunto de los números naturales con el orden de la divisibilidad el cual es parcialmente ordenado y tiene elemento mínimo al uno y máximo al cero, se encontró que sólo las colecciones β_d y β_i son base, las colecciones $\beta_{ad,}$ β_{ai} y β_o no se lograron arreglar porque fallaban en la primera y segunda condición de la definición de base, mientras que el resto de bases como sólo fallaban en que la unión de sus elementos no era igual al conjunto, se lograron arreglar notando que éstas generan a los unitarios a excepción de algunos elementos del conjunto, por ello si éstas colecciones no se hubieran arreglado de esta manera, sino uniendo los unitarios que faltaban en cada una para que la unión fuera igual a $\mathbb{N}$, entonces todas éstas topologías serían iguales a la topología discreta.

En el conjunto del plano con el orden del producto el cual es parcialmente ordenado y sin elemento mínimo ni máximo se encontró que la únicas colecciones que resultaron ser base para una topología fueron β_d y β_i, las mismas presentadas en el conjunto de los números naturales con el orden de la divisibilidad y a excepción de las topologías discreta y grosera que siempre se han considerado, se evidenció que el resto de colecciones no resultaron ser base y tampoco se pudieron arreglar en el trabajo.

La forma en que se arreglaron las colecciones que no resultaban ser base para una topología influyó en los diagramas de relaciones de comparabilidad entre topologías en cada uno de los conjuntos, es de mencionar que esto se podía realizar de varias formas pero se optó por unirle el conjunto a la colección cuando fallaba en la primera condición de base para lograr arreglarla, debido a que esta permitía mostrar más relaciones en los diagramas de Hasse presentados entre las topologías.

Finalmente las conclusiones más generales del trabajo son cada uno de los diagramas de Hasse que evidencian las relaciones de comparabilidad entre las topologías trabajadas en cada uno de los siete conjuntos abordados.

Elaborado por:	Rodríguez Gómez, Lizeth Carolina; Umaña Gómez, Jenny Marcela.
Revisado por:	Donado Núñez, Gil Alberto de Jesús.

Fecha de elaboración del Resumen:	23	10	2012

TABLA DE CONTENIDO

TABLA DE DIAGRAMAS

INTRODUCCIÓN

La presente tesis muestra el trabajo realizado sobre topologías asociadas a conjuntos ordenados, para ello se inicia evidenciando la justificación de este trabajo y el interés que motivo a desarrollar e indagar sobre este tema; luego se señalan los objetivos que se trazaron al inicio de este proceso con el fin de guiar el desarrollo de ésta investigación.

Luego se sigue con la sección de preliminares en la cual se presenta una colección de resultados clásicos de relaciones de orden, teoría de conjuntos y teoría de números, que serán utilizados en el trabajo; luego se presentan las definiciones y teoremas propios de topología que serán útiles para el desarrollo de éste trabajo.

A continuación se procede a iniciar con el capítulo uno en el cual se abordan las topologías asociadas al orden en un conjunto $(X, \leq)$ totalmente ordenado y sin elemento máximo ni mínimo, en éste capítulo se da solución al ejercicio propuesto por el profesor Gustavo Rubiano en su libro "Topología General" el cual fue punto de partida para la presente tesis, es de mencionar que esto se hará más explícito en la sección de justificación; así mismo una vez presentado dicho ejercicio se tomarán tres ejemplos específicos de conjuntos que cumplen con la característica de ser totalmente ordenados y no tener elemento mínimo y máximo, estos son, el conjunto de números reales y el conjunto de números enteros con el orden usual, además el conjunto del plano con el orden lexicográfico, para de esta manera en ellos poder establecer diferentes relaciones entre las topologías asociadas al orden y poder organizarlas en un diagrama de Hasse; es de resaltar que para la demostración de los resultados encontrados si las pruebas son similares sólo se realizará una y las otras se comentaran con respecto a ésta.

En el capítulo dos se abordó la misma metodología desarrollada en el capítulo anterior, pero tomando como base dos conjuntos que aunque son totalmente ordenados tienen elemento mínimo o elemento mínimo y máximo, estos son, el conjunto de los números naturales con el orden usual y un conjunto finito con el orden heredado como subconjunto de los números naturales, para así poder establecer relaciones entre las topologías asociadas al orden y evidenciar similitudes o diferencias con los conjuntos trabajados en el capítulo uno.

En este orden de ideas se desarrolla el capítulo tres en el que se muestran dos conjuntos que son parcialmente ordenados, estos son, el conjunto de los números naturales con el orden de la divisibilidad y el conjunto del plano con el orden del producto, en ésta sección de igual manera se establecieron las relaciones entre las topologías asociadas al orden, así mismo se pudo establecer similitudes entre éstos conjuntos.

Es decir lo que se busca en cada uno de estos capítulos es evidenciar que sucede al modificar las condiciones iníciales en el ejercicio propuesto por Gustavo Rubiano y así analizar qué pasa con las topologías asociadas a los conjuntos antes descritos.

Finalmente se presentan las conclusiones generales obtenidas en el trabajo donde se evidencia el cumplimiento de los objetivos propuestos al inicio de la tesis; así como las principales relaciones y diferencias entre las topologías asociadas al orden dependiendo el conjunto abordado; y para terminar se muestra la bibliografía empleada en el trabajo.

JUSTIFICACIÓN

La topología es una ciencia muy estudiada en la actualidad, donde muchos matemáticos han aportado grandes avances en la construcción de la misma, la aparición de la Topología se dio en el siglo XIX y principios del XX, los cimientos conceptuales de esta ciencia se pueden encontrar en diversos libros de topología básica, entre ellos cabe resaltar el libro “Topología general” escrito por el profesor de la Universidad Nacional Gustavo Rubiano.

En este texto se evidencian ejercicios interesantes que puede resolver un lector, entre éstos se encuentra el ejercicio 3 de la sección 1.2 que llama la atención y es la inspiración de la presente tesis. Este ejercicio consiste en definir varias topologías en un conjunto totalmente ordenado y sin elemento máximo ni mínimo, mediante familias de subconjuntos que son bases para generar las respectivas topologías, las cuales vienen diferenciadas por relaciones de contenencia.

OBJETIVOS

Objetivo general

Describir las topologías asociadas a algunos conjuntos ordenados.

Objetivos específicos.

- Evidenciar si al cambiar las condiciones en el ejercicio propuesto por Rubiano cambia el diagrama de las topologías asociadas al orden.
- Elaborar conjeturas sobre las relaciones entre las topologías asociadas a los conjuntos estudiados, así como sus respectivas demostraciones.
- Evidenciar cuáles de las colecciones propuestas en el trabajo son siempre base para una topología al cambiar el orden del conjunto sobre el cual se está trabajando y si éste tiene o no elemento mínimo y máximo.

PRELIMINARES

El propósito de este apartado es presentar una colección de resultados clásicos de relaciones de orden, teoría de conjuntos y teoría de números, que serán utilizados en el trabajo.

RELACIONES DE ORDEN

Se llama una relación R entre dos conjuntos X, Y a un subconjunto del producto cartesiano $X \times Y$. Con frecuencia, la expresión $(x, y) \in R$ se abrevia $x \; R \; y$.

Si $X = Y$ se dice que R es una relación interna y será:

1. Reflexiva si $x \; R \; x$ para cada $x \in X$
2. Simétrica si $x \; R \; y$ implica $y \; R \; x$ para $x, y \in X$
3. Antisimétrica si $x \; R \; y$ y $y \; R \; x$ entonces $x = y$ para $x, y \in X$
4. Transitiva si $x \; R \; y$ y $y \; R \; z$ entonces $x \; R \; z$ para $x, y, z \in X$
5. Asimétrica si $x \; R \; y$ implica $\neg \, (y \; R \; x)$ para $x, y \in X$

Una relación R sobre un conjunto X se dice que es de orden si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Habitualmente los órdenes se designan con el símbolo menor o igual "$\leq$". Si $\leq$ es una relación de orden sobre un conjunto X, entonces $a \leq b$ se lee "a precede a b" o "a es anterior a b".

Un orden será total si para cada par $x, y \in X$ se tiene $x \leq y$ o $y \leq x$. Si no ocurre así, el orden se llama parcial.

En una relación de orden total $\leq$ definida en X se cumple la ley de la tricotomía que establece que dados $x, y \in X$, se puede dar que $x \leq y$ o $y \leq x$ o $x = y$.

Una relación R sobre un conjunto X se dice que es de orden estricto si es asimétrica y transitiva. Habitualmente los órdenes estrictos se designan con el símbolo menor que "$<$ ". Si $<$ es una relación de orden estricto sobre un conjunto X, entonces $a < b$ se lee "a precede estrictamente a b".

Obsérvese que la relación de orden definida en X como "menor o igual" puede definirse a través de la relación de orden estricto "menor que". En efecto: $\forall x, y \in X: (x \leq y \leftrightarrow x < y \vee x = y)$.

Los conjuntos que se abordaran en este trabajo son:

El conjunto de los números reales con el orden usual que es totalmente ordenado, es de notar que dentro de éste conjunto se va a tener en cuenta la propiedad de densidad la cual establece que dados $x, y \in \mathbb{R}$, con $x < y$, entonces existe un número racional r tal que $x < r < y$ y un número irracional s tal que $x < s < y$. De hecho existen infinitos números tanto racionales como irracionales comprendidos entre x y y.[1].

El conjunto de números enteros ordenados por la relación "menor igual" que son totalmente ordenados, así mismo el conjunto del plano con el orden lexicográfico definido como $(a, b) \leq (c, d)$ sí y sólo sí $(a < c) \vee (a = c \wedge b \leq d)$ donde $a < c$ si $a \leq c$ y $a \neq c$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

El conjunto de los números naturales ordenados por la relación "menor igual", el conjunto finito $\underline{n} = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\} \subseteq \mathbb{N}$, con el orden heredado como subconjunto de los números naturales, son conjuntos totalmente ordenados.

El conjunto de números naturales con el orden de la divisibilidad, es decir, para cada par de naturales a y b se tiene que: $a \leq b \leftrightarrow a|b$; el conjunto del plano con el orden del producto definido por: $(a, b) \leq (c, d)$ sí y sólo sí $a \leq c \wedge b \leq d$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, son conjuntos parcialmente ordenados.

ELEMENTOS CARACTERÍSTICOS DE CONJUNTOS ORDENADOS.

Sea un conjunto ordenado $(A, \leq)$ y un subconjunto $B \subseteq \mathrm{A}$:

Un elemento $m \in B$ se llama mínimo del conjunto B, denotado $min\, B$, si y sólo si $min\, B \ = m \in B \leftrightarrow \forall x \in B: m \leq x$

Un elemento $m \in B$ se llama máximo del conjunto B, denotado $max\, B$, si y sólo si $max\, B \ = m \in B \leftrightarrow \forall x \in B: x \leq m$. [4].

Ejemplos:

1. Los números reales ordenados por la relación $\leq$, los números enteros con el orden $\leq$, el conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con el orden lexicográfico, el conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con el orden del producto no tienen elemento mínimo ni máximo.
2. Los números naturales ordenados por la relación $\leq$, tienen elemento mínimo al 0 y no tienen elemento máximo.
3. El conjunto finito $\underline{n} = \{0,1,2, \dots n-1\} \subseteq \mathbb{N}$ tiene como elemento mínimo al 0 y como elemento máximo a $n-1$.
4. El conjunto de los números naturales con el orden de la divisibilidad "|", tienen elemento mínimo al 1 y elemento máximo al 0.

NOCIONES A UTILIZAR DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS

- Definición de contenencia: $A \subseteq \mathrm{B} \leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$
- Igualdad de conjuntos: Si A y B son conjuntos entonces $A = \mathrm{B} \leftrightarrow (\forall x)(A \subseteq \mathrm{B} \wedge B \subseteq \mathrm{A})$
- Definición de intersección: Si A y B son conjuntos entonces $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$
- Definición de unión: Si A y B son conjuntos entonces $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$
- Si S es cualquier conjunto, la colección de todos sus subconjuntos o partes notada $\mathcal{P}(S)$, es $\mathcal{P}(S) = \{A | A \subseteq S\}$. Como $\emptyset$ es subconjunto de todo conjunto, siempre $\emptyset \in \mathcal{P}(S)$ y como todo conjunto es subconjunto de sí mismo, $S \in \mathcal{P}(S)$. Así si $S = \emptyset$ se tiene que $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. [6].

Operaciones sobre colecciones de conjuntos.

Si se tiene una colección $\mathcal{C}$ de conjuntos, luego $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$, se define:

- $\bigcap_{A\in\mathcal{C}} A = \{x \in X \mid (\forall A \in \mathcal{C})(x \in A)\}$ y por definición del cuantificador universal se tiene que $\bigcap_{A\in\mathcal{C}} A = \{x \in X \mid (\forall A)(A \in \mathcal{C} \rightarrow x \in A)\}$.
- $\bigcup_{A\in\mathcal{C}} A = \{x \in X \mid (\exists A \in C)(x \in A)\}$ y por definición del cuantificador existencial se tiene que $\bigcup_{A\in\mathcal{C}} A = \{x \in X \mid (\exists A)(A \in C \wedge x \in A)\}$
- Si $\mathcal{C}$ es la colección vacía de subconjuntos de X entonces $\bigcup_{A\in\emptyset} A = \emptyset$
- Si $\mathcal{C}$ es la colección vacía de subconjuntos de X entonces $\bigcap_{A\in\emptyset} A = X$. [7].
- $\bigcup_{A\in\mathcal{C}} A \subseteq X$, ya que si $x \in \bigcup_{A\in\mathcal{C}} A$, entonces por definición de unión, existe $A \in C$ con $x \in X$.

NOCIONES Y TEOREMAS A UTILIZAR DE LA TEORÍA DE NÚMEROS

- Mínimo común múltiplo: Si $a \mid k$ y $b \mid k,$ entonces k se dice un múltiplo común de a y b. El menor entero positivo m múltiplo de dos enteros a y b, no ambos 0, se dice el mínimo común múltiplo de a y b. El mínimo común múltiplo de dos enteros a y b, no ambos 0, será denotado por $[a,b]$.

  Así mismo para demostrar que un entero positivo m es el mínimo común múltiplo de a y b, no ambos 0, es suficiente demostrar que:

  i) $a \mid m$ y $b \mid m$

  ii) Si $a|k$ y $b \mid k,$ entonces $m|k$

  La condición i) establece que el mínimo común múltiplo m de a y b es un múltiplo común de a y b; la condición ii) establece que todo múltiplo común de a y b es un múltiplo del mínimo común múltiplo de a y b. Los enunciados i) y ii) serán aceptados como una forma equivalente de la definición del mínimo común múltiplo m de dos enteros a y b.
- Máximo común divisor: Si $k \mid a$ y $k \mid b,$ entonces se dice que k es un divisor común o un factor común de a y b. Se dice que g es el máximo común divisor de a y b, si g es el mayor de los enteros positivos que dividen los valores

absolutos de los enteros a y b. Usaremos el símbolo (a, b) para denotar al máximo común divisor de a y b.

Así mismo para demostrar que un entero positivo g es el máximo común divisor de dos enteros a y b, no ambos cero, es suficiente probar que.

i) $g|a$ y $g\,|b$

ii) Si $k\,|a$ y $k\,|b$, entonces $k\,|g$

La condición i) establece que el máximo común divisor g de a y b es un divisor común de a y b; la condición ii) establece que todo divisor común de a y b es un divisor del máximo común divisor g de a y b. Los enunciados i) y ii) en conjunto serán aceptados como un enunciado equivalente al de la definición del máximo común divisor g de los enteros a y b.

- Número Primo: Un entero positivo p mayor que 1 se dice que es un número primo o simplemente un primo, si los únicos enteros positivos factores de p son 1 y p.
- Número Compuesto: Un entero positivo n mayor que 1 se dice que es un número compuesto si posee factores positivos diferentes de 1 y n.

  Como el 1 no es primo ni compuesto, se tiene que cada número del conjunto de los enteros positivos es o un primo o un compuesto, o igual a 1.
- Teorema fundamental de la aritmética: Un número $n > 1$ es primo o puede ser expresado como un producto de primos. Si se asume que un número primo es ya un producto de primos, entonces la factorización prima de cualquier entero $n > 1$ es única, excepto en el orden en que aparecen los factores primos. Además se debe considerar la posibilidad de que la factorización prima de un número pudiera contener primos iguales. A menudo es conveniente expresar un número entero positivo n mayor que 1 cuyos factores primos $p_{1,} p_{2,} \dots, p_{k,}$ ocurren $\alpha_{1,} \alpha_{2,} \dots, \alpha_{k,}$ veces, respectivamente como: $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ esto es, $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$. Cuando n es expresado como el producto de potencias de primos distintos se dice que la representación es la forma normal de n.
- Todo número compuesto tiene un factor primo. [10].

- Dados n, m enteros, existe el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de ellos dos. [3].
- Sea $a \in \mathbb{N}$ entonces $a|0$ (cualquier numero natural es divisor de 0), para mostrar ello se debe encontrar un $c \in \mathbb{N}$ tal que $0 = a \times c$, pero esto resulta inmediato teniendo en cuenta que $0 = a \times 0$, es decir $c = 0$.
- Sea $a \in \mathbb{N}$ entonces $1|a$, (1 es divisor de cualquier número natural), para verificar esto se debe encontrar un $c \in \mathbb{N}$ tal que $a = 1 \times c$, pero esto resulta inmediato teniendo en cuenta que $a = 1 \times a$, es decir $c = a$.
- Sea $a \in \mathbb{N}$ y $0 \mid a$ entonces $a = 0$, para mostrar esto supongamos que 0 es divisor de a, según la definición, existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $a = 0 \times c$, por lo que $a = 0$.

NOCIONES DE TOPOLOGÍA

En este capítulo se muestran las definiciones y teoremas propios de topología que serán útiles para el desarrollo de la presente tesis. Es de notar que no se probarán aquellos teoremas que comúnmente se encuentran en los libros de topología, pero se mostraran los que son resultado de éste estudio o que tienen algunos detalles significativos.

DEFINICIÓN: Sea X un conjunto, una topología de X es una colección τ de subconjuntos de X (llamados abiertos) que satisfacen las siguientes condiciones:

i) $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$

ii) $(\forall \mathcal{C} \subseteq \tau)$ $((\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A) \in \tau)$

iii) Si $A, B \in \tau$ entonces $A \cap B \in \tau$

Luego por los ítems ii y iii, τ es una familia de subconjuntos de X cerrada tanto para la unión arbitraria como para la intersección finita.

Una pareja (X, τ) constituida por un conjunto X y una topología τ de X, se llama un espacio topológico.

Veamos algunos ejemplos:

- Sea X un conjunto no vacío, $\tau = \{\emptyset, X\}$ es conocida como la topología grosera o trivial, que se notará como τ_g. Un espacio provisto de su topología trivial se llama un espacio trivial.
- Sea X un conjunto no vacío, $\tau = \mathcal{P}(X)$ es decir la colección de todos los subconjuntos de X. Esta topología en la cual todo subconjunto de X es abierto, se llama la topología discreta de X, que notaremos como $\mathfrak{D}$.

  Es de notar que τ es la topología discreta de X, sí y solo sí todo subconjunto unitario de X es un abierto, veamos:

Si τ es la topología discreta de X, para todo $a \in X$, se tiene que $\{a\} \subseteq \mathrm{X}$, por ende $\{a\} \in \mathcal{P}(X)$, por la definición de partes de X, así $\{a\} \in \tau$, luego $\{a\}$ es una abierto.

Si todo subconjunto unitario de X es un abierto, significa que para todo $a \in X, \{a\} \in \tau$ así: sea S cualquier subconjunto de X, entonces $S = \bigcup_{x\in S}\{x\}$, como se conoce que cada $\{x\} \in \tau$, por la segunda condición de la definición de topología implica que $S \in \tau$.

Luego como S es un subconjunto arbitrario de X, se tienen que τ es la topología discreta, ya que está formada con la unión de subconjuntos unitarios. Así mismo se evidencia que si $S = \emptyset$ entonces $\bigcup_{x\in\emptyset}\{x\} = \emptyset$, teniéndose de todas formas que $S \in \tau$.

DEFINICIÓN: Sea (X, τ) un espacio topológico, una colección β de τ se llama una base de la topología τ si todo conjunto abierto (es decir, todo elemento de τ) puede obtenerse como unión de miembros de β.

TEOREMA 1: Sea (X, τ) un espacio topológico. Un conjunto β de partes abiertas de X es una base para τ sí y sólo sí $(\forall\, V \in \tau)(\forall\, x \in V)(\exists\, W \in \beta)(x \in \mathrm{W} \subseteq \mathrm{V})$.

Es decir, si dado cualquier abierto V y cualquiera de sus puntos, existe un conjunto $W \in \beta$ contenido en V y que contiene al punto dado.

TEOREMA 2: Sea X un conjunto $\beta \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una base de una topología para X sí y sólo sí se cumple que:

i) $X = \bigcup_{B\in\beta} B$

ii) Dados cualesquiera $U, V \in \beta$ y $x \in U \cap V$, existe $W \in \beta$, tal que $x \in W$ y $W \subseteq \mathrm{U} \cap \mathrm{V}$. Esto es, $U \cap V$ es unión de elementos de β para todo par U, V de β.

Demostración:

Si $\beta \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una base de una topología para X, veamos que:

i) $X = \bigcup_{B\in\beta} B$, como se sabe que $\bigcup_{B\in\beta} B \subseteq X$, y si dado $x \in X$, existe $U \in \tau$, tal que $x \in U$, y como β es base, existe $B \in \beta$ con $x \in B \subseteq U$, luego $X \subseteq \bigcup_{B\in\beta} B$.

Ahora para probar ii) sí $U, V \in \beta$, luego $U, V \in \tau$ así por la tercera condición de topología se tiene que $U \cap V \in \tau$, y si $x \in U \cap V$, por el teorema anterior se tiene que existe $W \in \beta$, tal que $x \in W \subseteq U \cap V$, así se cumple la propiedad pedida.

Enseguida se probará que si se cumple i), ii) entonces β es una base de una topología para $X,$ luego la topología para la cual β es base es: $\tau = \{A | A = \bigcup_{B\in\beta} B\}$

Se probará que τ es topología:

i) $\emptyset \in \tau$, porque $\bigcup_{B\in\emptyset} B = \emptyset$ (Unión de la colección vacía)
   $X \in \tau$, porque $\bigcup_{B\in\beta} B = X$, por el ítem i del teorema.

ii) Si $\{B_\lambda\}_{\lambda\in L} \subseteq \tau$, con $B_\lambda = \bigcup_{A\in M_\lambda} A$, con $M_\lambda \subseteq \mathrm{L}$. Luego $\bigcup_{\lambda\in L} B_\lambda = \bigcup_{\lambda\in L}[\bigcup_{A\in M_\lambda} A]$, como $\bigcup_{A\in M_\lambda} A \in \tau$ entonces $\bigcup_{A\in M_\lambda} A \in \beta$, así $\bigcup_{\lambda\in L} B_\lambda$ es unión de elementos de β. En consecuencia $\bigcup_{\lambda\in L}[\bigcup_{A\in M_\lambda} A] \in \tau$. Por ende $\bigcup_{\lambda\in L} B_\lambda \in \tau$.

iii) Sea $A, B \in \tau$, luego $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ y $B = \bigcup_{j\in J} B_j$, con $A_i, B_j \in \beta$ para todo i y todo j. Luego $A \cap B = \bigcup_{i\in I} A_i \cap \bigcup_{j\in J} B_j$, así $A \cup B = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \cap B_j$. Pero por hipótesis $A_i \cap B_j$ es unión de miembros de β, luego $A \cap B$ también es unión de elementos de β, y en consecuencia $A \cap B \in \tau$.

DEFINICIÓN: La topología dada por el teorema 2 se conoce como la topología generada por la base β.

Ejemplos:

1. Sea X un conjunto totalmente ordenado por una relación $\leq$, y sin elemento mínimo ni máximo, se define:

$\beta_{od} = \{(a,b): a,b \in X\}$ o lo que es igual $\beta_{od} = \{B_{a,b}: a,b \in X\}$ donde $B_{a,b} = \{k \in X: a < k < b\}$, es base para la topología denominada débil del orden y notada como τ_{od}, la cual se mostrará más adelante.

2. Sea X un conjunto totalmente ordenado por una relación $\leq$, la colección

$\beta_o = \beta_{ad} \cup \beta_{ai} \cup \beta_{od}$ con $\beta_{ad} = \{(a, \rightarrow): a \in X\}$ donde $(a, \rightarrow) = \{k \in X: a < k\}$; $\beta_{ai} = \{(\leftarrow, b): b \in X\}$ donde $(\leftarrow, b) = \{k \in X: k < b\}$; $\beta_{od} = \{(c,d): c,d \in X\}$ donde $(c,d) = \{k \in X: c < k < d\}$.

β_o es una base para una topología en el conjunto X y genera la topología del orden de X, denotada τ_o, como luego se evidenciará.

3. $\beta_{\mathfrak{D}} = \{\{x\}: x \in X\}$, β es base para la topología Discreta $\mathfrak{D} = \mathcal{P}(X)$, primero se mostrará porque $\beta_{\mathfrak{D}}$ es base:

Para ello se debe comprobar que $\bigcup_{x \in X} B_x = X$

Como ya se sabe $\bigcup_{x \in X} B_x \subseteq X$, ahora se verificará la contenencia contraria, luego si $x \in X$, $\{x\} \subseteq \beta_x$ entonces $x \in B_x$, por definición de B_x, luego $x \in \bigcup_{x \in X} B_x$, así $X \subseteq \bigcup_{x \in X} B_x$.

Ahora si $U, V \in \beta_{\mathfrak{D}}$, siendo $U = B_a = \{\{a\}: a \in X\}$ y $V = B_b = \{\{b\}: b \in X\}$, luego si $x \in U \cap V$, entonces $U = V$ por ende $U \cap V = V$, luego $x \in V$, donde $V \in \beta_{\mathfrak{D}}$, además $V \subseteq U \cap V$, cumpliéndose la condición.

Por ende se tiene que $\beta_{\mathfrak{D}}$ es base, además la topología generada por ésta base se conoce como la topología Discreta, para mostrarlo basta ver que para todo $A \subseteq X$, se tiene que $A = \bigcup_{x \in A}\{x\}$, luego $A \in \mathcal{P}(X) = \mathfrak{D}$.

TEOREMA 3: Si β es una colección que sólo cumple la segunda condición del teorema 2 entonces $\beta^* = \beta \cup \{X\}$ es una base para una topología sobre X

Demostración:

Se probará que $\beta^* \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una base de una topología de X, para ello se verá que:

i) $X = \bigcup_{B\in\beta^*} B$, puesto que se tiene dado en la definición de β^*

ii) Si $U, V \in \beta^*$, se puede dar que:

Caso 1: Si $U, V \in \beta$, como β cumple la segunda condición, entonces se tiene que si $x \in U \cap V$, existe $W \in \beta^*$ tal que $x \in W$ y $W \subseteq U \cap V$.

Caso 2: Si $U = X$, $V = X$ y se tiene que $x \in U \cap V$, entonces existe $W = X$ luego $W \in \beta^*$, tal que $x \in W$, porque $x \in X$ y $W \subseteq U \cap V$, porque $X \subseteq X$

Caso 3: Si $U \in \beta$, $V = X$ y se tiene que $x \in U \cap V$, existe $W = U$ luego $W \in \beta^*$, porque $\beta \subseteq \beta^*$ tal que $x \in W$, porque $x \in U$ y $W \subseteq U \cap V$, porque $U \subseteq U \cap V$.

Caso 4: Si $U = X$, $V \in \beta$ es análogo al caso 3. Así por el ítem i) y ii) β^* es base.

DEFINICIÓN: Dos bases β y β' en X son equivalentes si y sólo si generan la misma topología de X.

TEOREMA 4: Dos bases β y β' en X son equivalentes si y sólo si se cumplen simultáneamente las dos propiedades siguientes:

a) Para todo V de β y para todo x en V, existe $V' \in \beta'$ tal que $x \in V'$ y $V' \subseteq V$.
b) Para todo V' de β' y para todo x' en V', existe $V \in \beta$ tal que $x' \in V$ y $V \subseteq V'$.

Si solamente se cumple a), la topología generada por β es un subconjunto propio de la generada por β'.

Si se cumple b), se demuestra que $\tau' \subseteq \tau$, de manera que cuando las dos condiciones se cumplen simultáneamente, se obtiene la doble contenencia, es decir $\tau = \tau'$.

Es de notar que durante el trabajo para comparar las topologías sólo se trabajará a partir de las respectivas bases.

TEOREMA 5: Si β y β' son dos bases para una topología respectivamente, en el conjunto X, teniéndose que $\beta \subseteq \beta'$, y las topologías generadas por β y β', denotadas como τ y τ' respectivamente, entonces $\tau \subseteq \tau'$.

Demostración:

Si $U \in \tau$, U es reunión de elementos de β; y como $\beta \subseteq \beta'$ significa que todo elemento de β es unión de elementos de β', concluyéndose que U es unión de elementos de β', es decir que $U \in \tau'$, así se demuestra que $\tau \subseteq \tau'$.

TEOREMA 6: Si β y β' son dos bases para una topología respectivamente en el conjunto X, teniéndose que $\beta = \beta'$, y las topologías generadas por β y β', llamémosla τ y τ' entonces $\tau = \tau'$.

Este se deduce directamente del teorema anterior.

TEOREMA 7: Sea X un conjunto no vacío totalmente ordenado se tiene que $\tau_{od} \subseteq \tau_o$.

Como se puede evidenciar $\beta_{od} \subseteq \beta_o$, luego utilizando el teorema anterior se nota que $\tau_{od} \subseteq \tau_o$.

Pero es de notar que no siempre se tiene la contenencia contraria puesto que β_{od} no siempre es base para una topología como se evidenciará en el capítulo uno y dos.

TEOREMA 8: Sea X un conjunto no vacío totalmente ordenado sin elemento mínimo ni máximo, entonces $\tau_{od} = \tau_o$.

Demostración:

Como ya se evidencio $\tau_{od} \subseteq \tau_o$, luego se probará la contenencia contraria, luego utilizando el teorema 4, para cualquier V de β_o, se tienen los siguientes casos:

- Si $V = (a, b) \in \beta_o$ para algún $a, b \in X$, luego para todo $x \in V$, existe $V' = V$, tal que $V' \in \beta_{od}$, luego utilizando la condición a) del teorema 4 se muestra para este caso se cumple que $\tau_o \subseteq \tau_{od}$.
- Si $V = (a, \rightarrow) \in \beta_o$ para algún $a \in X$, luego para todo $x \in V$, se tiene que $a < x$, como X no tiene elemento máximo entonces existe $b \in X$, tal que $x < b$, luego $a < x < b$, así $x \in (a, b)$, luego $V' = (a, b) \in \beta_{od}$, por ende $x \in V'$ además $V' \subseteq V$, ya que si $y \in V'$, entonces $a < y < b$, por definición de β_{od}, luego $y > a$, así $y \in V$, de esta manera se muestra que también $\tau_o \subseteq \tau_{od}$.
- Si $V = (\leftarrow, b) \in \beta_o$ para algún $b \in X$, luego para todo $x \in V$, se tiene que $x < b$, como X no tiene elemento mínimo entonces existe $a \in X$, tal que $a < x$, por ende $a < x < b$, así $x \in (a, b)$, así $V' = (a, b) \in \beta_{od}$, luego $x \in V'$ además $V' \subseteq V$, ya que si $y \in V'$, entonces $a < y < b$, por definición de β_{od}, luego $y < b$, así $y \in V$, de la misma manera se evidencia que $\tau_o \subseteq \tau_{od}$.

Así en los tres casos se demostró que $\tau_o \subseteq \tau_{od}$, de lo cual se deduce que $\tau_o = \tau_{od}$, pero teniendo en cuenta que el conjunto X no tiene elemento máximo ni mínimo.

En [11] el conjunto $Top(X)$ de todas las topologías sobre un espacio topológico X es un conjunto parcialmente ordenado por la relación de inclusión.

Es decir $Top(X)$ con la relación "$\subseteq$" cumple con la reflexividad puesto que si $\tau_1 \in Top(X)$ se tiene que $\tau_1 \subseteq \tau_1$, antisimétrica puesto que si $\tau_1 \subseteq \tau_2$ y $\tau_2 \subseteq \tau_1$ entonces $\tau_1 = \tau_2$; transitiva ya que si $\tau_1 \subseteq \tau_2$ y $\tau_2 \subseteq \tau_3$ significa que para todo $U \in \tau_1$ entonces $U \in \tau_2$, pero además si $U \in \tau_2$ implica que $U \in \tau_3$, por ende $\tau_1 \subseteq \tau_3$. Pero no cumple con ser un orden total puesto que existe τ_1 y τ_2 tal que $\tau_1 \nsubseteq \tau_2$ y $\tau_2 \nsubseteq \tau_1$, como se podrá evidenciar en varias topologías más adelante.

En 1936, Birkhoff mostró que la colección $(Top(X), \subseteq)$ de todas las topologías sobre un conjunto X cualquiera, ordenada por la relación de contenencia entre conjuntos, es un conjunto parcialmente ordenado. El elemento máximo es la topología discreta $\mathfrak{D}$, y el elemento mínimo es la topología grosera τ_g.

Por tanto, tiene sentido hacer referencia a todos los conceptos relativos a conjuntos ordenados. Además toda topología τ de X se encuentra entre la topología grosera y la topología discreta, como veremos en el siguiente teorema:

TEOREMA 9: Sea τ una topología sobre conjunto X, se tiene que: $\tau_g \subseteq \tau \subseteq \mathfrak{D}$

Demostración:

Si $T \in \tau_g$, entonces $T = \emptyset$ ó $T = X$, en cualquiera de los dos casos $\emptyset$ y X pertenecen a τ, ya que ésta es una topología, por ende $\tau_g \subseteq \tau$.

Ahora si $T \in \tau$, entonces $T \subseteq X$, luego $T \in \mathcal{P}(X) = \mathfrak{D}$, así $T \in \mathfrak{D}$, en consecuencia $\tau \subseteq \mathfrak{D}$.

De esta manera tiene sentido hablar de las relaciones de comparabilidad entre las topologías que se tratarán en éste trabajo, para ello es necesario tener en cuenta las siguientes definiciones:

Definición de no comparabilidad: τ_1 no es comparable con τ_2 sí y sólo si $\tau_1 \nsubseteq \tau_2$ y $\tau_2 \nsubseteq \tau_1$.

Definición de contenencia estricta: Si $\tau_1 \subseteq \tau_2$, pero $\tau_2 \nsubseteq \tau_1$ entonces se da la contenencia estricta entre τ_1 y τ_2.

También es necesario tener en cuenta que la gráfica de un orden parcial forma un diagrama comúnmente llamado diagrama de Hasse (Pérez, 1984, p.31), por ello se utilizará éste para mostrar las relaciones de comparabilidad entre las topologías trabajadas así es necesario ampliar un poco sobre éste diagrama, el cual es un grafo dirigido de la relación, se entiende por dígrafo o grafo dirigido a un par (X, A) cuyos vértices son los elementos de X y las aristas A son los pares ordenados (a, b) tales que $a \leq b$. [12].

Este dígrafo se puede graficar con flechas que indican la orientación de las aristas o simplemente colocando a y por encima de x si (x, y) es una arista. Además teniendo en cuenta los siguientes criterios:

- Dado que toda relación de orden es reflexiva, en cada punto de su dígrafo habrá un bucle. Por ello se simplificará el dibujo eliminándolos todos.

- Como toda relación de orden es transitiva, se suprimirá todos los arcos del dígrafo que se obtengan al hallar el cierre transitivo de los restantes. De esta forma, si $a \leq b$ y $b \leq c$, se sigue que $a \leq c$. En este caso se omitirá la arista que va desde a hasta c y mantendremos las que van desde a hasta b y desde b a c.

- Cada punto de A se representa por un punto del plano, aunque conviniendo en que sí "a precede a b", se dibujará el punto a por debajo del b. Todas las líneas que unan puntos serán, por tanto, ascendentes. [5].

Por ello para representar las relaciones de comparabilidad entre las topologías a trabajar se realizará en cada conjunto el respectivo diagrama de Hasse que permita evidenciar de forma más clara el orden entre las topologías abordadas.

CAPÍTULO UNO: Conjunto $(\boldsymbol{X}, \leq)$ totalmente ordenado y sin elemento máximo ni mínimo.

En este capítulo se abordarán las topologías asociadas al orden en un conjunto $(\boldsymbol{X}, \leq)$ totalmente ordenado y sin elemento máximo ni mínimo, para ello se trabajará con las bases que generan dichas topologías, es decir se verificará que cada colección es una base y por tanto genera una topología asociada, luego de ello se demostrará las contenencias presentadas entre éstas; enseguida para ejemplificar esto se tomará el conjunto de los números reales ordenados de forma usual, el conjunto de los números enteros con el orden usual y el conjunto del plano con el orden lexicográfico; en éstos se podrá apreciar de mejor forma las relaciones de comparabilidad entre las topologías evidenciando la no comparabilidad, la igualdad y las contenencias estrictas entre las topologías, así para cada conjunto se mostrará el respectivo diagrama de Hasse en el cual se evidencian las relaciones entre las topologías siendo notorias las diferencias que se presentan en cada uno de estos conjuntos.

En un conjunto $(X, \leq)$ totalmente ordenado y sin elemento máximo ni mínimo, es posible definir varias topologías. Para ello consideremos las siguientes colecciones de subconjuntos y se verificará que efectivamente son bases:

a) $\beta_d = \{[x, \rightarrow) : x \in X\}$ genera la topología τ_d de las colas cerradas a derecha, o la topología a derecha.
b) $\beta_{ad} = \{(x, \rightarrow): x \in X\}$ genera la topología τ_{ad} de las colas abiertas a derecha.
c) $\beta_i = \{(\leftarrow, x] : x \in X\}$ genera la topología τ_i de las colas cerradas a izquierda o la topología de Alexandroff. También se dice que la topología es generada por los inferiores de cada elemento.
d) $\beta_{ai} = \{(\leftarrow, x) : x \in X\}$ genera la topología τ_{ai} de las colas abiertas a izquierda.

e) $\beta_+ = \{[a,b): a,b \in X\}$ genera la topología τ_+ de los intervalos semiabiertos a derecha. También conocemos esta topología con el nombre de la topología de Sorgenfrey.

f) $\beta_- = \{(a,b]: a,b \in X\}$ genera la topología τ_- de los intervalos semiabiertos a izquierda.

A continuación se demostrará que efectivamente estas colecciones son bases para el conjunto X, incluyendo además las bases β_o y β_{od}, que generan la topología débil del orden y la topología del orden como se mostró en el marco teórico.

1.1 DEMOSTRACIONES DE BASES

De acuerdo a lo evidenciado en el marco teórico para cada una de las colecciones se mostrarán las dos condiciones para ser bases, veamos:

$\beta_d = \{[x, \rightarrow) : x \in X\}$ o de forma equivalente $\beta_d = \{B_x : x \in X\}$ donde $B_x = \{k \in X : k \geq x\}$

Para que este subconjunto sea una base topológica se debe comprobar que:

i) $\bigcup_{x \in X} B_x = X$

Si $x \in X$, existe $x \in X$ tal que $x \geq x$ porque la relación es reflexiva, entonces $x \in B_x$, por definición de B_x, luego $x \in \bigcup_{x \in X} B_x$, así $X \subseteq \bigcup_{x \in X} B_x$.
Si $y \in \bigcup_{x \in X} B_x$, entonces existe $x \in X$ y $y \in B_x$. Por definición de Unión. Pero si $y \in B_x$ entonces por definición de B_x, $y \in X$. Así $\bigcup_{x \in X} B_x \subseteq X$.
Con ello queda demostrada la igualdad.

ii) Si $U, V \in \beta_d$, siendo $U = B_a$ y $V = B_b$ para algún $a, b \in X$.

Si $x \in U \cap V$, existe $c = max\{a,b\}$ tal que $c \in X$, debido a que X es totalmente ordenado, entonces existe $W = B_c$. Veamos que: $W \in \beta_d$, $x \in W$ y $W \subseteq U \cap V$

- Se verificará que $W \in \beta_d$: Como $c \in X$ y $W = B_c$ entonces por definición de β_d, $W \in \beta_d$.

- Se demostrará que $x \in W$: Como $x \in U \cap V$, entonces $x \in B_a \cap B_b$, así $x \in B_a$ y $x \in B_b$. Por definición de intersección. Luego $x \geq a$ y $x \geq b$. Por definición de B_a y B_b. Además debido a que $c = max\{a, b\}$ y X es un conjunto totalmente ordenado cumpliendo además la ley de la tricotomía, se puede dar que $c = a$ ó $c = b$ entonces $x \geq c$, así $x \in B_c = W$.
- Se probará que $W \subseteq U \cap V$: Si $y \in W = B_c$, entonces $y \geq c$. Por definición de B_c. Como $c = max\{a, b\}$ entonces $c \geq a$ y $c \geq b$. Luego por transitividad $y \geq a$ y $y \geq b$. Así $y \in B_a$ y B_b. Por definición de B_a y B_b. Luego $y \in B_a \cap B_b$, y como $y \in B_c$, entonces $B_c \subseteq B_a \cap B_b$, o lo que es igual $W \subseteq U \cap V$.

Luego por i, ii, se tiene que β_d es base para el conjunto X.

Ahora se va mostrar que β_{ad} es base, tomando $\beta_{ad} = \{(x, \rightarrow): x \in X\}$ o de forma equivalente $\beta_{ad} = \{B_x: x \in X\}$ donde $B_x = \{k \in X: k > x\}$.

i) Se mostrará que la unión de los elementos de la base da todo el conjunto: Si $y \in X$, existe $x \in X$ tal que $y > x$ ya que X no tiene elemento mínimo, entonces $y \in B_x$, por definición de B_x, luego $y \in \bigcup_{x \in X} B_x$. Así $X \subseteq \bigcup_{x \in X} B_x$.
Si $y \in \bigcup_{x \in X} B_x$, entonces existe $x \in X$ y $y \in B_x$. Pero si $y \in B_x$ entonces por definición de B_x, $y \in X$. Así $\bigcup_{x \in X} B_x \subseteq X$

ii) Si $U, V \in \beta_{ad}$, siendo $U = B_a$ y $V = B_b$ para algún $a, b \in X$.

Si $x \in U \cap V$, existe $c = max\{a, b\}$ tal que $c \in X$, debido a que X es totalmente ordenado, entonces existe $W = B_c$. Veamos que: $W \in \beta_{ad}$, $x \in W$ y $W \subseteq U \cap V$

- Se confirmará que $W \in \beta_{ad}$: Como $c \in X$ y $W = B_c$ entonces por definición de B_{ad}, $W \in B_{ad}$.
- Se demostrará que $x \in W$: Como $x \in U \cap V$, entonces $x \in B_a \cap B_b$, así $x \in B_a$ y $x \in B_b$. Por definición de intersección. Luego $x > a$ y $x > b$. Por definición de B_a y B_b. Debido a que $c = max\{a, b\}$ y X es un conjunto

totalmente ordenado cumpliendo además la ley de la tricotomía, se puede dar que $c = a$ ó $c = b$ entonces utilizando esto se tiene $x > c$, así $x \in B_c = W$

- Se probará que $W \subseteq U \cap V$: Si $y \in W = B_c$, entonces $y > c$. Por definición de B_c. Como $c = max\{a, b\}$ entonces $c \geq a$ y $c \geq b$. Luego se tiene que $y > a$ y $y > b$. Así $y \in B_a$ y B_b. Por definición de B_a y B_b. Luego $y \in B_a \cap B_b$ y como $y \in B_c$, entonces $B_c \subseteq B_a \cap B_b$, o lo que es igual $W \subseteq U \cap V$.

Luego por i, ii, se tiene que β_{ad} es base para el conjunto X.

Es de notar que la demostración de que la colección β_i es base, no se realizará puesto que es similar a la de la base β_d, teniendo en cuenta la siguiente definición: $\beta_i = \{(\leftarrow, x] : x \in X\}$ o de forma equivalente $\beta_i = \{B_x : x \in X\}$ donde $B_x = \{k \in X : k \leq x\}$.

Además para demostrar la primera condición de base se tiene cuenta que se trabaja con menor igual como se nota en la definición, en cuanto a la segunda condición el conjunto $W \in \beta_i$, es B_c tal que $c = min\{a, b\}$, por ello en la demostración todo se presenta en términos del mínimo y siguiendo el mismo esquema de β_d.

Así mismo para demostrar que la colección β_{ai} es base, la prueba se hace análoga a la de β_{ad} y teniendo en cuenta las mismas sugerencias de β_i, además asumiendo como definición la siguiente: $\beta_{ai} = \{(\leftarrow, x) : x \in X\}$ o de forma equivalente $\beta_{ai} = \{B_x : x \in X\}$ donde $B_x = \{k \in X : k < x\}$.

Ahora se mostrará que la colección β_+ es base para el conjunto X, esta demostración se realizará debido a que es diferente a las anteriores, puesto que usa tanto la no existencia de máximo y mínimo, como el mínimo y el máximo de dos elementos.

$\beta_+ = \{[a, b) : a, b \in X\}$ o de forma equivalen $\beta_+ = \{B_{ab} : a, b \in X\}$ donde $B_{ab} = \{k \in X : a \leq k < b\}$. Nota: Si $a \geq b$ entonces $B_{ab} = \emptyset$

i) Se verificará que: $\bigcup_{ab\in X} B_{ab} = X$

Si $k \in X$, existe $b \in X$ tal que $k \leq k < b$, ya que X no tiene elemento máximo luego se tiene que $k \in B_{kb}$, por definición de B_{kb}, de donde $k \in \bigcup_{ab\in X} B_{ab}$.
Si $k \in \bigcup_{ab\in X} B_{ab},$ entonces existe $a, b \in X\, y\ \ k \in B_{ab}$. Pero si $k \in B_{ab}$ entonces por definición de B_{ab} , $k \in X$.

ii) $Si\, U, V \in \beta_+$, siendo $U = B_{a_1b_1}$ y $V = B_{a_2b_2}$ para algún $a_1, b_1,\ a_2, b_2 \in X,$ con $a_1 < b_1$ y $a_2 < b_2$.

S$i\ x \in U \cap V$ existe $W = B_{\,a_3b_3}$ donde $a_3 = max\{a_1, a_2\}$ y $b_3 = min\{b_1, b_2\}$ tal que:

- $W \in \beta_+$, ya que $W = B_{a_3b_3}$ y como $k \in X$ entonces por definición de β_+, $W \in \beta_+$.
- $x \in W$, porque $x \in U \cap V$, entonces $x \in B_{a_1b_1} \cap B_{a_2b_2}$, así $x \in B_{a_1b_1}$ y $x \in B_{a_2b_2}$. Por definición de intersección. Luego $a_1 \leq x < b_1$ y $a_2 \leq x < b_2$.Por definición de $B_{a_1b_1}\ y\ B_{a_2b_2}$. Así $a_1 \leq x$ y $a_2 \leq x$, pero como $a_3 = max\{a_1, a_2\}$ y X es un conjunto totalmente ordenado cumpliendo además la ley de la tricotomía, se puede dar que $a_3 = a_1$ ó $a_3 = a_2$ entonces utilizando esto se tiene que $x \geq a_3$. También tenemos que $x < b_1\ \ y\ \ x < b_2$, como $b_3 = min\{b_1, b_2\},$ y X es un conjunto totalmente ordenado se cumple la ley de la tricotomía, luego se puede dar $b_3 = b_1$ ó $b_3 = b_2$ entonces utilizando esto se tiene $x < b_3$, así $a_3 \leq x < b_3$, y por definición de $B_{a_3b_3}$, $x \in B_{a_3b_3} = W$
- $W \subseteq U \cap V$, si $y \in W = B_{a_3b_3}$, entonces $a_3 \leq y < b_3$. Por definición de $B_{a_3b_3}$. Como $a_3 = max\{\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2\}$ y $b_3 = min\{b_1, b_2\}$ entonces $a_3 \geq a_1$, $a_3 \geq a_2$ y $b_3 \leq b_1$, $b_3 \leq b_2$. Luego $a_1 \leq a_3 \leq y < b_3 \leq b_1$ y $a_2 \leq a_3 \leq y < b_3 \leq b_2$, así $a_1 \leq y < b_1$ y $a_2 \leq y < b_2$. Entonces $y \in B_{a_1b_1}$ y $y \in B_{a_2b_2}$. Por definición de $B_{a_1b_1}$ y $B_{a_2b_2}$. Luego $y \in B_{a_1b_1} \cap B_{a_2b_2}$,

y como $y \in B_{a_3 b_3}$ entonces $B_{a_3 b_3} \subseteq B_{a_1 b_1} \cap B_{a_2 b_2}$o lo que es igual $W \subseteq U \cap V$.

Luego por i, ii, se tiene que β_+ es base para el conjunto X.

En cuanto a la colección β_- definida como: $\beta_- = \{(a,b]: a,b \in X\}$ o equivalentemente $\beta_- = \{B_{ab}: a,b \in X\}$ donde $B_{ab} = \{k \in X: a < k \leq b\}$. Nota: Si $a \geq b$ entonces $B_{ab} = \emptyset$.

La demostración de que esta es base es similar a la que se mostró anteriormente, pero teniendo en cuenta el sentido de las desigualdades.

Hasta el momento se probaron que las anteriores seis colecciones son bases para una topología en el conjunto X, pero como se mencionó también se abordará las colecciones β_{od} y β_o, siguiendo el mismo esquema anterior se verificarán las dos condiciones para que sean base.

$\beta_{od} = \{(a,b): a,b \in X\}$ o equivalentemente $\beta_{od} = \{B_{ab}: a,b \in X\}$ donde $B_{ab} = \{k \in X: a < k < b\}$. Nota: Si $a \geq b$ entonces $B_{ab} = \emptyset$.

i) Se verificará que $\bigcup_{a,b \in X} B_{ab} = X$

Si $k \in X$, existe $a < k$ y $b > k$, ya que X no tiene máximo ni mínimo, luego $a < k < b$, así $k \in B_{ab}$, por definición de B_{ab}, de donde $k \in \bigcup_{a,b \in X} B_{ab}$.
Si $k \in \bigcup_{a,b \in X} B_{ab}$, entonces existe $a,b \in X$ y $k \in B_{ab}$. Pero si $k \in B_{ab}$ entonces por definición de B_{ab}, $k \in X$.

ii) $Si\ U,V \in \beta_{od}$, siendo $U = B_{a_1 b_1}$ y $V = B_{a_2 b_2}$para algún a_1, b_1 , $a_2, b_2 \in X$, con $a_1 \leq b_1$ y $a_2 \leq b_2$.

S$i\ x \in U \cap V$ existe $W = B_{a_3 b_3}$ donde $a_3 = max\{a_1, a_2\}$ y $b_3 = min\{b_1, b_2\}$ tal que:

- $W \in \beta_{od}$, porque como $k \in X$ y $W = B_{a_3 b_3}$ entonces por definición de β_{od}, $W \in \beta_{od}$.
- $x \in W$ debido a que como $x \in U \cap V$, entonces $x \in B_{a_1 b_1} \cap B_{a_2 b_2}$, así $x \in B_{a_1 b_1}$ y $x \in B_{a_2 b_2}$. Por definición de intersección. Luego $a_1 < x < b_1$ y $a_2 < x < b_2$. Por definición de $B_{a_1 b_1}$ y $B_{a_2 b_2}$.Como $a_3 = max\{a_1, a_2\}$ y $b_3 = min\{b_1, b_2\}$ entonces $a_1 < x$ y $a_2 < x$, pero como $a_3 = max\{a_1, a_2\}$ y X es un conjunto totalmente ordenado cumpliendo además la ley de la tricotomía, se puede dar que $a_3 = a_1$ ó $a_3 = a_2$ entonces utilizando esto se tiene $x > a_3$. También tenemos que $b_3 = min\{b_1, b_2\}$ y X es un conjunto totalmente ordenado se cumple la ley de la tricotomía, luego se puede dar $b_3 = b_1$ ó $b_3 = b_2$ entonces utilizando esto se tiene $x < b_3$. Por ende $a_3 < x < b_3$, y por definición de $B_{a_3 b_3}$, $x \in B_{a_3 b_3} = W$.

- $W \subseteq U \cap V$, si $y \in W = B_{a_3 b_3}$, entonces $a_3 < y < b_3$. Por definición de $B_{a_3 b_3}$. Como $a_3 = max\{a_1, a_2\}$ y $b_3 = min\{b_1, b_2\}$ entonces $a_3 \geq a_1$, $a_3 \geq a_2$ y $b_3 \leq b_1$, $b_3 \leq b_2$. Luego $a_1 \leq a_3 < y < b_3 \leq b_1$ y $a_2 \leq a_3 < y < b_3 \leq b_2$, así $a_1 < y < b_1$ y $a_2 < y < b_2$. Entonces $y \in B_{a_1 b_1}$ y $y \in B_{a_2 b_2}$. Luego $y \in B_{a_1 b_1} \cap B_{a_2 b_2}$, entonces $B_{a_3 b_3} \subseteq B_{a_1 b_1} \cap B_{a_2 b_2}$o lo que es igual $W \subseteq U \cap V$.

Luego por i, ii, se tiene que β_{od} es base para el conjunto X.

De la misma forma se presentará la demostración para β_o, definida como:

$\beta_o = \beta_{ad} \cup \beta_{ai} \cup \beta_{od}$, donde $\beta_{ad} = \{B_a : a \in X\}$ siendo $B_a = \{k \in X : a < k\}$; $\beta_{ai} = \{B_b : b \in X\}$ siendo $B_b = \{k \in X : k < b\}$; $\beta_{od} = \{B_{cd} : c, d \in X\}$ siendo $B_{cd} = \{k \in X : c < k < d\}$. Nota: Si $c \geq d$ entonces $B_{cd} = \emptyset$

i) Se verificará la primera condición de base, para ello se mostrará que la unión de algunos de los elementos de la base da todo X: $\bigcup_{c,d \in X} B_{cd} = X$.

Si $k \in X$, existe $a < k$ y $b > k$, ya que X no tiene máximo ni mínimo, luego $a < k < b$, así $k \in B_{cd}$, por definición de B_{cd}, de donde $k \in \bigcup_{c,d\in X} B_{cd}$

Si $k \in \bigcup_{c,d\in X} B_{cd}$, entonces existe $c, d \in X$ y $k \in B_{cd}$. Pero si $k \in B_{cd}$ entonces por definición de B_{cd}, $k \in X$.

ii) Si $U, V \in B_o$, se puede dar que:

Caso 1: Si $U, V \in \beta_{ad}$

Caso 2: Si $U, V \in \beta_{ai}$

Caso 3: Si $U, V \in \beta_{od}$

Caso 4: Si $U \in \beta_{ad}$ y $V \in \beta_{ai}$

Caso 5: Si $U \in \beta_{ad}$ y $V \in \beta_{od}$

Caso 6: Si $U \in \beta_{ai}$ y $V \in \beta_{od}$

Los casos 1, 2, 3 ya se mostraron anteriormente en las bases β_{od}, β_{ai}, β_{ad}, así a continuación mostraremos los casos restantes:

Caso 4: Si $U \in \beta_{ad}$ y $V \in \beta_{ai}$, siendo $U = B_a$ y $V = B_b$ para algún $a, b \in X$

Si $a > b$, entonces $U \cap V = \emptyset$, así no existe $x \in U \cap V$ luego el antecedente en el enunciado del teorema 2 es falso, por ende la implicación es verdadera, cumpliéndose para este caso la condición.

Si $a < b$ y si $x \in U \cap V$ existe $W = B_{ab}$ tal que:

- $W \in \beta_o$, porque como $k \in X$ y $W = B_{ab} \subseteq \beta_o$, entonces $W \in \beta_o$.
- $x \in W$, ya que como $x \in U \cap V$, entonces $x \in B_a \cap B_b$, luego $a < x$ y $x < b$. Por definición de B_a y B_b. Por ende $a < x < b$, y por definición de B_{ab}, $x \in B_{ab} = W$.

- $W \subseteq U \cap V$, si $y \in W = B_{ab}$, entonces $a < y < b$. Por definición de B_{ab} entonces $a < y$ y $y < b$, luego $y \in B_a$ y $y \in B_b$. Por ende $y \in B_a \cap B_b$, así $W \subseteq U \cap V$.

  Luego en este caso se cumple la definición para que β_{od} sea base para el conjunto X.

Caso 5: Si $U \in \beta_{ad}$ y $V \in \beta_{od}$, siendo $U = B_a$ y $V = B_{cd}$ para algún $a, c, d \in X$.

Si $d < a$, entonces $U \cap V = \emptyset$, cumpliéndose para este caso la condición.

Si $d > a$, entonces $U \cap V \neq \emptyset$, luego si $x \in U \cap V$ existe $W = B_{ed}$, donde $e = max\{a, c\}$ tal que: $W \in \beta_o$, $x \in W$ y $W \subseteq U \cap V$.

- Se verificará que $W \in \beta_o$: Como $k \in X$ y $W = B_{ed} \subseteq \beta_o$, entonces $W \in \beta_o$.
- Se demostrará que $x \in W$: Como $x \in U \cap V$, entonces $x \in B_a \cap B_{cd}$.Luego $a < x$ y $c < x < d$. Por definición de B_a y B_{cd}.Pero como $e = max\{a, c\}$ y X es un conjunto totalmente ordenado cumpliendo además la ley de la tricotomía, se puede dar que $e = a$ ó $e = c$ entonces utilizando esto se tiene $x > e$. Por ende $e < x < d$, y por definición de B_{ed}, $x \in B_{ed} = W$
- Se probará que $W \subseteq U \cap V$: Si $y \in W = B_{ed}$, entonces $e < y < d$, Por definición de B_{ed}, como $e = max\{a, c\}$ entonces $e \geq a$, $e \geq c$, luego $c \leq e < y < d$ así $c < y < d$, de donde $y \in B_{cd}$, también se tiene que $a \leq e < y < d$, luego $a < y$, así $y \in B_a$.Entonces $y \in B_a \cap B_{cd}$, luego $W \subseteq U \cap V$.

La demostración del caso 6, no se realizará puesto que es similar a la anterior, teniendo en cuenta que si $U \in \beta_{ai}$ y $V \in \beta_{od}$, siendo $U = B_b$ y $V = B_{c,d}$ para algún $b, c, d \in X$, se debe tener presente que si $b < c$, entonces $U \cap V = \emptyset$, así no existe $x \in U \cap V$ luego el antecedente es falso, por ende la implicación es verdadera, cumpliéndose para este caso la condición. Si $b > c$, entonces $U \cap V \neq \emptyset$, luego si $x \in U \cap V$ existe $W = B_{c,e}$, donde $e = min\{d, b\}$ tal que se satisface que $W \in \beta_{od}$, $x \in W$ y $W \subseteq U \cap V$.

De esta manera se comprobó que para cualquier caso si $x \in U \cap V$ existe $W \in \beta_o$, $x \in W$ y $W \subseteq U \cap V$; así β_o es base para el conjunto X.

Ahora como se dijo en el marco teórico cada una de las bases antes mencionadas genera una topología, se recordará las topologías que generan dichas bases.

La topología τ_d es generada por la base β_d, la τ_{ad} por la β_{ad}, la τ_i por la β_i, la τ_{ai} por la β_{ai}, la τ_+ por la β_+, la τ_- por la β_-, la τ_o por la β_o, la τ_{od} por la β_{od}.

1.2 RELACIÓN ENTRE LAS TOPOLOGÍAS GENERADAS

En esta sección se mostrará la relación de contenencia que hay entre estas topologías incluyendo la topología discreta ($\mathfrak{D}$) y la topología trivial o grosera (τ_g), es de notar que para demostrar los teoremas del 10 al 14 se utilizará el teorema 4, el cual utiliza las bases de las topologías para probar las respectivas contenencias, veamos:

TEOREMA 10: En un conjunto totalmente ordenado sin elemento mínimo ni máximo se tiene que $\tau_{ad} \subseteq \tau_d \subseteq \tau_+$

Demostración:

Primero se mostrará que $\tau_{ad} \subseteq \tau_d$

Para todo $V \in \beta_{ad}$, como $V = (b, \rightarrow)$, donde $b \in X$ y para todo $x \in V$, existe $V' = [x, \rightarrow) \in \beta_d$, para algún $x \in X$, se satisfacen las siguientes condiciones:

- $x \in V'$, Por la misma definición de β_d.
- $V' \subseteq V$, porque si $y \in V'$, entonces $y \geq x$, por definición de β_d, pero como $x \in V$, se tiene que $b < x$, por definición de β_{ad}, luego $y \geq x > b$, de donde $y > b$, así $y \in V$.

Con ello se muestra que $\tau_{ad} \subseteq \tau_d$.

Eventualmente se da la igualdad entre estas dos topologías como se verá en el conjunto de los números enteros.

Ahora se probará que $\tau_d \subseteq \tau_+$:

Para todo $V \in \beta_d$, como $V = [z, \rightarrow)$, donde $z \in X$, y para todo $x \in V$, existe $V' = [x, y) \in \beta_+$, para algún $x, y \in X$, tal que:

- $x \in V'$ por definición de β_+
- $V' \subseteq V$, ya que si $a \in V'$, entonces $x \leq a < y$, por definición de β_+, pero como $x \in V$, se tiene que $z \leq x$, por definición de β_d, luego $z \leq x \leq a < y$, de donde por transitividad $z \leq a$, así $a \in V$, de esta manera se muestra que $\tau_d \subseteq \tau_+$.

Así se obtienen las siguientes relaciones de contenencia: $\tau_g \subseteq \tau_{ad} \subseteq \tau_d \subseteq \tau_+ \subseteq \mathfrak{D}$.
Se verán ahora otras relaciones entre las topologías, en los siguientes teoremas:

TEOREMA 11: En un conjunto totalmente ordenado sin elemento mínimo ni máximo se tiene que $\tau_{ad} \subseteq \tau_{od} \subseteq \tau_+$

Demostración:

En primer lugar se verificará que $\tau_{ad} \subseteq \tau_{od}$

Para todo $V \in \beta_{ad}$, como $V = (b, \rightarrow)$, para algún $b \in X$, y para todo $x \in V$, existe $V' = (b, c) \in \beta_{od}$, para algún $b, c \in X$ con $b < c$, se cumple que:

- $x \in V'$, ya que $x > b$, por definición de β_{ad}, pero además como X no tiene elemento máximo existe $c \in X$, tal que $x < c$, luego $b < x < c$, así $x \in V'$.
- $V' \subseteq V$, porque si $y \in V'$, entonces $b < y < c$, por definición de β_{od}, luego $b < y$, así $y \in V$, de esta manera se muestra que $\tau_{ad} \subseteq \tau_{od}$.

Así mismo es de mencionar que en este caso como el conjunto a trabajar es totalmente ordenado sin elemento máximo ni mínimo, por el Teorema 8 mostrado en el marco teórico, se tiene que $\tau_o = \tau_{od}$.

Ahora verificará que $\tau_{od} \subseteq \tau_+$:

Para todo $V \in \beta_{od}$, como $V = (a, b)$ para algún $a, b \in X$, y para todo $x \in V$, existe $V' = [x, b) \in \beta_+$ para algún $x, b \in X$, tal que

- $x \in V'$ por definición de β_+.
- $V' \subseteq V$, ya que si $z \in V'$, entonces $x \leq z < b$, por definición de β_+, pero como $x \in V$, se tiene que $a < x < b$, por definición de β_{od}, luego $a < x \leq z < b$, así $a < z < b$, luego $z \in V$, de esta manera por el Teorema 4 se muestra que $\tau_{od} \subseteq \tau_+$.

Además es de notar que eventualmente se da la igualdad entre estas topologías como es en el caso de los números enteros.

Sintetizando lo anterior se tiene que: $\tau_g \subseteq \tau_{ad} \subseteq \tau_o = \tau_{od} \subseteq \tau_+ \subseteq \mathfrak{D}$

TEOREMA 12: En un conjunto totalmente ordenado sin elemento mínimo ni máximo se tiene que $\tau_{od} \subseteq \tau_-$

Demostración:

Utilizando los mismos esquemas anteriores:

Para todo $V \in \beta_{od}$, como $V = (a, b)$ para algún $a, b \in X$, y para todo $x \in V$, existe $V' = (a, x] \in \beta_-$, para algún $a, x \in X$, se cumple que:

- $x \in V'$ por definición de β_-
- $V' \subseteq V$, ya que si $z \in V'$, entonces $a < z \leq x$, por definición de β_-, pero como $x \in V$, se tiene que $a < x < b$, por definición de β_{od}, luego $a < z \leq x < b$, así $a < z < b$, por ende $z \in V$, de esta manera se muestra que $\tau_{od} \subseteq \tau_-$.

Es de notar que se tiene la igualdad entre estas topologías en algunos casos.

Utilizando algunos de los anteriores teoremas se puede evidenciar la siguiente relación de contenencia entre las topologías trabajadas: $\tau_g \subseteq \tau_{ad} \subseteq \tau_O = \tau_{od} \subseteq \tau_- \subseteq \mathfrak{D}$

TEOREMA 13: En un conjunto totalmente ordenado sin elemento mínimo ni máximo se tiene que $\tau_{ai} \subseteq \tau_{od}$

Demostración:

Para todo $V \in \beta_{ai}$, como $V = (\leftarrow, b)$ para algún $b \in X$, y para todo $x \in V$, existe $V' = (a, b) \in \beta_{od}$, para algún $a, b \in X, \text{con } a < b$, se cumple que:

- $x \in V'$, ya que $x < b$, por definición de β_{ai}, pero además como X no tiene elemento mínimo existe $a \in X$, tal que $x > a$, luego $a < x < b$, así $x \in V'$.
- $V' \subseteq V$, porque si $y \in V'$, entonces $a < y < b$, por definición de β_{od}, luego $b > y$, así $y \in V$.

De esta manera por el teorema 4 se obtiene que $\tau_{ai} \subseteq \tau_{od}$.
A partir de los anteriores teoremas es posible ver dos nuevas relaciones entre las topologías: $\tau_g \subseteq \tau_{ai} \subseteq \tau_o = \tau_{od} \subseteq \tau_+ \subseteq \mathfrak{D}$ y $\tau_g \subseteq \tau_{ai} \subseteq \tau_o = \tau_{od} \subseteq \tau_- \subseteq \mathfrak{D}$.

A continuación se verán otras relaciones:

TEOREMA 14: En un conjunto totalmente ordenado sin elemento mínimo ni máximo se tiene que $\tau_{ai} \subseteq \tau_i \subseteq \tau_-$

Demostración:

Primero se evidenciará que $\tau_{ai} \subseteq \tau_i$:

Para todo $V \in \beta_{ai}$, siendo $V = (\leftarrow, b)$, para algún: $b \in X$, y para todo $x \in V$, existe $V' = (\leftarrow, x] \in \beta_i$, para algún $x \in X$ tal que:

- $x \in V'$, por la misma definición de β_i.

- $V' \subseteq V$, ya que si $y \in V'$, entonces $y \leq x$, por definición de β_i, pero como $x \in V$, se tiene que $b > x$, por definición de β_{ai}, luego $y \leq x < b$, de donde $y < b$, así $y \in V$, de esta manera se muestra que $\tau_{ai} \subseteq \tau_i$.

Eventualmente se da la igualdad entre estas dos topologías como se verá en el conjunto de los números enteros.

Ahora se verificará que $\tau_i \subseteq \tau_-$

Para todo $V \in \beta_i$, como $V = (\leftarrow, b]$ para algún $b \in X$, y para todo $x \in V$, existe $V' = (a, x] \in \beta_-$, para algún $a, x \in X$, con $a < x$, se cumple que:

- $x \in V'$ por definición de β_-
- $V' \subseteq V$, ya que si $z \in V'$, entonces $a < z \leq x$, por definición de β_-, pero como $x \in V$, se tiene que $x \leq b$, por definición de β_i, luego $a < z \leq x \leq b$, así $z \leq b$, por ende $z \in V$, de esta manera se muestra que $\tau_i \subseteq \tau_-$.

De ello se puede evidenciar una nueva relación: $\tau_g \subseteq \tau_{ai} \subseteq \tau_i \subseteq \tau_- \subseteq \mathfrak{D}$

Con lo anterior se mostró que en un conjunto X totalmente ordenado sin elemento máximo ni mínimo es posible definir 10 topologías que cumplen ciertas relaciones de contenencia, teniendo en cuenta que $\tau_{od} = \tau_o$.

Ahora se mostraran algunos ejemplos de conjuntos totalmente ordenados sin elementos máximo ni mínimo, estos son el conjunto de números reales y enteros con el orden usual, además del plano cartesiano con el orden lexicográfico; donde será posible evidenciar las relaciones de comparabilidad entre las topologías con su respectivo diagrama de Hasse.

1.3 LOS NÚMEROS REALES CON EL ORDEN USUAL

En cuanto al conjunto de los números reales con el orden usual, se puede evidenciar en el siguiente diagrama las relaciones de contenencias y no comparabilidad entre las topologías antes tratadas.

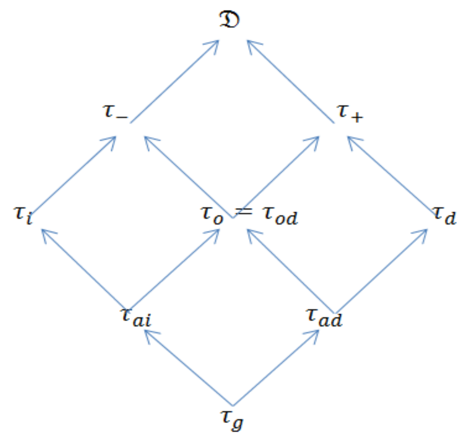


Diagrama 1: Topologías asociadas al orden en el conjunto de los números reales.

Las contenencias probadas en la sección anterior se mantienen puesto que los reales cumplen con la condición de ser un conjunto totalmente ordenado y sin elemento máximo ni mínimo. Así en el diagrama se puede evidenciar, por ejemplo que $\tau_g \subseteq \tau_{ad} \subseteq \tau_o = \tau_{od} \subseteq \tau_+ \subseteq \mathfrak{D}$.

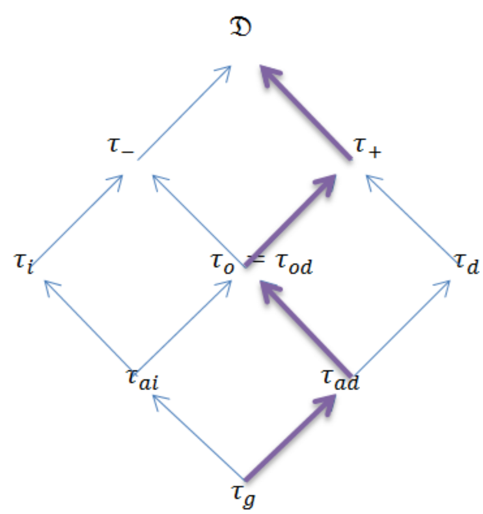


Diagrama 2: Una cadena de contenencias de topologías en los números reales.

A continuación se mostrará la justificación del diagrama en cuanto a las contenencias estrictas y no comparabilidad que se dan entre las topologías.

Respecto a las contenencias estrictas, estas se van a realizar evidenciando un elemento que está en una de las topologías pero no se encuentra en la otra, puesto que no es unión de elementos de la base, veamos:

- $\tau_{ad} \nsubseteq \tau_g$, ya que $(a,\to) \in \tau_{ad}$, y $(a,\to) \notin \tau_g$, puesto que $(a,\to) \neq X$, y $(a,\to) \neq \emptyset$. Análogamente se muestra que $\tau_{ai} \nsubseteq \tau_g$.
- $\tau_d \nsubseteq \tau_{ad}$, puesto que si esto se diera, es porque $[a,\to) \in \tau_d$ se debería poder obtener como unión de elementos de la base de la topología τ_{ad}.

  Así supongamos que $[a,\to) = \bigcup_{\lambda \in L}(a_\lambda,\to)$, con $a, a_\lambda \in \mathbb{R}$, para todo $\lambda \in L$. Si $a \in \bigcup_{\lambda \in L}(a_\lambda,\to)$, entonces $a \in (a_\lambda,\to)$, para algún $\lambda \in L$, pero $(a_\lambda,\to) \subseteq \bigcup_{\lambda \in L}(a_\lambda,\to) = [a,\to)$, por ende $a \in (a_\lambda,\to) \subseteq [a,\to)$, luego $a > a_\lambda$, debido a que $a \in (a_\lambda,\to)$, además por la densidad de los números reales existe $y \in \mathbb{R}$, tal que $a > y > a_\lambda$, así $y \in (a_\lambda,\to)$, pero $y \notin [a,\to)$, lo cual contradice que $(a_\lambda,\to) \subseteq [a,\to)$.

Similarmente se demuestra que $\tau_i \nsubseteq \tau_{ai}$, teniendo en cuenta que la contradicción se da porque $(\leftarrow,b] \in \tau_i$, pero no se puede obtener como unión de los elementos de la base β_{ai}.

- $\tau_{od} \nsubseteq \tau_{ad}$, siguiendo lo anterior supongamos que $(a,b) = \bigcup_{\lambda \in L}(a_\lambda,\to)$, siendo $a, b, a_\lambda \in \mathbb{R}$ para todo $\lambda \in L$, si $c \in \bigcup_{\lambda \in L}(a_\lambda,\to)$, entonces $c \in (a_\lambda,\to)$ para algún $\lambda \in L$ pero $(a_\lambda,\to) \subseteq \bigcup_{\lambda \in L}(a_\lambda,\to) = (a,b)$, luego $a_\lambda < c$, como $c \in (a,b)$, entonces $a < c < b$, además los reales no tienen elemento máximo luego existe $y \in \mathbb{R}$, tal que $b < y$, así se puede dar que $a_\lambda < a < c < b < y$ ó $a < a_\lambda < c < b < y$, por ende en cualquiera de los casos $y \in (a_\lambda,\to)$ pero $y \notin (a,b)$, lo cual contradice que $(a_\lambda,\to) \subseteq (a,b)$.

De la misma manera se muestra que $\tau_{od} \nsubseteq \tau_{ai}$, pero teniendo en cuenta que ahora se usa que $(a,b) \in \tau_{od}$ y no está en τ_{ai}, además de la no existencia de elemento mínimo en los números reales.

- $\tau_+ \not\subseteq \tau_d$, supongamos que $[a,b) = \bigcup_{\lambda \in L}[a_\lambda, \rightarrow)$ con $a, b, a_\lambda \in \mathbb{R}$ para todo $\lambda \in L$. Si $a \in \bigcup_{\lambda \in L}[a_\lambda, \rightarrow)$, entonces $a \in [a_\lambda, \rightarrow) \subseteq \bigcup_{\lambda \in L}[a_\lambda, \rightarrow) = [a,b)$ para algún $\lambda \in L$ luego $a \geq a_\lambda$ y además $a < b$, luego $a_\lambda \leq a < b$, sin embargo los reales no tienen elemento máximo por ende existe $y \in \mathbb{R}$, tal que $b < y$, así tenemos $a_\lambda \leq a < b < y$, así $y \in [a_\lambda, \rightarrow)$, pero $y \notin [a,b)$. Lo cual contradice que $[a_\lambda, \rightarrow) \subseteq [a,b)$

De igual forma se demuestra que $\tau_- \not\subseteq \tau_i$, pero teniendo en cuenta que la contradicción se da con $(a,b] \in \tau_-$ y usando la no existencia de mínimo en los números reales.

- $\tau_+ \not\subseteq \tau_{od}$, supongamos que $[a,b) = \bigcup_{\lambda \in L}(a_\lambda, b_\lambda)$ con $a, b, a_\lambda, b_\lambda \in \mathbb{R}$ para todo $\lambda \in L$. Si $a \in \bigcup_{\lambda \in L}(a_\lambda, b_\lambda)$, entonces $a \in (a_\lambda, b_\lambda) \subseteq [a,b)$ para algún $\lambda \in L$, luego $a_\lambda < a < b_\lambda$, además $a < b$ y por la densidad de los números reales existe $y \in \mathbb{R}$, tal que $a_\lambda < y < a < b_\lambda < b$ ó $a_\lambda < y < a < b < b_\lambda$, pero en cualquiera de los dos casos se tiene que $y \in (a_\lambda, b_\lambda)$, pero $y \notin [a,b)$. Lo cual contradice que $(a_\lambda, b_\lambda) \subseteq [a,b)$

Igualmente se muestra que $\tau_- \not\subseteq \tau_{od}$, pero teniendo en cuenta que la contradicción se da con $(a,b] \in \tau_-$ y no se encuentra en τ_{od}.

- $\mathfrak{D} \not\subseteq \tau_+$, puesto que si esto se diera es porque $\{c\} \in \mathfrak{D}$, se debe poder obtener como unión de elementos de la base de la topología τ_+, es decir supongamos que $\{c\} = \bigcup_{\lambda \in L}[a_\lambda, b_\lambda)$, con $c, a_\lambda, b_\lambda \in \mathbb{R}$ para todo $\lambda \in L$. Luego si $c \in \bigcup_{\lambda \in L}[a_\lambda, b_\lambda)$, entonces $c \in [a_\lambda, b_\lambda)$, pero además $[a_\lambda, b_\lambda) \subseteq \bigcup_{\lambda \in L}[a_\lambda, b_\lambda) = \{c\}$, por ende $c \in [a_\lambda, b_\lambda) \subseteq \{c\}$, luego $a_\lambda \leq c < b_\lambda$, y por la densidad de los números reales existe $y \in \mathbb{R}$, tal que $c < y < b_\lambda$, así $a_\lambda \leq c < y < b_\lambda$, por ende $y \in [a_\lambda, b_\lambda)$, pero $y \notin \{c\}$. Lo cual contradice que $[a_\lambda, b_\lambda) \subseteq \{c\}$.

Análogamente se muestra que $\mathfrak{D} \not\subseteq \tau_-$, utilizando para la contradicción los conjuntos unitarios.

Una vez comprobadas las contenencias estrictas de las topologías mostradas en el diagrama para los números reales, falta corroborar la no comparabilidad entre las topologías que en el diagrama se evidencian cuando no hay línea entre éstas:

- τ_- no es comparable con τ_+

Para mostrarlo debemos probar que $\tau_- \nsubseteq \tau_+$ y que $\tau_+ \nsubseteq \tau_-$.

- En primer lugar $\tau_- \nsubseteq \tau_+$, porque $(a,b] \in \tau_-$ y $(a,b] \notin \tau_+$.

  Supongamos que $(a,b] = \bigcup_{\lambda\in L}[a_\lambda, b_\lambda)$ con $a, b, a_\lambda, b_\lambda \in \mathbb{R}$ para todo $\lambda \in L$. Si $b \in \bigcup_{\lambda\in L}[a_\lambda, b_\lambda)$, entonces $b \in [a_\lambda, b_\lambda) \subseteq \bigcup_{\lambda\in L}[a_\lambda, b_\lambda) = (a,b]$ para algún $\lambda \in L$, luego $a_\lambda \leq b < b_\lambda$, además $a < b$ y por la densidad de los números reales existe $y \in \mathbb{R}$, tal que $b < y < b_\lambda$, de esta manera se tiene que $a < a_\lambda \leq b < y < b_\lambda$ ó $a_\lambda < a \leq b < y < b_\lambda$, en cualquier caso se da que $y \in [a_\lambda, b_\lambda)$, pero $y \notin (a,b]$. Lo cual contradice que $[a_\lambda, b_\lambda) \subseteq (a,b]$.

Ahora de manera análoga para evidenciar que $\tau_+ \nsubseteq \tau_-$, se debe tener en cuenta que la contradicción se da con $[a,b) \in \tau_+$.

- τ_i no es comparable con τ_{od}
  - $\tau_i \nsubseteq \tau_{od}$, supongamos que $(\leftarrow, b] = \bigcup_{\lambda\in L}(a_\lambda, b_\lambda)$, con $a, b, a_\lambda, b_\lambda \in \mathbb{R}$ para todo $\lambda \in L$. Si $b \in \bigcup_{\lambda\in L}(a_\lambda, b_\lambda)$, entonces $b \in (a_\lambda, b_\lambda) \subseteq (\leftarrow, b]$, para algún $\lambda \in L$, luego $a_\lambda < b < b_\lambda$, y por la densidad de los números reales existe $y \in \mathbb{R}$, tal que $b < y < b_\lambda$, luego tenemos que $a_\lambda < b < y < b_\lambda$, así $y \in (a_\lambda, b_\lambda)$, pero $y \notin (\leftarrow, b]$. Lo cual contradice $(a_\lambda, b_\lambda) \subseteq (\leftarrow, b]$.
  - $\tau_{od} \nsubseteq \tau_i$, supongamos que $(a,b) = \bigcup_{\lambda\in L}(\leftarrow, b_\lambda]$ con $a, b, b_\lambda \in \mathbb{R}$ para todo $\lambda \in L$. Si $c \in \bigcup_{\lambda\in L}(\leftarrow, b_\lambda]$, entonces $c \in (\leftarrow, b_\lambda] \subseteq (a,b)$ para algún $\lambda \in L$, así $c \leq b_\lambda$, además $a < c < b$, como los números reales no tienen elemento minino, existe $y \in \mathbb{R}$, tal que $y < a < c < b < b_\lambda$ ó $y < a < c \leq b_\lambda < b$ así en cualquier caso $y \in (\leftarrow, b_\lambda]$, pero $y \notin (a,b)$. Lo cual contradice que $(\leftarrow, b_\lambda] \subseteq (a,b)$.

En cuanto a la verificación de que τ_d no es comparable con τ_{od}, es similar a la anterior pero teniendo en cuenta que para evidenciar que $\tau_d \nsubseteq \tau_{od}$ se utiliza $[a, \rightarrow) \in \tau_d$ y $[a, \rightarrow) \notin \tau_{od}$ además de la densidad de los números reales, mientras que para evidenciar que $\tau_{od} \nsubseteq \tau_d$ se debe tener en cuenta que la contradicción se da con $(a, b) \in \tau_{od}$ y la no existencia de máximo.

- τ_i no es comparable con τ_d
  - $\tau_i \nsubseteq \tau_d$, supongamos que $(\leftarrow, b] = \bigcup_{\lambda \in L}[a_\lambda, \rightarrow)$ con $b, a_\lambda \in \mathbb{R}$ para todo $\lambda \in L$. Si $b \in \bigcup_{\lambda \in L}[a_\lambda, \rightarrow)$, entonces $b \in [a_\lambda, \rightarrow) \subseteq (\leftarrow, b]$ para algún $\lambda \in L$, así $a_\lambda \leq b$, además los reales no tienen elemento máximo luego existe $y \in \mathbb{R}$, tal que $a_\lambda \leq b < y$, luego $y \in [a_\lambda, \rightarrow)$, pero $y \notin (\leftarrow, b]$. Lo cual contradice que $[a_\lambda, \rightarrow) \subseteq (\leftarrow, b]$.
  - $\tau_d \nsubseteq \tau_i$, supongamos que $[a, \rightarrow) = \bigcup_{\lambda \in L}(\leftarrow, b_\lambda]$, con $a, b_\lambda \in \mathbb{R}$ para todo $\lambda \in L$. Si $a \in \bigcup_{\lambda \in L}(\leftarrow, b_\lambda]$, entonces $a \in (\leftarrow, b_\lambda] \subseteq [a, \rightarrow)$ para algún $\lambda \in L$, así $a \leq b_\lambda$ y como los números reales no tienen elemento mínimo, existe $y \in \mathbb{R}$, tal que $y < a \leq b_\lambda$, así $y \in (\leftarrow, b_\lambda]$, pero $y \notin [a, \rightarrow)$. Lo cual contradice que $(\leftarrow, b_\lambda] \subseteq [a, \rightarrow)$.

Así podemos apreciar que τ_d, τ_{od} y τ_i no son comparables.

Con respecto a que τ_{ai} no es comparable con τ_{ad}, la prueba de ello es análoga a la anterior, pero teniendo en cuenta que se toman $(\leftarrow, b) \in \tau_{ai}$ y $(\leftarrow, b) \notin \tau_{ad}$, además de $(a, \rightarrow) \in \tau_{ad}$ y $(a, \rightarrow) \notin \tau_{ai}$.

Para justificar que τ_{ai} no es comparable con τ_d, los contraejemplos que se usan son $(\leftarrow, b) \in \tau_{ai}$ pero no está en τ_d, además $[a, \rightarrow) \in \tau_d$ y no esta en τ_{ai}.

De la misma manera para demostrar que τ_i no es comparable con τ_{ad}, la prueba se realiza análoga a la de τ_{ai} no es comparable con τ_{ad}, pero teniendo en cuenta que la contradicción se da con $(\leftarrow, b] \in \tau_i$ y $(a, \rightarrow) \in \tau_{ad}$.

- τ_i no es comparable con τ_+

Para mostrarlo se debe probar que $\tau_i \nsubseteq \tau_+$ y que $\tau_+ \nsubseteq \tau_i$.

- $\tau_i \nsubseteq \tau_+$, supongamos que $(\leftarrow, b] = \bigcup_{\lambda\in L}[a_\lambda, b_\lambda)$ con $b, a_\lambda, b_\lambda \in \mathbb{R}$ para todo $\lambda \in L$. Si $b \in \bigcup_{\lambda\in L}[a_\lambda, b_\lambda)$, entonces $b \in [a_\lambda, b_\lambda) \subseteq \bigcup_{\lambda\in L}[a_\lambda, b_\lambda) = (\leftarrow, b]$ para algún $\lambda \in L$, luego $a_\lambda \leq b < b_\lambda$, y por la densidad de los números reales existe $y \in \mathbb{R}$, tal que $b < y < b_\lambda$, de esta manera se tiene que $a_\lambda \leq b < y < b_\lambda$ así se da que $y \in [a_\lambda, b_\lambda)$, pero $y \notin (\leftarrow, b]$. Lo cual contradice que $[a_\lambda, b_\lambda) \subseteq (\leftarrow, b]$
- Ahora para mostrar que $\tau_+ \nsubseteq \tau_i$, supongamos que $[a, b) = \bigcup_{\lambda\in L}(\leftarrow, b_\lambda]$, con $a, b, b_\lambda \in \mathbb{R}$ para todo $\lambda \in L$. Si $a \in \bigcup_{\lambda\in L}(\leftarrow, b_\lambda]$, entonces $a \in (\leftarrow, b_\lambda] \subseteq [a, b)$ para algún $\lambda \in L$, luego $a \leq b_\lambda$, además $a < b$ y como los números reales no tienen elemento mínimo existe $y \in \mathbb{R}$, tal que $y < a$, de esta manera se tiene que $y < a \leq b_\lambda < b$ ó $y < a < b \leq b_\lambda$ en cualquier caso se da que $y \in (\leftarrow, b_\lambda]$, pero $y \notin [a, b)$. Lo cual contradice que $(\leftarrow, b_\lambda] \subseteq [a, b)$

Para justificar que τ_d no es comparable con τ_-, su prueba se realiza de manera análoga a la anterior teniendo en cuenta que para evidenciar que $\tau_- \nsubseteq \tau_d$ se utiliza $(a, b] \in \tau_-$ además de la no existencia de elemento máximo en los reales, mientras que para ver que $\tau_d \nsubseteq \tau_-$ se utiliza $[a, \rightarrow) \in \tau_d$, además de la densidad de los números reales.

De esta manera se logró comprobar las contenencias, contenencias estrictas, no comparabilidad e igualdad entre las topologías trabajadas, que se evidenciaban en el diagrama mostrado anteriormente en el conjunto de los números reales.

Es de notar que algunas contenencias estrictas no siempre se dan, según el conjunto en el que se encuentre, por ende el diagrama de órdenes de las topologías varía dependiendo el conjunto, a continuación se va mostrar otro ejemplo donde se notará como varían las relaciones de comparabilidad entre las topologías tratadas.

1.4 LOS NÚMEROS ENTEROS CON EL ORDEN USUAL

En este apartado se tratarán las topologías que se han venido mencionando pero ahora en el conjunto de números enteros con el orden usual, es de notar que se asumen las contenencias mostradas en el comienzo del capítulo uno puesto que los números enteros cumplen con todas las condiciones de ser un conjunto totalmente ordenado y sin elemento mínimo ni máximo.

Es de mencionar que en las pruebas de contenencias estrictas entre las topologías en los números reales, donde se usó la no existencia de elemento mínimo ni máximo se tomaran como válidas para este conjunto. Por ejemplo, en los números reales se mostró que $\tau_+ \nsubseteq \tau_d$, y en la prueba se usó la no existencia de elemento máximo, la cual también es asumida para los números enteros.

Mientras que aquellas pruebas donde se usaron otras propiedades que no son de los números enteros se evidenciará que nuevas relaciones resultan entre dichas topologías, como por ejemplo la propiedad de densidad utilizada en la verificación de $\tau_d \nsubseteq \tau_{ad}$ en los números reales, ahora en los números enteros se va a probar que sucede con estas dos topologías.

Asumiendo lo anterior, para comprobar las relaciones de comparabilidad faltantes entre las topologías en el conjunto de números enteros, se probarán los siguientes teoremas, en los cuales se utiliza el teorema 6.

TEOREMA 15: En el conjunto de números enteros se tiene que $\beta_+ = \beta_-$, $\beta_d = \beta_{ad}$, $\beta_i = \beta_{ai}$ y $\beta_+ = \beta_{od}$.

Demostración:

Recordando las definiciones de estas bases:

$$\beta_+ = \{B_{nm}: n, m \in \mathbb{Z}\} \text{ donde } B_{nm} = \{k \in \mathbb{Z}: n \leq k < m\}$$
$$\beta_- = \{C_{de}: d, e \in \mathbb{Z}\} \text{ donde } C_{de} = \{k \in \mathbb{Z}: d < k \leq e\}$$

- Si $W \in \beta_+$ entonces $W = B_{nm}$, para algún $n, m \in \mathbb{Z}$, pero $B_{nm} = C_{de}$, ya que $p \in B_{nm}$, si y sólo si $n \leq p < m$. Luego $n - 1 < p \leq m - 1$, y notando

$n-1=d\ y\ m-1=e$ se tiene que $d<p\leq e$, para algún $d,e\in\mathbb{Z}$. Así $p\in C_{de}$. y $C_{de}\in\beta_{-}$, luego $W\in\beta_{-}$. Por consiguiente $\beta_{+}\subseteq\beta_{-}$.

- Si $V\in\beta_{-}$ entonces $V=C_{de}$, para algún $d,e\in\mathbb{Z}$, pero $C_{de}=B_{nm}$, ya que $p\in C_{de}$, si y sólo si $d<p\leq e$, luego $d+1\leq p<e+1$, y notando $d+1=n\ y\ e+1=m$ se tiene que $n\leq p<m$, para algún $n,m\in\mathbb{Z}$. Así $p\in B_{nm}$ y $B_{nm}\in\beta_{+}$, así $V\in\beta_{+}$, luego $\beta_{-}\subseteq\beta_{+}$.

De manera análoga se demuestra que $\beta_d=\beta_{ad}$, teniendo en cuenta el extremo a derecha, igualmente para $\beta_i=\beta_{ai}$ pero teniendo en cuenta el extremo a izquierda; y de la misma manera se prueba que $\beta_{+}=\beta_{od}$; luego como estas bases son iguales entonces por el Teorema 6 las topologías respectivamente son iguales.

También se tiene que $\tau_{+}=\mathfrak{D}$, pero para mostrar esto utilizaremos el Teorema 4, puesto que las dos bases de estas topologías no son iguales pero si equivalentes, generando la misma topología. Es de notar que se tiene $\tau_{+}\subseteq\mathfrak{D}$ por el Teorema 9, por ello sólo se mostrará el siguiente teorema.

TEOREMA 16: En el conjunto de números enteros se tiene que $\mathfrak{D}\subseteq\tau_{+}$.

Demostración:

Para todo $V\in\beta_{\mathfrak{D}}$, como $V=\{a\}$ para algún $a\in\mathbb{Z}$, y para todo $x\in V$, existe $V'=[a,a+1)\in\beta_{+}$, tal que

- $x\in V'$ ya que $x\in V$, entonces $x=a$, luego $a\leq x<a+1$.
- $V'\subseteq V$, porque si $z\in V'$, entonces $a\leq z<a+1$, por definición de β_{+}, de lo cual se deduce que $z=a$, debido a que el único entero entre a y $a+1$ es a, luego $z\in V$.

De esta manera se muestra que $\mathfrak{D}\subseteq\tau_{+}$, con lo cual se tiene que $\tau_{+}=\mathfrak{D}$.

Así por transitividad de las igualdades anteriores se tiene que $\mathfrak{D} = \tau_+ = \tau_- = \tau_{od} = \tau_o$, teniendo en cuenta que $\tau_{od} = \tau_o$ por el Teorema 8 presentado en el marco teórico.

En cuanto a lo no comparabilidad de las topologías en el conjunto de números enteros, sólo se tiene que $\tau_{ai} = \tau_i$ no es comparable con $\tau_{ad} = \tau_d$, su prueba no se presentará puesto que es igual a la realizada en el conjunto de los números reales, ya que utiliza la no existencia de mínimo y máximo lo cual es característico de los números enteros.

Así teniendo en cuenta esto, a continuación se muestra el diagrama que evidencia las relaciones de comparabilidad entre las topologías tratadas en el conjunto de los números enteros.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{D} = \tau_+ = \tau_- = \tau_{od} = \tau_o & \\
\tau_i = \tau_{ai} \arrow[ur] & & \tau_{ad} = \tau_d \arrow[ul] \\
 & \tau_g \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Diagrama 3: Topologías asociadas al orden en el conjunto de los números enteros.

1.5 $\mathbb{R}^2$ CON EL ORDEN LEXICOGRÁFICO

El conjunto $\mathbb{R}^2$ con el orden lexicográfico cumple las condiciones presentadas al inicio del capítulo, de ser totalmente ordenado sin elemento mínimo ni máximo, luego todas las topologías descritas para el conjunto X se pueden reconocer en éste conjunto, así mismo todas las contenencias, contenencias estrictas y no comparabilidad de las topologías mostradas en los números reales se pueden realizar de manera similar en $\mathbb{R}^2$ con el orden lexicográfico, puesto que en las demostraciones se utiliza la no existencia de mínimo y máximo y la densidad de los números reales, lo cual es válido en este conjunto. Luego el diagrama de comparabilidad entre topologías es igual al presentado en el conjunto de los números reales, veamos:

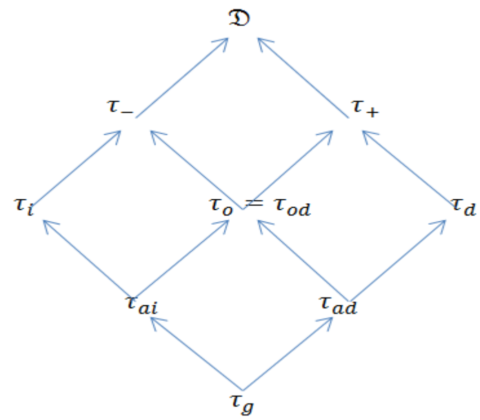


Diagrama 4: Topologías asociadas al orden en el conjunto del plano con el orden lexicográfico.

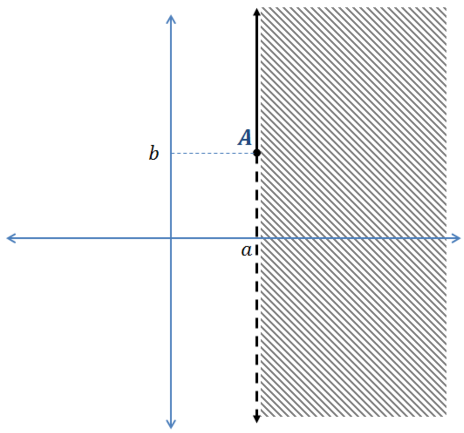
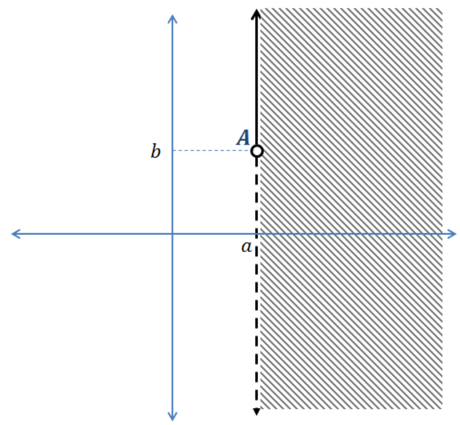
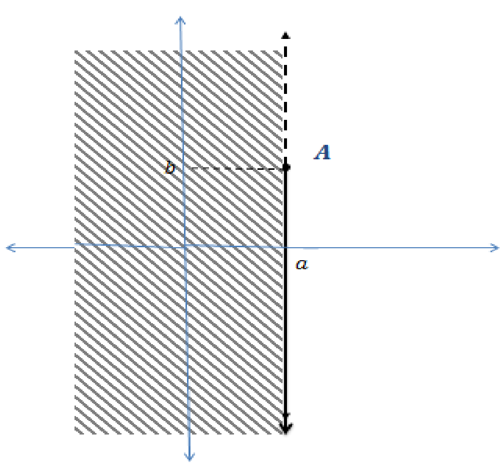
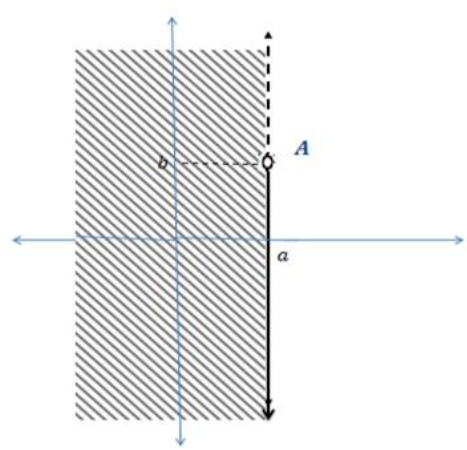
En consecuencia lo relevante en éste conjunto es evidenciar la forma de los abiertos básicos de las topologías, para ello mostraremos la definición de las bases que se han trabajado, pero teniendo encuenta este nuevo orden, así asumiendo que $A, B \in \mathbb{R}^2$ siendo $A = (a, b)$ y $B = (c, d)$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, entonces $A \geq B$ sí y sólo sí $a > c \vee (a = c \wedge b \geq d)$ también se define $A > B$ como $A \geq B \wedge A \neq B$, o lo que es igual a $((a > c) \vee (a = c \wedge b \geq d)) \wedge (a \neq c \vee b \neq d)$ de donde se presentan los siguientes casos:

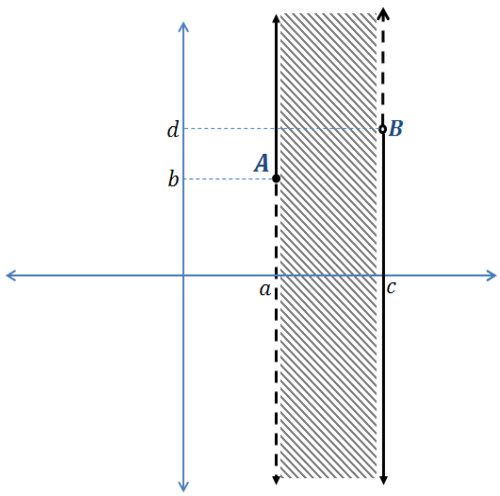
i) Si $a \neq c$ se tiene que $a > c \vee (a = c \wedge b \geq d)$, pero esto $(a = c \wedge b \geq d)$ es falso debido al caso que se esta abordando, entonces se tiene que $a > c$, por ende $a > c \vee (a = c \wedge b > d)$

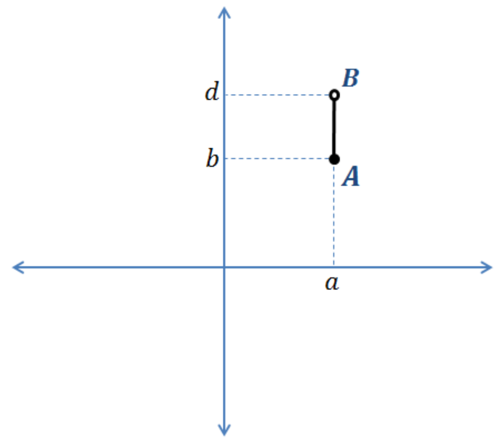
ii) Si $b \neq d$ se tiene que $a > c \vee (a = c \wedge b > d)$, lo cual se tiene por el caso que se esta abordando.

Por ende en cualqueira de los dos casos se tiene que: $A > B$ significa que $a > c \vee (a = c \wedge b > d)$.

Asumiendo la anterior notación, en la tabla 1 se encuentra la definición de cada base junto con una ilustración de un abierto básico.

<table>
<tr>
<td>$\beta_d = \{[A, \rightarrow) : A \in \mathbb{R}^2\}$ o equivalentemente $\beta_d = \{B_{(a,b)} \ : a, b \in \mathbb{R}\}$ donde $B_{(a,b)} = \{(x, y) \ \in \ \mathbb{R}^2 : x > a \ \vee (x = a \ \wedge y \geq b)\}$

</td>
<td>$\beta_{ad} = \{(A, \rightarrow) : A \in \mathbb{R}^2\}$ o equivalentemente $\beta_d = \{B_{(a,b)} \ : a, b \in \mathbb{R}\}$ donde $B_{(a,b)} = \{(x, y) \ \in \ \mathbb{R}^2 : x > a \ \vee (x = a \ \wedge y > b)\}$

</td>
</tr>
<tr>
<td>$\beta_i = \{(\leftarrow, A] : A \in \mathbb{R}^2\}$ o equivalentemente $\beta_i = \{B_{(a,b)} \ : a, b \in \mathbb{R}\}$ donde $B_{(a,b)} = \{(x, y) \ \in \ \mathbb{R}^2 : a > x \ \vee (x = a \ \wedge b \geq y)\}$

</td>
<td>$\beta_{ai} = \{(\leftarrow, A) : A \in \mathbb{R}^2\}$ o equivalentemente $\beta_{ai} = \{B_{(a,b)} \ : a, b \in \mathbb{R}\}$ donde $B_{(a,b)} = \{(x, y) \ \in \ \mathbb{R}^2 : a > x \ \vee (x = a \ \wedge b > y)\}$

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">$\beta_+ = \{[A, B) : A, B \in \mathbb{R}^2\}$ o equivalentemente $\beta_+ = \{C_{A,B} \ : A, B \in \mathbb{R}^2\}$ donde $C_{A,B} = \{(x, y) \ \in \ \mathbb{R}^2 : \ [x > a \ \vee (x = a \ \wedge y \geq b)] \ \wedge \ [c > x \ \vee (x = c \ \wedge d > y)]\}$</td>
</tr>
</table>

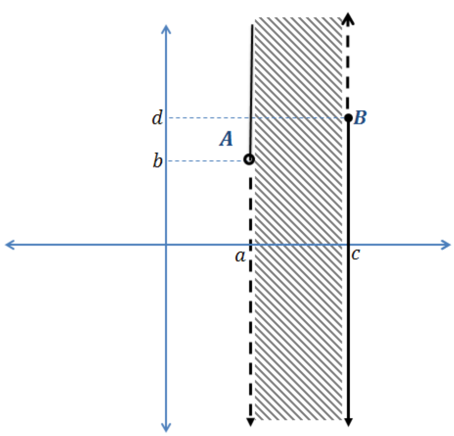


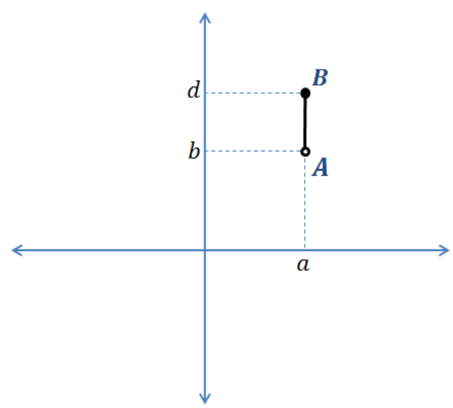


Si $a = c$

$\beta_{-} = \{(A, B\,]:: A, B \in \mathbb{R}^2\}$ o equivalentemente $\beta_{-} = \{C_{A,B} \;: A, B \in \mathbb{R}^2\}$ donde

$C_{A,B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : [x > a \vee (x = a \wedge y > b)] \wedge [c > x \vee (x = c \wedge d \geq y)]\}$

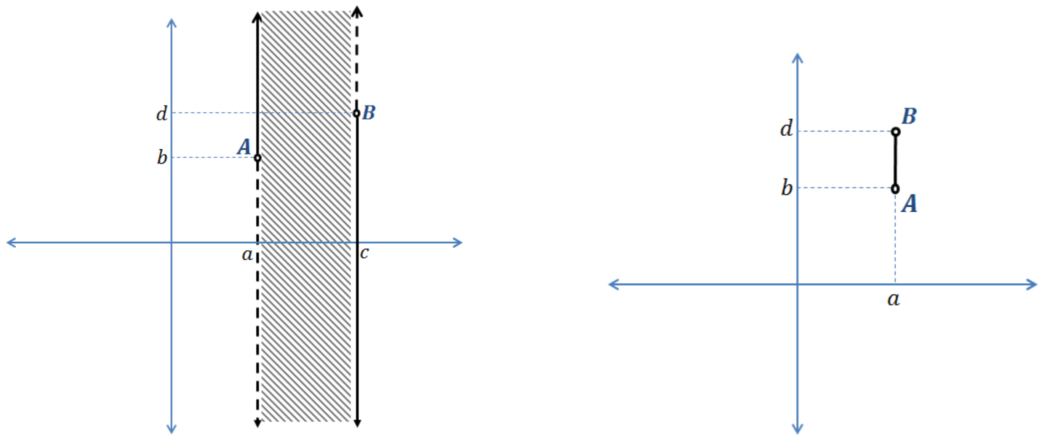




Si $a = c$

$\beta_{od} = \{(A, B\,): A, B \in \mathbb{R}^2\}$ o equivalentemente $\beta_{od} = \{C_{A,B} \;: A, B \in \mathbb{R}^2\}$ donde

$C_{A,B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : [x > a \vee (x = a \wedge y > b)] \wedge [c > x \vee (x = c \wedge d > y)]\}$



Si $a = c$

Tabla 1. Abiertos básicos del plano con el orden lexicográfico.

Las anteriores ilustraciones muestran los abiertos básicos de siete topologías, es de notar que no se realizaron los abiertos básicos de la topología del orden puesto que en ellos se incluyen los mostrados en las colecciones β_{ad}, β_{ai} y β_{od}. Así mismo en la topología discreta los abiertos básicos son los unitarios, es decir cada punto del plano por ello no se ilustraron, de igual forma en la topología grosera sólo se encuentra el plano y el vacío.

En conclusión, en este capítulo se establecieron 10 topologías asociadas al orden en un conjunto X totalmente ordenado sin elemento mínimo ni máximo, donde siempre se tiene que $\tau_o = \tau_{od}$, además se nota la incidencia de la densidad de los números reales puesto que por dicha propiedad en los conjuntos de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ se da la no comparabilidad entre $\tau_d, \tau_o\ y\ \tau_i$, además entre τ_- y τ_+ ; mientras que la no comparabilidad entre τ_{ai} y τ_{ad} dependen de la no existencia de mínimo y máximo por ello dicha característica se mantiene en el conjunto de los números enteros.

Así mismo las contenencias estrictas dependen de que el conjunto sea denso o no, por ello en algunos casos se da la igualdad como en el conjunto de los números enteros el cual no es denso, lo cual se nota en el diagrama puesto que resultan menos topologías asociadas al orden, debido a las igualdades presentadas.

CAPÍTULO DOS: Conjuntos totalmente ordenados con elemento mínimo o elemento mínimo y máximo.

En este capítulo se abordarán conjuntos que son totalmente ordenados pero que poseen elemento mínimo, o elemento mínimo y máximo, buscando evidenciar en que se diferencian las topologías tratadas en el capítulo uno, para ello se trabajará con el conjunto de los números naturales y con un conjunto finito.

En primer lugar se mostrará cuáles de las anteriores colecciones son bases para una topología en cada uno de los conjuntos, luego se evidenciaran las relaciones de comparabilidad entre las topologías asociadas y por último se mostrará el respectivo diagrama de Hasse.

2.1 CONJUNTO DE NÚMEROS NATURALES CON EL ORDEN USUAL

Este conjunto es totalmente ordenado, posee como elemento mínimo el cero y no tiene elemento máximo, debido a ello no cumple con todas las condiciones mencionadas en el capítulo uno y se hace necesario mostrar que cada una de las colecciones son bases, especialmente en aquellas donde se utilizó la no existencia de mínimo; en éste conjunto las colecciones que son base para una topología son $\beta_{d,}\beta_{i,}$ $\beta_{ai,}$ $\beta_{+,}$ y β_o ; es de mencionar que aquellas colecciones que resulten no ser bases porque falla en la condición uno del teorema 2 se arreglarán como se enuncia en el teorema 3, aunque esta no es la única forma de arreglar una base, pero será la que se empleará en este trabajo, así las colecciones que no son base para una topología pero se pueden arreglar son $\beta_{ad,}\beta_{-,}$ y β_{od} .

Recordando como definiciones de bases las siguientes:

- $\beta_d = \{[n, \rightarrow) : n \in \mathbb{N}\}$ o equivalentemente $\beta_d = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ donde $B_n = \{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}$
- $\beta_i = \{(\leftarrow, n] : n \in \mathbb{N}\}$ o equivalentemente $\beta_i = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ donde $B_n = \{k \in \mathbb{N} : k \leq n\}$

- $\beta_{ai} = \{(\leftarrow, x) : x \in \mathbb{N}\}$ o equivalentemente $\beta_{ai} = \{B_x : x \in \mathbb{N}\}$ donde $B_x = \{k \in \mathbb{N} : k < x\}$. Teniendo en cuenta que $(\leftarrow, 0) = \emptyset$.

Las demostraciones de que estas colecciones son bases para una topología son idénticas a las presentadas en el capítulo uno para el conjunto X, puesto que el conjunto de los números naturales es un conjunto totalmente ordenado y aunque exista elemento minino, éstas bases no requieren dicha característica. Así mismo ocurre con β_+ pero esta se enunciará puesto que en la primera condición tiene un detalle a resaltar, veamos:

$\beta_+ = \{[n, m) : n, m \epsilon \mathbb{N}\}$ o equivalentemente $\beta_+ = \{B_{nm} : n, m \in \mathbb{N}\}$ donde $B_{nm} = \{k \in X : n \leq k < m\}$. Nota: Si $n \geq m$ entonces $B_{nm} = \emptyset$

Se verificará la primera condición de base: $\bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} B_{nm} = \mathbb{N}$

Si $k \in \mathbb{N}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $k \leq k$ y $m > k$, la existencia de m es debido a que $\mathbb{N}$ no tiene elemento máximo y por la propiedad reflexiva teniendo en cuenta que k puede ser igual a cero, luego $k \leq k < m$, así $k \in B_{km}$, por definición de B_{km}, de donde $k \in \bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} B_{nm}$.
Si $k \in \bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} B_{nm}$, entonces existe $n, m\ \mathbb{N}\ y\ \ k \in B_{nm}$, entonces por definición de B_{nm}, $k \in \mathbb{N}$.

La demostración de la segunda condición de base es análoga a la presentada en el capítulo uno en el conjunto X, por ello no se mostrará.

En cuanto a la colección β_- definida como: $\beta_- = \{(n, m] : n, m \in \mathbb{N}\}$ o equivalentemente $\beta_- = \{B_{nm} : n, m \in \mathbb{N}\}$ donde $B_{nm} = \{k \in \mathbb{N} : n < k \leq m\}$.

Esta colección no es una base para una topología como se dijo anteriormente, debido a que la unión de todos sus elementos no da el conjunto $\mathbb{N}$, veamos: $\bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} B_{nm} = \mathbb{N} - \{0\}$.

Primero se va probar que si $k \in \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} B_{nm}$, entonces $k \in \mathbb{N} - \{0\}$, pero ello es lo mismo que si $k \notin \mathbb{N} - \{0\}$, entonces se debe demostrar que $k \notin \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} B_{nm}$.

Luego si $k \notin \mathbb{N} - \{0\}$ significa que $k \notin \mathbb{N} \vee k = 0$, pero si $k \notin \mathbb{N}$ implica que $k \notin B_{nm}$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$, luego $k \notin \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} B_{nm}$.

Si $k = 0$ y se supone que $k \in B_{nm}$ para algún $n, m \in \mathbb{N}$, luego $0 \in B_{nm}$ así se tiene que $n < 0 \leq m$, lo cual es contradictorio, puesto que cero no es mayor que ningún natural por ende $0 \notin B_{nm}$, luego $0 \notin \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} B_{nm}$.

Con ello se comprobó que $\bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} B_{nm} \subseteq \mathbb{N} - \{0\}$.

Ahora se va a probar que $\mathbb{N} - \{0\} \subseteq \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} B_{nm}$, si $k \in \mathbb{N} \wedge k \neq 0$, entonces $k > 0$ y existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $k \leq m$, ya que los naturales no tienen elemento máximo, de donde $k \in B_{0m} \subseteq \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} B_{nm}$, por ende $k \in \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} B_{nm}$, con lo cual queda demostrada la igualdad.

Aunque β_{-} no cumple la primera condición de base si satisface la segunda condición, lo cual permite que esta se pueda arreglar, pero la prueba de ello no se realizará porque es análoga a la mostrada en el conjunto X. Luego por el teorema 3 notaremos $\beta_{-}^{*} = \beta_{-} \cup \{\mathbb{N}\}$, la cual es una base para una topología sobre $\mathbb{N}$.

Lo mismo ocurre con β_{ad} y β_{od}, puesto que fallan en la primera condición para ser base, por ende la demostración es similar a la de β_{-}. De igual forma por el teorema 3 se arreglan notándolas así: ${\beta_{ad}}^{*} = \beta_{ad} \cup \{\mathbb{N}\}$ y ${\beta_{od}}^{*} = \beta_{od} \cup \{\mathbb{N}\}$.

En cuanto a la base β_{o} definida así: $\beta_{o} = \beta_{ad} \cup \beta_{ai} \cup \beta_{od}$, teniendo $\beta_{ad} = \{k \in \mathbb{N}: a < k\}$, $\beta_{ai} = \{k \in \mathbb{N}: k < b\}$, $\beta_{od} = \{k \in \mathbb{N}: c < k < d\}$ donde $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, además asumiendo que si $c \geq d$ entonces $\beta_{od} = \emptyset$.

La demostración de que esta colección es base es similar a la mostrada en el conjunto X, aunque es de resaltar que la primera condición de base se cumple debido a que la unión de algunos de sus elementos da todo $\mathbb{N}$, veamos: $\bigcup_{b\in\mathbb{N}} B_b = \mathbb{N}$.

Si $k \in \mathbb{N}$, existe $k < b$, ya que $\mathbb{N}$ no tiene máximo, luego $k \in B_b \subseteq \beta_{ai} \subseteq \beta_o$, de donde $k \in \bigcup_{b\in\mathbb{N}} B_b$.
Si $k \in \bigcup_{b\in\mathbb{N}} B_b$, entonces existe $b \in \mathbb{N}$ y $k \in B_b$ luego $k \in \mathbb{N}$. Con ello queda probado.

Enseguida de evidenciar que colecciones son bases para una topología sobre el conjunto de los números naturales, se procederá a mostrar las relaciones que se presentan entre estas topologías, teniendo en cuenta la siguiente notación: la topología τ_d es generada por la base β_d, la τ_{ad}^* por la β_{ad}^*, la τ_i por la β_i, la τ_{ai} por la β_{ai}, la τ_+ por la β_+, la τ_-^* por la β_-^*, la τ_o por la β_o, la τ_{od}^* por la β_{od}^*.

En el siguiente teorema se va mostrar que bases en este conjunto son iguales y por ende sus respectivas topologías asociadas.

TEOREMA 17: En el conjunto de los números naturales son iguales las siguientes bases: $\beta_d = \beta_{ad}^*$, $\beta_i = \beta_{ai}$, $\beta_-^* = \beta_{od}^*$, y por tanto las topologías generadas por éstas.

Demostración:

Se mostrará en primer lugar que $\beta_d = \beta_{ad}^*$.

Recordemos las definiciones de estas bases:

$$\beta_d = \{B_m : m \in \mathbb{N}\} \text{ donde } B_m = \{k \in \mathbb{N} : k \geq m\}$$

$$\beta_{ad}^* = \beta_{ad} \cup \{\mathbb{N}\} = \{C_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbb{N}\}, \text{donde } C_n = \{k \in \mathbb{N} : k > n\}$$

- Si $W \in \beta_d$, entonces $W = B_m$ para algún $m \in \mathbb{N}$, luego se puede dar que $m \neq 0$ ó $m = 0$.

Si $m \neq 0$, entonces $B_m = C_n$, ya que $p \in B_m$ sí y sólo sí $p \geq m$, luego $p > m - 1$, y notando $m - 1 = n$, para algún $n \in \mathbb{N}$, así $p \in C_n$, como $C_n \in \beta_{ad}^*$, entonces $W \in \beta_{ad}^*$.

Si $m = 0$, entonces $B_0 = \mathbb{N}$, ya que $p \in B_0$ si y sólo si $p \geq 0$ luego $p \in \mathbb{N}$ y como $\mathbb{N} \in \beta_{ad}^*$, entonces $W \in \beta_{ad}^*$. Así $\beta_d \subseteq \beta_{ad}^*$.

- Si $V \in {\beta_{ad}}^*$, entonces $V = C_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ ó $V = \mathbb{N}$.

Si $V = C_n$, entonces $C_n = B_m$ ya que $p \in C_n$ si y sólo si $p > n$, luego $p \geq n + 1$ y notando $n + 1 = m$, así $p \geq m$, para algún $m \in \mathbb{N}$. Así $p \in B_m$, entonces $V \in \beta_d$.

Si $V = \mathbb{N}$, entonces $\mathbb{N} = B_m$ ya que $p \in \mathbb{N}$, si y sólo si $p \geq 0$, y notando $m = 0$, luego $p \geq m$ así $p \in B_m$, como $B_m \in \beta_d$, entonces $V \in \beta_d$, luego $\beta_{ad} \subseteq \beta_d$.

Por ende $\tau_d = \tau_{ad}^*$.

En cuanto a la demostración de que $\beta_i = \beta_{ai}$, esta es similar a la realizada en el conjunto de números enteros, por ello no se realizará.

Ahora se mostrará que $\beta_{-}^* = \beta_{od}^*$, puesto que tiene algunos detalles significativos veamos:

$$\beta_{-}^* = \{B_{nm}: n, m \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbb{N}\} \text{ donde } B_{nm} = \{k \in Z: n < k \leq m\}$$
$$\beta_{od}^* = \{C_{de}: d, e \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbb{N}\} \text{ donde } C_{de} = \{k \in Z: d < k < e\}$$

- Si $W \in \beta_{-}^*$ teniendo en cuenta que $W \neq \emptyset$ y $W \neq \mathbb{N}$ puesto que estos casos son triviales, entonces $W = B_{nm}$ para algún $n, m \in \mathbb{N}$, más específicamente $B_{nm} = C_{de}$, si y sólo si $p \in B_{nm}$, luego $n < p \leq m$. Así $n < p < m - 1$ y si $n = d$ y $m - 1 = e$ por ende $d < p < e$, para algún $d, e \in \mathbb{N}$. Así $p \in C_{de}$, y como $C_{de} \in \beta_{od}^*$, luego $W \in \beta_{od}^*$. En consecuencia, $\beta_{-}^* \subseteq \beta_{od}^*$.
- Si $W \in \beta_{od}^*$ teniendo en cuenta que $W \neq \emptyset$ y $W \neq \mathbb{N}$ puesto que estos casos son triviales, entonces $W = C_{de}$ para algún $d, e \in \mathbb{N}$, pero $C_{de} =$

B_{nm}, si y sólo si $p \in C_{de}$, luego $d < p < e$. Así $d < p \le e + 1$, y notando $d = n \ y \ e + 1 = m$ se tiene que $n < p \le m$, para algún $n, m \in \mathbb{N}$. Así $p \in B_{nm}$, y como $B_{nm} \in \beta_{-}^{*}$, luego $W \in \beta$. Por ende , $\beta_{od}^{*} \subseteq \beta_{-}^{*}$.

Luego como las bases son iguales por el teorema 6 se tiene que $\tau_{-}^{*} = \tau_{od}^{*}$.

También se da que $\tau_{+} = \mathfrak{D} = \tau_{o}$, pero para mostrar esto se utilizará el teorema 4, puesto que las bases de estas topologías no son iguales pero si equivalentes, generando la misma topología. Es de notar que $\tau_{+} \subseteq \mathfrak{D}$ y $\tau_{o} \subseteq \mathfrak{D}$ por el teorema 9, por ello solo se mostrará las contenencias contrarias.

TEOREMA 18: En el conjunto de los números naturales se tiene que $\mathfrak{D} \subseteq \tau_{+}$ y $\mathfrak{D} \subseteq \tau_{o}$

Demostración:

En primer lugar se mostrará que $\mathfrak{D} \subseteq \tau_{+}$

Para todo $V \in \beta_{\mathfrak{D}}$, como $V = \{a\}$ para algún $a \in \mathbb{N}$, y para todo $x \in V$, existe $V' = [a, a+1) \in \beta_{+}$, tal que

- $x \in V'$ ya que $x \in V$, entonces $x = a$, luego $a \le x < a + 1$, así queda mostrado.
- $V' \subseteq V$, porque si $z \in V'$, entonces $a \le z < a + 1$, por definición de β_{+}, de lo cual se deduce que $z = a$, ya que $z, a \in \mathbb{N}$, luego $z \in V$, de esta manera se muestra que $\mathfrak{D} \subseteq \tau_{+}$, con lo cual se tiene que $\tau_{+} = \mathfrak{D}$.

Ahora se verá que $\mathfrak{D} \subseteq \tau_{o}$.

Para todo $V \in \beta_{\mathfrak{D}}$, como $V = \{a\}$ para algún $a \in \mathbb{N}$, se puede dar que $a \neq 0$ ó $a = 0$.

Sí $a \neq 0$, y para todo $x \in V$, existe $V' = (a-1, a+1) \in \beta_{o}$, tal que

- $x \in V^{\prime}$ ya que $x \in V$, entonces $x = a$, luego $a - 1 < x < a + 1$, así queda mostrado.
- $V^{\prime} \subseteq V$, porque si $z \in V^{\prime}$, entonces $a - 1 < z < a + 1$, por definición de β_o, de lo cual se deduce que $z = a$, ya que $z, a \in \mathbb{N}$, luego $z \in V$.

Sí $a = 0$, es decir que $V = \{0\}$ y para todo $x \in V$, existe $V^{\prime} = (\leftarrow, 1) \in \beta_o$, tal que:

- $x \in V^{\prime}$ ya que $x \in V$, entonces $x = 0$, luego $x < 1$, así queda mostrado.
- $V^{\prime} \subseteq V$, porque si $z \in V^{\prime}$, entonces $z < 1$, por definición de β_o, de lo cual se deduce que $z = 0$, ya que $z \in \mathbb{N}$ luego $z \in V$

De esta manera se muestra que $\mathfrak{D} \subseteq \tau_o$, con lo cual se tiene que $\tau_o = \mathfrak{D}$. Así por transitividad se tiene que $\mathfrak{D} = \tau_o = \tau_+$

En cuanto a las contenencias entre las topologías se asume que la topología grosera es la más pequeña de todas y la topología discreta es la más grande, lo cual se justifica por el teorema 9, a continuación se mostraran otras contenencias posibles entre las topologías trabajadas, veamos:

TEOREMA 19: En el conjunto de los números naturales se tiene que $\tau_{ad}^{*} \subseteq \tau_{od}^{*}$.

Demostración:

Sea $V \in \beta_{ad}^{*}$ y $V \neq \mathbb{N}$ luego $V = (n, \rightarrow)$, para algún $n \in \mathbb{N}$, y para todo $x \in V$, existe $V^{\prime} = (n, m) \in \beta_{od}^{*}$, para algún $m, n \in \mathbb{N}, \text{con } n < m$, se cumple que:

- $x \in V^{\prime}$, ya que $x > n$, por definición de β_{ad}^{*}, pero además como $\mathbb{N}$ no tiene elemento máximo existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $x < m$, luego $n < x < m$, así $x \in V^{\prime}$.
- $V^{\prime} \subseteq V$, porque si $y \in V^{\prime}$, entonces $n < y < m$, por definición de β_{od}^{*}luego $n < y$, así $y \in V$, de esta manera se muestra que $\tau_{ad}^{*} \subseteq \tau_{od}^{*}$.

Como se tiene por el teorema 9 que ${\tau_{od}}^{*} \subseteq \mathfrak{D}$ entonces ${\tau_{od}}^{*} \subseteq \tau_+ = \mathfrak{D} = \tau_o$

En cuanto a las contenencias estrictas estas se muestran evidenciando que existe un elemento que está en una de las topologías pero no se encuentra en la otra, veamos:

- $\tau_d \nsubseteq \tau_g$, ya que $[a, \rightarrow) \in \tau_d$ con $a \neq 0$, y $[a, \rightarrow) \notin \tau_g$, puesto que $[a, \rightarrow) \neq X$, y $[a, \rightarrow) \neq \emptyset$. Análogamente se muestra que $\tau_{ai} \nsubseteq \tau_g$.
- ${\tau_{od}}^* \nsubseteq {\tau_{ad}}^*$, supongamos que $(a, b) = \bigcup_{\lambda \in L}(a_\lambda, \rightarrow)$, sabiendo que $a, b, a_\lambda \in \mathbb{N}$, para todo $\lambda \in L$, luego si $c \in \bigcup_{\lambda \in L}(a_\lambda, \rightarrow)$, entonces $c \in (a_\lambda, \rightarrow)$ para algún $\lambda \in L$, además $(a_\lambda, \rightarrow) \subseteq \bigcup_{\lambda \in L}(a_\lambda, \rightarrow) = (a, b)$, así $c > a_\lambda$, pero también se tiene que $a < c < b$, y como los naturales no tienen elemento máximo existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $b < n$, por ende se puede dar que $a < a_\lambda < c < b < n$ ó $a_\lambda < a < c < b < n$ p, así $n \in (a_\lambda, \rightarrow)$, pero $n \notin (a, b)$. Lo cual contradice que $(a_\lambda, \rightarrow) \subseteq (a, b)$

- ${\tau_{od}}^* \nsubseteq \tau_i$, supongamos que $(a, b) = \bigcup_{\lambda \in L}(\leftarrow, b_\lambda]$, sabiendo que $a, b, a_\lambda \in \mathbb{N}$ para todo $\lambda \in L$, luego si $c \in \bigcup_{\lambda \in L}(\leftarrow, b_\lambda]$, entonces $c \in (\leftarrow, b_\lambda] \subseteq (a, b)$ para algún $\lambda \in L$, así $c \leq b_\lambda$, además $a < c < b$, y como los números naturales tienen elemento mínimo que es el cero se puede dar que, $0 \leq a < c < b < b_\lambda$ ó $0 \leq a < c \leq b_\lambda < b$, así $0 \in (\leftarrow, b_\lambda]$, pero $0 \notin (a, b)$.

- $\mathfrak{D} \nsubseteq {\tau_-}^*$, supongamos que $\{0\} = \bigcup_{\lambda \in L}(a_\lambda, b_\lambda]$, con $0, a_\lambda, b_\lambda \in \mathbb{N}$, para todo $\lambda \in L$, $0 \in \bigcup_{\lambda \in L}(a_\lambda, b_\lambda]$, entonces $0 \in (a_\lambda, b_\lambda] \subseteq \{0\}$, pero esto es contradictorio ya que $a_\lambda < 0 \leq b_\lambda$, no puede pasar puesto que elemento mínimo es el 0, así se muestra que no es cierto $(a_\lambda, b_\lambda] \subseteq \{0\}$. De esta manera se evidencia que $\{0\} \in \mathfrak{D}$, no se puede obtener como unión de elementos de la base de la topología ${\tau_-}^*$.

Así se comprobaron las contenencias estrictas que se tienen en las topologías tratadas para los números naturales, por último falta comprobar la no comparabilidad entre topologías:

- τ_{ai} no es comparable con $\tau_{ad}{}^*$
  - $\tau_{ai} \nsubseteq \tau_{ad}{}^*$, supongamos que $(\leftarrow, b) = \bigcup_{\lambda \in L}(a_\lambda, \rightarrow)$ con $b, a_\lambda, \in \mathbb{N}$ para todo $\lambda \in L$. Si $c \in \bigcup_{\lambda \in L}(a_\lambda, \rightarrow)$ para algún $\lambda \in \mathrm{L}$, entonces $c \in (a_\lambda, \rightarrow) \subseteq (\leftarrow, b)$, luego $a_\lambda < c$, además $c < b$, como los naturales no tienen elemento máximo existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $a_\lambda < c < b < n$, así $n \in (a_\lambda, \rightarrow)$, pero $n \notin (\leftarrow, b)$. Lo cual contradice $(a_\lambda, \rightarrow) \subseteq (\leftarrow, b)$.

  - $\tau_{ad}{}^* \nsubseteq \tau_{ai}$, supongamos que $(a, \rightarrow) = \bigcup_{\lambda \in L}(\leftarrow, b_\lambda)$con $a, b_\lambda, \in \mathbb{N}$ para todo $\lambda \in L$. Si $c \in \bigcup_{\lambda \in L}(\leftarrow, b_\lambda)$, entonces $c \in (\leftarrow, b_\lambda) \subseteq (a, \rightarrow)$ para algún $\lambda \in \mathrm{L}$, luego $c < b_\lambda$, además $a < c$ y como los números naturales tienen elemento mínimo existe cero, tal que $0 \leq a < c < b_\lambda$, así $0 \in (\leftarrow, b_\lambda)$, pero $0 \notin (a, \rightarrow)$. Lo cual contradice que $(\leftarrow, b_\lambda) \subseteq (a, \rightarrow)$

- τ_i no es comparable con τ_{-}^*
  - $\tau_i \nsubseteq \tau_{-}^*$, supongamos que $(\leftarrow, 0] = \bigcup_{\lambda \in L}(a_\lambda, b_\lambda]$ con $a_\lambda, b_\lambda \in \mathbb{N}$ para todo $\lambda \in L$. Si $0 \in \bigcup_{\lambda \in L}(a_\lambda, b_\lambda]$ para algún $\lambda \in \mathrm{L}$, entonces $0 \in (a_\lambda, b_\lambda] \subseteq (\leftarrow, 0]$, luego $a_\lambda < 0 \leq b_\lambda$, pero esto es contradictorio puesto que cero es el elemento mínimo de los números naturales, por ende no existe a_λ menor que cero. Lo cual contradice $(a_\lambda, b_\lambda] \subseteq (\leftarrow, 0]$.
  - $\tau_{-}^* \nsubseteq \tau_i$, supongamos que $(a, b] = \bigcup_{\lambda \in L}(\leftarrow, b_\lambda]$ con $a, b, b_\lambda, \in \mathbb{N}$ para todo $\lambda \in L$. Si $b \in \bigcup_{\lambda \in L}(\leftarrow, b_\lambda]$, entonces $b \in (\leftarrow, b_\lambda] \subseteq (a, b]$ para algún $\lambda \in \mathrm{L}$, luego $b \leq b_\lambda$, como los números naturales tienen elemento mínimo existe cero, tal que $0 \leq a < b \leq b_\lambda$, así $0 \in (\leftarrow, b_\lambda]$, pero $0 \notin (a, b]$. Lo cual contradice que $(\leftarrow, b_\lambda] \subseteq (a, b]$.

De todas las relaciones de comparabilidad tratadas entre las topologías en el conjunto de números naturales, se puede evidenciar el siguiente diagrama:

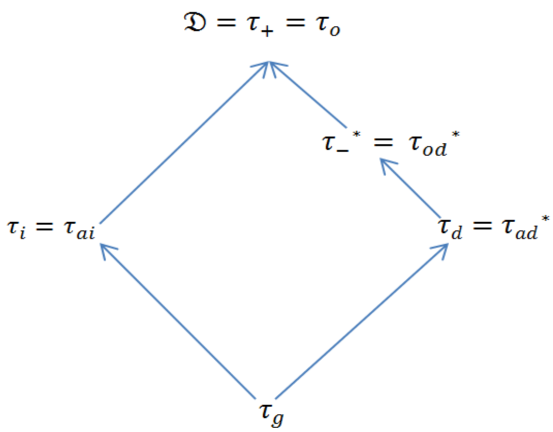


Diagrama 5: Topologías asociadas al orden en el conjunto de los números naturales.

2.2 CONJUNTO FINITO CON EL ORDEN HEREDADO COMO SUBCONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

Todo conjunto finito es equipotente con el conjunto $\underline{n} = \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \subseteq \mathbb{N}$, y asumiendo el orden heredado como subconjunto de los naturales el cual es un orden total, teniendo como elemento mínimo al cero y elemento máximo a $n - 1$. Es de notar que se va trabajar $\underline{n}$ con $n \geq 3$, además se adoptará $\underline{0} = \emptyset$.

Debido a ello este conjunto no cumple con todas las condiciones mencionadas en el capítulo uno y se hace necesario mostrar que cada una de las colecciones tratadas son bases para una topología, especialmente en aquellas donde se utilizó la no existencia de mínimo y máximo.

Las colecciones $\beta_{d,}\beta_i$ y $\beta_{o,}$ son bases para este conjunto sus demostraciones no se realizaran puesto que son similares a las presentadas en el conjunto X, ya que éstas no necesitan de la existencia de elemento mínimo ni máximo.

Es de mencionar que aquellas colecciones que resulten no ser bases porque fallan en la condición uno del teorema 2 se arreglarán como se realizó en el conjunto de números naturales, en este caso son $\beta_{ad,}$ $\beta_{-,}$ $\beta_{+,}$ $\beta_{od,}$ β_{ai} .

Así sólo se demostrará la primera condición de base de la colección B_o puesto que ésta tiene algunos detalles a resaltar. Veamos:

Recordando que $\beta_o = \beta_{ad} \cup \beta_{ai} \cup \beta_{od}$, teniendo $\beta_{ad} = \{B_a : a \in \underline{n}\}$ siendo $B_a = \{k \in \underline{n} : a < k\}$, $\beta_{ai} = \{B_b : b \in \underline{n}\}$ siendo $B_b = \{k \in \underline{n} : k < b\}$, $\beta_{od} = \{B_{cd} : c, d \in \underline{n}\}$ siendo $B_{cd} = \{k \in \underline{n} : c < k < d\}$. Nota: Si $c \geq d$ entonces $B_{cd} = \emptyset$.

Así se verificará que $\bigcup_{a\in\underline{n}} B_a \cup \bigcup_{b\in\underline{n}} B_b = \underline{n}$.

Si $k \in \underline{n}$ se pueden dar uno los siguientes casos: $0 < k$ ó $k < n-1$, luego si $0 < k$, entonces $k \in B_0$, y como $B_0 \subseteq \bigcup_{a\in\underline{n}} B_a$ por ende $k \in \bigcup_{a\in\underline{n}} B_a \cup \bigcup_{b\in\underline{n}} B_b$; y si $k < n-1$ se da que $k \in B_{n-1}$, además $B_{n-1} \subseteq \bigcup_{b\in\underline{n}} B_{b,}$ en consecuencia $k \in \bigcup_{a\in\underline{n}} B_a \cup \bigcup_{b\in\underline{n}} B_b$.

Si $k \in \bigcup_{a\in\underline{n}} B_a \cup \bigcup_{b\in\underline{n}} B_b$, entonces por definición de estas colecciones $k \in \underline{n}$.

En cuanto a las colecciones β_{ad} y β_-, estas no son base para el conjunto $\underline{n}$**,** puesto que la unión de sus elementos dan $\underline{n} - \{0\}$, de igual forma tampoco son base B_{ai} y B_+ porque la unión sus elementos dan $\underline{n} - \{n-1\}$, pero aun así se pueden arreglar, las demostraciones de ello no se realizarán puesto que son similares a las presentadas en el conjunto de números naturales.

Así mismo la colección β_{od} no es base puesto que $\bigcup_{p,m\in\underline{n}} B_{pm} = \underline{n} - \{0, n-1\}$ y su prueba se muestra a continuación:

En primer lugar veremos que si $k \in \bigcup_{p,m\in\underline{n}} B_{pm}$, entonces $k \in \underline{n} - \{0, n-1\}$, pero ello es lo mismo que si $k \notin \underline{n} - \{0, n-1\}$, entonces se debe demostrar que $k \notin \bigcup_{p,m\in\underline{n}} B_{pm}$.

Luego si $k \notin \underline{n} - \{0, n-1\}$ significa que $k \notin \underline{n} \vee (k = n-1 \vee k = 0)$, pero si $k \notin \underline{n}$ implica que $k \notin B_{pm}$ para todo $p, m \in \underline{n}$, luego $k \notin \bigcup_{p,m\in\underline{n}} B_{pm}$.

Si $k = n-1$ y se supone que $k \in B_{pm}$ para algún $p, m \in \underline{n}$, luego $n-1 \in B_{pm}$ así se tiene que $p < n-1 < m$, lo cual es contradictorio, puesto que $n-1$ es el máximo por ende $n-1 \notin B_{pm}$, luego $n-1 \notin \bigcup_{p,m\in \underline{n}} B_{pm}$

Si $k = 0$ y se supone que $k \in B_{pm}$ para algún $p, m \in \underline{n}$, luego $0 \in B_{pm}$ así se tiene que $p < 0 < m$, lo cual es contradictorio, puesto que cero es el elemento mínimo, por ende $0 \notin B_{pm}$, luego $0 \notin \bigcup_{p,m\in \underline{n}} B_{pm}$.

Con ello probamos que $\bigcup_{p,m\in \underline{n}} B_{pm} \subseteq \underline{n} - \{0, n-1\}$.

Ahora vamos a verificar que $\underline{n} - \{0, n-1\} \subseteq \bigcup_{p,m\in \underline{n}} B_{pm}$, si $k \in \underline{n} \wedge (k \neq n-1 \wedge k \neq 0)$, entonces $0 < k < n-1$, de donde $k \in B_{0,n-1} \subseteq \bigcup_{p,m\in \underline{n}} B_{pm}$, por ende $k \in \bigcup_{p,m\in \underline{n}} B_{pm}$ con lo cual queda demostrada la igualdad.

En cuanto a la segunda condición de base ésta colección la cumple y su demostración es similar a la mostrada en el conjunto X.

Luego utilizando el teorema 3 se arreglarán las anteriores bases notándolas así $\beta_{od}^* = \beta_{od} \cup \{\underline{n}\}$, la cual si es base para el conjunto $\underline{n}$**.**

Luego de evidenciar qué colecciones son bases para una topología sobre el conjunto finito $\underline{n}$, se procederá a mostrar que relaciones se presentan entre estas, teniendo en cuenta la siguiente notación: la topología τ_d es generada por la base β_d, la τ_{ad}^* por la β_{ad}^*, la τ_i por la β_i, la τ_{ai}^* por la β_{ai}^*, la τ_+^* por la β_+^*, la τ_-^* por la β_-^*, la τ_o por la B_o, la τ_{od}^* por la β_{od}^*.

A continuación en el teorema 20 se va evidenciar qué topologías en este conjunto son iguales, puesto que sus bases son equivalentes, justificando esto a partir del teorema 4.

TEOREMA 20: En el conjunto finito $\underline{n}$ son iguales las siguientes topologías: $\tau_d = \tau_{ad}^*$, $\tau_i = \tau_{ai}^*$ y $\mathfrak{D} = \tau_o$.

Demostración:

- Se mostrará en primer lugar que $\tau_d = \tau^*_{ad}$

Para todo $V \in \beta_d$, como $V = [a, \rightarrow)$ para algún $a \in \underline{n}$, se puede dar que $a = 0$ ó $a \neq 0$.

Sí $a \neq 0$ y para todo $x \in V$, existe $V' = (a-1, \rightarrow) \in \beta^*_{ad}$, tal que

- $x \in V'$ porque $x \in V$, entonces $a \leq x$, luego $a - 1 < x$ así queda demostrado.
- $V' \subseteq V$, porque si $z \in V'$, entonces $a - 1 < z$ por definición de β^*_{ad}, de lo cual se deduce que $a \leq z$, luego $z \in V$.

Sí $a = 0$, es decir que $V = [0, \rightarrow) = \underline{n}$ y para todo $x \in V$, existe $V' = \underline{n} \in \beta^*_{ad}$, cumpliéndose que $x \in V'$ y $V' \subseteq V$.

De esta manera se muestra que $\tau_d \subseteq \tau^*_{ad}$.

Ahora para todo $V \in \beta^*_{ad}$, como se puede dar que $V = (a, \rightarrow)$ para algún $a \in \underline{n}$ ó $V = \underline{n}$.

Sí $V = (a, \rightarrow)$ luego $a = n - 1$ ó $a \neq n - 1$

Sí $a \neq n - 1$ y para todo $x \in V$, existe $V' = [a + 1, \rightarrow) \in \beta_d$, tal que

- $x \in V'$ porque $x \in V$, entonces $a < x$, luego $a + 1 \leq x$ así queda demostrado.
- $V' \subseteq V$, porque si $z \in V'$, entonces $a + 1 \leq z$ por definición de β_d, de lo cual se deduce que $a < z$, luego $z \in V$.

Sí $a = n - 1$, entonces $V = \emptyset$, lo cual es trivial.

Si $V = \underline{n}$ y para todo $x \in V$, existe $V' = [0, \rightarrow) = \underline{n} \in \beta_d$, cumpliéndose que $x \in V'$ y $V' \subseteq V$.

De esta manera se muestra que $\tau^*_{ad} \subseteq \tau_d$.

Así mismo se muestra que $\tau_i = \tau^*_{ai}$, donde la prueba es análoga a la anterior teniendo en cuenta que ahora los casos se pueden presentar si la cola cerrada incluye o no al máximo.

Ahora se va mostrar que $\mathfrak{D} = \tau_o$, es de notar que $\tau_o \subseteq \mathfrak{D}$ por el teorema 9, por ello solo se mostrará la contenencia contraria.

Para todo $V \in \beta_{\mathfrak{D}}$, como $V = \{a\}$ para algún $a \in \underline{n}$, se puede dar que $(a \neq 0 \wedge a \neq n-1)$ ó $a = 0$ ó $a = n-1$.

Sí $a \neq 0 \wedge a \neq n-1$, y $x \in V$, luego $x = a$ asi existe $V^{'} = (a-1, a+1) \in \beta_o$, tal que:

- $x \in V^{'}$ porque $a-1 < x < a+1$, así queda demostrado.
- $V^{'} \subseteq V$, porque si $z \in V^{'}$, entonces $a-1 < z < a+1$, por definición de β_o, de lo cual se deduce que $z = a$, ya que $z, a \in \underline{n}$, luego $z \in V$.

Sí $a = 0$, es decir que $V = \{0\}$ y $x \in V$, luego $x = 0$, asi existe $V^{'} = (\leftarrow, 1) \in \beta_o$, tal que:

- $x \in V^{'}$ porque $x < 1$, así queda demostrado.
- $V^{'} \subseteq V$, porque si $z \in V^{'}$, entonces $z < 1$, por definición de β_o, de lo cual se deduce que $z = 0$, ya que $z \in \underline{n}$ luego $z \in V$.

Si $a = n-1$, es decir que $V = \{n-1\}$ y $x \in V$, luego $x = n-1$, asi existe $V^{'} = (n-2, \rightarrow) \in \beta_o$, tal que:

- $x \in V^{'}$ porque $x > n-2$, así queda demostrado.
- $V^{'} \subseteq V$, porque si $z \in V^{'}$, entonces $z > n-2$, por definición de β_o, de lo cual se deduce que $z = n-1$, ya que $z \in \underline{n}$ luego $z \in V$.

De esta manera se muestra que $\mathfrak{D} \subseteq \tau_o$, con lo cual se tiene que $\tau_o = \mathfrak{D}$.

A continuación se mostrarán otras contenencias posibles entre las topologías trabajadas en este conjunto, utilizando de igual manera el teorema 4, veamos:

TEOREMA 21: En el conjunto finito $\underline{n}$ se tiene que $\tau_{od}^* \subseteq \tau_-^*$, $\tau_{od}^* \subseteq \tau_+^*$, $\tau_{ad}^* \subseteq \tau_-^*$, $\tau_{ai}^* \subseteq \tau_+^*$.

Demostración:

- En primer lugar se va a demostrar que $\tau_{od}^* \subseteq \tau_-^*$.

Para todo $V \in \beta_{od}^*$ y suponiendo que $V \neq \emptyset\, y\, V \neq \underline{n}$ pues estos casos son triviales, luego $V = (p, m)$, para algún $p, m \in \underline{n}$ y para todo $x \in V$, existe $V' = (p, m-1] \in \beta_-^*$, con $p < m$, se cumple que:

- $x \in V'$, ya que $p < x < m$, por definición de β_{od}^*, luego $p < x \leq m-1$, así queda demostrado.
- $V' \subseteq V$, porque si $y \in V'$, entonces $p < y \leq m-1$, por definición de β_-^* luego $p < y < m$, así $y \in V$, de esta manera se muestra que $\tau_{od}^* \subseteq \tau_-^*$.

La prueba de que $\tau_{od}^* \subseteq \tau_+^*$, no se mostrará puesto que es análoga a la anterior, teniendo en cuenta que existe $V' = [p+1, m) \in \beta_+^*$, el cual cumple las condiciones.

- Ahora se mostrará que $\tau_{ad}^* \subseteq \tau_-^*$.

Sea $V \in \beta_{ad}^*$ y suponiendo que $V \neq \emptyset\, y\, V \neq \underline{n}$ pues estos casos son triviales, luego $V = (m, \rightarrow)$, para algún $m \in \underline{n}$ y para todo $x \in V$, existe $V' = (m, n-1] \in \beta_-^*$, con $m < n-1$, se cumple que:

- $x \in V'$, ya que $m < x$, por definición de β_{ad}^*, luego como existe $n-1$ que es el elemento máximo tenemos que $m < x \leq n-1$, así queda demostrado.
- $V' \subseteq V$, porque si $y \in V'$, entonces $m < y \leq n-1$, por definición de β_-^* luego $m < y$, así $y \in V$, de esta manera se muestra que $\tau_{ad}^* \subseteq \tau_-^*$.

Finalmente se tiene que $\tau_{ai}^* \subseteq \tau_+^*$, pero dicha prueba no se verificará porque es similar a la anterior, teniendo en cuenta que si $V = (\leftarrow, m)$, existe $V' = [0, m) \in \beta_+^*$, el cual cumple con lo pedido.

Para justificar las contenencias estrictas se mostrará que existe un elemento que está en una de las topologías pero no se encuentra en la otra, veamos:

- $\tau_d \nsubseteq \tau_g$, ya que si escogemos $a \neq 0 \, y \, a \neq n-1$, se tiene que $[a, \rightarrow) \in \tau_d$ pero $[a, \rightarrow) \notin \tau_g$, puesto que $[a, \rightarrow) \neq \underline{n}$ y $[a, \rightarrow) \neq \emptyset$. Análogamente se muestra que $\tau_i \nsubseteq \tau_g$ y $\tau_{od}^* \nsubseteq \tau_g$.
- $\tau_+^* \nsubseteq \tau_{od}^*$, supongamos que $[0, b) = \bigcup_{\lambda \in L}(a_\lambda, b_\lambda)$, con $0 < b$ sabiendo que $b, a_\lambda, b_\lambda \in \underline{n}$ para todo $\lambda \in L$, luego $0 \in \bigcup_{\lambda \in L}(a_\lambda, b_\lambda)$, entonces $0 \in (a_\lambda, b_\lambda)$ para algún $\lambda \in L$ así $a_\lambda < 0 < b_\lambda$, pero esto es falso puesto que cero es el mínimo del conjunto, lo cual contradice que $[0, b) = \bigcup_{\lambda \in L}(a_\lambda, b_\lambda)$.

De la misma manera se muestra que $\tau_-^* \nsubseteq \tau_{od}^*$, pero teniendo en cuenta que la contradicción es con $(a, n-1] \in \tau_-^*$, además de usar el elemento máximo.

- $\tau_-^* \nsubseteq \tau_{ad}^*$, teniendo en cuenta que $|\underline{n}| \geq 3$ supongamos que $(a, b] = \bigcup_{\lambda \in L}(a_\lambda, \rightarrow)$, siendo $b \neq n-1$ y con $a, b, a_\lambda \in \underline{n}$ para todo $\lambda \in L$, luego $b \in \bigcup_{\lambda \in L}(a_\lambda, \rightarrow)$, entonces $b \in (a_\lambda, \rightarrow) \subseteq (a, b]$ para algún $\lambda \in L$ así se puede dar que $a_\lambda < a < b$ ó $a < a_\lambda < b$, pero como existe $n-1$ que es el máximo se tiene que $a_\lambda < a < b < n-1$ ó $a < a_\lambda < b < n-1$, luego en cualquier caso $n-1 \in (a_\lambda, \rightarrow)$, pero $n-1 \notin (a, b]$. Lo cual contradice que $(a_\lambda, \rightarrow) \subseteq (a, b]$.

Así mismo se verifica que $\tau_+^* \nsubseteq \tau_{ai}^*$, pero teniendo en cuenta que la contradicción es con $[a, b)$ siendo $a \neq 0$, puesto que éste pertenece a τ_+^* y no está en τ_{ai}^*.

- $\mathfrak{D} \nsubseteq \tau_-^*$, supongamos que $\{0\} = \bigcup_{\lambda \in L}(a_\lambda, b_\lambda]$, con $0, a_\lambda, b_\lambda \in \underline{n}$ para todo $\lambda \in L$, $0 \in \bigcup_{\lambda \in L}(a_\lambda, b_\lambda]$, entonces $0 \in (a_\lambda, b_\lambda] \subseteq \{0\}$ para algún $\lambda \in L$, luego $a_\lambda < 0 \leq b_\lambda$, pero esto no puede pasar puesto que el elemento mínimo es el 0, así se muestra que no es cierto que $(a_\lambda, b_\lambda] \subseteq \{0\}$.

Análogamente se demuestra que $\mathfrak{D} \nsubseteq \tau_+^*$, utilizando el elemento máximo puesto que ahí está la contradicción.

Así se logró evidenciar las contenencias estrictas que se tienen en las topologías tratadas para el conjunto finito $\underline{n}$, por último falta verificar la no comparabilidad entre topologías:

- τ_{ai}^{*} no es comparable con τ_{ad}^{*}.
  - $\tau_{ai}^{*} \nsubseteq \tau_{ad}^{*}$, supongamos que $(\leftarrow, b) = \bigcup_{\lambda \in L}(a_{\lambda}, \rightarrow)$ con $b, a_{\lambda}, \in \underline{n}$ para todo $\lambda \in \mathrm{L}$, si $c \in \bigcup_{\lambda \in L}(a_{\lambda}, \rightarrow)$ para algún $\lambda \in \mathrm{L}$, entonces $c \in (a_{\lambda}, \rightarrow) \subseteq (\leftarrow, b)$, luego $a_{\lambda} < c$, además $c < b$, como el conjunto finito tienen elemento máximo existe $n - 1 \in \underline{n}$, tal que $a_{\lambda} < c < b \leq n - 1$, así $n - 1 \in (a_{\lambda}, \rightarrow)$, pero $n - 1 \notin (\leftarrow, b)$. Lo cual contradice $(a_{\lambda}, \rightarrow) \subseteq (\leftarrow, b)$.

  De la misma manera se tiene que $\tau_{ad}^{*} \nsubseteq \tau_{ai}^{*}$, utilizando para la contradicción que $(a, \rightarrow) \in \tau_{ad}^{*}$ y no esta en τ_{ai}^{*} además que el conjunto finito tiene como elemento mínimo al cero.

- τ_{ai}^{*} no es comparable con τ_{od}^{*}.
  - $\tau_{ai}^{*} \nsubseteq \tau_{od}^{*}$, supongamos que $(\leftarrow, n - 1) = \bigcup_{\lambda \in L}(a_{\lambda}, b_{\lambda})$ con $b, a_{\lambda}, b_{\lambda} \in \underline{n}$ para todo $\lambda \in \mathrm{L}$, si $0 \in \bigcup_{\lambda \in L}(a_{\lambda}, b_{\lambda})$ para algún $\lambda \in \mathrm{L}$, entonces $0 \in (a_{\lambda}, b_{\lambda}) \subseteq (\leftarrow, n - 1)$, luego $a_{\lambda} < 0 < b_{\lambda}$, pero esto es falso, lo cual contradice $(a_{\lambda}, b_{\lambda}) \subseteq (\leftarrow, n - 1)$.
  - $\tau_{od}^{*} \nsubseteq \tau_{ai}^{*}$, supongamos que $(a, b) = \bigcup_{\lambda \in L}(\leftarrow, b_{\lambda})$ siendo $a \ y \ b$ no consecutivos con $a, b, \ b_{\lambda}, \in \underline{n}$ para todo $\lambda \in \mathrm{L}$, si $c \in \bigcup_{\lambda \in L}(\leftarrow, b_{\lambda})$, entonces $c \in (\leftarrow, b_{\lambda}) \subseteq (a, b)$ para algún $\lambda \in \mathrm{L}$, luego $c < b_{\lambda}$, además $a < c < b$ y como el conjunto finito tienen elemento mínimo al cero, se puede dar que $0 \leq a < c < b_{\lambda} < b$ ó $0 \leq a < c < b < b_{\lambda}$,así en cualquier caso $0 \in (\leftarrow, b_{\lambda})$, pero $0 \notin (a, b)$. Lo cual contradice que $(\leftarrow, b_{\lambda}) \subseteq (a, b)$.

- τ_{ad}^{*} no es comparable con τ_{od}^{*}.

  Para mostrar que $\tau_{od}^{*} \nsubseteq \tau_{ad}^{*}$, la prueba es similar a la de $\tau_{od}^{*} \nsubseteq \tau_{ai}^{*}$, teniendo en cuenta que se utiliza la existencia del elemento máximo.

- $\tau_{ad}^* \nsubseteq \tau_{od}^*$, supongamos que $(0,\rightarrow) = \bigcup_{\lambda\in L}(a_\lambda, b_\lambda)$con $a, a_\lambda, b_\lambda, \in \underline{n}$ para todo $\lambda \in \mathrm{L}$. Si $n-1 \in \bigcup_{\lambda\in L}(a_\lambda, b_\lambda)$, entonces $n-1 \in (a_\lambda, b_\lambda) \subseteq (0,\rightarrow)$ para algún $\lambda \in \mathrm{L}$, luego $a_\lambda < n-1 < b_\lambda$, pero esto es falso .Lo cual contradice que $(a_\lambda, b_\lambda) \subseteq (0,\rightarrow)$.

- τ_-^* no es comparable con τ_+^*.

- $\tau_-^* \nsubseteq \tau_+^*$, supongamos que $(a, n-1] = \bigcup_{\lambda\in L}[a_\lambda, b_\lambda)$ con $a, a_\lambda, b_\lambda \in \underline{n}$ para todo $\lambda \in \mathrm{L}$, si $n-1 \in \bigcup_{\lambda\in L}[a_\lambda, b_\lambda)$ para algún $\lambda \in \mathrm{L}$, entonces $n-1 \in [a_\lambda, b_\lambda) \subseteq (a, n-1]$, luego $a_\lambda \le n-1 < b_\lambda$, pero esto es falso, lo cual contradice $[a_\lambda, b_\lambda) \subseteq (a, n-1]$.

De la misma manera se muestra que $\tau_+^* \nsubseteq \tau_-^*$, teniendo en cuenta que la contradicción es con $[0, b) \in \tau_+^*$ y no esta en τ_-^*.

- τ_+^* no es comparable con τ_{ad}^*.
  - $\tau_+^* \nsubseteq \tau_{ad}^*$, supongamos que $[0, b) = \bigcup_{\lambda\in L}(a_\lambda, \rightarrow)$ con $b, a_\lambda \in \underline{n}$ para todo $\lambda \in \mathrm{L}$, si $0 \in \bigcup_{\lambda\in L}(a_\lambda, \rightarrow)$ para algún $\lambda \in \mathrm{L}$, entonces $0 \in (a_\lambda, \rightarrow) \subseteq [a, n-1)$, luego $a_\lambda < 0$, lo cual es falso, por tanto contradice que $(a_\lambda, \rightarrow) \subseteq [a, n-1)$.
  - $\tau_{ad}^* \nsubseteq \tau_+^*$, supongamos que $(0,\rightarrow) = \bigcup_{\lambda\in L}[a_\lambda, b_\lambda)$ con $a_\lambda, b_\lambda, \in \underline{n}$ para todo $\lambda \in \mathrm{L}$, si $n-1 \in \bigcup_{\lambda\in L}[a_\lambda, b_\lambda)$, entonces $n-1 \in [a_\lambda, b_\lambda) \subseteq (0,\rightarrow)$ para algún $\lambda \in \mathrm{L}$, luego $a_\lambda \le n-1 < b_\lambda$, pero esto es falso. Lo cual contradice que $[a_\lambda, b_\lambda) \subseteq (0,\rightarrow)$.

- τ_-^* no es comparable con τ_{ai}^*.
  - $\tau_-^* \nsubseteq \tau_{ai}^*$, supongamos que $(a, n-1] = \bigcup_{\lambda\in L}(\leftarrow, b_\lambda)$ con $a, b_\lambda \in \underline{n}$ para todo $\lambda \in \mathrm{L}$, si $n-1 \in \bigcup_{\lambda\in L}(\leftarrow, b_\lambda)$ para algún $\lambda \in \mathrm{L}$, entonces $n-1 \in (\leftarrow, b_\lambda) \subseteq (a, n-1]$, luego $n-1 < b_\lambda$, pero esto es falso, lo cual contradice que $(\leftarrow, b_\lambda) \subseteq (a, n-1]$.

De la misma manera que se mostró que $\tau_{ad}^* \not\subseteq \tau_+^*$ se verifica que $\tau_{ai}^* \not\subseteq \tau_-^*$, teniendo en cuenta que la cola abierta a izquierda se toma con el máximo y la contradicción se da con el elemento mínimo.

De todas las relaciones de comparabilidad tratadas entre las topologías en el conjunto finito con $|\underline{n}| \geq 3$, se puede evidenciar el siguiente diagrama:

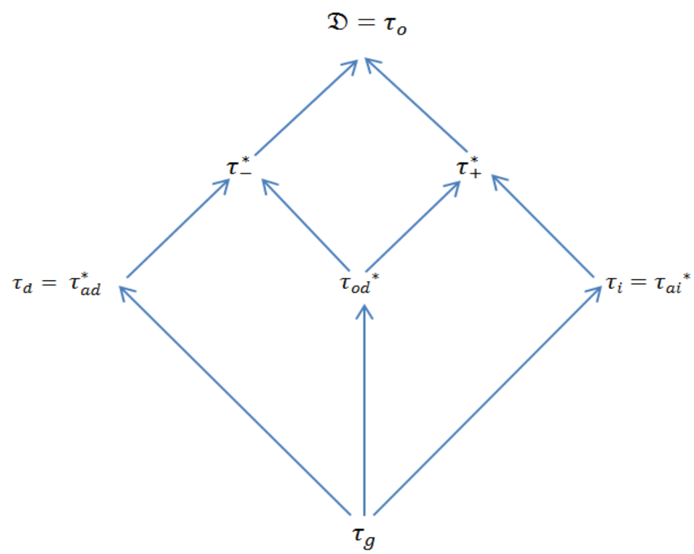


Diagrama 6: Topologías asociadas al orden en un conjunto finito con $|\underline{\boldsymbol{n}}| \geq 3$.

En cuanto a $\underline{0} = \emptyset$, la única topología que existe es $\tau_g = \{\emptyset\}$, y para $\underline{1} = \{0\}$, también la única topología que se evidencia es $\tau_g = \{\emptyset, X\}$, por ende todas las topologías que se han trabajo se volverían ésta. Mientras que para $\underline{2} = \{0,1\}$ se encuentran las siguientes topologías asociadas al orden:

$\boldsymbol{\tau_g} = \{\emptyset, \{0,1\}\}$ $\quad$ $\boldsymbol{\tau_d} = \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}$ $\quad$ $\boldsymbol{\tau_{ad}^*} = B_{ad} \cup \{\underline{2}\} = \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}$

$\boldsymbol{\tau_i} = \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$ $\quad$ $\boldsymbol{\tau_{ai}^*} = B_{ai} \cup \{\underline{2}\} = \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$ $\quad$ $\boldsymbol{\tau_+^*} = B_+ \cup \{\underline{2}\} = \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$

$\boldsymbol{\tau_-^*} = B_- \cup \{\underline{2}\} = \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}$ $\quad$ $\boldsymbol{\tau_{od}^*} = B_{od} \cup \{\underline{2}\} = \{\emptyset, \{0,1\}\}$

$\boldsymbol{\tau_o} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$ $\quad$ $\mathfrak{D} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$

Por ello el diagrama para $\underline{2}$ es el siguiente:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{D} = \tau_o & \\
\tau_d = \tau_{ad}^{*} = \tau_{-}^{*} \arrow[ur] & & \tau_i = \tau_{ai}^{*} = \tau_{+}^{*} \arrow[ul] \\
 & \tau_g = \tau_{od}^{*} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Diagrama 7: Topologías asociadas al orden en un conjunto finito $\underline{2}$

Es de mencionar que cuando se tienen en un conjunto dos elementos las topologías resultantes son cuatro y son las asociadas al orden como se evidenció en el ejemplo anterior; mientras que cuando el conjunto tiene tres elementos todas las topologías posibles son veintinueve, de las cuales sólo siete de ellas son asociadas al orden.

Como una diferencia significativa entre $\underline{2}$ y $|\underline{n}| \geq 3$ es que las topologías τ_{-}^{*} y τ_{+}^{*} se vuelven iguales a la τ_d y τ_i respectivamente, además de ello la τ_{od}^{*} se vuelve igual que la τ_g y esto se debe a que en primer lugar sólo tenemos dos elementos siendo cada uno de ellos mínimo y máximo respectivamente, en segundo lugar las colas dan los mismos abiertos que estar cerrado el intervalo a la derecha o a la izquierda, por ello entre más elementos tenga el conjunto finito más abiertos van a tener la topologías $\tau_{od}^{*}, \tau_{-}^{*}$ y τ_{+}^{*}, cambiando el diagrama.

En conclusión en este capítulo se evidenció que cuando el conjunto tiene elemento mínimo no resultan ser base para una topología las colecciones β_{ad}, β_{-} y β_{od} pero se pueden arreglar como en el caso de los números naturales; mientras que cuando el conjunto tiene elemento mínimo y máximo las colecciones que no resultan ser base para una topología son las que se evidenciaron en el conjunto de los números naturales además de las siguientes $\beta_{ai}\ y\ \beta_+$ las cuales se pueden arreglar, como es el caso del conjunto finito.

Es de notar que las colecciones $\beta_i, \beta_d\ y\ \beta_o$ siempre son base, es decir no dependen de la existencia de mínimo y máximo. Además de ello algo a notar es que la relación de contenencia entre las topologías $\tau_d, \tau_i, \tau_{+,}\ y\ \tau_-$ cambio con respecto a lo evidenciado en el conjunto X, teniendo en cuenta que en dicho conjunto no se presentan topologías arregladas, pero si asemejamos la τ_+^* con la τ_+ y τ_- con τ_-^*; puesto que ahora en estos conjuntos donde existe mínimo o máximo $\tau_d \subseteq \tau_-^*$ y $\tau_i \subseteq \tau_+$ ó $\tau_i \subseteq \tau_+^*$. Así mismo en este capítulo se nota que las topologías $\tau_o\ y\ \tau_{od}^*$ son diferentes lo cual no pasaba en los conjuntos abordados en el capítulo uno.

CAPÍTULO TRES: Conjuntos parcialmente ordenados

En este capítulo se abordaran dos conjuntos que no cumplen con la condición de ser totalmente ordenados, específicamente se trabajará con el conjunto de los números naturales con el orden de la divisibilidad, el cual tiene elemento mínimo y máximo; así mismo se abordará el conjunto del plano con el orden del producto, el cual no tiene elemento mínimo y máximo, en primer lugar se verificará que colecciones de las trabajadas son base para una topología para luego evidenciar las relaciones de comparabilidad que se establecen entre ellas, así como un diagrama que muestre dichos resultados.

Es de notar que cuando una colección falle en la demostración de la segunda condición del teorema 2, ésta no se arreglará y por ende no será base para una topología en dichos conjuntos.

3.1 NATURALES CON EL ORDEN DE LA DIVISIBILIDAD

Este conjunto es parcialmente ordenado tiene como elemento mínimo al uno y como elemento máximo al cero, debido a ello no cumple ninguna de las condiciones mencionadas en el capítulo uno y se hace necesario verificar cuáles de las colecciones tratadas son bases; es de mencionar que como se realizó en el capítulo dos, aquellas colecciones que resulten no ser bases porque fallan en la condición uno del teorema 2 se arreglarán utilizando el teorema 3, estas son $\beta_{+,}\beta_{-}$ y $\beta_{od,}$. Mientras que si falla la segunda condición para ser base, estas colecciones no se arreglaran como es el caso de $\beta_{ad,}\beta_{ai}\ y\ \beta_{o}$.

Se verificará que las colecciones $\beta_d\ y\ \beta_i$ son base para el conjunto de los números naturales con el orden de la divisibilidad, veamos:

Definiendo como $\beta_d = \{[n, \rightarrow) : n \in \mathbb{N}\}$ o de forma equivalente $\beta_d = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ donde $B_n = \{k \in \mathbb{N} : n|k\}$.

i) La unión de elementos de la base da todo $\mathbb{N}$, pero no es necesario unirlos todos sólo basta observar que con un solo elemento de la base resulta esto:

$$B_1 = [1, \rightarrow) = \mathbb{N}.$$

Si $n \in [1, \rightarrow)$, implica que $1|n$, por ende $n \in \mathbb{N}$, luego $[1, \rightarrow) \subseteq \mathbb{N}$.

Ahora si $n \in \mathbb{N}$, entonces existe $1 \in \mathbb{N}$, tal que $1|n$, luego $n \in [1, \rightarrow)$, por definición de B_1. Así queda demostrada la igualdad.

ii) Si $U, V \in \beta_d$, siendo $U = B_n$ y $V = B_m$ para algún $n, m \in \mathbb{N}$

Si $x \in U \cap V$, existe $c = [n, m]$ tal que $c \in \mathbb{N}$, notando $W = B_c$. Veamos que: $W \in \beta_d$, $x \in W$ y $W \subseteq U \cap V$.

Para verificar que $W \in \beta_d$, esto se tiene por la definición de la base.

- Se demostrará que $x \in W$, como $x \in U \cap V$, entonces $x \in B_n \cap B_m$, así $x \in B_n$ y $x \in B_m$. Luego $m|x$ y $n|x$. Por definición de B_n y B_m. Además siendo $c = [n, m]$ y por la segunda condición de la definición de mínimo común múltiplo, se tiene que $c|x$, luego $x \in B_c$, por definición de B_c, así $x \in W$.
- Se probará que $W \subseteq U \cap V$, así si $y \in W = B_c$, entonces $c|y$. Por definición de B_c. Como $c = [n, m]$ entonces por la primera condición de la definición de mínimo común múltiplo se tiene que $m|c$ y $n|c$. Luego por la transitividad de la divisibilidad se tiene que $m|y$ y $n|y$. Así $y \in B_n$ y B_m. Por definición de B_n y B_m. Luego $y \in B_n \cap B_n$, entonces $B_c \subseteq B_n \cap B_m$, o lo que es igual $W \subseteq U \cap V$.

Luego por i, ii, se tiene que β_d es base para $\mathbb{N}$.

En cuanto a la colección β_i definida como $\beta_i = \{(\leftarrow, n] : n \in \mathbb{N}\}$ o equivalentemente $\beta_i = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ donde $B_n = \{k \in \mathbb{N} : k|n\}$, se tiene que la demostración de base es análoga a la presentada anteriormente, resaltando que se utilizan las condiciones de la definición de máximo común divisor en donde en la prueba de la colección B_d se utilizaron las de mínimo común múltiplo. Así mismo para verificar la primera condición de base se toma $(\leftarrow, 0] = \mathbb{N}$.

En cuanto a la colección β_{od} definida como $\beta_{od} = \{(n,m): n, m \in \mathbb{N}\}$ o equivalentemente $\beta_{od} = \{B_{n,m}: n, m \in \mathbb{N}\}$ donde $B_{nm} = \{k \in \mathbb{N}: n|k|m \text{ con } n \neq k \ y \ k \neq m\}$.

Nota: Se tiene en cuenta que si $n = m$ entonces $B_{nm} = \emptyset$, aunque hay otros casos donde sucede ello.

Esta colección no es una base para una topología, debido a que falla en que la unión de todos sus elementos no da el conjunto $\mathbb{N}$, veamos: $\bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} B_{n,m} = \mathbb{N} - \{0,1\}$.

Se va probar que si $k \in \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} B_{nm}$, entonces $k \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, pero ello es lo mismo que si $k \notin \mathbb{N} - \{0,1\}$, entonces se debe demostrar que $k \notin \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} B_{nm}$.

Luego si $k \notin \mathbb{N} - \{0,1\}$ significa que $k \notin \mathbb{N} \vee (k = 1 \vee k = 0)$, pero si $k \notin \mathbb{N}$ implica que $k \notin B_{nm}$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$, luego $k \notin \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} B_{nm}$.

Si $k = 1$ y se supone que $k \in B_{nm}$ para algún $n, m \in \mathbb{N}$, luego $1 \in B_{nm}$ así se tiene que $n\,|1|m$, con $n \neq 1, m \neq 1$, lo cual es contradictorio, puesto que no existe ningún otro número natural diferente de 1, tal que $n|1$. Así n no divide 1 , por ende $1 \notin B_{nm}$, luego $1 \notin \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} B_{nm}$.

Si $k = 0$ y se supone que $k \in B_{nm}$ para algún $n, m \in \mathbb{N}$, luego $0 \in B_{nm}$ así se tiene que $n\,|0|m$, con $n \neq 0$, $m \neq 0$, lo cual es contradictorio, puesto que cero no divide a m, por ende $0 \notin B_{nm}$, luego $0 \notin \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} B_{nm}$.

Con ello se prueba que $\bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} B_{nm} \subseteq \mathbb{N} - \{0,1\}$.

Ahora se va a probar que $\mathbb{N} - \{0,1\} \subseteq \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} B_{nm}$, si $k \in \mathbb{N} \wedge (k \neq 1 \wedge k \neq 0)$, entonces $k > 1$, pero en cualquier caso existen 1 y $m \in \mathbb{N}$, donde $m = 2k$ tal que

$1|k|2k$, cumpliéndose además que $1 \neq k$ y $k \neq 2k$ así $k \in B_{1,m} \subseteq \bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} B_{nm}$, por ende $k \in \bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} B_{nm}$. De esta manera queda mostrada la igualdad.

Aunque β_{od} no cumpla la primera condición de base si cumple la segunda, lo cual permite que esta se pueda arreglar, para ello se probará en primer lugar el teorema 22, teniendo en cuenta que si $n \in \mathbb{N}$ siendo $n > 1$, entonces n puede ser expresado como $n = p \times m$, para algún $m \in \mathbb{N}$ y p siendo un número primo, esta notación se puede utilizar debido a que todo número compuesto tiene un factor primo y si el número es primo éste ya está expresado con un factor primo que es el mismo, así si q es primo seria expresado como $q = q \times 1$.

TEOREMA 22: Si $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$, entonces los unitarios se pueden obtener como elementos de la colección β_{od}, así notando $n = p \times m$, para algún $m \in \mathbb{N}$ y p siendo un número primo entonces $\{n\} = (m, p^2 \times m)$.

Demostración:

Si $x \in \{n\}$, entonces $x = n$, luego como $n = p \times m$, entonces $m|n$, además si multiplicamos a ambos lados de la igualdad por p tenemos que $n \times p = p^2 \times m$, así $n|p^2 \times m$, de donde tenemos que $m|n|p^2 \times m$, además $m \neq n$ y $n \neq p^2 \times m$, así $x \in (m, p^2 \times m)$. Luego $\{n\} \subseteq (m, p^2 \times m)$.

Ahora si $x \in (m, p^2 \times m)$ entonces $m|x|p^2 \times m$, con $m \neq x$ y $x \neq p^2 \times m$, por definición de $B_{m,\, p^2 \times m}$.

Pero si $m|x$ significa que existe $a \in \mathbb{N}$, tal que $m \times a = x$, así mismo que $x|p^2 \times m$ quiere decir que existe $b \in \mathbb{N}$, tal que $b \times x = p^2 \times m$, reemplezando el valor de x tenemos $b \times m \times a = p^2 \times m$, así $b \times a = p^2$, pero como p es un número primo, entonces se puede dar que: $b = a = p$ ó que $b = p^2$ y $a = 1$ ó viceversa.

Luego si $b = p^2$ y $a = 1$, entonces $m = x$, lo cual es falso por la definición de $B_{m,\, p^2 \times m}$, ahora si $b = 1$ y $a = p^2$, entonces $n = p^2 \times m$, lo cual también es falso;

por ende lo único que puede suceder es que $b = a = p$ de ello $m \times p = x$, en consecuencia $x = n$, así $x \in \{n\}$.

Ahora mostraremos que β_{od} cumple la segunda condición del teorema 2 para ser base, puesto que si $n \in U \cap V$, notándolo como $n = p \times m$, donde p es uno de los factores primos de n . Y m es un factor necesario que puede ser primo o no, para que dé como resultado n; luego existe $W = B_{m,\, p^2 \times m}$, tal que $W \in \beta_{od}, n \in W$ y $W \subseteq U \cap V$.

Lo cual se cumple puesto que $W \in \beta_{od}$, por definición de la base, $n \in W$ puesto que $W = (m, p^2 \times m) = \{n\}$ y $W \subseteq U \cap V$, ya que si $y \in W$, entonces $y = n$, luego $y \in U \cap V$.

Si bien β_{od} no es base para una topología de los números naturales con el orden de la divisibilidad, esta se puede arreglar por el teorema 3, así $\beta_{od}^{*} = \beta_{od} \cup \{\mathbb{N}\}$ sí es base.

En cuanto a la colección β_{+}, definida como $\beta_{+} = \{B_{nm}: n, m \in \mathbb{N}\}$ donde $B_{nm} = \{k \in N: n|k|m$, con $m \neq k\}$, esta colección tampoco es base para este conjunto, pero se puede arreglar, es decir no cumple con la primera condición del teorema 2, puesto que la unión sus elemento da $\mathbb{N} - \{0\}$, para demostrar que $\bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} B_{nm} \subseteq \mathbb{N} - \{0\}$, se utiliza que cero no divide a ningún $m \in \mathbb{N}$, y para verificar la contenencia contraria se muestra que para todo $k \in \mathbb{N}$, con $k > 0$, existe $1 \; y \; m \in \mathbb{N}$, tal que $m = 2 \times k$, dándose que $1|k|2k$, siendo $k \neq 2k$, de donde $k \in B_{1,2k} \subseteq \bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} B_{nm}$.

Así mismo en esta base es posible obtener los unitarios de la siguiente manera:

TEOREMA 23: Si $n \in \mathbb{N}$ siendo $n \neq 0$, entonces los unitarios se pueden obtener como elementos de la colección β_{+}, así $\{n\} = [n, 2n)$.

Demostración:

Si $x \in \{n\}$, entonces $x = n$, luego $n|n|2n$, así $\{n\} \subseteq [n, 2n)$.

Si $x \in [n, 2n)$, entonces $n|x \wedge x|2n$, siendo $x \neq 2n$, por definición de $B_{n,2n}$. Pero si $n|x$, existe $a \in \mathbb{N}$, tal que $n \times a = x$, como $x|2n$ existe $b \in \mathbb{N}$, tal que $x \times b = 2n$, por definición de divisibilidad, luego reemplazando tenemos que $n \times a \times b = 2n$, de donde $a \times b = 2$, así a y b deben ser o 1 ó 2.

Luego si $a = 2$ y $b = 1$ entonces $n \times 2 = x$, pero esto no puede suceder por la definición de $B_{n,2n}$. Ahora el único caso valido es que $a = 1$ y $b = 2$ teniendo que $n = x$. Así $x \in \{n\}$. Con ello queda mostrado que $\{n\} = [n, 2n)$.

Así mismo β_+ cumple con la segunda condición del teorema 2 para ser base, puesto que si $k \in U \cap V$ existe $W = B_{k,2k}$, tal que $W \in B_+, k \in W$ y $W \subseteq U \cap V$.

Por ende B_+, no es base para una topología de los naturales con el orden de la divisibilidad pero se puede arreglar por el teorema 3, así $\beta_+^* = \beta_+ \cup \{\mathbb{N}\}$ sí es base.

De igual forma sucede con β_- definida como $\beta_- = \{(n, m] : n, m \in \mathbb{N}\}$ o equivalentemente $\beta_- = \{B_{nm} : n, m \in \mathbb{N}\}$ donde $B_{nm} = \{k \in \mathbb{N} : n|k|m, con\ n \neq k\}$.

Nota: Se tiene en cuenta que hay varios casos donde $B_{nm} = \emptyset$, uno de ellos es cuando $n = m$, lo cual se debe de tener en cuenta para la segunda condición de la definición de base.

La unión de los elementos de la colección da $\mathbb{N} - \{1\}$ y para comprobar ello se procede de forma similar que en β_{od}, teniendo en cuenta que para para mostrar que $\bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} B_{nm} \subseteq \mathbb{N} - \{1\}$ es porque no existe un número natural diferente de 1, tal que $n|1$, mientras que para probar que $\mathbb{N} - \{1\} \subseteq \bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} B_{nm}$,se utiliza que existe $1 \in \mathbb{N}$, tal que $1|k|k$, con $1 \neq k$ de donde $k \in B_{1,k} \subseteq \bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} B_{nm}$. Con ello se muestra que β_{od} no cumple la primera condición del teorema 2.

Mientras que para probar que la segunda condición de base se cumple se debe utilizar el siguiente teorema:

TEOREMA 24: Si $n \in \mathbb{N}$ siendo $n \neq 1$, entonces los unitarios se pueden obtener como elementos de la colección β_{-}, así $\{n\} = \left(\frac{n}{p}, n\right]$, donde p es un factor primo de la descomposición de n, luego $p|n$.

Demostración:

Si $x \in \{n\}$, entonces $x = n$, como $p|n$ significa que existe $a \in \mathbb{N}$, tal que $p \times a = n$, así dividiendo entre p tenemos $a = \frac{n}{p}$, por ende $p \times \frac{n}{p} = n$, luego $\frac{n}{p}|n$, así mismo $n|n$, en consecuencia $\frac{n}{p}|n|n$, siendo así $\frac{n}{p} \neq n$ luego $\{n\} \subseteq \left(\frac{n}{p}, n\right]$.

Si $x \in \left(\frac{n}{p}, n\right]$, entonces $\frac{n}{p}|x \wedge x|n$, siendo $x \neq \frac{n}{p}$, por definición de $B_{\frac{n}{p},n}$. Pero si $\frac{n}{p}|x$, existe $a \in \mathbb{N}$, tal que $a \times \frac{n}{p} = x$, así mismo como $x|n$ existe $b \in \mathbb{N}$, tal que $x \times b = n$, por definición de divisibilidad, luego reemplazando tenemos que $a \times \frac{n}{p} \times b = n$, de donde $\frac{a \times b}{p} = 1$, así $a \times b = p$, luego $a = p$ y $b = 1$ ó viceversa, puesto que p es primo.

Luego $a = 1$ y $b = p$ entonces $\frac{n}{p} = x$ lo cual es falso por la definición de $B_{\frac{n}{p},n}$, así el único caso posible es que $a = p$ y $b = 1$ entonces $n = x$. De ello $x \in \{n\}$. Por ende queda mostrado que $\{n\} = \left(\frac{n}{p}, n\right]$.

Así β_{-} cumple la segunda condición para ser base, puesto que si $k \in U \cap V$ tomamos $W = B_{\frac{k}{p},k}$, tal que $W \in B_{-}, k \in W$ y $W \subseteq U \cap V$.

Luego β_{-}, no es base para una topología en éste conjunto pero esta $\beta_{-}^{*} = \beta_{-} \cup \{\mathbb{N}\}$ sí lo es.

Es de notar que como se mencionó al comienzo de este capítulo las colecciones $\beta_{ai,}\beta_{ad,}\beta_o$ no son base para el conjunto de números naturales con el orden de la divisibilidad, puesto que fallan en las dos condiciones del teorema 2, esto se mostrará a continuación:

En primer lugar $\beta_{ad} = \{(n, \rightarrow): n \in \mathbb{N}\}$ o equivalentemente $\beta_{ad} = \{B_n: n \in \mathbb{N}\}$ donde $B_n = \{k \in \mathbb{N}: n|k, con\ n \neq k\}$

Esta colección no cumple la primera condición para ser base puesto que la unión de los elementos de ésta no da todo el conjunto, veamos: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \mathbb{N} - \{1\}$ su demostración es similar a la presentada en la colección β_{od} pero teniendo en cuenta que hace falta el 1.

A continuación se va mostrar que la segunda condición del teorema 2 no se cumple en ésta base, para esto se va a enunciar el siguiente teorema que permitirá evidenciar ello.

TEOREMA 25: Dados m y $n \in \mathbb{N}$, además $m, n > 1$ y con $(n, m) = 1$ existe y tal que $n|y \nmid [n, m]$.

Demostración:

Sea $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ y $m = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_s^{\beta_s}$ como $(n, m) = 1$ entonces $p_i \neq q_j$ para todo $i = 1,2 \dots, r$ y para todo $j = 1,2 \dots, s$, luego existe k primo con $k \neq q_j$ y tomando $y = n \times k$ entonces $n|y$.

Como se tiene $(n, m) = 1$, entonces $[n, m] = n \times m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r} q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_s^{\beta_s}$, además $y = n \times k$ entonces $y \nmid [n, m]$, puesto que si esto se diera es porque existiría $t \in \mathbb{N}$, tal que $y \times t = [n, m]$, pero como sabemos quién es y tenemos que $n \times k \times t = n \times m$ luego $k \times t = m$, pero esto es falso puesto que $k \nmid m$ ya que $k \neq q_j$.

Así para ver que la condición mencionada no se cumple, veamos:

Dados $U, V \in \beta_{ad}$, siendo $U = B_n$ con $n > 1$ y $V = B_m$ con $m > 1$, además teniendo que $(n, m) = 1$, si $x = [n, m] \in U \cap V$, entonces no existe $W \in \beta_{ad}$, tal que $x \in W$ y $W \subseteq U \cap V$.

Para demostrar ello supongamos que existe $W \in \beta_{ad}$ luego $W = B_a$, para algún $a \in \mathbb{N}$, con $x \in W$ y $W \subseteq U \cap V$.

Así por el teorema 25 existe $y \in W = B_a$, y $y \in U = B_n$, tal que $n|y \nmid [n, m]$, como $y = n \times k$ y tenemos que $m \nmid k$ ya que $k \neq q_j$, también $m \nmid n$ porque $(n, m) = 1$, por tanto $m \nmid y$, luego $y \notin B_m$, lo cual es contradictorio puesto que $W \subseteq U \cap V$.

De esta manera se muestra que β_{ad} no es base para una topología en este conjunto.

Ahora en cuanto a $\beta_{ai} = \{(\leftarrow, n): n \in \mathbb{N}\}$ o de forma equivalente $\beta_{ai} = \{B_n: n \in \mathbb{N}\}$ donde $B_n = \{k \in \mathbb{N}: k|n, \text{con } n \neq k\}$.

No cumple la primera condición para ser base puesto que la unión de los elementos de ésta no da todo el conjunto de los números naturales veamos: $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \mathbb{N} - \{0\}$ su demostración es similar a la presentada en la colección β_{od} pero teniendo en cuenta que hace falta el 0.

Se usará el siguiente resultado para mostrar que la segunda condición del teorema 2 no se cumple en esta base:

TEOREMA 26: Dados m y $n \in \mathbb{N}$, tal que $n \nmid m$, $m \nmid n$, (m, n) sea compuesto, y $(m, n) \neq p^\alpha$ donde p es un número primo, existe y tal que $y \in W = B_{k \times (n,m)}$ pero $y \nmid (n, m)$.

Demostración:

Sea $(m, n) = \prod_{i=1}^{t} p_i^{\mu_i}$ con $p_i \neq p_j$ para todo $i \neq j$, debido a que todo número compuesto se puede descomponer en factores primos, además como $y \in W =$

$B_{k\times(n,m)}$, entonces $y|k\times(n,m)$ por definición de β_{ai}, con $y\neq k\times(n,m)$, luego se pueden dar dos casos:

Caso 1: Si $k|(n,m)$ entonces k es de la forma $k=\prod_{i=1}^{t} {p_i}^{\alpha_i}$ con $\alpha_i<\mu_i$ y sea $J=\{i\in\{1,\dots t\}:\alpha_i\neq 0\}$ entonces $y=\prod_{i\in J} {p_i}^{\alpha_i+\mu_i}\nmid(n,m)$.

Se supone que $y|(n,m)$, luego existe $a\in\mathbb{N}$, tal que $y\times a=(n,m)$, ósea que:

$$\prod_{i\in J} {p_i}^{\alpha_i+\mu_i}\times a=\prod_{i=1}^{t} {p_i}^{\mu_i}$$

$$\prod_{i\in J} {p_i}^{\alpha_i+\mu_i}\times a=\prod_{i\in J} {p_i}^{\mu_i}\times\prod_{i\notin J} {p_i}^{\mu_i}$$

$$\prod_{i\in J} {p_i}^{\alpha_i}\times a=\prod_{i\notin J} {p_i}^{\mu_i}$$

Luego $\prod_{i\in J} {p_i}^{\alpha_i}\Big|\prod_{i\notin J} {p_i}^{\mu_i}$, lo cual es falso porque $p_i\neq p_j$ para todo $i\neq j$.

Caso 2: Si $k\nmid(n,m)$, luego $y=p^\gamma\times k$, donde p^γ pertenece a la descomposición prima de (n,m), entonces $y\nmid(n,m)$.

De la misma manera se supone que $y|(n,m)$, luego existe $a\in\mathbb{N}$, tal que $y\times a=(n,m)$ siendo $y=p^\gamma\times k$, donde $p^\gamma|(n,m)$, luego $p^\gamma\times k\times a=(n,m)$, pero esto es contradictorio porque $k\nmid(n,m)$.

De esta manera en los dos casos queda comprobado que existe y tal que $y\in W$ pero $y\nmid(n,m)$.

Ahora para probar que la segunda condición de base no se cumple, veamos:

Dados $U,V\in\beta_{ai}$, siendo: $U=B_n$ con $n\in\mathbb{N}$, $V=B_m$ con $m\in\mathbb{N}$, además teniendo que $n\nmid m$, $m\nmid n$ y (m,n) es compuesto y tampoco sé de que $(m,n)\neq p^\alpha$ donde p es un número primo, entonces si $x=(n,m)\in U\cap V$, no existe $W\in\beta_{ai}$, tal que $x\in W$ y $W\subseteq U\cap V$.

Para demostrar ello supongamos que existe $W \in \beta_{ai}$, como se debe cumplir que $(n,m) \in W$, la única manera es tomando como W los múltiplos del máximo común divisor, por ello $W = B_{k\times(n,m)}$, para algún $k \in \mathbb{N}$, con $k \neq 1$.

Luego como se comprobó que existe $y \in W$, tal que $y \nmid (n,m)$, entonces $y \nmid n$ ó $y \nmid m$, porque si $y|n$ y $y|m$ entonces $y|(n,m)$ por la segunda condición de la definición de máximo común divisor, pero esto es contradictorio porque en la hipótesis esta que $y \nmid (n,m)$; entonces como $y \nmid n$ ó $y \nmid m$ se tiene que $y \notin B_n$ ó $y \notin B_m$, en cualquiera de los dos casos $y \notin U \cap V$.

Por lo cual β_{ai} no se puede arreglar para ser una base de una topología en el conjunto de números naturales con el orden de la divisibilidad.

Así mismo para la colección B_o, como ésta está conformada por las colecciones B_{ai} y B_{ad} las cuales como se mostró fallan en la segunda condición del teorema 2, entonces B_o tampoco es base para una topología en el conjunto de números naturales con el orden de la divisibilidad, cabe mencionar que la primera condición para ser base si la cumple.

A continuación se mostraran las contenencias posibles entre las topologías trabajadas en este conjunto, veamos:

TEOREMA 27: En el conjunto de los números naturales con el orden de la divisibilidad se tiene que $\tau^*_{od} \subseteq \tau^*_-$, $\tau^*_{od} \subseteq \tau^*_+$, $\tau_i \subseteq \tau^*_+$.

Demostración:

- En primer lugar se va a demostrar que $\tau^*_{od} \subseteq \tau^*_-$

Para todo $V \in \beta^*_{od}$ y supongamos $V \neq \emptyset$ y $V \neq \mathbb{N}$ pues estos casos son triviales, luego $V = (p,m)$, para algún $p,m \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in V$, existe $V' = (p,x] \in \beta^*_-$, con $p|x$, se cumple que:

- $x \in V'$, ya que como $x \in V$ entonces $p|x|m$ con $p \neq x$ y $x \neq m$, además $x|x$ luego $p|x|x$ con $p \neq x$, con lo cual queda demostrado.

- $V^{´} \subseteq V$, porque si $y \in V^{´}$, entonces $p|y|x$ con $p \neq y$ por definición de β_{-}^{*}, además $x|m$, con $x \neq m$ ya que $x \in V$, luego $p|y|m$ con $p \neq y$ y $y \neq m$, así $y \in V$, de esta manera se muestra que $\tau_{od}^{*} \subseteq \tau_{-}^{*}$.

De manera similar se prueba que $\tau_{od}^{*} \subseteq \tau_{+}^{*}$, teniendo que si $V = (p, m)$, para algún $p, m \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in V$, existe $V^{´} = [x, m) \in \beta_{+}^{*}$ que cumple la condición pedida.

- Ahora se mostrará que $\tau_i \subseteq \tau_{+}^{*}$.

Sea $V \in \beta_i$ luego $V = (\leftarrow, m]$, para algún $m \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in V$, se puede dar que:

Caso 1: $m \neq 0$ luego existe $V^{´} = [x, 2x) = \{x\} \in \beta_{+}^{*}$, se cumple que:

- $x \in V^{´}$, por la definición de β_{+}^{*}.
- $V^{´} \subseteq V$, porque si $y \in V^{´}$, entonces $y = x$, por definición de β_{+}^{*}, además $x|m$, teniendo en cuenta que $m \neq 0$, así $y \in V$, de esta manera se muestra que $\tau_i \subseteq \tau_{+}^{*}$.

Caso 2: $m = 0$ luego existe $V^{´} = \mathbb{N} \in \beta_{+}^{*}$, se cumple que:

- $x \in V^{´}$, porque como $x \in V$, entonces $x|0$, luego por la definición de β_{+}^{*} queda demostrado.
- $V^{´} \subseteq V$, porque si $y \in V^{´}$, entonces $y \in \mathbb{N}$, por definición de β_{+}^{*}, como 0 es el máximo se tiene que $y|0$, luego $y \in V$, de esta manera se muestra que $\tau_i \subseteq \tau_{+}^{*}$.

Para justificar las contenencias estrictas se mostrará que existe un elemento que está en una de las topologías pero no se encuentra en la otra, veamos:

- $\tau_d \nsubseteq \tau_g$, ya que si escogemos $a \neq 1$, se tiene que $[a, \rightarrow) \in \tau_d$, pero $[a, \rightarrow) \notin \tau_g$, puesto que $[a, \rightarrow) \neq \mathbb{N}$ y $[a, \rightarrow) \neq \emptyset$.

Análogamente se muestra que $\tau_i \nsubseteq \tau_g$ y $\tau_{od}^{*} \nsubseteq \tau_g$.

- $\tau_{+}^{*} \nsubseteq \tau_{od}^{*}$, supongamos que $[1, b) = \bigcup_{\lambda \in L}(a_\lambda, b_\lambda)$, sabiendo que $b, a_\lambda, b_\lambda \in \mathbb{N}$ para todo $\lambda \in L$, luego $1 \in \bigcup_{\lambda \in L}(a_\lambda, b_\lambda)$, entonces $1 \in (a_\lambda, b_\lambda)$, con $1 \neq a_\lambda$ y

$1 \neq b_\lambda$ para algún $\lambda \in L$ así $a_\lambda|1|b_\lambda$ pero esto es falso puesto que el único número que divide a 1 es 1 y esto no se puede dar, lo cual contradice que $[1, b) = \bigcup_{\lambda \in L}(a_\lambda, b_\lambda)$.

De la misma manera se muestra que $\tau_{-}^{*} \not\subseteq \tau_{od}^{*}$, pero teniendo en cuenta que la contradicción es con $(a, 0] \in \tau_{-}^{*}$ y no esta τ_{od}^{*}, además de usar el elemento máximo del conjunto que en éste caso es cero.

- $\tau_{+}^{*} \not\subseteq \tau_i$, supongamos que $[a, b) = \bigcup_{\lambda \in L}(\leftarrow, b_\lambda]$, con $a \neq 1$ y sabiendo que $a, b, b_\lambda \in \mathbb{N}$ para todo $\lambda \in L$, luego $a \in \bigcup_{\lambda \in L}(\leftarrow, b_\lambda]$, entonces $a \in (\leftarrow, b_\lambda] \subseteq [a, b)$ para algún $\lambda \in L$ luego $a|b_\lambda$ y $a|b$, pero existe 1 que es el mínimo, así $1|a|b_\lambda$ luego se tiene $1 \in (\leftarrow, b_\lambda]$, pero como además $1|a|b$ entonces $1 \notin [a, b)$. Lo cual contradice que $(\leftarrow, b_\lambda] \subseteq [a, b)$.
- $\mathfrak{D} \not\subseteq \tau_{-}^{*}$, supongamos que $\{1\} = \bigcup_{\lambda \in L}(a_{\lambda,} b_\lambda]$, con $1, a_{\lambda,} b_\lambda \in \mathbb{N}$ para todo $\lambda \in L$, $1 \in \bigcup_{\lambda \in L}(a_{\lambda,} b_\lambda]$, entonces $1 \in (a_{\lambda,} b_\lambda] \subseteq \{1\}$ con $1 \neq a_\lambda$ para algún $\lambda \in L$, luego $a_\lambda|1|b_\lambda$, pero esto no puede pasar, así se muestra que no es cierto que $(a_{\lambda,} b_\lambda] \subseteq \{1\}$.

Análogamente se demuestra que $\mathfrak{D} \not\subseteq \tau_{+}^{*}$, utilizando el elemento máximo que en éste caso es cero, puesto que ahí esta la contradicción.

- $\mathfrak{D} \not\subseteq \tau_d$, supongamos que $\{a\} = \bigcup_{\lambda \in L}[a_{\lambda,} \rightarrow)$, con $a \neq 0$ $y\, a, a_\lambda \in \mathbb{N}$ para todo $\lambda \in L$, $a \in \bigcup_{\lambda \in L}[a_{\lambda,} \rightarrow)$, entonces $a \in [a_{\lambda,} \rightarrow) \subseteq \{a\}$ para algún $\lambda \in L$, luego $a_\lambda|a$, pero existe 0 tal que $a_\lambda|0$, así $0 \in \left[a_{\lambda,} \rightarrow\right)$, pero $0 \notin \{a\}$ lo cual contradice que $[a_{\lambda,} \rightarrow) \subseteq \{a\}$.

Así se comprobaron las contenencias estrictas que se tienen en las topologías tratadas para el conjunto de los números naturales con el orden de la divisibilidad, por último falta verificar la no comparabilidad entre topologías:

- τ_i no es comparable con τ_d.

  - $\tau_i \nsubseteq \tau_d$, supongamos que $(\leftarrow, b] = \bigcup_{\lambda \in L}[a_\lambda, \rightarrow)$ con $b, a_\lambda, \in \mathbb{N}$ para todo $\lambda \in \mathrm{L}$, y con $b \neq 0$, si $b \in \bigcup_{\lambda \in L}[a_\lambda, \rightarrow)$, entonces $b \in [a_\lambda, \rightarrow) \subseteq (\leftarrow, b]$, para algún $\lambda \in \mathrm{L}$, luego $a_\lambda|b$, y como $b|0$, $a_\lambda|b|0$, así $0 \in (a_\lambda, \rightarrow)$, pero $0 \notin (\leftarrow, b)$. Lo cual contradice $[a_\lambda, \rightarrow) \subseteq (\leftarrow, b]$.

De la misma manera se tiene que $\tau_d \nsubseteq \tau_i$, utilizando que $[a, \rightarrow) \in \tau_d$ y no esta en τ_i, además usando que éste conjunto tiene como elemento mínimo al uno.

- τ_i no es comparable con τ_{od}^*.
  - $\tau_i \nsubseteq \tau_{od}^*$, supongamos que $(\leftarrow, 1] = \bigcup_{\lambda \in L}(a_\lambda, b_\lambda)$ con $b, a_\lambda, b_\lambda \in \mathbb{N}$ para todo $\lambda \in \mathrm{L}$, teniendo en cuenta que la unión no se considera $\mathbb{N}$, puesto que seria contradictorio, luego si $1 \in \bigcup_{\lambda \in L}(a_\lambda, b_\lambda)$, entonces $1 \in (a_\lambda, b_\lambda) \subseteq (\leftarrow, 1]$, para algún $\lambda \in \mathrm{L}$ luego $a_\lambda|1|b_\lambda$, con $a_\lambda \neq 1$ y $b_\lambda \neq 1$, pero esto es falso, lo cual contradice $(a_\lambda, b_\lambda) \subseteq (\leftarrow, 1]$.
  - $\tau_{od}^* \nsubseteq \tau_i$, supongamos que $(a, b) = \bigcup_{\lambda \in L}(\leftarrow, b_\lambda]$ siendo a y b no consecutivos con $a, b, b_\lambda, \in \mathbb{N}$ para todo $\lambda \in \mathrm{L}$, si $c \in \bigcup_{\lambda \in L}(\leftarrow, b_\lambda]$, entonces $c \in (\leftarrow, b_\lambda] \subseteq (a, b)$ para algún $\lambda \in \mathrm{L}$, luego $c|b_\lambda$, además $a|c|b$ con $c \neq a$ y $c \neq b$ y como el conjunto tiene como elemento mínimo al uno, se da que $1|c|b_\lambda$, luego $1 \in (\leftarrow, b_\lambda]$, pero además como $1|a|c|b$ entonces $1 \notin (a, b)$. Lo cual contradice que $(\leftarrow, b_\lambda] \subseteq (a, b)$.

- τ_d no es comparable con τ_{od}^*.

Para mostrar que $\tau_{od}^* \nsubseteq \tau_d$, la prueba es similar a la de $\tau_{od}^* \nsubseteq \tau_i$, teniendo en cuenta que se utiliza la existencia del elemento máximo que es el cero.

  - $\tau_d \nsubseteq \tau_{od}^*$, supongamos que $[0, \rightarrow) = \bigcup_{\lambda \in L}(a_\lambda, b_\lambda)$ con $a, a_\lambda, b_\lambda, \in \mathbb{N}$ para todo $\lambda \in \mathrm{L}$, teniendo en cuenta que la unión no se considera $\mathbb{N}$, puesto que seria contradictorio, luego si $0 \in \bigcup_{\lambda \in L}(a_\lambda, b_\lambda)$, entonces $0 \in$

$(a_\lambda, b_\lambda) \subseteq [0, \rightarrow)$ para algún $\lambda \in \mathrm{L}$, luego $a_\lambda|0|b_\lambda$, con $a_\lambda \neq 0$ y $b_\lambda \neq 0$, pero esto es falso. Lo cual contradice que $(a_\lambda, b_\lambda) \subseteq [0, \rightarrow)$.

- τ_-^* no es comparable con τ_+^*.
  - $\tau_-^* \nsubseteq \tau_+^*$, supongamos que $(a, 0] = \bigcup_{\lambda \in L}[a_\lambda, b_\lambda)$ con $a, a_\lambda, b_\lambda \in \mathbb{N}$ para todo $\lambda \in \mathrm{L}$, si $0 \in \bigcup_{\lambda \in L}[a_\lambda, b_\lambda)$, entonces $0 \in [a_\lambda, b_\lambda) \subseteq (a, 0]$, para algún $\lambda \in \mathrm{L}$ luego $a_\lambda|0|b_\lambda$, con $0 \neq b_\lambda$ pero esto es falso, lo cual contradice $[a_\lambda, b_\lambda) \subseteq (a, 0]$.

De la misma manera se muestra que $\tau_+^* \nsubseteq \tau_-^*$, teniendo en cuenta que la contradicción es con $[1, b) \in \tau_+^*$ y no pertenece a τ_-^*.

- τ_+^* no es comparable con τ_d.
  - $\tau_+^* \nsubseteq \tau_d$, supongamos que $[1, b) = \bigcup_{\lambda \in L}[a_\lambda, \rightarrow)$ con $b, a_\lambda \in \mathbb{N}$ para todo $\lambda \in \mathrm{L}$, si $1 \in \bigcup_{\lambda \in L}[a_\lambda, \rightarrow)$, entonces $1 \in [a_\lambda, \rightarrow) \subseteq [1, b)$, para algún $\lambda \in \mathrm{L}$ luego $a_\lambda|1$, y $1|b$, pero como existe el máximo que es cero se tiene que $a_\lambda|1|b|0$ de ello se da $0 \in [a_\lambda, \rightarrow)$ pero $0 \notin [1, b)$asi no se cumple que $[a_\lambda, \rightarrow) \subseteq [1, b)$.
  - $\tau_d \nsubseteq \tau_+^*$, supongamos que $[0, \rightarrow) = \bigcup_{\lambda \in L}[a_\lambda, b_\lambda)$con $a_\lambda, b_\lambda, \in \mathbb{N}$ para todo $\lambda \in \mathrm{L}$, teniendo en cuenta que la unión no se considera $\mathbb{N}$, puesto que seria contradictorio, luego si $0 \in \bigcup_{\lambda \in L}[a_\lambda, b_\lambda)$, entonces $0 \in [a_\lambda, b_\lambda) \subseteq [0, \rightarrow)$ para algún $\lambda \in \mathrm{L}$, luego $a_\lambda|0|b_\lambda$, con $0 \neq b_\lambda$ pero esto es falso. Lo cual contradice que $[a_\lambda, b_\lambda) \subseteq [0, \rightarrow)$.

- τ_-^* no es comparable con τ_i.
  - $\tau_-^* \nsubseteq \tau_i$, supongamos que $(a, 0] = \bigcup_{\lambda \in L}(\leftarrow, b_\lambda]$ con $a, b_\lambda \in \mathbb{N}$ para todo $\lambda \in \mathrm{L}$, si $0 \in \bigcup_{\lambda \in L}(\leftarrow, b_\lambda)$, entonces $0 \in (\leftarrow, b_\lambda] \subseteq (a, 0]$ para algún $\lambda \in \mathrm{L}$, luego $a|0|b_\lambda$, pero existe el mínimo que es el uno tal que $1|\ a|0|b_\lambda$ así se da que $0 \in (\leftarrow, b_\lambda]$ y $0 \notin (a, 0]$ lo cual contradice que $(\leftarrow, b_\lambda] \subseteq (a, 0]$.

De la misma manera que se demostró $\tau_d \nsubseteq \tau_+^*$ se verifica que $\tau_i \nsubseteq \tau_-^*$, teniendo en cuenta que $(\leftarrow, 1] \in \tau_i$, pero $(\leftarrow, 1] \notin \tau_-^*$.

- τ_-^* no es comparable con τ_d.
  - $\tau_-^* \nsubseteq \tau_d$, supongamos que $(a, b] = \bigcup_{\lambda \in L} [a_\lambda, \rightarrow)$ con $a, b, a_\lambda \in \mathbb{N}$ y $b \neq 0$ para todo $\lambda \in \mathrm{L}$, si $b \in \bigcup_{\lambda \in L} [a_\lambda, \rightarrow)$, entonces $b \in [a_\lambda, \rightarrow) \subseteq (a, b]$ para algún $\lambda \in \mathrm{L}$, luego $a_\lambda | b$ y $a | b$ pero como existe el máximo que es cero se tiene que $a_\lambda | b | 0$ de ello se da que $0 \in [a_\lambda, \rightarrow)$ pero como además $0 | a | b$ entonces $0 \notin (a, b]$ lo cual contradice que $[a_\lambda, \rightarrow) \subseteq (a, b]$.

De la misma manera que se demostró $\tau_d \nsubseteq \tau_+^*$ se verifica que $\tau_d \nsubseteq \tau_-^*$, teniendo en cuenta que la contradicción es con $[1, \rightarrow) \in \tau_d$ y no pertenece a τ_-^*.

De todas las relaciones de comparabilidad tratadas entre las topologías en el conjunto de los números naturales con el orden de la divisibilidad, se evidencia en el siguiente diagrama:

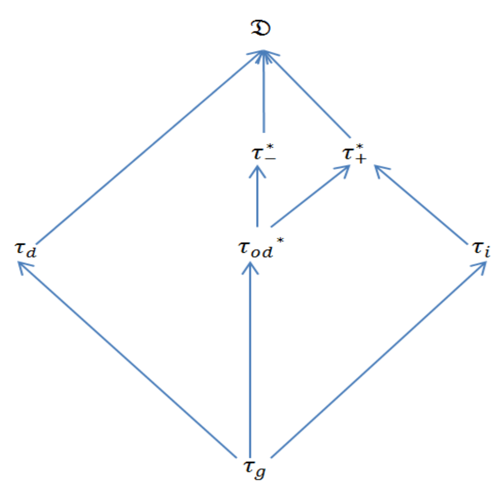


Diagrama 8: Topologías asociadas al orden en el conjunto de los números naturales con el orden de la divisibilidad.

En resumen se evidenció que las colecciones β_d y β_i son base para una topología respectivamente, independientemente de si el conjunto es totalmente ordenado y si tiene elemento mínimo y máximo, así mismo es de notar que si las colecciones que no fueron base porque fallaban en la primera condición del teorema 2, y no se hubieran arreglado según el teorema 3, sino uniendo los unitarios que faltaban en cada una para que la unión fuera igual a $\mathbb{N}$, entonces todas éstas topologías serían iguales a la topología discreta.

En este conjunto se evidenció que las colecciones β_{ad}, β_{ai} y β_{o} no resultaron bases de una topología, debido a que el orden del conjunto es parcial, además se notó que la topología τ_d sólo se logró comparar con la topología discreta.

3.2 $\mathbb{R}^2$ CON EL ORDEN DEL PRODUCTO

Se asume el orden del producto como: Si $A, B \in \mathbb{R}^2$ siendo $A = (a, b)\ y\ B = (c, d)$ con $a, b\ c, d \in \mathbb{R}$, entonces: $A \geq B$ si y sólo si $a \geq c \wedge\ b \geq d$, además

$A > B$ si y sólo si $A \geq B \wedge A \neq B$, lo que es igual a $a \geq c \wedge\ b \geq d\ \wedge (a \neq c \vee b \neq d)$

si y solo si $(a \neq c\ \wedge (a \geq c \wedge\ b \geq d)) \vee (b \neq d\ \wedge (a \geq c \wedge\ b \geq d))$

Así $A > B$ es equivalente a $(a > c \wedge\ b \geq d) \vee (b > d \wedge\ a \geq c)$.

El plano con este orden no cumple con todas las condiciones presentadas al comienzo del capítulo uno, de ser un conjunto totalmente ordenado puesto que el orden dado en éste es parcial, es decir no cumple que todo par de elementos sean comparables bajo esta relación por ejemplo entre $(2,3)\ y\ (3,1) \in \mathbb{R}^2$ no se puede establecer cual de los dos puntos es mayor o menor. Pero este conjunto sí cumple con la condición de no tener elemento mínimo ni máximo, se evidenciará en primer lugar que colecciones son base para una topología en este nuevo conjunto.

También se notará que bases generan una topología y se apreciará que algunas de ellas no se pueden arreglar puesto que fallan en la segunda condición del teorema 2, así mismo se realizará el respectivo diagrama de comparabilidad entre topologías con sus justificaciones.

Así las colecciones β_d y β_i son base para las topologías τ_d y τ_i respectivamente, en el conjunto del plano con el orden del producto.

Las definiciones de estas colecciones son:

$\beta_d = \{ [A, \rightarrow) : A \in \mathbb{R}^2$ siendo $A = (a, b)$ con $a, b \in \mathbb{R}\}$ o de forma equivalente $\beta_d = \{B_{(a,b)} : a, b \in \mathbb{R}\}$ donde $B_{(a,b)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (a \leq x) \wedge (b \leq y)\}$

Para que ésta sea una base de una topología se debe comprobar como primera condición que: $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n,m\in\mathbb{R}} B_{(n,m)}$

Solo basta ver que $\mathbb{R}^2 \subseteq \bigcup_{n,m\in\mathbb{R}} B_{(n,m)}$, luego si $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ entonces existe $n\ y\ m \in \mathbb{R}$ tal que $(n \leq c) \wedge (m \leq d)$ lo cual es válido porque $\mathbb{R}$ no tiene elemento mínimo, luego $(c, d) \in B_{(n,m)}$, de ello $(c, d) \in \bigcup_{n,m\in R} B_{(n,m)}$. Con ello queda demostrada la igualdad.

Ahora se mostrará que dados $U, V \in \beta_d$, siendo $U = B_{(a,b)}$ y $V = B_{(c,d)}$ para algún $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Si $(g, h) \in U \cap V$ con $g, h \in \mathbb{R}$, existe $e = max\{a, c\}$ y $f = max\{b, d\}$ tal que $e, f \in \mathbb{R}$, debido a que $\mathbb{R}$ es totalmente ordenado, entonces se nota como $W = B_{(e,f)}$. Veamos que: $W \in \beta_d$, $(g, h) \in W$ y $W \subseteq U \cap V$.

- Se verificará que $W \in \beta_d$, como $e, f \in \mathbb{R}$ y $W = B_{(e,f)}$ entonces por definición de β_d, $W \in \beta_d$.
- Se demostrará que $(g, h) \in W$, ya que $(g, h) \in U \cap V$, entonces $(g, h) \in B_{(a,b)} \cap B_{(c,d)}$, así $(g, h) \in B_{(a,b)}$ y $(g, h) \in B_{(c,d)}$. Luego $(a \leq g) \wedge (b \leq h)$ y $(c \leq g) \wedge (d \leq h)$ Por definición de $B_{(a,b)}\ y\ B_{(c,d)}$. Como $e = max\{a, c\}$ y $\mathbb{R}$ es un conjunto totalmente ordenado cumpliendo además la ley de la tricotomía, se puede dar que $e = a$ ó $e = c$ entonces $e \leq g$, así mismo como $f = max\{b, d\}$ entonces $f \leq h$, luego se tiene que $(e \leq g) \wedge (f \leq h)$ y por definición de $B_{(e,f)}$, $(g, h) \in B_{(e,f)} = W$

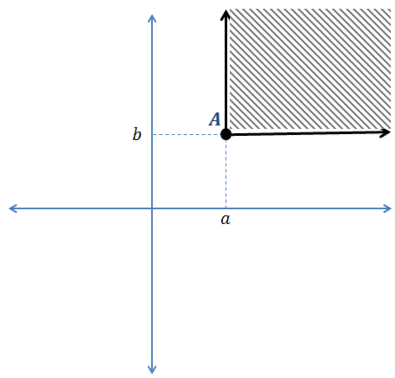
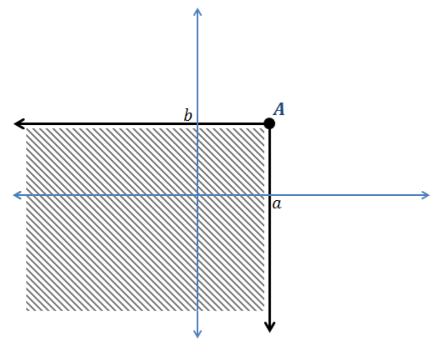
- Se probará que $W \subseteq U \cap V$, así si $(i,j) \in W = B_{(e,f)}$, con $i,j \in \mathbb{R}$, entonces $(e \leq i) \wedge (f \leq j)$ Por definición de $B_{(e,f)}$. Como $e = max\{a,c\}$ entonces $e \geq a$ y $e \geq c$ y como $f = max\{b,d\}$ entonces $f \geq b$ y $f \geq d$. Luego por transitividad se tiene que $(a \leq i) \wedge (b \leq j)$ y $(c \leq i) \wedge (d \leq j)$, de donde $(i,j) \in B_{(a,b)}\ y\ B_{(c,d)}$. Por definición de $B_{(a,b)}\ y\ B_{(c,d)}$. Luego $(i,j) \in B_{(a,b)} \cap B_{(c,d)}$, y como $(i,j) \in B_{(e,f)}$, entonces $B_{(e,f)} \subseteq B_{(a,b)} \cap B_{(c,d)}$, o lo que es igual $W \subseteq U \cap V$.

Luego por lo anterior se tiene que β_d es base para $\mathbb{R}^2$.

De igual forma se demuestra que β_i es base para $\mathbb{R}^2$, pero teniendo en cuenta que la siguiente definición: $\beta_i = \{(\leftarrow, A] : A \in \mathbb{R}^2$ siendo $A = (a,b)$, con $a,b \in \mathbb{R}\}$ o equivalentemente $\beta_i = \{B_{(a,b)} : a,b \in \mathbb{R}\}$ donde $B_{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x \leq a) \wedge (y \leq b)\}$.

Es de notar que para la demostración de la primera condición de base se utiliza la no existencia de máximo en el conjunto de los números reales, mientras que en la segunda condición, dados $U,V \in \beta_d$ siendo $U = B_{(a,b)}$ y $V = B_{(c,d)}$ para algún $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, se toma apropiadamente como $W = B_{(e,f)}$, donde $e = min\{a,c\}$ y $f = min\{b,d\}$, de manera que similarmente a la demostración anterior se prueba que $W \in \beta_d\ y\ W \subseteq U \cap V$.

Los abiertos básicos de las topologías $\tau_d\ y\ \tau_i$ generados por estas dos bases los podemos evidenciar a continuación, teniendo en cuenta que $A = (a,b)$ con $a,b \in \mathbb{R}$.

$\beta_d = \{[A, \rightarrow) : A \in \mathbb{R}^2\}$	$\beta_i = \{(\leftarrow, A] : A \in \mathbb{R}^2\}$
	

Las colecciones $\beta_{ad}, \beta_{ai}, \beta_+, \beta_-, \beta_o, \beta_{od}$ no son bases para una topología en el conjunto de R^2 con el orden del producto, puesto que aunque cumplen con la primera condición del teorema 2, es decir que la unión de los elementos de la base da $\mathbb{R}^2$, no satisfacen la segunda condición por ende no se arreglaran en el presente trabajo, veamos:

Para la colección $\beta_{ad} = \{ (A, \rightarrow) : A \in \mathbb{R}^2,$ siendo $A = (a, b)$ con $a, b \in \mathbb{R}\}$ o de forma equivalente $\beta_{ad} = \{B_{(a,b)} : a, b \in \mathbb{R}\}$ con $B_{(a,b)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (a < x \wedge b \leq y) \vee (b < y \wedge a \leq x)\}$.

Enseguida se va mostrar que dicha colección no cumple con la segunda condición del teorema 2, para ello se tomará un ejemplo genérico en donde esto sucede, veamos:

Dados $U, V \in \beta_{ad}$, siendo $U = B_{(a,b)}$ y $V = B_{(c,d)}$ para algún $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
Si $(e, f) \in U \cap V$ con $e, f \in \mathbb{R}$, siendo $e = max\{a, c\}$ y $f = max\{b, d\}$, debido a que $\mathbb{R}$ es totalmente ordenado, entonces no existe $W \in \beta_{ad}$, tal que $(e, f) \in W$ y $W \subseteq U \cap V$.

Supongamos que existe $W \in B_{ad}$ luego $W = B_{(i,j)}$, con $i,j \in R$, con $(e,f) \in W$. Existe $k,l \in \mathbb{R}$ tal que $i < k < e$, y $j < l < f$, debido a la densidad de los números reales. Así $(k,l) \in W$, luego $(i < k \wedge j \leq l) \vee (j < l \wedge i \leq k)$ por definición $B_{(i,j)}$. Como $e = max\{a,c\}$ y $f = max\{b,d\}$, como los números reales son totalmente ordenados cumpliendo además la ley de la tricotomía, se puede dar que $e = a$ ó $e = c$ y $f = b$ ó $f = d$.

Para probar esto se van a asumir los dos casos en los cuales falla la segunda condición del teorema 2, veamos:

- Si $e = c$ y $f = b$, entonces $i < k < c$, y $j < l < b$, luego por transitividad

  $(k < c \wedge l \leq b) \vee (l < b \wedge k \leq c)$, pero se sabe que:

  Si $(k,l) \in U$ se tiene que $(a < k \wedge b \leq l) \vee (b < l \wedge a \leq k)$, además por lo anterior se evidencia que cada una de las proposiciones son falsas, de ello $(k,l) \notin U$, de la misma manera se muestra que $(k,l) \notin V$ y por ende $(k,l) \notin U \cap V$.

- Si $e = a$ y $f = d$, entonces $i < k < a$, y $j < l < d$, luego por transitividad $(k < a \wedge l \leq d) \vee (l < d \wedge k \leq a)$ pero se sabe que:

  Si $(k,l) \in V$ se tiene que $(c < k \wedge d \leq l) \vee (d < l \wedge c \leq k)$, pero por lo anterior se evidencia que cada una de las proposiciones son falsas, de ello $(k,l) \notin V$, de la misma manera se muestra que $(k,l) \notin U$ y por ende $(k,l) \notin U \cap V$.

  Así $W \nsubseteq U \cap V$, con ello queda mostrado que β_{ad} no cumple la segunda condición de base, por ello no es una topología para $\mathbb{R}^2$.

De la misma manera se muestra que β_{ai} no es base, teniendo en cuenta que se intercambia el sentido de las desigualdades y tomando el mínimo de las coordenadas.

En cuanto a la colección β_+ definida como $\beta_+ = \{[A,C): A,B \in \mathbb{R}^2,$ siendo $A = (a,b), C = (c,d)$ con $a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$ o equivalentemente $\beta_+ = \{B_{(A,C)} \ : A,C \in \mathbb{R}^2\}$ donde $B_{(A,C)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : [(a \leq x) \wedge (b \leq y)] \wedge [(x < c \wedge y \leq d) \vee (y < d \wedge x \leq c)]\}$

Enseguida se mostrará que β_+ no cumple la segunda condición de base, es de resaltar que esta condición falla en varios tipos de intersecciones, uno de ellos es: si $U,V \in B_+$**,** siendo $U = B_{(A,C)}$ para algún $A,C \in R^2$, siendo $A = (a,b), C = (c,b)$ y $V = B_{(D,E)}$ para algún $D,E \in R^2$, siendo $D = (d,e), E = (d,f)$.

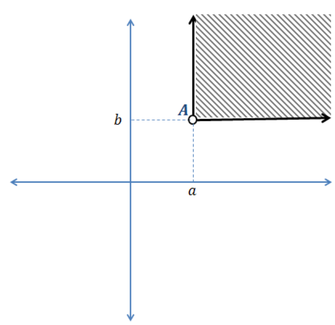
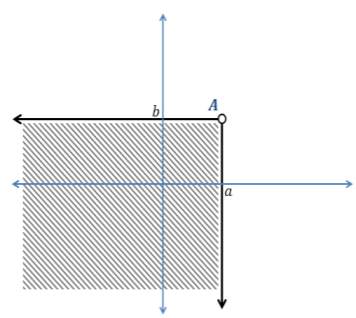
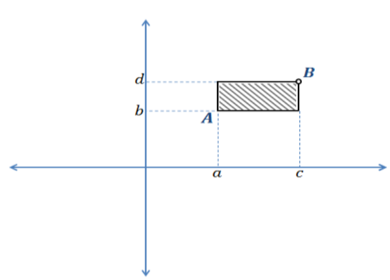
Además para que haya intersección se debe dar que $a \leq d < c$ y $e \leq b < f$.
Luego $U \cap V = \{(d,b)\}$, pero no existe $W \in \beta_+$, tal que $(d,b) \in W$ y $W \subseteq U \cap V$
Puesto que si existiera, debería encontrarse F y $G \in \mathbb{R}^2$, tal que $W = B_{(F,G)}$, con $F = (g,b)$, $G = (i,b)$, además $g < i$, luego si $(d,b) \in W$, entonces $[(g \leq d) \wedge (b \leq b)] \wedge [(d < i \wedge b \leq b) \vee (b < b \wedge d \leq i)]$. Pero por la propiedad de densidad de los números reales se tiene que existe $h \in \mathbb{R}$, tal que $g < h < d$, luego $(h,b) \in B_{(F,G)}$, pero $(h,b) \neq (d,b)$, así $(h,b) \notin U \cap V$.
De donde $W \nsubseteq U \cap V$, con ello queda mostrado que β_+ no cumple la segunda condición de base, por ello no es base para una topología en $\mathbb{R}^2$.

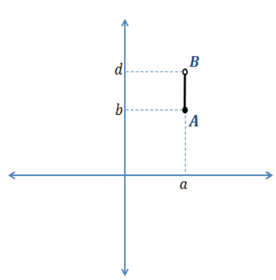
De la misma manera se demuestra que β_- no es base para una topología en $\mathbb{R}^2$, pero teniendo en cuenta los extremos abiertos, además es de notar que hay otras formas de intersecar los elementos de la colección y con los cuales se puede llegar a contradicciones.

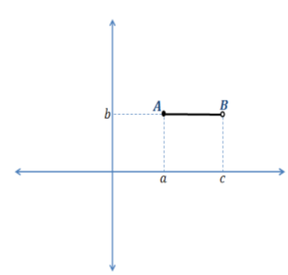
Además para verificar que β_{od} no es base para una topología, la demostración es análoga a la anterior pero teniendo en cuenta los extremos son abiertos, así mismo como en esta colección sólo hay un tipo de elemento esta es la única manera de probar que no se cumple la segunda condición.

En cuanto a la colección β_o, como ella está conformada por $\beta_{ai,}\beta_{ad,}$ β_{od}, y como ninguna de estas tres bases cumplen la segunda condición del teorema 2 para ser base, entonces β_o tampoco es base para una topología en $\mathbb{R}^2$.

Aunque varias colección no sean base para una topología, en la tabla 2 se mostrarán algunos elementos que pertenecen a éstas, esto con el propósito de evidenciar de mejor manera lo anterior.

<table>
<tr>
<td>$\beta_{ad} = \{\, (A, \rightarrow) : A \in \mathbb{R}^2,$ siendo $A = (a,b)$ con $a, b \in \mathbb{R}\}$
o equivalentemente
$\beta_{ad} = \{B_{(a,b)} \ : a, b \in \mathbb{R}\}$ donde $B_{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (a < x \wedge b \leq y) \vee (b < y \wedge a \leq x)\}$

</td>
<td>$\beta_{ai} = \{\, (\leftarrow, A) : A \in \mathbb{R}^2,$ siendo $A = (a,b)$ con $a, b \in \mathbb{R}\}$
o equivalentemente
$\beta_{ai} = \{B_{(a,b)} \ : a, b \in \mathbb{R}\}$ donde $B_{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x < a \wedge y \leq b) \vee (y < b \wedge x \leq a)\}$

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">$\beta_{+} = \{[A, C) : A, B \in \mathbb{R}^2,$ siendo $A = (a,b), C = (c,d)$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ o equivalentemente $\beta_{+} = \{B_{(A,C)} \ : A, C \in \mathbb{R}^2\}$ donde $B_{(A,C)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : [(a \leq x) \wedge (b \leq y)] \wedge [(x < c \wedge y \leq d) \vee (y < d \wedge x \leq c)]\}$


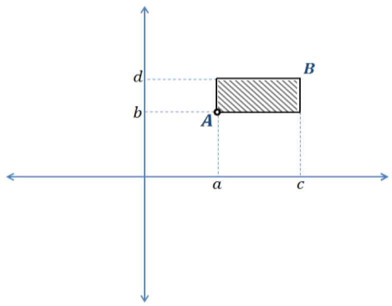


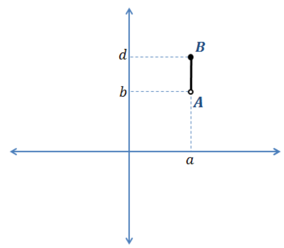
Si $a = c$


Si $b = d$</td>
</tr>
</table>

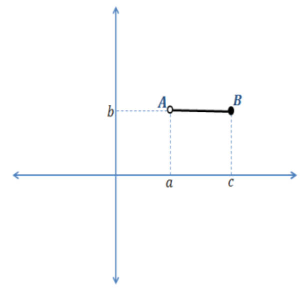
<table>
<tr><td>

$\beta_{-} = \{\ (A, C\ ] : A, C \in \mathbb{R}^2$ siendo $A = (a, b), C = (c, d)$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ o equivalentemente $\beta_{-} = \{B_{(A,C)}\ : A, B \in \mathbb{R}^2\}$ donde $B_{(A,C)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : [(a < x \wedge b \leq y) \vee (b < y \wedge a \leq x)] \wedge [(c \geq x) \wedge (d \geq y)]\}$





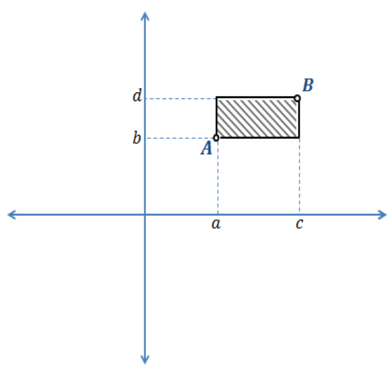
Si $a = c$

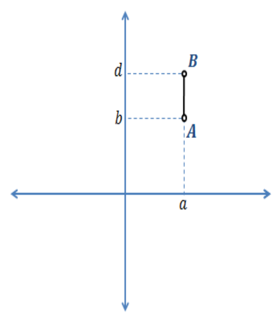


Si $b = d$

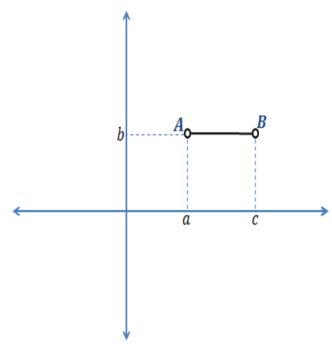
</td></tr>
<tr><td>

$\beta_{od} = \{\ (A, C\ ) : A, C \in \mathbb{R}^2$ siendo $A = (a, b), C = (c, d)$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ o equivalentemente $\beta_{od} = \{B_{(A,C)}\ : A, C \in \mathbb{R}^2\}$ donde $B_{(A,C)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : [(a < x \wedge b \leq y) \vee (b < y \wedge a \leq x)] \wedge [(x < c \wedge y \leq d) \vee (y < d \wedge x \leq c)]\}$





Si $a = c$



Si $b = d$

</td></tr>
</table>

Tabla 2: Elementos que pertenecen a algunas colecciones

En la colección β_o se encuentran los elementos que se evidenciaron en las colecciones β_{ai}, β_{ad} y β_{od}.

Respecto a la comparabilidad entre las topologías tratadas, como en este conjunto con el orden del producto las únicas topologías son τ_d, τ_i, τ_g, $\mathfrak{D}$ y por teorema 9 se tiene que $\tau_d \subseteq \mathfrak{D}$, $\tau_i \subseteq \mathfrak{D}$, $\tau_g \subseteq \tau_d$ y $\tau_g \subseteq \tau_i$, entonces basta verificar las contenencias estrictas, luego tenemos que:

- $\tau_d \nsubseteq \tau_g$, ya que $[A, \rightarrow) \in \tau_d$, con $A \in \mathbb{R}^2$ y $[A, \rightarrow) \notin \tau_g$, puesto que $[A, \rightarrow) \neq X$, y $[A, \rightarrow) \neq \emptyset$. Análogamente se muestra que $\tau_i \nsubseteq \tau_g$.
- $\mathfrak{D} \nsubseteq \tau_d$, puesto que si esto se diera es porque $\{C\} \in \mathfrak{D}$, con $C \in \mathbb{R}^2$ se debe poder obtener como unión de elementos de la base de la topología τ_d, es decir supongamos que $\{C\} = \bigcup_{\lambda \in L}[A_{\lambda,} \rightarrow)$, con $A_\lambda \in R^2$. Luego si $C \in \bigcup_{\lambda \in L}[A_{\lambda,} \rightarrow)$, entonces $C \in [A_{\lambda,} \rightarrow)$, pero además $[A_{\lambda,} \rightarrow) \subseteq \bigcup_{\lambda \in L}[A_{\lambda,} \rightarrow) = \{C\}$, por ende $C \in [A_{\lambda,} \rightarrow) \subseteq \{C\}$, así $A_\lambda \leq C$, y por la densidad de los números reales existe $x, y \in \mathbb{R}$, tal que $(x, y) = Y$ donde $C < Y$, así $A_\lambda \leq C < Y$, por ende $Y \in [A_{\lambda,} \rightarrow)$, pero $Y \notin \{C\}$. Lo cual contradice que $[A_{\lambda,} \rightarrow) \subseteq \{C\}$.

Análogamente se muestra que $\mathfrak{D} \nsubseteq \tau_i$.

Luego falta mostrar la no comparabilidad entre las topologías τ_i y τ_d , así:

- $\tau_i \nsubseteq \tau_d$, supongamos que $(\leftarrow, C] = \bigcup_{\lambda \in L}[A_\lambda, \rightarrow)$ con $C, A_\lambda \in \mathbb{R}^2$ para todo $\lambda \in L$. Si $C \in \bigcup_{\lambda \in L}[A_\lambda, \rightarrow)$, entonces $C \in [A_\lambda, \rightarrow) \subseteq (\leftarrow, B]$ para algún $\lambda \in L$, así $A_\lambda \leq C$, además como $\mathbb{R}^2$no tienen elemento máximo existe $Y \in \mathbb{R}^2$, tal que $A_\lambda \leq C < Y$, luego $Y \in [A_\lambda, \rightarrow)$, pero $Y \notin (\leftarrow, C]$. Lo cual contradice que $[A_\lambda, \rightarrow) \subseteq (\leftarrow, C]$.
- $\tau_d \nsubseteq \tau_i$, supongamos que $[A, \rightarrow) = \bigcup_{\lambda \in L}(\leftarrow, C_\lambda]$, con $A, C_\lambda \in \mathbb{R}^2$ para todo $\lambda \in L$. Si $A \in \bigcup_{\lambda \in L}(\leftarrow, C_\lambda]$, entonces $A \in (\leftarrow, C_\lambda] \subseteq [A, \rightarrow)$ para algún $\lambda \in L$, así $A \leq C_\lambda$ y como $\mathbb{R}^2$ no tienen elemento mínimo, existe $Y \in \mathbb{R}^2$, tal que $Y < A \leq C_\lambda$, así $Y \in (\leftarrow, C_\lambda]$, pero $Y \notin [A, \rightarrow)$. Lo cual contradice que $(\leftarrow, C_\lambda] \subseteq [A, \rightarrow)$.

Según esto se puede evidenciar el siguiente esquema el cual muestra la comparabilidad entre las topologías asociadas al orden del producto en $\mathbb{R}^2$.

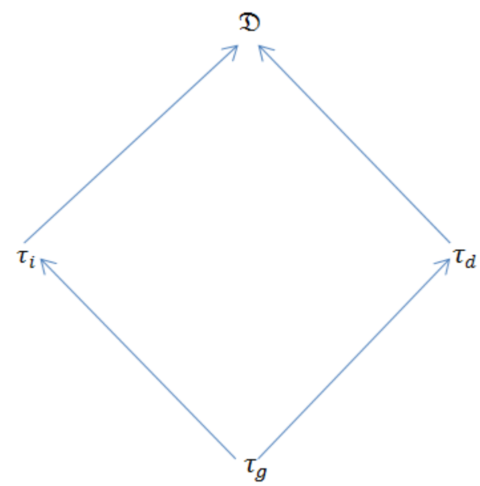


Diagrama 9: Topologías asociadas al orden en el conjunto del plano con el orden del producto.

En este conjunto se mantuvo que las colecciones β_d y β_i fueron base sin importar que el orden fuera parcial y no existiera elemento mínimo ni máximo, las colecciones que no fueron bases en éste conjunto fallaron en la condición dos del teorema 2, y como se enunció en el trabajo no se arreglaron.

En conclusión en los conjuntos abordados en este capítulo se mantuvo que las colecciones $\beta_{ad}, \beta_{ai},$ y β_o no fueron base para una topología y tampoco se pudieron arreglar, mientras que las colecciones $\beta_-, \beta_+,$ y β_{od}, se arreglaron en el conjunto de los números naturales con el orden de la divisibilidad, pero en el conjunto del plano con el orden del producto éstas no se lograron forzar, puesto que fallaban en la segunda condición del teorema 2.

En resumen en todo conjunto ordenado C sin importar si tiene o no elemento mínimo o máximo, las colecciones β_d y β_i son siempre bases para una topología.

Se verificara que β_d es base para una topología teniendo en cuenta la definición: $\beta_d = \{[x, \rightarrow) : x \in C\}$ o equivalentemente $\beta_d = \{B_x : x \in C\}$ donde $B_x = \{k \in C : k \geq x\}$

Para que este subconjunto sea una base topológica se debe comprobar que:

i) $\bigcup_{x \in C} B_x = C$

Si $x \in C$, existe $x \in C$ tal que $x \lesssim x$ porque la relación de orden es reflexiva, entonces $x \in B_x$, por definición de B_x, luego $x \in \bigcup_{x \in C} B_x$, así $C \subseteq \bigcup_{x \in C} B_x$.
Si $y \in \bigcup_{x \in C} B_x$, entonces existe $x \in C$ y $y \in B_x$. Por definición de Unión. Pero si $y \in B_x$ entonces por definición de B_x, $y \in C$. Así $\bigcup_{x \in C} B_x \subseteq C$.

ii) Si $U, V \in \beta_d$**,** siendo $U = B_a$ y $V = B_b$ para algún $a, b \in C$.

Si $x \in U \cap V$, existe $B_x = W$ tal que $x \in W$, debido a que la relación de orden es reflexiva, entonces se verificará que: $W \in \beta_d$, $x \in W$ y $W \subseteq U \cap V$

Para probar que $W \in \beta_d$: Como $x \in C$ y $W = B_x$ entonces por definición de β_d, $W \in \beta_d$, ahora para demostrar que $x \in W$ como $x \lesssim x$, entonces $x \in B_x = W$. Por último para probar que $W \subseteq U \cap V$, si $y \in W = B_x$, entonces $x \lesssim y$. Por definición de B_x y como $x \in U \cap V$ entonces $a \lesssim x$ y $b \lesssim x$. Luego por transitividad de la relación $a \lesssim y$ y $b \lesssim y$. Luego $y \in B_a \cap B_b$, de donde $B_x \subseteq B_a \cap B_b$, o lo que es igual $W \subseteq U \cap V$.

Luego por i, ii, se tiene que β_d es base para el conjunto C. De la misma manera se muestra que β_i es base para una topología pero teniendo en cuenta el sentido de las desigualdades.

CONCLUSIONES

En el presente capítulo se presentan los resultados encontrados sobre las topologías asociadas al orden en los diferentes conjuntos abordados, verificando los cambios en las topologías al modificar las condiciones del conjunto en el ejercicio propuesto por el profesor Gustavo Rubiano y evidenciando esto en los diferentes diagramas que muestran las relaciones entre las topologías en cada uno de los siete conjuntos tratados.

Se considera que cada uno de los diagramas obtenidos son las conclusiones más relevantes que se pueden presentar en el trabajo, aun así se mostrarán algunos otros resultados evidenciados, estableciendo dos tipos de conclusiones, unas referentes a describir los diagramas en cada uno de los conjuntos y otras que comparan resultados entre las topologías trabajadas en cada uno de los conjuntos abordados, para al final establecer cuáles de las colecciones son siempre base para una topología al cambiar las propiedades del conjunto sobre el cual se está trabajando.

Las conclusiones que describen los diagramas son:

- Para probar que cada una de las colecciones eran base para una topología en el conjunto X totalmente ordenado sin elemento mínimo ni máximo se usaron algunas propiedades de la siguiente manera: en cuanto a la colección β_d, β_i la propiedad reflexiva, en la colección β_{ad} la no existencia de mínimo y en la colección β_{ai} la no existencia de máximo, en la colección β_+ la propiedad reflexiva y la no existencia de máximo, en la colección β_- la propiedad reflexiva y la no existencia de mínimo, en las colecciones β_{od} y β_o la no existencia de mínimo y máximo.

- Se establecieron 10 topologías asociadas al orden en un conjunto X, incluyendo la topología discreta y la grosera, encontrándose que $\tau_o = \tau_{od}$, también se evidenciaron seis cadenas de contenencias entre las topologías trabajadas.

- En el conjunto de los números reales se presentaron trece contenencias estrictas las cuales usan en sus pruebas la propiedad de densidad de los números reales, la no existencia de máximo y mínimo, así mismo se da la no comparabilidad entre nueve pares de topologías.

- En el conjunto de los números enteros se da la igualdad entre las siguientes bases $\beta_+ = \beta_-$, $\beta_d = \beta_{ad}$, $\beta_i = \beta_{ai}$ y $\beta_+ = \beta_{od}$ las cuales generan las mismas topologías respectivamente, también se dio que $\tau_+ = \mathfrak{D}$ debido a que sus bases son equivalentes más no iguales; por éstas igualdades en el diagrama de Hasse sólo se evidencian cuatro topologías asociadas al orden; en este conjunto se encontraron cuatro contenencias estrictas para las cuales sus pruebas son análogas a las presentadas en el conjunto de los números reales, puesto que se usa la no existencia de máximo o mínimo, así mismo en las verificaciones de contenencias estrictas entre topologías en los números reales donde se usó la propiedad de densidad resulta que dichas topologías en el conjunto de los números enteros se vuelven iguales, debido a que éste conjunto no cumple con esta propiedad; finalmente se encontró un par de topologías no comparables, donde su prueba es análoga a la presentada en los números reales puesto que usa la no existencia de mínimo y máximo.

- El conjunto del plano con el orden lexicográfico como es totalmente ordenado sin elemento mínimo ni máximo y cumple la propiedad de densidad, permite que todas las pruebas hechas en el conjunto de números reales se puedan realizar de manera similar para este conjunto, por ende el diagrama que muestra las relaciones de comparabilidad entre las topologías en este conjunto es el mismo que el evidenciado en el conjunto de los números reales; así lo interesante en este conjunto fue presentar los abiertos básicos de las topologías asociadas al orden.

- En el conjunto de los números naturales el cual es totalmente ordenado con elemento mínimo el cero y sin elemento máximo, resultan que son base para una topología $\beta_d, \beta_{i,} \beta_{ai,} \beta_+$ puesto que en su demostración no se utiliza la no existencia del elemento mínimo, también β_o es base puesto que esta conformada por la unión de las colecciones abierta a derecha y abierta a izquierda, lo que hace que la unión de todos sus elementos den el conjunto, mientras que las colecciones β_{ad}, β_- y β_{od} no son base puesto que fallan en la primera condición de la definición de base, ya que la unión de todos sus elementos es todo el conjunto excepto cero, aun así se arreglaron uniéndole el conjunto, así se dio la igualdad entre las bases $\beta_d = \beta_{ad}^*$, $\beta_i = \beta_{ai,} \beta_-^* = \beta_{od}^*$ las cuales generan la misma topología, también se dio que $\tau_+ = \mathfrak{D} = \tau_o$ las cuales se dan porque las bases son equivalentes. En cuanto a las contenencias entre las topologías se tuvo en cuenta que toda topología se encuentra entre la topología discreta y la grosera, además como las colecciones antes descritas generan tres topologías entonces sólo se realizó una contenencia, la cual es $\tau_{ad}^* \subseteq \tau_{od}^*$, también se presentaron cinco contenencias estrictas, donde en sus pruebas se utilizó la no existencia de máximo y la existencia de mínimo, y por último se presentaron dos pares de topologías no son comparables usando en su verificación las mismas características antes nombradas.

- El conjunto finito $\underline{n} = \{0,1,2, \dots n-1\} \subseteq \mathbb{N}$**,** con el orden heredado de los números naturales y teniendo como elemento mínimo al cero y elemento máximo a $n-1$, se evidencio que para $\underline{0}$ y $\underline{1}$ la única topología es la grosera es decir que todas las topologías abordadas se vuelven ésta, para $\underline{2}$ se encontró que las topologías resultantes son cuatro y son las asociadas al orden teniendo en cuenta que algunas de ellas se arreglaron puesto que fallaban en la primera condición de base, así se procedió a unirles el conjunto para que fueran base para alguna topología, tanto para $\underline{2}$ y $|\underline{n}| \geq 3$ se mantuvo que β_d, β_iy β_{od} son base para una topología puesto que no necesitan de la no existencia de mínimo y máximo, mientras que las colecciones que no fueron base y se arreglaron fueron β_{ad} y β_- porque la unión de los elementos de la colección no era igual al conjunto puesto que les faltaba el elemento cero, también fallaron β_+ y β_{ai} por la ausencia del elemento máximo $n-1$ y β_{od} falló porque la unión de los elementos de la colección no tenia al mínimo y al máximo; se presentaron las siguientes igualdades entre topologías $\tau_d = \tau_{ad}^*$, $\tau_i = \tau_{ai,}^*$ $\mathfrak{D}= \tau_o$, puesto que sus bases son equivalentes, además se obtuvieron cuatro contenencias y nueve contenencias estrictas en las cuales para su verificación se utilizó la existencia del elemento mínimo y máximo, finalmente se encontraron siete no comparabilidades las cuales para sus comprobación usaron las propiedades ya descritas. Es de notar que cuando el conjunto tiene tres elementos todas las topologías posibles son veintinueve, de las cuales sólo siete de ellas son las asociadas al orden.

- En el conjunto de los números naturales con el orden de la divisibilidad el cual es parcialmente ordenado con elemento mínimo al uno y máximo al cero, se encontró que las colecciones β_d y β_i son base, β_+ no es base y se puede arreglar debido a que la unión de sus elementos no tiene al cero, de la misma manera β_- no es base porque no tiene al elemento uno, tampoco β_{od} porque le falta el elemento mínimo y máximo, es de notar que éstas tres colecciones generan a los unitarios a excepción de los elementos antes mencionados, por ello si éstas colecciones no se hubieran arreglado uniéndoles el conjunto, sino uniendo los unitarios que faltaban en cada una para que la unión fuera igual a $\mathbb{N}$, entonces todas éstas topologías serían iguales a la topología discreta; también se dio que las colecciones $\beta_{ad,}$ β_{ai} y β_o no se pudieron arreglar porque fallaban en la primera y segunda condición para ser bases. En cuanto a las contenencias se encontraron tres de ellas, además se verificaron nueve contenencias estrictas en las cuales para comprobarlas se utilizan la existencia del elemento mínimo y máximo, finalmente se hallaron siete pares de topologías no comparables en las cuales para sus pruebas se utilizan las mismas características mencionadas. Algo a resaltar en este conjunto es que τ_d sólo fue comparable con la topología discreta y la grosera.

- En el conjunto del plano con el orden del producto el cual es parcialmente ordenado y sin elemento mínimo ni máximo se encontró que la únicas colecciones que resultaron ser base para una topología fueron β_d y β_i, sin tener en cuenta las topologías discreta y grosera que siempre se han considerado, se evidenció que el resto de colecciones no resultaron ser base puesto que fallaban en la segunda condición de la definición de base y como ya se enunció anteriormente éstas no se arreglaron en el presente trabajo, en cuanto a las contenencias sólo se usó que toda topología se encuentra entre la topología grosera y discreta, además se encontraron cuatro contenencias estrictas en las cuales para su verificación se usa la propiedad de densidad de los números reales y por último se encontró un par de topologías no comparables las cuales para corroborarlas se utilizó la no existencia de mínimo y máximo en este conjunto.

Las conclusiones que comparan resultados entre las topologías trabajadas en los conjuntos son:

- La igualdad y equivalencia de bases presentada en el conjunto de los números naturales con el orden usual se dio de manera similar que en el conjunto de los números enteros a excepción de las bases β_{od} y β_- , teniendo en cuenta que en el conjunto de números naturales se arreglaron y debido a esto no se dio la igualdad entre éstas y la topología discreta, como si se presentó en el conjunto de números enteros. Otro aspecto a resaltar es que en los conjuntos presentados en el capítulo uno siempre se dio que $\tau_i \subseteq \tau_-$ mientras que en el conjunto de números naturales se da que τ_i no es comparable con τ_-^* y esto se debe a la forma como se arregló la colección, por esto mismo $\tau_d \subseteq \tau_-^*$ lo cual no se da en los conjuntos presentados en el capitulo uno.

- En el conjunto finito $\underline{n}$ con $n \geq 3$ algunas de las topologías que son iguales y resultan de bases equivalentes se diferencian del conjunto de números naturales con el orden usual y del conjunto de números enteros, porque en éstas las bases fueron iguales más no equivalentes aunque generan la misma topología, así mismo se vuelven a cambiar las contenencias presentadas entre τ_d, $\tau_{i,}\tau_-$ y τ_+ que se daban en los conjuntos del capitulo uno y como ya se había enunciado en el conjunto de los números naturales esto se debe a la forma como se arreglaron las bases y por ello mismo se da la no comparabilidad entre topologías que en otros conjuntos si se relacionaban, mientras que $\underline{2}$ sólo se tiene cuatro topologías como ya se había mencionado y para $\underline{0}$ y $\underline{1}$ sólo se obtuvo una topología que es la grosera.

- Es de notar que τ_o y τ_{od} son iguales cuando el conjunto es totalmente ordenado y no tiene elemento mínimo ni máximo, pero según los conjuntos abordados cuando estos tienen elemento mínimo o máximo ocurre que β_{od} no resulta siendo base pero se puede arreglar como se mencionó uniéndole el conjunto, obteniéndose que siempre $\tau_{od}^* \subseteq \tau_o$, además se notó que en los ejemplos realizados de conjuntos parcialmente ordenados β_o y β_{od} no son bases para una topología, aunque es de notar en los números naturales con el orden de la divisibilidad se dio que β_o no resulto ser base para una topología ni se logró arreglar , mientras que β_{od} aunque no fue base si se arregló.

- En un conjunto ordenado sin importar si este tiene o no elemento mínimo o máximo las colecciones β_d y β_i son siempre bases para una topología como se mostró en el capítulo tres.

- En cuanto a las colecciones β_{ad} y β_{ai} para que estas sean base para una topología se necesita que el conjunto sea totalmente ordenado y no tenga elemento mínimo en el caso de β_{ad}, y para β_{ai} que el conjunto no tenga elemento máximo.

- Para las colecciones β_{+} y β_{-}, estas son base para una topología cuando el conjunto es totalmente ordenado y además β_{+} es base si el conjunto no tiene elemento máximo, mientras que β_{-} es base si el conjunto no tiene elemento mínimo.

- En cuanto a las colecciones β_{o} y β_{od} en el conjunto del plano con el orden del producto y el conjunto de los números naturales con el orden de la divisibilidad que son parcialmente ordenados se dio que estas colecciones no son base para una topología pero no se puede afirmar que siempre ocurra esto en cualquier conjunto parcialmente ordenado, lo que sí se puede afirmar es que dichas colecciones son base para una topología si el conjunto es totalmente ordenado y además las topologías que se generan son iguales.

- La forma en que se arreglaron las colecciones que no resultaban ser base para una topología puesto que fallaban en que la unión de los elementos de la base no daba todo el conjunto influyó en los diagramas de relaciones de comparabilidad entre topologías, es de mencionar que la manera en que se arreglaron dichas colecciones por medio de unirles el conjunto no es la única pero se optó por ella, debido a que permitía mostrar más relaciones en los diagramas de Hasse presentados.

Es de notar que las anteriores son conclusiones específicas del trabajo pero se resalta que los resultados más relevantes del mismo, son cada uno de los diagramas de Hasse que evidencian las relaciones de comparabilidad entre las topologías trabajadas en cada uno de los siete conjuntos abordados.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Barrantes, H., *Introducción a la matemática*, Editorial Universidad Estatal a distancia, 2005.

[2] Birkhoff, G., *On the combination of topologies, Fund*. Math, 1936.

[3] Concha, F., Delgado, F. y Xambó, S*., Introducción al algebra*, Editorial Complutense.

[4] Díaz, J., Arsuaga, E. y Riaño, J., *Introducción al Álgebra,* Gesbiblo S.L., 2005.

[5] González, F., *Apuntes de Matemática Discreta*, Universidad de Cádiz, 2004.

[6] Muñoz, J., *Introducción a la teoría de conjuntos*. Editora Guadalupe Ltda, 1994.

[7] Muñoz, J., *Topología Básica*, Editora Guadalupe Ltda, 2003.

[8] Neira, C., *Topología general,* Universidad Nacional de Colombia, Colección de notas de clase, 2011.

[9] Pérez, K., *Álgebra superior 1*. (Vol. 1), Santo Domingo: Taller, C por A., 1984.

[10] Pettofrezzo, A., *Introducción a la teoría de números*, Prentice-Hall, 1972.

[11] Rubiano, G., *Topología general* (2da ed.), Universidad Nacional de Colombia, Panamericana, 2002.

[12] Rubiano, G., *Sobre el número de topologías en un conjunto finito*, Boletín de Matemáticas, 8 (2), 146, 2006.

[13] Sullivan, M., *Precálculo*, Pearson Educación.