UN ESTUDIO DE LA PRINCIPAL OBRA DE DIOFANTO DE ALEJANDRÍA: LA ARITMÉTICA

IRWIN JAMID MEDINA MELÉNDEZ

ALEJANDRO ALBARRACÍN HERNÁNDEZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C.
2012

UN ESTUDIO DE LA PRINCIPAL OBRA DE DIOFANTO DE ALEJANDRÍA: LA ARITMÉTICA

IRWIN JAMID MEDINA MELÉNDEZ

ALEJANDRO ALBARRACÍN HERNÁNDEZ

Trabajo de grado para optar al título
de Licenciado en Matemáticas.

Asesor
LYDA CONSTANZA MORA MENDIETA
Profesor Departamento de Matemáticas

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
2012

DEDICATORIAS

A DIOS por permitirme alcanzar un objetivo más en mi vida. A mis PADRES Luis Albarracín y Leonor Hernández, porque ellos han sido mi mayor motivación, por su amor, sus consejos, su cariño, sus sacrificios, porque siempre estuvieron presentes animándome a seguir adelante para lograr mis objetivos y por enseñarme a ser una buena persona.

A mis HERMANOS Felipe y Carolina, quienes han sido acompañantes de todo mi proceso educativo, en especial mi hermana, por el apoyo que me brindó durante todo este proceso académico. A Alejandra, quien es una gran persona en mi vida y me ha sabido apoyar y ha sido parte de mi motivación, y finalmente a mis compañeros y amigos, especialmente a Juan David, Irwin, Ana, Johan, Claudia y Juan Pablo, por todo ese apoyo en las diferentes actividades personales y académicas.

Alejandro Albarracín.

En varias partes del texto de La Aritmética, encontré un lenguaje que resulta ciertamente familiar, como el lenguaje que usa un maestro que quiere transmitir sus conocimientos a su estudiante, sin duda un maestro muy aventajado en conocimientos matemáticos respecto del estudiante que como yo aprende de la obra, esto hace recapacitar sobre el camino que debemos recorrer quienes aspiramos a ser futuros docentes y pensar en la humildad de quienes nos han enseñado con tanta paciencia, aún cuando los conceptos no logramos entender e interiorizar con rapidez, paciencia que debemos a nuestros estudiantes en honor a los que fueron nuestros docentes, seguramente también en honor a Diofanto.

En mi vida he tenido muchos maestros, iniciando por mis padres Astrid y Jorge a quienes tengo que dar las gracias por tanta paciencia, ellos han sido quienes han querido inculcar en mí, sus mejores conocimientos de la vida, ellos armados de paciencia por y para mí, se merecen esta pequeña mención.

Gracias Cindy por todo tu apoyo, a Efra y Jairo por todo, a mis compañeros, a Alejandro porque pronto culminamos el trabajo, gracias Juan David, Ana, en realidad a todos gracias por su paciencia, esto también es suyo. Gracias a Dios por esos buenos maestros que he tenido.

Irwin Medina.

AGRADECIMIENTOS

A todos los docentes de la Universidad Pedagógica Nacional, quienes han aportado a nuestra formación académica y como futuros maestros.

A nuestra asesora, Mg. Lyda Constanza Mora, por el tiempo que dedicó a la asesoría, por el tiempo de su familia que sacrificó para ayudarnos a culminar el presente trabajo. Por su apoyo en todo momento y por el interés que siempre demostró.

A todos ellos muchísimas gracias.

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN

Tipo de documento: Trabajo de grado	
Acceso al Documento: Universidad Pedagógica Nacional	
Título del Documento: Un estudio de la principal obra de Diofanto de Alejandría: *La Aritmética*	
Autores: ALBARRACIN HERNANDEZ, Alejandro. MEDINA MELENDEZ, Irwin Jamid.	
Publicación: Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2012, 76 páginas	
Unidad Patrocinante: Universidad Pedagógica Nacional, Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Matemáticas.	
Palabras Claves: Algebra, incógnita, simbología, lenguaje algebraico, ecuaciones, sistemas de numeración, Diofanto	
Descripción: Este documento muestra el estudio de la obra: *La Aritmética* de Diofanto. Se inicia haciendo una descripción general de la obra, en donde se enuncian las principales traducciones y las distintas obras propuestas por varios autores, además se presenta cuál es su composición y su estructura; después se aborda la simbología utilizada por Diofanto iniciando con su sistema de numeración, los signos empleados para simbolizar las operaciones y algunas propiedades numéricas que se evidenciaron en el estudio de esta obra; seguidamente se muestra con algunos ejemplos de la obra diofantina el uso de la letra, tomando como referencia distintos autores de Didáctica de las matemáticas que han aportado teoría acerca de los usos de las letras en álgebra, esto con el fin de clarificar el uso del lenguaje algebraico.	
Fuentes: Bibliografía: Se consultaron 26 documentos entre libros y artículos, referentes a la obra: *La Aritmética* de Diofanto, principalmente se utilizaron cuatro libros, éstos son: Vera, F. (1970), Muñoz, M., Fernández, E., y Mercedes, S. (2007), Tannery.	

(1895) y Heath. (1964), que corresponden a traducciones de la magna obra.

Contenidos:

Este trabajo consta de tres capítulos a partir de los cuales se busca presentar la obra La Aritmética, de Diofanto de Alejandría.

En el Capítulo 1, se presenta una descripción general de la principal obra Diofantina: *La Aritmética,* se analiza su estructura y cómo está compuesta así como sus principales características; además se presenta un recuento de las diferentes traducciones que se conocen de la obra.

En el Capítulo 2, se exponen las diferentes representaciones que Diofanto empleó para escribir y dar solución a los problemas. Se describe el sistema de numeración utilizado por Diofanto y los signos empleados para simbolizar las operaciones, los números y la incógnita (llamada por Diofanto: aritmo) y sus potencias.

En el Capítulo 3, se describe la tipología empleada para estudiar cómo Diofanto utilizó la letra en su obra, estudio que permite concluir acerca de los distintos usos de la letra en la obra Diofantina y por último se vislumbra, basados en el estudio realizado, qué tipo de lenguaje algebraico es propio de esta obra.

Finalmente, se presentan las conclusiones que pretenden dar cuenta de la consecución de los objetivos trazados para este trabajo de grado.

Conclusiones:

1. Gracias a la consulta del material bibliográfico es posible afirmar en este documento que *La Aritmética* de Diofanto se constituyó en uno de los primeros trabajos que se alejaron del planteamiento geométrico, a pesar de haber sido escrito en tiempo y espacio en los que los geómetras habían dominado por largo tiempo la producción matemática; mostrando que el manejo de los números podía ser deducido a partir de reglas exentas de prejuicios geométricos.

2. Se encontró evidencia, tanto en los libros de fuente griega como los de fuente árabe, de frases que hacen pensar que *La Aritmética* de Diofanto es una obra escrita con una clara intención de enseñanza.

3. A pesar de enunciar solo el manejo de los números hasta la sexta potencia, Diofanto utiliza en su obra potencias superiores, incluyendo octava y novena potencia.

4. Diofanto, a lo largo de *La Aritmética* enuncia una serie de problemas para los cuales, independiente de la cantidad de variables posible, utiliza solo una incógnita para representar una cantidad desconocida (el llamado aritmo), el mérito del autor consiste en expresar todas las cantidades desconocidas en términos del aritmo y así dar solución al problema planteado.

   Diofanto, al presentar la solución declara que será el aritmo, luego, hábilmente transforma el problema inicial en términos de ese aritmo y en algunas ocasiones le resulta un *subproblema*, para el cual declara un aritmo diferente al del problema inicial, le da solución al *subproblema* y retoma el problema original junto y su aritmo original.

5. Se encontró que Diofanto utilizó la letra no solo para indicar una cantidad desconocida, se encontraron usos de la letra que corresponden a asignaciones directas (letra evaluada), letra que expresa patrones generales y relaciones funcionales (letra para expresar cantidades que varían conjuntamente), también fue encontrado el uso para la letra como objeto, lo que permitió a Diofanto operar correctamente entre lo que él llamó especies de números. (sumar o restar cuadrados con cuadrados y no con cubos, sumar o restar cubos con cubos y no con números de otras potencias), aunque, como se mencionó, haciendo la traducción al lenguaje actual, pues Diofanto usualmente lo hacía de manera retórica.

6. No se puede establecer si Diofanto cuestiona la existencia de la solución de una ecuación para solucionarla o no, desde la relación que se hace con el uso de la letra. Diofanto asigna un valor a la letra o busca el aritmo según las condiciones del problema.

7. Se evidenció de propia mano, que las características del lenguaje sincopado corresponden con el lenguaje utilizado por Diofanto en su obra coincidiendo con lo anotado por (Cajori, 1928) (O'Connor y Robertson, 1999), entre otros.

Aunque el lenguaje sincopado fue el utilizado por Diofanto, para avanzar en el trabajo, debimos desarrollar la habilidad de interpretar el lenguaje retórico aún presente en *La Aritmética*, haciendo la traducción al lenguaje simbólico moderno.

8. Como resultado de la consulta de material bibliográfico se lograron establecer varios asuntos, antes desconocidos, de la obra Diofantina, por ejemplo:

   - El sistema de numeración empleado por Diofanto fue el sistema de numeración jónico,
   - Recientemente fueron encontrados cuatro libros de fuente árabe que se suman a los ya conocidos históricamente de fuente griega,
   - Wilbur Knorr quien es un reconocido historiador matemático sugiere que el libro *Preliminaries to the Geometric Elements*, atribuido usualmente a Herón de Alejandría, fue escrito por Diofanto.

9. Sin duda, el análisis de una obra histórica deja, para quien lo hace, el placer de estar redescubriendo las maneras en que operaban los matemáticos de la antigüedad, lo que hace pensar en las dificultades con las que se encontraron los antiguos matemáticos y las hábiles maneras que encontraron para avanzar, esto permite, a quienes se preparan como futuros docentes, reorientar el proceso de aprendizaje personal y enseñanza a sus próximos estudiantes.

   El estudio de una obra histórica, permite transformar la visión de la actividad matemática, para el caso de la obra de Diofanto, su estudio permitió evidenciar que el rigor empleado por Diofanto compuesto por una serie de problemas sus soluciones a partir de ejemplos generales no coincide, como se pensaría intuitivamente, con el sistema de axiomas, definiciones y proposiciones de Euclides.

10. En referencia a competencias profesionales el presente trabajo aportó a nuestra formación docente en cuanto fue necesario realizar la lectura, comprensión e interpretación de textos en otros idiomas.

Elaborado por: ALBARRACIN HERNANDEZ, Alejandro. MEDINA MELENDEZ, Irwin Jamid.
Revisado por: MORA MENDIETA Lyda Constanza
Fecha de elaboración del RAE: 23 de Noviembre del 2012

Tabla de Contenido

INTRODUCCIÓN

El estudio de la obra de Diofanto, y en general de cualquier obra de carácter histórico, aporta a la formación educativa de los futuros licenciados en matemáticas *"en cuanto posibilita una visión dinámica, humana de las matemáticas y permite apreciar cómo sus desarrollos han estado relacionados con las circunstancias sociales y culturales e interconectados con los avances de otras disciplinas"* (Ministerio de Educación Nacional, 1998, p. 15). Visión que permite el desarrollo didáctico y académico debido a que el análisis del proceso invita a la reflexión sobre las limitaciones y los alcances del conocimiento en la antigüedad, invita también a la apreciación de las dificultades que históricamente surgieron para lograr construcción del conocimiento y aporta al ejercicio de la transposición didáctica.

Históricamente los matemáticos griegos y sus obras han sido ampliamente estudiadas; historiadores, matemáticos y educadores matemáticos se han interesado en su análisis debido al vasto aporte que han dejado como legado a las matemáticas y su educación, uno de los autores griegos es Diofanto de Alejandría, quien más talento demostró para el álgebra según lo afirman personajes tan destacados como Bell (1997, citado en Ruiz, 2003). Justamente este estudio se basa en la principal obra de Diofanto, *La Aritmética*, la cual lo ha posicionado como el Padre del Álgebra (O'Connor & Robertson, 1999).

Al consultar acerca de la obra de Diofanto se pudo evidenciar que la información académica en español que permite estudiar los aportes que dejó a las matemáticas, es poca, difícil de encontrar y en algunos casos de difícil acceso, a pesar que sirvió de inspiración a grandes matemáticos, como por ejemplo a Bachet, Fermat, Descartes y Vieta, entre otros.

Debido a lo anterior se ha realizado este trabajo, que busca estudiar la obra de Diofanto tomando como referencia los libros que se conocen en la actualidad. Analizando en ella el lenguaje algebraico utilizado, la simbología empleada y considerando el uso que el autor hace de la letra.

Para abordar el estudio de dicha obra, es importante aclarar que se hizo uso de diferente material bibliográfico, principalmente se utilizaron cuatro libros, éstos son: Vera, F. (1970), Muñoz, M., Fernández, E., y Mercedes, S. (2007), Tannery. (1895) y Heath. (1964), que corresponden a traducciones de la magna obra. El material restante lo constituyeron libros, artículos y tesis. Fue importante acceder a diferentes fuentes con el fin de extraer y confrontar informacion académica que favoreciera la realización del estudio.

En el Capítulo 1, se presenta una descripción general de la principal obra Diofantina: *La Aritmética,* se analiza su estructura y cómo está compuesta así como sus principales características; además se presenta un recuento de las diferentes traducciones que se conocen de la obra.

En el Capítulo 2, se exponen las diferentes representaciones que Diofanto empleó para escribir y dar solución a los problemas. Se describe el sistema de numeración utilizado por Diofanto y los signos empleados para simbolizar las operaciones, los números, la incógnita (léase en adelante aritmo) y sus potencias.

En el Capítulo 3, se describe la tipología empleada para estudiar cómo Diofanto utilizó la letra en su obra, estudio que permite concluir acerca de los distintos usos y “comportamientos” de la letra en la obra Diofantina y por último se vislumbra, basados en el estudio realizado, qué tipo de lenguaje algebraico es propio de esta obra.

Finalmente, se presentan las conclusiones que pretenden dar cuenta de la consecución de los objetivos trazados para este trabajo de grado.

OBJETIVOS

Objetivo General

Estudiar la obra *La Aritmética,* de Diofanto de Alejandría, haciendo énfasis en los seis libros de fuente griega y los cuatro de fuente árabe que se conocen en la actualidad. Analizando en ella el lenguaje algebraico utilizado, la simbología empleada, considerando el uso que el autor hace de los signos al operar con ellos.

Objetivos Específicos

Como fruto del estudio de la *Aritmética* de Diofanto se pretende:

- Conocer la obra original de Diofanto de Alejandría, recurriendo a distintas fuentes, con el fin de ampliar el conocimiento histórico y matemático referente a los aportes de Diofanto a la historia del álgebra.
- Evidenciar si el lenguaje utilizado pertenece al álgebra sincopada, de ser así, elegir de la obra algunos de los problemas que representen de manera sencilla el uso del álgebra sincopada para proponerlos como ejemplo de la misma en el espacio académico Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra.
- Distinguir el uso que Diofanto da del signo que representa “lo desconocido” para concluir si lo emplea como incógnita o como variable.
- Aportar un documento en español, de fácil acceso en la UPN, que incluya los resultados del estudio con el fin de dar cuenta de aspectos relevantes presentes en la obra diofantina.

Capítulo 1.

1. DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA OBRA DE DIOFANTO[1]

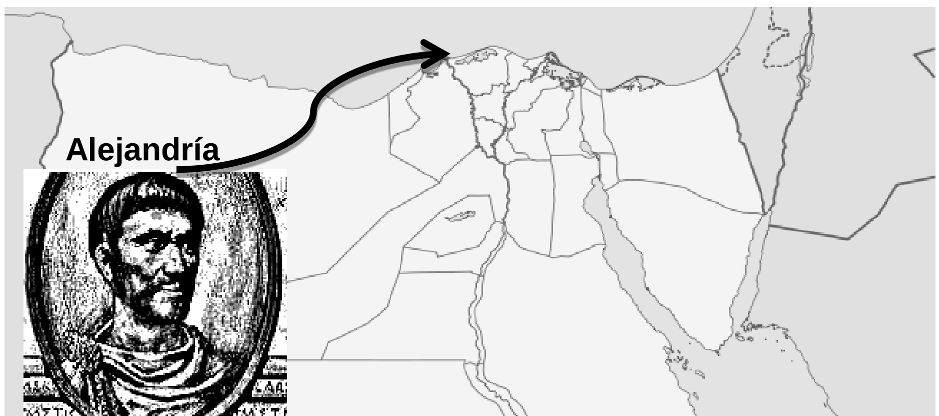


Figura 1. Diofanto de Alejandría. [2]

De Diofanto poco se conoce, apenas que nació en Alejandría (Figura 1) y que vivió 84 años según el siguiente epitafio redactado en forma de problema y que se encuentra entre los epigramas de la Antología Palatina recopilada por Metrodoro de Bizancio alrededor del año 500 d.C.:

[1] El fundamento principal para la realización de este capítulo fue *La Aritmética y* el libro *Sobre los números poligonales*, versión en castellano, introducción, notas y apéndices de Manuel Benito Muñoz (Doctor en ciencias matemáticas, ha realizado publicaciones de temas matemáticos desde 1987, su tesis doctoral se titula Algunos problemas diofánticos, fue publicada el año 2004 por el servicio de publicaciones de la Universidad de la Rioja, con la cual obtuvo la calificación de Sobresaliente Cum Laude), Emilio Fernández Moral (Licenciado en matemáticas, publicó junto a Muñoz y Márquez López el articulo Dos Notas Históricas Sobre Ternas Pitagóricas. Es autor del libro *Apuntes de Análisis I* editado por la Universidad de la Rioja en 2003) y Mercedes Sánchez Benito editado por Nivola. Vale decir que los editores de esta publicación en castellano toman como referencia la edición de Tannery (1895), contrastándola con la traducción latina de Bachet (1621), el texto de Thomas Heath (1910) y la versión de Ver Eecke (1959). Incluyen, en la misma, los comentarios de Bachet y las aportaciones de Fermat, además de sus propias observaciones y numerosas notas y aclaraciones.

[2] Adaptada de: (NordNordWest, 2008) y (Baldor, 1999)

Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad.[3] (Diofanto citado en Muñoz, Fernández y Sánchez, 2007, p. 12)

Acerca de la obra de Diofanto, *La Aritmética,* se puede decir que fue dedicada a Dionisio[4]:

Como sé muy honorable Dionisio, que quieres aprender a resolver problemas numéricos, he emprendido la tarea de exponer la naturaleza y el poder de los números, empezando por las bases que sustentan estas cuestiones. Es posible que parezcan más difíciles de lo que son por ser desconocidas aún y que los principiantes duden en conseguir alcanzarlas, pero las comprenderás fácilmente gracias a tu actividad y a mis demostraciones, pues que el deseo unido a la enseñanza conduce rápidamente al conocimiento… (Diofanto citado en Vera, 1970, p. 1031)

Según dice el propio Diofanto en el preámbulo del Libro 1, *La Aritmética* comprendía trece libros, pero actualmente sólo se conocen seis libros de fuente

---

[3] Para dar solución al epitafio basta con plantear la siguiente ecuación lineal $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$, de donde se concluye que Diofanto debió vivir 84 años.

[4] El nombre de Dionisio era bastante común en Grecia, el historiador francés Paul Tannery supuso que el Dionisio al que se dedicaba la obra debía ser una persona importante en su época, según sus investigaciones podía ser un obispo de Alejandría hacia el año 247.

griega que forman una colección de 189 problemas y cuatro libros de fuente árabe que añaden otros 101, además de las once definiciones que aparecen clasificadas en la edición de Bachet (1621). También se conserva en la actualidad un fragmento *Sobre los Números Poligonales* que se cree, hacía parte de la obra *Aritmética.* La tabla 1 resume la obra de Diofanto conocida en la actualidad.

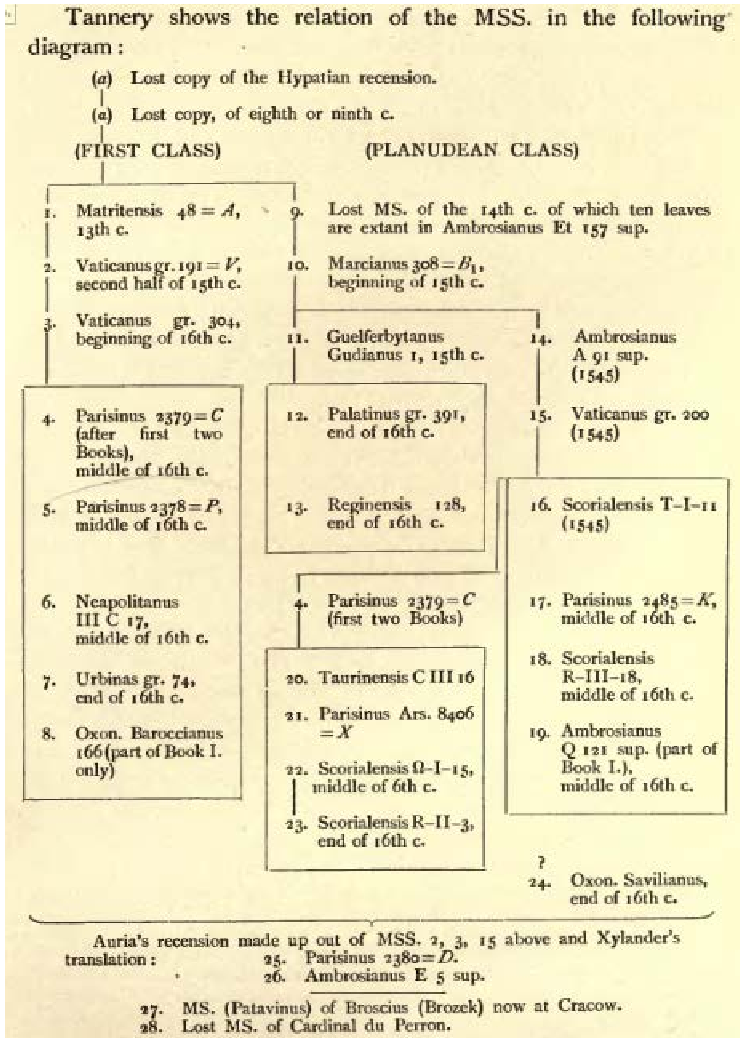
***La Aritmética* (compuesta originalmente por 13 libros)**		
Manuscritos de fuente:	**Se conocen:**	**Cantidad de problemas:**
Griega	6 libros de *La Aritmética* numerados del I al VI. Fragmento *Sobre los Números Poligonales.*	Los 6 libros contienen 189 problemas, el fragmento *Sobre los Números Poligonales* contiene 34 proposiciones.
Árabe	4 libros numerados del IV(a) al VII(a).	Los 4 libros contienen 101 Problemas.

Tabla 1. Obra de Diofanto de Alejandría conocida en la actualidad.

1.1. Traducciones de la Obra de Diofanto

De los manuscritos griegos se conocen varias fuentes, se han conservado multitud de copias manuscritas que contienen también el fragmento del Libro *Sobre los Números Poligonales*; la más antigua es el Codex Matritensis 48 del siglo XIII. (Muñoz et al., 2007; Heath, 1910). En su obra, Heath expone la división de los manuscritos en dos clases, las anteriores a Maximus Planudes[5] que llamó “ante-Planudes class” o sencillamente “first class” y las posteriores al comentario de Planudes a las que llamó “Planudean Class”. En la figura 2 se encuentra la división propuesta por Tannery citada por Heath (1910, p. 15).

[5] Maximus Planudes, monje griego natural de Nicomedia, en la Anatolia, nació en el año 1260 y murió en el año 1330, en Constantinopla., fue un gramático, teólogo y traductor bizantino de renombre. Con respecto a Diofanto hizo comentarios sobre los libros I y II de la obra *Aritmética.*



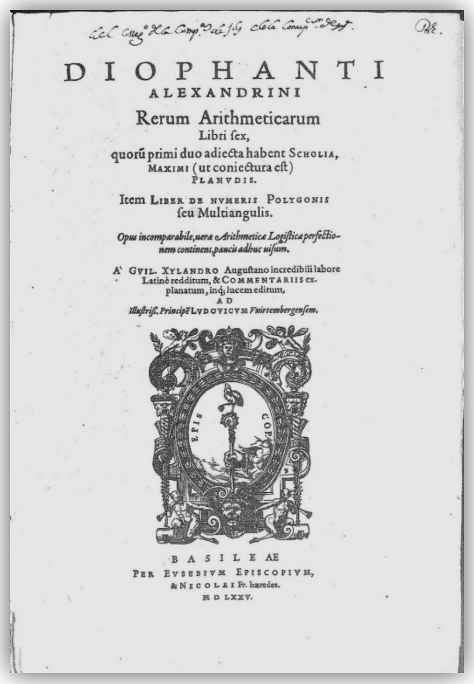
Tannery shows the relation of the MSS. in the following diagram:

Figura 2. Relación entre manuscritos propuesta por Tannery.

La obra Diofantina como objeto de estudio ha sido tratada durante muchos años y por diferentes autores, de estos trabajos se requiere resaltar algunos:

- Joachim Liebhard en 1556, publicó una carta dando a conocer que en el Vaticano había un manuscrito de Diofanto que era necesario conocer, pero fue necesario esperar hasta 1572, cuando Bombelli incluyó en su Álgebra muchos problemas diofantinos, Bombelli junto a Pazzi tradujeron al latín parte del Codex Vaticanus.

- Xylander[6], en el siglo XVI logra una traducción de un manuscrito griego (ver portada en la figura 3) y aunque no cita su fuente, Vera (1970) afirma que Xylander seguramente se basó en el códice de la biblioteca ducal de Wolfenbütel. De la traducción que realizaron Bombelli y Pazzi no se conocen manuscritos, es por esta razón que algunos historiadores aceptan la traducción hecha por Xylander como la primera traducción latina publicada de la obra de Diofanto.



DIOPHANTI
ALEXANDRINI
Rerum Arithmeticarum
Libri ſex,
quorũ primi duo adiecta habent SCHOLIA,
MAXIMI (ut coniectura eſt)
PLANVDIS.
Item LIBER DE NVMERIS POLYGONIS
ſeu Multiangulis.
Opus incomparabile, uerae Arithmeticae Logiſticae perfectionem continens, paucis adhuc uiſum.
A' GVIL. XYLANDRO Auguſtano incredibili labore Latinè redditum, & COMMENTARIIS explanatum, inq; lucem editum,
AD
Illuſtriß. Principẽ LVDOVICVM *Vuirtembergenſem.*
BASILEAE
PER EVSEBIVM EPISCOPIVM,
& NICOLAI Fr. haeredes.
M D LXXV.

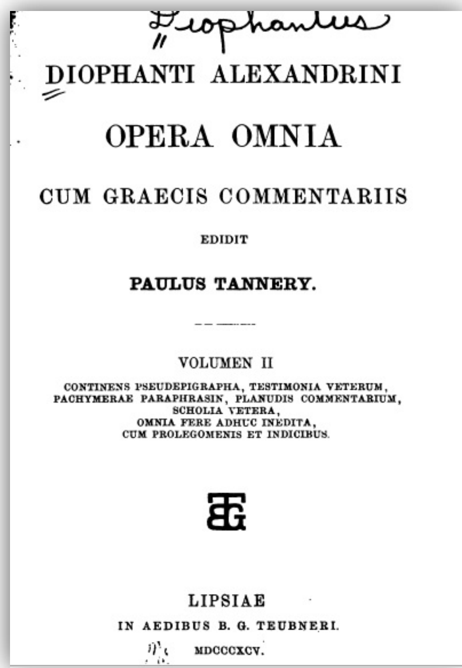
Figura 3. Portada del libro de Xylander 1575.

- Bachet de Méziriac, en 1621, publicó una traducción al latín que además contenía el texto griego; para su obra, Bachet se basó en el Codex Regius[7]

[6]Xylander (Alemania, 1532-1576): Su nombre en realidad es Wilhelm Holtzman, se desempeñó y destacó como filósofo, escritor y traductor. Vera (1970) afirma una escaza preparación matemática de Xylander a pesar de haber realizado traducciones de obras matemáticas de autores como Miguel Psellos y Euclides además de dictar una cátedra de lógica en la universidad de Heilderberg.
[7] Según Vera (1970) el Codex Regius es una copia de la Aritmética de Diofanto, hecha durante la segunda mitad del siglo XVI de los manuscritos del Vaticano.

que se encuentra actualmente en la Biblioteca Nacional de París. La obra de Bachet goza de una curiosidad, fue en uno de sus ejemplares donde Fermat realizó sus comentarios y anotaciones referidos, entre otros, al conocido como Último Teorema de Fermat, estos fueron posteriormente publicados por su hijo, Samuel de Fermat en 1670.

- Otra traducción relevante fue la realizada por Paul Tannery en 1893 (ver portada en la figura 4), que contiene el texto en griego y su traducción al latín. Tannery se basó en varios de los manuscritos disponibles, lo que le brinda mayor credibilidad sirviendo incluso como base del análisis de la obra diofantina que realizan en español autores como Vera (1970) y Muñoz et al. (2007).



DIOPHANTI ALEXANDRINI

OPERA OMNIA

CUM GRAECIS COMMENTARIIS

EDIDIT

PAULUS TANNERY.

VOLUMEN II

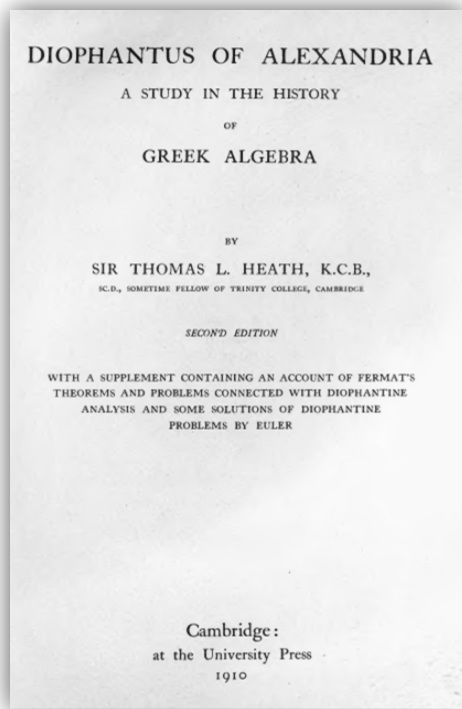
CONTINENS PSEUDEPIGRAPHA, TESTIMONIA VETERUM,
PACHYMERAE PARAPHRASIN, PLANUDIS COMMENTARIUM,
SCHOLIA VETERA,
OMNIA FERE ADHUC INEDITA,
CUM PROLEGOMENIS ET INDICIBUS.

LIPSIAE
IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI.
MDCCCXCV.

Figura 4. Portada del volumen II, Paul Tannery 1895

- En idiomas modernos tenemos las traducciones al alemán de Otto Schulz y de G. Wertheim realizadas en 1822 y 1890 respectivamente, la inglesa de

Thomas L. Heath editada en 1885 (ver portada en la figura 5) y la francesa de Paul Ver Eecke[8] de 1926.


DIOPHANTUS OF ALEXANDRIA

A STUDY IN THE HISTORY

OF

GREEK ALGEBRA

BY

SIR THOMAS L. HEATH, K.C.B.,

SC.D., SOMETIME FELLOW OF TRINITY COLLEGE, CAMBRIDGE

SECOND EDITION

WITH A SUPPLEMENT CONTAINING AN ACCOUNT OF FERMAT'S THEOREMS AND PROBLEMS CONNECTED WITH DIOPHANTINE ANALYSIS AND SOME SOLUTIONS OF DIOPHANTINE PROBLEMS BY EULER

Cambridge:
at the University Press
1910

Figura 5. Portada de la segunda edición, Thomas L. Heath 1885

Vera (1970) da cuenta de que las anteriores traducciones incluyen también la traducción del tratado sobre números poligonales, pero resalta sobre este particular, las traducciones realizadas al alemán por Poselger en 1819 y al francés por Georges Massouné en 1911.

Otro de los textos en los que se incluye también traducciones sobre el tratado de los números poligonales es escrito por Muñoz et al. (2007) ver portada en la figura 6.

[8] Para ampliar información consultar la obra de Vera (1970).

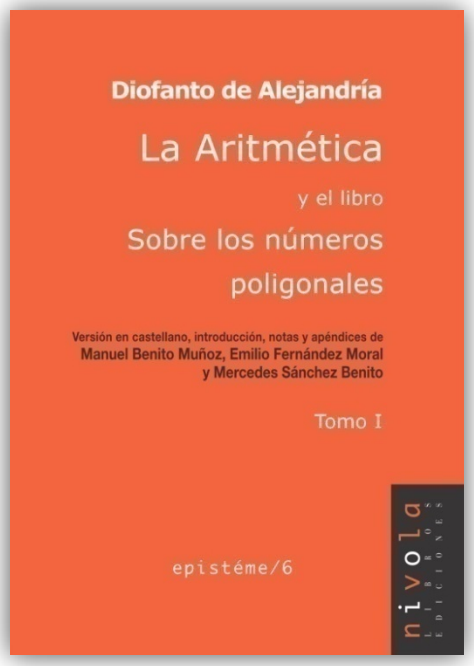


Figura 6. Portada del Tomo I, Muñoz et al. 2007

1.2. Las obras y libros de Diofanto

En 1972 fue encontrado en una biblioteca iraní un manuscrito árabe atribuido a Qustâ Ibn Lûqâ del cual sobreviven cuatro libros (de un total de siete). Los libros pertenecientes al manuscrito, numerados del IV al VII, hacen pensar que los primeros tres libros de esta obra se perdieron irremediablemente. La manera como fueron escritos estos cuatro libros sugiere que pueden ser parte de otra versión de *La Aritmética* de Diofanto.

Recientemente, el historiador de las matemáticas estadounidense Wilbur Knorr (1993) sugirió, en su publicación *Arithmêtike stoicheiôsis: On Diophantus and Hero of Alexandria*, que el libro *Preliminaries to the Geometric Elements*, atribuido usualmente a Herón de Alejandría, es de Diofanto, pero acerca de esto no se halla mayor información.

Desafortunadamente, de las otras posibles obras de Diofanto: Moriásticas, Libro de Porismas y, según conjetura Jean Christianidis, unos Elementos de Aritmética, no ha quedado nada. (Yuste, s.f.)

Mazur (2006) aclara que algunos manuscritos de *La Aritmética* tienen seis libros y otros siete, pero el total de problemas es el mismo, sólo la forma como los problemas son divididos es diferente. El mismo autor sugiere nuevas preguntas, él comenta que se tiene poca idea sobre a qué clase de audiencia estaba dirigida originalmente la Aritmética, *"¿acaso era un manual para profesores con algunas respuestas convenientes para el instructor?, ¿acaso son las notas de clase de un estudiante que, algunas veces diligentemente y otras negligentemente, recordaba los procedimientos de las sesiones de clase?"* (2006, p. 399)

Al respecto, como preámbulo, en el Libro I griego Diofanto dedica las siguientes palabras a Dionisio:

> *"Como me señalaste, respetadísimo Dionisio, tu interés por aprender a resolver los problemas que pueden plantearse a propósito de números me he propuesto confeccionar una guía metódica que te sirva para ello, comenzando, como me pides, con los principios más básicos que conforman la naturaleza esencial de los números y su potencialidad."* (Diofanto citado por Muñoz et al., 2007).

y, en el libro VII árabe, se encuentra: "*Queremos tratar en este Libro diversos problemas aritméticos (…) con el propósito de consolidar la habilidad adquirida, acrecentando la práctica y el hábito."* (Diofanto citado por Muñoz et al, Vol 2 p. 243). De esta manera el autor destaca, en -y con- su obra, tanto en los libros griegos como en los árabes, una clara intención de enseñanza.

1.3. Estructura de la Aritmética de Diofanto

Mazur señala que el texto de Diofanto fue escrito en la forma de un conjunto de problemas; según él, *La Aritmética* no se encuentra dividida mediante un articulado, tampoco se encuentra escrita como los *Elementos de Euclides*, con unas definiciones y axiomas iniciales que se utilizan para demostrar proposiciones que son incluidas posteriormente, aunque sí se encuentran claramente diferenciadas definiciones, problemas y proposiciones.

Diofanto define los “tipos de números” y cómo operará con ellos al inicio del libro I, luego de la dedicatoria a Dionisio. En la obra original, los llamados “tipos de números” no se encontraban numerados ni separados unos de otros, la numeración y separación en definiciones, como es conocida actualmente, fue introducida por Bachet (1621), según Muñoz et al. (2007) para que pudieran ser comentados y citados más cómodamente. Los conjuntos de problemas son expuestos por Diofanto a lo largo de los libros griegos y árabes; finalmente, en el apartado *Sobre los números poligonales* Diofanto no expone problemas sino un conjunto de proposiciones que demuestra.

En *La Aritmética* de Diofanto la selección de los problemas de cada libro pareciera no tener una intención de clasificación, exceptuando el apartado *Sobre los números poligonales* y los libros IV (árabe) y VI (griego) de *La Aritmética*, el primero dedicado a los cuadrados y cubos y el segundo, a la solución de 24 problemas de triángulos rectángulos.

Aunque los libros en *La Aritmética* carecen de clasificación aparente, es común que Diofanto, para hallar la solución de algunos problemas, haga uso de los resultados obtenidos como solución a problemas encontrados en otros libros; así, algo que no sorprende pero merece mención es que en los libros árabes se hace uso de resultados encontrados en los libros griegos.

En el libro I griego, después de la dedicatoria a Dionisio, Diofanto se ocupa de los principios básicos de los números, los aritmos y de algunas de sus potencias (tanto de los números como de los aritmos).

Antes de iniciar con el primer problema, Diofanto escribe a Dionisio:

> *Ocurre que los problemas aritméticos, en su mayor parte, tratan acerca de adición, sustracción, multiplicación o división de números de estos tipos, bien entre ellos mismos, o bien entre cualquiera de ellos y los lados de otros cualesquiera de ellos. Tales son los problemas que se podrán resolver recorriendo la vía que mostraremos.* (Diofanto citado en Muñoz et al., 2007, p. 18).

Como lo declara la cita, Diofanto describe la manera de sumar, restar, multiplicar y dividir los números que ha definido, esto incluye cómo operar con números de la misma especie[9] y con fracciones incluyendo a las alícuotas (cuyo numerador es 1 y el denominador es un número de cualquier especie).

Los enunciados presentes en *La Aritmética* están escritos, casi en su totalidad, de manera general[10] . En la tabla 2 se muestran problemas con enunciado general y en particular el Problema 30 del libro V griego, el cual es el único de *La Aritmética* que involucra números concretos en su enunciado.

---

[9] Cada uno de los x^n con $n \in \{1,2,3,\dots 6\}$ pertenecen a una especie, por tanto se pueden sumar, sustraer, multiplicar y dividir, con otros de la misma especie.

[10] Todos los enunciados de los problemas son escritos de manera general, excepto el problema 30 del libro V griego, es el único que involucra números concretos en su enunciado y fue tomado como punto de partida por Paul Tannery (citado en Vera, 1970) para ubicar cronológicamente a Diofanto. Tannery afirma que si los datos de este enunciado son reales se debe situar a Diofanto hacia la segunda mitad del siglo III, siendo, por tanto, contemporáneo de Pappo y anterior en un siglo a Theón de Alejandría y a Hipatía. Tannery realiza esta afirmación basado en la relación entre los precios de los vinos de baja calidad y la época acorde a tales precios en el mundo grecorromano.

<table>
<tr><th>Problema 12 del libro VI árabe (enunciado general).</th><th>Problema 30 del libro V griego: único problema que involucra números concretos en su enunciado.</th></tr>
<tr><td>Encontrar dos cuadrados tales que añadiendo a cada uno de ellos el cociente del mayor entre el menor, se obtengan cuadrados.</td><td rowspan="5">Una persona compró un cierto número de medidas de vino, unas a ocho dracmas cada una y otras a cinco, pagando en total un número cuadrado de dracmas. Este número, aumentado en 60 unidades, da otro cuadrado que tiene por lado el número total de medidas de vino compradas. ¿Cuántas medidas compró de cada precio?</td></tr>
<tr><td>Problema 1 del libro I griego (enunciado general)</td></tr>
<tr><td>Descomponer un número dado en dos partes cuya diferencia sea dada</td></tr>
<tr><td>Problema 14 del libro II griego (enunciado general)</td></tr>
<tr><td>Descomponer un número dado en dos partes y encontrar un cuadrado que añadido a cada una de estas dos partes forme un cuadrado.</td></tr>
</table>

Tabla 2. Ejemplos de enunciados de los problemas en la Aritmética de Diofanto.

Sessa (2005, p. 49) considera que la obra de Diofanto es un trabajo de "*aritmética-logística* [11] *aunque los enunciados son generales y abstractos, en las demostraciones encontramos cálculos con números concretos*". En contraste con lo que expone Vera (1970) quien sustenta que Diofanto llama a su obra Aritmética justo para diferenciarla de la *logística:*

[11] En la Grecia Clásica se denominaba "*logística*" al arte de calcular, por oposición a la aritmética, reservada a la teoría de números (Sessa, 2005).

> *Los enunciados de las cuestiones anteriores a él son historietas más o menos complicadas cuya solución se obtiene, en cada caso particular, mediante una serie de operaciones concretas que, luego de efectuadas, se olvidan de una vez para otra; los problemas diofánticos se refieren exclusivamente a números abstractos, y, reaccionando contra los logísticos que no demostraban nada, limitándose a dar la solución del problema propuesto, Diofanto la analiza, y el camino que sigue para llegar a ella, aunque no siempre satisfactorio, es rigurosamente científico.* (p. 1023).

En los libros de Diofanto aparecen problemas en los cuales se trabajan números con potencias 4, 5 o 6, lo que muestra de algún modo una flexibilización del "sujetamiento geométrico" (Sessa, 2005, p. 50) necesario para mostrar que del manejo de los números podían deducirse reglas exentas de prejuicios geométricos, Diofanto no sólo se separa del sujetamiento geométrico, él llega más lejos al hacer uso de ejemplos numéricos para “demostrar” la generalidad de sus enunciados, los autores Vera y Sessa clasifican la obra diofantina como una obra que se aleja del arte de realizar cálculos en oposición a la opinión de S.W. Hawking (2006) quien manifiesta, sobre la Aritmética de Diofanto, que es un trabajo de logística o de cálculo aritmético. Lo cierto es que no se debe olvidar lo interesante que resulta encontrar la generalidad en los enunciados de Diofanto haciendo uso de las soluciones numéricas que propone.

El libro IV árabe, que consta de 44 problemas, trata del hallazgo de cuadrados y cubos, todos los problemas incluyen potencias de tres en sus cálculos. Este libro inicia con una introducción en la que se citan los métodos de la “restauración” y “reducción” para solución de problemas; Muñoz et al. escriben al respecto que por restauración entienden que es un método utilizado para la solución de ecuaciones que consistía en, términos actuales, sumar a ambos miembros de la igualdad lo que está restando y por reducción, la acción de eliminar en ambos miembros de la igualdad los términos iguales; esto es, la aplicación de la propiedad cancelativa de la adición entre números racionales; métodos similares a los utilizados por Al-Khwarizmi quien los llamó *al-jabr* y *al-muqabala*[12] respectivamente. Ejemplos de estos métodos se pueden ver en la tabla 3 donde se presentan las soluciones de los problemas 10 y 11 del libro del libro IV árabe, utilizando simbología actual para representar la solución:

Problema 11 del libro IV árabe (restauración)	**Problema 10 del libro IV árabe (reducción)**
Encontrar un cubo tal que si se le resta un número dado de veces el cuadrado de su lado, resulta un cuadrado. Es decir, dado a,encontrar x tal que: $$x^3 - ax^2 = \square$$ Solución. Sea el número dado $a = 6$. Pongamos a^3 para el cubo buscado. De la identificación $$a^3 - 6a^2 = \square \equiv (2a)^2 = 4a^2$$ resulta, por **restauración**, $a^3 = 10a^2$, de donde $a = 10$, y se tiene: $$10^3 - 6 * 10^2 = 1000 - 6 * 100 = 400 = 20^2$$	Encontrar un cubo tal que si se le añade un número dado de veces el cuadrado de su lado, resulta un cuadrado. Es decir, dado a, encontrar x tal que: $$x^3 + ax^2 = \square$$ Solución. Sea el número dado $a = 10$. Pongamos a^3 para el cubo buscado.Podemos identificar $$a^3 + 10a^2 = \square \equiv (ma)^2$$ Con m tal que $m^2 > 10$, para hacer posible **la reducción.** Por ejemplo, si $m = 4$: $$a^3 + 10a^2 = (4a)^2 = 16a^2$$ $$a^3 + 10a^2 = 16a^2$$ $$a^3 + 10a^2 - 10a^2 = 16a^2 - 10a^2$$

[12]En términos modernos Al-jabr: sumar a ambos lados de una ecuación una misma expresión. Al-muqabala: es la manera de poder eliminar aquello que aparece igual en dos expresiones equivalentes.

	En el paso anterior Diofanto reduce el termino $10a^2$, para para conseguirlo, lo resta a ambos lados de la igualdad, luego $a^3 = 6a^2$, $a = 6$ y se tiene: $6^3 + 10 * 6^2 = 216 + 360 = 576 = 24^2$

Tabla 3. Ejemplos de restauración y reducción en la Aritmética de Diofanto.[13]

Si bien estos “métodos” habían sido utilizados en los libros griegos, en los árabes, Diofanto los enuncia de nuevo y además complementa la explicación del método utilizado para resolver los problemas, con las siguientes palabras:

> *El cálculo [consecuencia de la restauración y la reducción] nos conduce a una sola de las especies*[14] *de las que hemos descrito la multiplicación de unas por otras y la división de unas por otras, igual a otra especie, será necesario dividirlo todo por la especie menos elevada de entre ambos miembros, a fin de obtener una sola especie igual a un número.* (Diofanto citado por Muñoz et al., 2007, Vol 2 p. 164)

Ejemplo de multiplicación y división “entre especies” lo podemos encontrar en la tabla 3 en donde se encuentra consignado que:

[13] Ejemplos tomados de (Muñoz et al., 2007)
[14] Estas "especies" son, en primer lugar, las diversas potencias de la cantidad desconocida de la segunda a la sexta potencia inclusive, la cantidad desconocida en sí, y las unidades. (Heath, 1910, p. 129)

- $(2a)^2 = 4a^2$; Como se trata de un cuadrado, la definición propuesta por Diofanto dice que es el resultado de multiplicar el lado, es decir, $2a \cdot 2a$ de lo que resulta otra especie que es $4a^2$.
- $a^3 = 6a^2$, $a = 6$; en este caso, Diofanto para llegar a la solución en la que una sola especie es igual a un número, debió hacer algo como $a^3 = 6a^2$ y $\frac{a^3}{a^2} = \frac{6a^2}{a^2}$, para finalmente concluir que $a = 6$.

Diofanto, en el libro V árabe abarca la solución de 16 diferentes problemas aritméticos encontrando varios en los que se involucran cuadrados y cubos; en este libro, los problemas 7 y 8 son iguales a los problemas 1 y 2 del libro IV griego [15] salvo que en esta ocasión el autor hace algunas restricciones que delimitan totalmente los problemas, restricciones que Bachet había señalado en su comentario al manuscrito griego.

El manuscrito árabe de *La Aritmética* de Diofanto finaliza con 23 problemas del libro VI y 18 problemas en el libro VII. De los problemas del libro VI, diez tratan de encontrar un cubo y un cuadrado, ocho de hallar dos cuadrados, tres de encontrar tres cuadrados y sólo uno de hallar un cubo; el autor realiza el cálculo de raíces cuadradas en los problemas 8, 9 y 10, y todos los problemas de este libro incluyen cálculos con cubos.

En cuanto al libro VII, en realidad los problemas son de variada índole, incluyen expresiones con potencias de 9, 6, 4, 3, 2 y 1; el segundo problema trata de hallar tres cubos que a la vez sean cuadrados, en el problema 5 las cantidades

[15] V (a).7: Encontrar dos números tales que su suma y la suma de sus cubos sean iguales a dos números dados.
IV.1: Descomponer un número dado en dos cubos tales que la suma de sus lados sea otro número dado.
V (a).8: Encontrar dos números tales que su diferencia y la diferencia de sus cubos sean iguales a dos números dados.
IV.2: Encontrar dos números tales que su diferencia sea un número dado, y la diferencia de sus cubos sea otro número dado.

desconocidas son una potencia de nueve, un cubo y un cuadrado, el problema 3 pide hallar un bicuadrado y un cubo, en los problemas 4, 7, 8, 9 y 10 las cantidades desconocidas son un cubocubo (sexta potencia) junto con cuadrados y lados. Los problemas 17 y 18 piden hallar cuadrados, 3 y 4 respectivamente, en progresión geométrica.

Los seis libros de fuente griega de la Aritmética forman una colección de 189 problemas y los cuatro libros de fuente árabe añaden otros 101, cada uno de ellos admite una o más soluciones, siempre con solución positiva y racional.

En lo que se conserva del libro *Sobre los números poligonales*, Diofanto prueba 4 proposiciones, hace la presentación de los números poligonales: triangulares, cuadrados y pentagonales, mostrando cómo se forman[16] a partir de sucesiones y cómo se representan, sugiriendo, que de igual manera se forman y representan los números hexagonales, heptagonales, etc. Cuando finaliza esta presentación, que se asemeja a las definiciones en un sistema axiomático, Diofanto nos adelanta uno de sus resultados:

> *Así como los números cuadrangulares son obviamente cuadrados, porque resultan de la multiplicación de un número por sí mismo, hemos descubierto que si un número poligonal se multiplica por un cierto número que depende del número de sus ángulos, y se añade al producto un cierto cuadrado dependiente de nuevo del número de ángulos, se convierte en un cuadrado. Demostraremos este resultado, haciendo ver, además, cómo encontrar un número poligonal de*

[16]Los números triangulares se forman por adición sucesiva de los términos de la sucesión 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,… y resultan 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28,… Su representación gráfica se obtiene prolongando dos lados del triángulo y añadiendo un tercer lado. Los números cuadrangulares se forman sumando los términos de la sucesión 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13,… y resultan 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49,… Su representación gráfica consiste en prolongar dos lados contiguos del cuadrado y completarlo. De igual manera muestra cómo se forman y representan los números pentagonales a partir de la sucesión 1, 4, 7, 10, 13, 16,…

número de ángulos propuesto, si se conoce su lado, y cómo encontrar el lado de un número poligonal dado. Pero primero demostraremos las proposiciones que se requieren para llegar a este objetivo. (Diofanto citado por Muñoz et al., 2007, Vol 2 p. 265)

Anunciando de esta manera la intención de demostrar los resultados que va obteniendo, a continuación de ésta da inicio a la exposición de las proposiciones que demuestra.

En la tabla 4 se resume información básica sobre la composición de los libros de Diofanto. Para hacer referencia a los libros árabes se usará (a) luego del número, así, V(a) se refiere al libro V de fuente árabe. Para el tratado sobre números poligonales se utilizará la abreviatura Polg.

Libro	Descripción
I	39 problemas en total, 25 problemas de primer grado, 14 problemas de segundo grado[17].
II	35 problemas en total, los 5 primeros son problemas apócrifos[18], los 30 restantes son problemas de segundo grado. El problema 8 dio origen al último teorema de Fermat.
III	21 problemas en total, el 10 es el primero resuelto por falsa posición; en el 19, Diofanto acude por primera vez a la representación geométrica.
IV	40 libros en total, casi todos los problemas se refieren a números cúbicos y son problemas de segundo y tercer grado.
V	30 problemas en total, de los cuales 28 son de segundo y tercer grado, en el problema 29 intervienen cantidades bicuadradas desconocidas que hábilmente Diofanto logró encontrar reduciéndolas a expresiones

[17] Entendiendo por problemas de primer y segundo grado, aquellos que se solucionan con ecuaciones de primer y segundo grado.

[18] Algunos historiadores opinan que los 5 primeros problemas no son originarios de Diofanto por ser idénticos a los problemas del libro I-31, 34, 36-corolario, 32 y 33 respectivamente.

	cuadráticas. Aparece el único problema que cae en el campo de la logística griega.	
VI	24 problemas en total, referidos a triángulos rectángulos.	
IV(a)	44 problemas en total	Donde la solución buscada es principalmente un cuadrado o un cubo.
V(a)	16 problemas en total	
VI(a)	23 problemas en total	
VII(a)	18 problemas en total	
Polg.	Diofanto anuncia desde el principio la intención de demostrar los resultados que ha obtenido, para esta labor, y antes de intentar cualquier demostración, hace la presentación de los números poligonales; luego inicia con la exposición de 4 proposiciones (autores como Muñoz et al. y Heath incluyen una quinta proposición), donde se muestran diferentes tipos de progresiones aritméticas.	

Tabla 4. Información básica sobre la composición de la obra Diofantina.

Para terminar, es importante mencionar que luego de ser rescatados del anonimato, los libros de Diofanto han servido de inspiración a grandes matemáticos, éstos "*son una serie de retos que han inspirado muchas investigaciones a lo largo de la historia estimulando directa o indirectamente el trabajo de célebres matemáticos como Vieta, Bachet, Fermat, Descartes, Euler, Jacobi, Lagrange, Legendre, Dirichlet, Kummer, Henri Poincaré, André Weil y muchos otros*."(Muñoz et al., 2007, p. 13).

Capítulo 2.

2. LA SIMBOLOGÍA DE DIOFANTO

Durante el desarrollo de este capítulo se estudiarán las diferentes representaciones de los símbolos matemáticos que Diofanto utilizaba; inicialmente se mostrará cómo era el sistema de numeración que manejaba Diofanto y cuáles eran sus símbolos, luego se presentarán los diferentes signos que utilizó para las operaciones y para las potencias de aritmo.

2.1. Símbolos Numéricos

El sistema de símbolos para los números utilizado por Diofanto fue el sistema de numeración jónico, que empleaba 24 letras del alfabeto griego clásico, junto con las tres letras *digamma, qoppa y sampi*, para completar así un total de 27 letras que pueden ser vistas en la tabla 5. Estas letras se dividen en tres clases, las de la primera clase son las unidades y representan los números del 1 al 9, simbolizados por las 8 primeras letras del alfabeto griego clásico, junto con la letra *digamma* que simboliza el número 6; la segunda clase son las decenas, representan los números del 10 al 90 simbolizados por las ocho letras siguientes del alfabeto griego clásico junto con la letra *qoppa* que representa el número 90; y la tercera clase, la de las centenas, del 100 al 900, representadas por las últimas letras del alfabeto griego clásico más la letra *san* o s*ampi* que representa el número 900 (ver tabla 5, tomada de Ifrah, 2000).

UNIDADES				DECENAS				CENTENAS			
$\boldsymbol{\alpha}$	Α	Alfa	1	ι	Ι	Iota	10	ρ	Ρ	Rho	100
$\boldsymbol{\beta}$	Β	Beta	2	κ	Κ	Kappa	20	ς ó σ	Σ	Sigma	200
$\boldsymbol{\gamma}$	Γ	Gamma	3	λ	Λ	Lambda	30	τ	Τ	Tau	300
$\boldsymbol{\delta}$	Δ	Delta	4	μ	Μ	Mi	40	υ	Υ	Ýpsilon	400
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Ε	Épsilon	5	ν	Ν	Ni	50	ϕ	Φ	Phi	500
ϛ	Ϝ	Digamma	6	ξ	Ξ	Xi	60	χ	Χ	Chi	600
$\boldsymbol{\zeta}$	Ζ	Dseta	7	o	Ο	Ómicron	70	ψ	Ψ	Psi	700
$\boldsymbol{\eta}$	Η	Eta	8	π	Π	Pi	80	ω	Ω	Omega	800
$\boldsymbol{\theta}$	Θ	Theta	9	ϟ	Ϙ	Qoppa	90	ϡ	Ϡ	Sampi	900

Tabla 5. Sistema de numeración griego.

Las letras empleadas para comunicarse por escrito también eran utilizadas para representar números, surgiendo así la necesidad de diferenciar cuándo éstas representaban números o palabras. Para expresar que una letra representaba un número, algunos escribían sobre las letras una línea horizontal[19], por ejemplo, $\bar{\alpha} = 1, \bar{\beta} = 2, \bar{\gamma} = 3$.

Para representar los números que no tienen un símbolo determinado se hacían combinaciones. Como el sistema de numeración jónico es aditivo, los números se agregaban uno tras otro hasta encontrar el número deseado. Para el caso de los números del 11 al 19 éstos se simbolizaban iniciando con la letra *iota* que corresponde al número 10 junto con la letra correspondiente a su derecha que representaría la unidad que deseaba agregar, se pueden observar algunos ejemplos en la tabla 6.

[19] Según Cajori (1928, pág. 25) la línea horizontal en los números griegos difícilmente puede considerarse como una parte esencial de la notación, ya que esta marca no sólo se utilizaba para diferenciar números de letras.

$\overline{\boldsymbol{\iota\alpha}}$	**11**	$\overline{\boldsymbol{\iota\varepsilon}}$	**15**
$\overline{\boldsymbol{\iota\beta}}$	12	$\overline{\iota\varsigma}$	16
$\overline{\boldsymbol{\iota\gamma}}$	13	$\overline{\iota\zeta}$	17
$\overline{\boldsymbol{\iota\delta}}$	14	$\overline{\iota\eta}$	18
	$\overline{\boldsymbol{\iota\theta}}$	19	

Tabla 6. Representación de los números del 11 al 19 en sistema jónico.

De manera similar se hacía para las centenas; por ejemplo, $\overline{ϡ\pi}$ que equivale al número 980. Según Heath, en los libros $IV-28$ y $IV-39$ de Diofanto, aparecen los números $\overline{\phi\iota\beta}$ y $\overline{\rho\kappa\alpha}$ que simbolizan los números 512 y 121, respectivamente.

Si se observa, el mayor número que se puede representar con el sistema de numeración griego jónico descrito hasta el momento es $\overline{ϡϟ\theta}$, esto es 999; así surge la pregunta: ¿Cómo se simbolizaban números mayores a éste? Al parecer, se utilizaba un signo distintivo, parecido a la letra *iota*, al lado inferior izquierdo de los numerales correspondiente a las unidades. En la obra *A History of Mathematical Notations* (Cajori, 1928) se encuentra una manera de representar los números 1.000, 2.000 y 3.000, que para este documento se ha completado hasta el número 9.000 y puede observarse en la tabla 7:

$\boldsymbol{,\alpha}$	$\boldsymbol{,\beta}$	$\boldsymbol{,\gamma}$	$\boldsymbol{,\delta}$	$\boldsymbol{,\varepsilon}$	$,\varsigma$	$\boldsymbol{,\zeta}$	$\boldsymbol{,\eta}$	$\boldsymbol{,\theta}$
1.000	2.000	3.000	4.000	5.000	6.000	7.000	8.000	9.000

Tabla 7. Representación de las unidades de mil.

El número 10.000 fue denotado por Diofanto con la letra M, la primera letra de la palabra $\mathrm{M}\upsilon\rho\iota o\iota$ que traduce diez mil, junto con una pequeña letra α en la parte superior, de igual manera procedió para representar las demás decenas de miles, por ejemplo, la letra M con una pequeña letra β en la parte superior fue usada para representar el número 20.000, tal como aparece en la tabla 8.

$\overset{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{M}}$	$\overset{\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{M}}$	$\overset{\boldsymbol{\gamma}}{\mathbf{M}}$	$\overset{\boldsymbol{\delta}}{\mathbf{M}}$	$\overset{\boldsymbol{\varepsilon}}{\mathbf{M}}$	…	$\overset{\boldsymbol{\iota\alpha}}{\mathbf{M}}$	$\overset{\boldsymbol{\iota\beta}}{\mathbf{M}}$	$\overset{\boldsymbol{\chi\xi\theta}}{\mathbf{M}}$
10.000	20.000	30.000	40.000	50.000		110.000	120.000	6.690.000

Tabla 8. Representación de las decenas de miles. (Ifrah, 2000, p. 221).

A pesar de lo anterior, Cajori (1928) establece que no siempre la notación se hizo de esta manera, ya que para representar 10.000 simplemente se colocaba un punto entre los símbolos. Por ejemplo, $\beta\cdot o\delta$ simboliza el número $20.074 = 2 \times 10.000 + 70 + 4$. Ifrah (2000) verifica lo anteriormente dicho e indica que Diofanto utilizó el punto en lugar de la letra M para indicar los diez miles. En Heath (1910, p. 46) aparecen varios ejemplos donde se encuentra este tipo de notación, a continuación se muestran dos de estos:

$\boldsymbol{\alpha\cdot\sigma\alpha}$ $\mathbf{1\times 10.000+200+1=10.201}$
$\boldsymbol{\gamma\cdot,\xi\chi\kappa\alpha}$ $\mathbf{3\times 10.000+6.000+600+20+1=36.621}$

2.2. Representación de potencias

2.2.1 Potencias de números

Diofanto imaginó que los números eran infinitos y que todos estaban compuestos por determinada cantidad de unidades; además, consideró que entre ellos se encontraban unos números que para él son determinantes ya que, según lo expuesto en la introducción de su libro, la mayor parte de los problemas tienen números de este tipo, estos son:

- Los *cuadrados* $(\tau\epsilon\tau\rho\alpha\gamma\acute{\omega}\nu\omega\nu)$, que son el resultado de la multiplicación de un número que denomina *lado* $(\pi\lambda\epsilon\upsilon\rho\acute{\alpha})$ del cuadrado, por él mismo; escrito en términos actuales si se denomina a al lado, su cuadrado es $a \cdot a = a^2$;
- los *cubos* $(\kappa\acute{\upsilon}\beta\omega\nu)$, resultantes de multiplicar los cuadrados con su correspondiente lado, es decir, $a^2 \cdot a = a^3$;
- los *cuadrados–cuadrados* $(\delta\upsilon\nu\alpha\mu o\delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\epsilon\omega\nu)$, resultantes de multiplicar los cuadrados por sí mismos, $a^2 \cdot a^2 = a^4$;
- los *cuadrado-cubos* $(\delta\upsilon\nu\alpha\mu o\kappa\acute{\upsilon}\beta\omega\nu)$, producidos al multiplicar un cuadrado por el cubo del mismo lado que el cuadrado, es decir $a^2 \cdot a^3 = a^5$; y
- los *cubo-cubos* $(\kappa\upsilon\beta o\kappa\acute{\upsilon}\beta\omega\nu)$, productos de cubos por sí mismos, $a^3 \cdot a^3 = a^6$ (Diofanto citado en Muñoz et al., 2007).

Al parecer, Diofanto no tenía una notación para estos números; por ejemplo, actualmente si se quiere referir al cuadrado de 3, se escribe 3^2, él se refería a ellos retóricamente, es decir, para indicar el cuadrado de 3, simplemente decía que 9 es un número cuadrado o en otras ocasiones escribía el cuadrado es 9 y su lado es 3 para referirse a los mismos números. Por ejemplo en Libro $IV-8$ al final de la solución Diofanto (citado por Heath, 1910, p.171), escribe: "… *el cubo es* $\frac{343}{2197}$ *su lado* $\frac{7}{13}$ ..."

2.2.2 Potencias de aritmos

Además de considerar potencias para los números, Diofanto trató otro tipo de potencias, a éstas las denominó potencias de aritmos. Tales potencias se observan en la tabla 9.

Nombre (griego)	Nombre (traducción)	Representación dada por Diofanto	Representación actual
(**δύναμις**)	Cuadrado	Δ^{Y}	x^2
(**κύβος**)	Cubo	K^{Y}	x^3
(**δυναμοδύναμις**)	cuadrado-cuadrado	$\Delta^{Y}\Delta$	x^4
(**δυναμόκυβος**)	cuadrado-cubo	ΔK^{Y}	x^5
(κυβόκυβος)	cubo-cubo	$K^{Y}K$	x^6

Tabla 9. Potencias de aritmos.

La incógnita, que no es alguna de las potencias antes listadas y que consta de una cantidad de unidades indeterminada, fue llamada por Diofanto simplemente aritmo: $\acute{\alpha}\rho\iota\vartheta\mu\acute{o}\varsigma$, y la denotó mediante el signo ς.

2.3. Símbolos para operaciones

Diofanto fue el primer matemático que introdujo el signo de sustracción. Era algo parecido a esto:

⋔

Quizá quería equivaler a la abreviatura del verbo griego leipein, "querer", el cual comienza con las letras griegas lambda (Λ) e iota (I). Diofanto no empleaba signos para la adición o la multiplicación. Representaba la adición simplemente yuxtaponiendo números o variables uno tras otro. Y nunca necesitó de un símbolo para la *multiplicación porque los coeficientes que usaban eran siempre enteros o fracciones determinados.* (Hawking, 2006, p.205)

Así, para la adición, solo se yuxtaponían los sumandos; como por ejemplo:

$$\mathbf{K^{\Upsilon}\overline{\alpha}\Delta^{\Upsilon}\overline{\iota\gamma}\ \varsigma\overline{\varepsilon}\mu^{o}\overline{\beta}}$$

que corresponde, en términos actuales a: $x^3 + 13x^2 + 5x + 2$. Nótese que antes del símbolo del número 2 aparece la letra μ^{o} la cual indica que 2 es el término independiente. Diofanto denotó los números determinados (los cuales se denominan actualmente como términos independientes en un polinomio) o soluciones a problemas, con una letra M o μ con el superíndice o, es decir, M^{o} o μ^{o}.

Para la resta se escribía el símbolo que anteriormente se mencionó; por ejemplo (para facilitar la escritura utilizaremos un símbolo similar ⋔):

$$\mathbf{K^{\Upsilon}\overline{\alpha}\varsigma\overline{\varepsilon}} \pitchfork \mathbf{\Delta^{\Upsilon}\overline{\iota\gamma}\mu^{o}\overline{\beta}}$$

Lo que en términos actuales es $x^3 + 5x - (13x^2 + 2)$.

Para representar el igual, se hacía uso de la palabra $\boldsymbol{\acute{\iota}\sigma o\varsigma}$ como se muestra en Tannery (1895, p.18), por ejemplo, en el problema 3 del libro $I - 3$ se tiene

$$\mu^{o}\overline{o\varsigma}\ \ \boldsymbol{\acute{\iota}\sigma o\varsigma}\ \ \varsigma\bar{\delta} \text{ que indica } 76 = 4x$$

también se utilizaba el símbolo escrito por Maximus Planudes, que al aparecer es una abreviación de la palabra $\acute{\iota}\sigma o\varsigma$:

$$\iota^{\sigma}$$

Planudes en sus transcripciones hacía abreviaturas para algunas palabras, como se muestran en la parte izquierda de la Tabla 10, éstas son abreviaturas que muestran la naturaleza de los pasos o las operaciones que los implican, por ejemplo: $\epsilon\kappa\theta. = \epsilon\kappa\theta\epsilon\sigma\iota\varsigma$, que quiere decir Planteamiento, $\tau\epsilon\tau\rho. = \tau\epsilon\tau\rho\alpha\gamma\omega\nu\iota\sigma\mu\acute{o}\varsigma$, Cuadratura; $\sigma\acute{\upsilon}\nu\theta. = \sigma\acute{\upsilon}\nu\theta\epsilon\sigma\iota\varsigma$, sumándolos; $\acute{\alpha}\phi. = \acute{\alpha}\phi\alpha\acute{\iota}\rho\epsilon\sigma\iota\varsigma$, restando; $\mu\epsilon\rho. = \mu\epsilon\rho\iota\sigma\mu\acute{o}\varsigma$, división y $\acute{\upsilon}\pi. = \acute{\upsilon}\pi\alpha\rho\xi\iota\varsigma$, que quiere decir hecho que resulta; para el caso del igual: $\iota^{\sigma} = \acute{\iota}\sigma o\varsigma$.

En Heath (p.48) se encuentra un ejemplo del uso de la simbología que se ha descrito para el caso de la solución al problema 28 planteado en el libro I, lo cual se observa en la tabla 10:

$\boldsymbol{I}$ – **28:** "*Encontrar dos números tales que su suma y la suma de sus cuadrados sean números dados.*"				
Simbología de Diofanto				**Traducción**
	$\bar{\kappa}$		$\overline{\sigma\eta}$	Los números son: 20 y 208
$\boldsymbol{\epsilon\kappa\theta.}$	$\varsigma\bar{\alpha}\mu^{o}\bar{\iota}$		$\mu^{o}\bar{\iota} ⋔ \varsigma\bar{\alpha}$	El número mayor y menor están dados por: $x + 10; 10 - x$
$\boldsymbol{\tau\epsilon\tau\rho.}$	$\Delta^{\Upsilon}\bar{\alpha}\varsigma\bar{\kappa}\mu^{o}\bar{\rho}$		$\Delta^{\Upsilon}\mu^{o}\bar{\rho} ⋔ \varsigma\bar{\kappa}$	Elevándolos al cuadrado tenemos: $x^2 + 20x + 100$; $x^2 - 20x + 100$
$\boldsymbol{\sigma\acute{\upsilon}\nu\theta.}$	$\Delta^{\Upsilon}\bar{\beta}\mu^{o}\bar{\sigma}$	ι^{σ}	$\mu^{o}\overline{\sigma\eta}$	Sumándolos e igualando al número mayor $2x^2 + 200 = 208$
$\boldsymbol{\acute{\alpha}\phi.}$	$\Delta^{\Upsilon}\bar{\beta}$	ι^{σ}	$\mu^{o}\bar{\eta}$	Restando $2x^2 = 8$
$\boldsymbol{\mu\epsilon\rho.}$	$\Delta^{\Upsilon}\bar{\alpha}$	ι^{σ}	$\mu^{o}\bar{\delta}$	Dividiendo $x^2 = 4$
	$\varsigma\bar{\alpha}$	ι^{σ}	$\mu^{o}\bar{\beta}$	$x = 2$

$\acute{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{\pi}$. $\mu^{o}\overline{\iota\beta}$ $\mu^{o}\bar{\eta}$	El resultado (los números son): 12 y 8

Tabla 10. Ejemplo del uso que Diofanto daba de los símbolos. [20]

2.4. Representación de las fracciones

Las primeras fracciones que se conocen del libro de Diofanto, son denominadas las partes alícuotas de números y de aritmos; la característica de ambas es que su numerador es uno, sin embargo, su representación es distinta.

2.4.1 Fracciones alícuotas de números

Heath (1910) describe tres maneras de representar dichas fracciones, una es con un doble acento a la derecha del número que indica el denominador; la segunda, utilizando en ocasiones el símbolo ⅂ en lugar del doble acento, o como lo expresó Tannery (1895), utilizando el símbolo $\times$, en lugar de colocar los anteriores. Un ejemplo de esta simbología se encuentra en la tabla 11, en donde pueden ser observadas las diferentes formas de representación para el número $\frac{1}{4}$.

$\boldsymbol{\delta}''$	$\boldsymbol{\delta}^{⅂}$	$\boldsymbol{\delta}^{\times}$
$\mathbf{\frac{1}{4}}$		

Tabla 11. Representación de fracciones alícuotas de números.

2.4.2 Fracciones no alícuotas de números

Para este tipo de fracciones, es decir para las que su numerador es distinto de uno, se presentan, también tres tipos de representación. En la primera, su

[20] En texto griego pertenece a la traducción de Planudes (citado en Heath, 1910, p.48).

denominador se escribe como se hace con los exponentes en la actualidad; un ejemplo de esta representación es:

$$\boldsymbol{\iota\epsilon^{\delta} = \frac{15}{4}}$$

Según Heath (1910), este método fue usado por Planudes y por Bachet en sus respectivas ediciones. Esta forma de escritura fue utilizada también por Arquímedes y Eutocio.

En la segunda representación se escribía primero el numerador, luego el denominador en la misma línea marcándolo con un acento al lado derecho del número, el siguiente es un ejemplo hallado en la obra de Heath (1910, p. 45).

$$\boldsymbol{\bar{\gamma}\delta' = \frac{3}{4}}$$

Otra representación es la adoptada por Tannery (1895), quien en su texto presenta la manera de escribir fracciones, separando el numerador y el denominador con una línea horizontal. Vale la pena señalar que Tannery escribe el numerador donde se coloca actualmente el denominador y viceversa.

$$\boldsymbol{\frac{\iota\varsigma}{\rho\kappa\alpha} = \frac{121}{16}}$$

Sin embargo, según Heath (1910, p.45) *"…es mejor omitir la línea horizontal…"*; en la tabla 12 se han registrado algunos de los ejemplos que aparecen en los libros de Diofanto según el mismo Heath (1910, p. 45).

EJEMPLO	**LIBRO**
$\begin{matrix}\iota\beta \\ \iota\zeta\end{matrix} = \frac{17}{12}$	$V - 10$
$\begin{matrix}\phi\iota\beta \\ ,\beta\upsilon\nu\varsigma\end{matrix} = \frac{2.456}{512}$	$IV - 28$
$\begin{matrix}\alpha \cdot \sigma\alpha \\ ,\epsilon\tau\nu\eta\end{matrix} = \frac{5.358}{10.201}$	$V - 9$
$\begin{matrix},\beta\psi\delta \\ \gamma \cdot\ ,\varsigma\chi\kappa\alpha\end{matrix} = \frac{36.621}{2.704}$	$IV - 16$

Tabla 12. Representación de fracciones no alícuotas de números.

No obstante, estos no eran los únicos tipos de representación, Heath (1910) señala que a menudo Diofanto expresaba fracciones colocando las palabras $\grave{\epsilon}\nu\ \mu o\rho\acute{\iota}\varphi$ o $\mu o\rho\acute{\iota}o\upsilon$ entre el numerador y el denominador, por ejemplo Diofanto escribe en $V - 22$:

$$\boldsymbol{\overline{\beta} \cdot\ ,\overline{\epsilon\chi}\ \grave{}\epsilon\nu\ \mu o\rho\acute{\iota}\varphi\ \ \overline{\rho\kappa\beta} \cdot\ ,\overline{\alpha\kappa\epsilon} = \frac{25.600}{1.221.025}}$$

Según Cajori (1928) los griegos representaban las fracciones escribiendo primero el numerador con un acento, luego el denominador marcado con dos acentos y escrito dos veces; así:

$$\boldsymbol{\iota\zeta'\kappa\alpha''\kappa\alpha'' = \frac{17}{21}}$$

Cajori (1928) además afirma que Diofanto expresaba de diferente manera las fracciones cuando las cantidades consideradas eran muy grandes, Según Cajori, Diofanto cambiaba el acento por el siguiente símbolo $\sim$.

$$\overline{\boldsymbol{\gamma\cdot\ \ ,\varsigma\chi\kappa\alpha}}\ ^{,\beta\psi\delta\sim} = \frac{\mathbf{36.621}}{\mathbf{2.704}} \quad ;\boldsymbol{IV-16}$$

2.4.3 Fracciones alícuotas de aritmos

Al igual que con las fracciones alícuotas de números, se hacen también representaciones de las fracciones alícuotas de aritmos. Un ejemplo de tal representación se encuentra en Tannery (1895, p. 334):

$\Delta^{\Upsilon\chi}\overline{\boldsymbol{\alpha}}$	$\boldsymbol{\frac{1}{x^2}}$	$\boldsymbol{V-9}$

En general, para representar una fracción alícuota de aritmo, Diofanto escribía el símbolo que representaba el número del denominador, para el caso en cuestión era el símbolo de la potencia del aritmo ($\Delta^{\Upsilon}= x^2$), seguido de una letra χ como exponente[21], dejando al final el símbolo para el número uno escrito de manera convencional como se muestra en la tabla 13.

Es importante destacar que las fracciones alícuotas cuyo denominador es alguna potencia de un aritmo reciben un nombre similar al de la potencia del aritmo. (Tabla 13).

Nombre (griego)	Traducción	Representación	Representación actual
$\boldsymbol{\acute{\alpha}\rho\iota\vartheta\mu o\sigma\tau\acute{o}\nu}$	aritmoston	$\varsigma^{\chi}\bar{\alpha}$	$\frac{1}{x}$

[21] En Muñoz et al. se señala que el signo manuscrito original (Tabla 13 casilla de representación) es una especie de aspa, pero no exactamente la letra griega χ.

$\boldsymbol{\delta\upsilon\nu\alpha\mu o\sigma\tau\acute{o}\nu}$	dunamaston	$\Delta^{\Upsilon\chi}\bar{\alpha}$	$\frac{1}{x^2}$
$\boldsymbol{\kappa\upsilon\beta o\sigma\tau\acute{o}\nu}$	cuboston	$\mathrm{K}^{\Upsilon\chi}\bar{\alpha}$	$\frac{1}{x^3}$
$\boldsymbol{\delta\upsilon\nu\alpha\mu o\delta\upsilon\nu\alpha\mu o\sigma\tau\acute{o}\nu}$	dunamodunamoston	$\Delta^{\Upsilon}\Delta^{\chi}\bar{\alpha}$	$\frac{1}{x^4}$
$\boldsymbol{\delta\upsilon\nu\alpha\mu o\kappa\upsilon\beta o\sigma\tau\acute{o}\nu}$	dunamocuboston	$\Delta\mathrm{K}^{\Upsilon\chi}\bar{\alpha}$	$\frac{1}{x^5}$
$\boldsymbol{\kappa\upsilon\beta o\kappa\upsilon\beta o\sigma\tau\acute{o}\nu}$	cubocuboston	$\mathrm{K}^{\Upsilon}\mathrm{K}^{\chi}\bar{\alpha}$	$\frac{1}{x^6}$

Tabla 13. Representación de fracciones alícuotas de aritmos.

2.4.4 Fracciones no alícuotas de aritmos

Según Heath (1910) para este tipo de fracciones se distinguen dos tipos de representación, la primera de ellas está basada en la presentada anteriormente, aunque como se espera, el símbolo α cambia pues la fracción ya no es alícuota, por ejemplo:

$\boldsymbol{\varsigma^{\chi}\overline{\eta}}$	$\boldsymbol{\frac{8}{x}}$	$\boldsymbol{IV-3}$
$\boldsymbol{\varsigma^{\chi}\overline{\lambda\varepsilon}}$	$\boldsymbol{\frac{35}{x}}$	$\boldsymbol{IV-15}$

El otro tipo de representación se utilizaba cuando los números o las expresiones ya no eran monomios, Diofanto expresaba fracciones colocando las palabras *ἐν μορίῳ* o *μορίου* entre el numerador y el denominador, como se hizo anteriormente, por ejemplo:

$\Delta^{\Upsilon}\bar{\xi}\mu^{o}\ ,\overline{\beta\phi\kappa}\quad \grave{\epsilon}\nu\ \mu o\rho\acute{\iota}\varphi\quad \Delta^{\Upsilon}\Delta\bar{\alpha}\mu^{o}\text{ϡ} \pitchfork \Delta^{\Upsilon}\bar{\xi}$	$\dfrac{60x^2 + 2520}{x^4 + 900 - 60x^2}$	$VI - 12$
$\Delta^{\Upsilon}\overline{\iota\epsilon} \pitchfork \mu^{o}\overline{\lambda\varsigma}\quad \grave{\epsilon}\nu\ \mu o\rho\acute{\iota}\varphi\quad \Delta^{\Upsilon}\Delta\bar{\alpha}\mu^{o}\overline{\lambda\varsigma} \pitchfork \Delta^{\Upsilon}\overline{\iota\beta}$	$\dfrac{15x^2 - 36}{x^4 + 36 - 12x^2}$	$VI - 14$

2.5. Las propiedades de la multiplicación entre números utilizadas por Diofanto

“*Una vez que te he explicado las distintas denominaciones de los números, paso a referirme a sus multiplicaciones. Te parecerán fáciles*.” (Diofanto citado por Muñoz et al., 2007, p 20), es lo que apunta Diofanto al inicio del libro I. y continúa:

“*Así, el número multiplicado por el número da el cuadrado*”, con lo cual se tiene, en simbolización moderna que: $a \cdot a = a^2$.

De manera similar, Diofanto continúa presentando potencias de números de manera retórica, así:

> *(…) el número multiplicado por el número da el cuadrado; por el cuadrado, da el cubo; por el cubo, el cuadrado-cuadrado; por el cuadrado-cuadrado, el cuadrado-cubo; por el cuadrado-cubo, el cubo-cubo. A su vez, el cuadrado multiplicado por el cuadrado da el cuadrado-cuadrado; por el cubo, el cuadrado-cubo; por el cuadrado-cuadrado, el cubo-cubo y el cubo multiplicado por el cubo da el cubo-cubo*. (Diofanto citado por Muñoz et al., 2007, p. 18).

Lo cual corresponde, en simbología actual, a las siguientes igualdades:

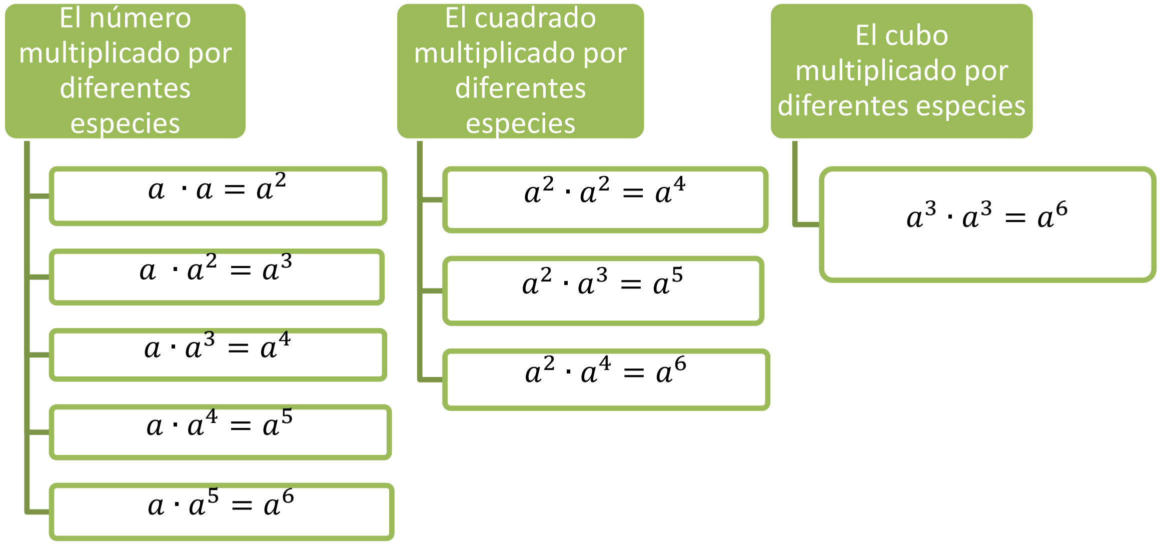


Tabla 14. Multiplicaciones expuestas por Diofanto entre números de distintas especies.

Cuando Diofanto expone la forma como se deben multiplicar los números lo hace de manera general respecto al número, como puede observarse en la tabla 14, sin embargo, particulariza respecto a las potencias, según Diofanto citado por Muñoz et al., *"Se sabe que cada uno de aquellos números recibe una designación más breve cuando es un elemento genérico del cálculo aritmético"* (2007, p. 18) tal como se muestra en la tabla 15:

Nombre (griego)	Nombre (traducción)	Representación	Representación actual
(**δύναμις**)	Cuadrado	Δ^{Υ}	$x \cdot x = x^2$
(**κύβος**)	Cubo	K^{Υ}	$x^2 \cdot x = x^3$
(**δυναμοδύναμις**)	cuadrado-cuadrado	$\Delta^{\Upsilon}\Delta$	$x^2 \cdot x^2 = x^4$
(**δυναμόκυβος**)	cuadrado-cubo	ΔK^{Υ}	$x^2 \cdot x^3 = x^5$
(**κυβόκυβος**)	cubo-cubo	$K^{\Upsilon}K$	$x^3 \cdot x^3 = x^6$

Tabla 15. Potencias de aritmos.

De donde puede inducirse que Diofanto utiliza esta propiedad:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Aclarando, como puede verse en la Tabla 15, que el autor explicita las potencias hasta seis, aunque en el desarrollo de algunos problemas sugiera el uso de potencias del aritmo con exponentes[22] 8 y 9.

Diofanto afirma que *"Todo número multiplicado por una fracción que tenga por denominador el mismo número es la unidad"* (citado en Heath, 1910, p. 1033), es decir: $a \cdot \frac{1}{a} = 1$. El alejandrino también señala que la unidad es la cantidad constante e invariable, su multiplicación por cualquier número da como resultado el mismo número, además, como lo escriben Muñoz et al. (2007, p. 21) *"cualquier especie multiplicada por la unidad da la misa especie"*. De estas afirmaciones, se puede inferir que Diofanto conocía que el elemento neutro de la multiplicación era la unidad (esto es, $a \cdot 1 = a$). Evidencia de lo último se encuentra en III-6, Diofanto afirma que:

$$(\varsigma - 1)^2 = \varsigma^2 + 1 - 2\varsigma$$

Para lo cual debió hacer algo como:

$$(\varsigma - 1)^2 = (\varsigma - 1) \cdot (\varsigma - 1) = \varsigma^2 + 1 - \varsigma - \varsigma = \varsigma^2 + 1 - 2\varsigma$$

Las fracciones alícuotas fueron otra de las especies de números empleados por Diofanto, de ahí que describa, que el resultado de multiplicar dos fracciones alícuotas es otra fracción alícuota cuyo denominador es el producto de los correspondientes denominadores. Inicialmente el alejandrino relata en palabras, de manera general, que el producto de dos números de este tipo, es $1/a \cdot 1/b = 1/ab$, y así aparece en Vera (1970, p. 1033). Luego, Diofanto describe de modo particular los productos para las fracciones alícuotas de aritmos; en la tabla 16 pueden ser observados los productos de fracciones alícuotas que enunció Diofanto. Lo anotado en la tabla 16 puede ser anotado, actualmente, como:

[22] como puede consultarse en los problemas V(a)-4, 5, 6 y VII(a)-5.

$$\frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{a^m} = \frac{1}{a^n \cdot a^m} = \frac{1}{a^{n+m}}.$$

Esclareciendo que tanto a, n y m son, para Diofanto, números enteros mayores que cero.

$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{1+n}}$	$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{2+n}}$	$\frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{3+n}}$	$\frac{1}{a^4} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{4+n}}$
$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a^1} = \frac{1}{a^4}$	$\frac{1}{a^4} \cdot \frac{1}{a^1} = \frac{1}{a^5}$
$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^4}$	$\frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^5}$	$\frac{1}{a^4} \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^6}$
$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^4}$	$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^5}$	$\frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^6}$	
$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a^4} = \frac{1}{a^5}$	$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a^4} = \frac{1}{a^6}$		
$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a^5} = \frac{1}{a^6}$			

Tabla 16. Operaciones de multiplicación entre Fracciones alícuotas.

Diofanto, antes de iniciar con el primer problema, creyó necesario explicitar el resultado de multiplicar una fracción alícuota por el denominador de la fracción elevado a distintas potencias, dicho en otras palabras, indica el camino que se debe seguir para hallar el producto de una fracción alícuota por un número de otra especie de las ya explicitadas. Lo que Diofanto anota lo encontramos resumido en la tabla 17.

Fracción numérica	**Fracción cuadrática**	**Fracción cúbica**	**Fracción cuadrado-cuadrática**	**Fracción cuadrado cúbica**	**Fracción cubo-cúbica**
	$\frac{1}{a^2} \cdot a = \frac{1}{a}$	$\frac{1}{a^3} \cdot a = \frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a^4} \cdot a = \frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{a^5} \cdot a = \frac{1}{a^4}$	$\frac{1}{a^6} \cdot a = \frac{1}{a^5}$
$\frac{1}{a} \cdot a^2 = a$		$\frac{1}{a^3} \cdot a^2 = \frac{1}{a}$	$\frac{1}{a^4} \cdot a^2 = \frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a^5} \cdot a^2 = \frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{a^6} \cdot a^2 = \frac{1}{a^4}$
$\frac{1}{a} \cdot a^3 = a^2$	$\frac{1}{a^2} \cdot a^3 = a$		$\frac{1}{a^4} \cdot a^3 = \frac{1}{a}$	$\frac{1}{a^5} \cdot a^3 = \frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a^6} \cdot a^3 = \frac{1}{a^3}$
$\frac{1}{a} \cdot a^4 = a^3$	$\frac{1}{a^2} \cdot a^4 = a^2$	$\frac{1}{a^3} \cdot a^4 = a$		$\frac{1}{a^5} \cdot a^4 = \frac{1}{a}$	$\frac{1}{a^6} \cdot a^4 = \frac{1}{a^2}$
$\frac{1}{a} \cdot a^5 = a^4$	$\frac{1}{a^2} \cdot a^5 = a^3$	$\frac{1}{a^3} \cdot a^5 = a^2$	$\frac{1}{a^4} \cdot a^5 = a$		$\frac{1}{a^6} \cdot a^5 = \frac{1}{a}$
$\frac{1}{a} \cdot a^6 = a^5$	$\frac{1}{a^2} \cdot a^6 = a^4$	$\frac{1}{a^3} \cdot a^6 = a^3$	$\frac{1}{a^4} \cdot a^6 = a^2$	$\frac{1}{a^5} \cdot a^6 = a$	

Tabla 17. Operaciones de multiplicación entre fracciones alícuotas y números de otra especie.

De la misma manera, es decir, antes de iniciar con los problemas, aparece descrito por Diofanto lo que se puede entender como la ley de signos, que Muñoz et al. (2007, p. 22) anotan como, "*Menos multiplicado por menos es más, y menos por más es menos"*, lo escrito por Muñoz et al. se asemeja a lo anotado por Heath (1910, p. 130) quien escribe "*A minus multiplied by minus makes a plus; a minus multiplied by plus make a minus";* sin embargo, Heath acepta que la traducción literal sería "*A wanting multiplied by wanting make a forth coming"*. Una afirmación similar la encontramos en el libro de Vera (1970, p. 1034) escrita cómo "*El producto de lo deficiente por lo deficiente es positivo, el de lo deficiente por lo* *positivo es deficiente”*. Al respecto Hawking (2006, p. 205) señala que los términos positivos representan una “presencia”, y términos negativos una “falta”. Por lo cual:

- Una “falta” por una “falta” produce una “presencia”
- Una “presencia” por una “falta” produce una “falta”.

Evidencia del uso de la ley de signos en la obra diofantina se halla en varios de los problemas, por ejemplo:

$\boldsymbol{(\varsigma - 1)^2 = \varsigma^2 + 1 - 2\varsigma}$	$\boldsymbol{III - 6}$
$\boldsymbol{(2\varsigma - 3)^2 = 4\varsigma^2 + 9 - 12\varsigma}$	$II - 9$

También, en $\boldsymbol{I - 27,}$ Diofanto retóricamente plantea que si el número mayor es $\varsigma + 10$, entonces el menor debe ser $10 - \varsigma$, y queda establecido que la suma de los dos números es 20 unidades y su diferencia son 2ς. Para lo cual, debió hacer algo como:

$$\varsigma + 10 - (10 - \varsigma) = \varsigma + 10 + \varsigma - 10 = 2\varsigma.$$

Diofanto, en este punto del primer libro, detiene su extensa explicación sobre cómo multiplicar; agregando que una vez sean comprendidas las multiplicaciones presentadas, resultarán sencillas las divisiones. En la obra Diofantina, se insta al lector a emprender el estudio y ejercicio de las operaciones de adición, sustracción y multiplicación. Sin embargo, las descripciones de cómo operar con números no paran en este libro, Sesiano (1982) citado por Wilbur Knorr (1985) señala que en el prólogo del libro IV(a) se afirma que el proyecto del Alejandrino es extender los métodos que en los libros anteriores se habían aplicado a las especies de números lineales y planos[23] (como también en las que surgen de la composición

[23] Entendiendo por números lineales a los que son el lado de un cuadrado, por números planos, los que son un cuadrado.

de las dos) a la especie de números llamados sólidos[24] (y a los que pertenecen a su composición con las especies de números lineales y planos), por lo que, en lugar de introducir nuevos métodos, los siguientes libros proponen inculcar habilidades en el manejo de las técnicas ya presentadas. Lo que Diofanto muestra, se resume en términos actuales como sigue:

De la multiplicación de:	Resulta:	Y se tiene que
$\boldsymbol{a^2 \cdot a} =$	$a^3,$	$\frac{a^3}{a^2} = a$ y $\frac{a^3}{a} = a^2.$
$\boldsymbol{a^3 \cdot a = a^2 \cdot a^2} =$	$a^4,$	$\frac{a^4}{a^3} = a, \frac{a^4}{a^2} = a^2$ y $\frac{a^4}{a} = a^3.$
$\boldsymbol{a^4 \cdot a = a^3 \cdot a^2} =$	$a^5,$	$\frac{a^5}{a} = a^4, \frac{a^5}{a^2} = a^3, \frac{a^5}{a^3} = a^2, \frac{a^5}{a^4} = a.$
$\boldsymbol{a^5 \cdot a = a^3 \cdot a^3 = a^2 \cdot a^4} =$	$a^6,$	$\frac{a^6}{a} = a^5, \frac{a^6}{a^2} = a^4, \frac{a^6}{a^3} = a^3, \frac{a^6}{a^4} = a^2, \frac{a^6}{a^5} = a.$

Tabla 18. Resumen de operaciones descritas en los libros árabes.

Hasta este momento, Diofanto hace explicita la manera de multiplicar números de lo que él denomina diferentes especies, de lo cual podemos inferir que dominaba algunas propiedades de los números, por ejemplo:

Reducción y Restauración:

Antes de comenzar con los primeros problemas del libro I, el alejandrino, sin darle un nombre particular, escribe:

[24] Números solidos son los que resultan de la multiplicación de un número plano por uno lineal, es decir, los cubos.

> *Si en un problema resultan expresiones idénticas, pero no equipolentes, hay que restar en uno y otro lado las semejantes de las semejantes hasta obtener una sola expresión igual a otra sola expresión;* (Diofanto citado en Vera, 1970, pág. 1034).

Vera señala que Diofanto con estas palabras quiere mostrar que si en una igualdad hay términos semejantes (para Diofanto mismas especies), estos últimos se deben restar en uno o en otro lado hasta obtener una especie igual a otra[25], lo que sería en términos actuales "reducción de términos semejantes". Como ya se había mostrado en el primer capítulo, al inicio de libro IV árabe se encuentra referencia a tal manera de abordar las igualdades, aunque, en esta ocasión Muñoz et al. (2007) se refieren a esta como Reducción.

Lo anterior, es tal vez lo más cerca que Diofanto llegó a la idea del cero[26], solo para cuando los términos semejantes son positivos, ya que cuando los términos son negativos, Diofanto requería hacer un paso intermedio, entonces, para cuando los términos son negativos se tiene:

> *…y si se presentan expresiones negativas en uno o en otro lado añadirlas hasta conseguir positivas en uno y otro lado y luego restar las semejantes de las semejantes hasta que quede una sola expresión a uno y otro lado.* (Diofanto citado en Vera, 1970, pág. 1035).

Vera, se refiere a este método como la manera de hacer la transposición de términos en una ecuación, posiblemente el mismo método al que Muñoz et al. se

[25] por ejemplo de la igualdad $4x^2+5x=7x,$ restar a ambos lados el termino $5x$ para obtener $4x^2=2x,$ en cuya igualdad se tiene una especie igual a otra, método que permitiría acercarse a la solución.

[26] Del ejemplo del pie de página anterior se tiene: $4x^2+5x=7x,$

$$4x^2+5x-5x=7x-5x;$$

$$4x^2+0=2x$$

Sin querer indicar que Diofanto conoció el número cero, aunque si se quiere evidenciar que Diofanto se acercó a éste por medio de lo que parece ser la propiedad cancelativa para la adición. Sobre la noción de cero, en las siguientes páginas de internet se dice que Diofanto no tuvo noción del cero http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Diophantus.html y http://www.astroseti.org/articulo/3629 refieren como restauración "*sumar en ambos miembros lo que está restando.*" (2007, p. 164).

Aunque Vera y Muñoz et al. se refieran a estos métodos como diferentes, es posible que tal diferenciación no sea necesaria o no haya existido desde el principio, por ejemplo, Heath (1910, pág. 131) relata esto como:

> *... si un problema da lugar a una ecuación en la que ciertos términos son iguales a los términos de la misma especie pero con coeficientes diferentes, será necesario restar como de igual en ambos lados, hasta que un término sea encontrado igual a un término. Si por casualidad aquí están a cada lado o en ambos lados cualesquiera términos negativos, será necesario añadir los términos negativos en ambos lados, hasta que los términos de ambos lados sean positivos, y luego otra vez restar como de igual hasta que un único término sea dejado a cada lado.*

En suma, estos dos métodos, reducción y restauración, se podrían asociar con la propiedad cancelativa de la adición de los números racionales y en el fondo se estaría utilizando la propiedad conocida como uniforme de la igualdad (sumar o restar a ambos lados de la igualdad el mismo número) y la existencia del elemento inverso para la adición lo que haría pensar en el uso no explícito del cero como ya se había mencionado.

Ejemplo:

II-8: Descomponer un cuadrado dado en dos cuadrados[27].	
Si queremos descomponer 16 en dos cuadrados	$x^2 + y^2 = 16$
y suponemos que el primero es 1 aritmo,	$x^2 = \varsigma^2$

[27] Es decir, dado a, encontrar x, y tales que $x^2 + y^2 = \varsigma^2$. Comentario agregado por Muñoz et al.

el otro tendrá 16 unidades menos 1 cuadrado de aritmo, y, por tanto, 16 unidades menos 1 cuadrado de aritmo son un cuadrado.	$y^2 = 16 - \varsigma^2$
Formemos el cuadrado de un conjunto cualquiera de aritmos disminuido en tantas unidades como tiene la raíz de 16 unidades,	$y^2 = (m\varsigma - 4)^2$ Con m entero positivo
y sea el cuadrado de 2 aritmos menos 4 unidades.	$y^2 = (2\varsigma - 4)^2$
Este cuadrado tendrá, pues, 4 cuadrados de aritmo y 16 unidades menos 16 aritmos, que igualaremos a 16 unidades menos 1 cuadrado de aritmo,	$y^2 = (2\varsigma - 4)^2 = 4\varsigma^2 + 16 - 16\varsigma$ $= 16 - \varsigma^2$
y, sumando a uno y otro lado los términos negativos y restando los semejantes, resulta que 5 cuadrados de aritmo equivalen a 16 aritmos,	$4\varsigma^2 + 16 - 16\varsigma = 16 - \varsigma^2$ $4\varsigma^2 + \varsigma^2 + 16\varsigma + 16 - 16\varsigma = \varsigma^2 + 16\varsigma + 16 - \varsigma^2$ $5\varsigma^2 + 16 = 16\varsigma + 16$ $5\varsigma^2 + 16 - 16 = 16\varsigma + 16 - 16$ $5\varsigma^2 = 16\varsigma$
y, por tanto, 1 aritmo vale 16/5;	$5\varsigma^2 = 16\varsigma$ $5\varsigma = 16$ $\varsigma = 16/5$
luego uno de los números es 256/25 y el otro 144/25, números cuya suma es	$x^2 = \varsigma^2$

400/25, es decir: 16 unidades, y cada uno de ellos es un cuadrado.	$x^2 = \left(\frac{16}{5}\right)^2$ $x^2 = \frac{256}{25}$ $y^2 = \frac{144}{25}$ $x^2 + y^2 = \frac{400}{25} = 16$

Aunque Diofanto no especifique todas las propiedades de los números que conoce, se puede evidenciar en su trabajo que utilizó el elemento neutro de la multiplicación, el inverso multiplicativo, la propiedad cancelativa de la adición, la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición, y varias de las propiedades de los exponentes.

Después de haber estudiado las diferentes representaciones que Diofanto utilizaba, en el siguiente capítulo se presentará un análisis que da cuenta de la tipología que fue adaptada con el propósito de estudiar cómo el autor de *La Aritmética* utilizó la letra en su obra, exponiendo los distintos usos y “comportamientos” de la letra.

Capítulo 3.

3. USO DE LA LETRA EN LA OBRA DE DIOFANTO

En el capítulo anterior fueron estudiados algunos de los símbolos que Diofanto utilizó en su obra, en su mayoría números, pero también aparecieron letras, ¿Qué hay de cómo las utilizó? ¿Acaso las utilizaba para denotar una incógnita, una generalización, o una correspondencia entre números? el estudio del uso de estos signos, resulta relevante ya que permite distinguir, entre otras cosas, si el signo que representa "lo desconocido" fue empleado como incógnita, como variable o de otra manera de la cual no se tiene conocimiento; por eso, en esta sección se analizará el uso que Diofanto hace de la letra, en especial, se centrará en el estudio del aritmo, apoyados en la siguiente idea:

"(…) una letra puede tener distintos significados (….) La función de una letra depende del contexto en el que se encuentra (…)" (Esquinas, 2008, p. 124).

3.1. El uso de la letra en la obra de Diofanto

Inicialmente, es necesario precisar que hay diferentes tipificaciones del uso que se da a la letra en el marco de la Didáctica de las Matemáticas, entre ellas, las presentadas por: (i) Kücheman, (ii) Godino y Font, y (iii) Morales y Díaz, quienes interpretan el uso de la letra en un contexto de lenguaje algebraico simbólico.

En la tipificación presentada por Kücheman (citado en Morales y Díaz, 2003) atiende no sólo a diferentes maneras de entender el uso de la letra sino también a los errores que surgen cuando es usada por los estudiantes, por lo cual, en algunos casos, las propuestas de los autores antes mencionados fueron adaptadas al contexto en el cual se desarrolla este estudio. Así, la tipificación del uso de la letra que se ha tomado como base para el desarrollo de este trabajo es la siguiente:

3.1.1 Letra evaluada:

Esta tipificación corresponden a los casos en los cuales a la letra se le asigna un valor numérico (adaptado de Kücheman citado en Morales y Díaz, 2003).

Originalmente este uso dado a la letra, identificado por Kücheman, hace referencia al error que comenten los estudiantes al asignar un valor numérico concreto a la letra. Esquinas (2008) brinda un ejemplo que ilustra tal situación: un estudiante podría en la expresión $2x + 3 + 2x = 11$ sustituir aleatoriamente la x por 2 o por 3, sin llegar a comprender por qué en el primer caso la solución es correcta y en el segundo no lo es.

A pesar de la referencia original, ésta no será la tenida en cuenta aquí, más bien, se ha decidido incluir esta interpretación de la letra en sentido más literal (alejado del error), es decir, cuando se le asigna un número particular a una letra en una expresión, de tal manera que al reemplazar la letra por tal valor, la igualdad –si existe- se satisfaga o corresponda a una respuesta de un problema planteado. Bajo esta concepción de la letra, se encuentra que en *La Aritmetica* de Diofanto son muchos los problemas en los cuales se hace uso de la letra evaluada, ya que, al iniciar la solución, Diofanto expresa en terminos del aritmo todas las cantidades desconocidas, luego de manejo algebraico, determina un valor numérico para el aritmo y de esta manera encuentra la solución; y es entonces cuando se considera que el aritmo se usa como letra evaluada.

Por ejemplo:

$\mathbf{I-1}$	**Descomponer un número dado en dos partes cuya diferencia sea dada.**

"…al restar términos semejantes de los semejantes, es decir, 40 unidades de 100 y 40 unidades de 2 aritmos y 40 unidades, los 2 aritmos que quedan valdrán 60 unidades y cada aritmo ***30, que será la parte menor, y la mayor 30 más 40, o sea:70 unidades****."* (negrita nuestra, con el objetivo de resaltar la parte donde está siendo utilizada la letra bajo esta interpretación. En adelante, se hará lo mismo para otros ejemplos).

En este fragmento, lo que Diofanto está mostrando, en términos modernos queda:

$$2\varsigma + 40 = 100$$

$$2\varsigma = 60$$

$$\varsigma = 30$$

Es justo en lo que sigue donde se da uso a la letra como letra evaluada, ya que: la parte menor, como es un aritmo, vale 30 y como la parte mayor es $\varsigma + 40$, esto es 70.

$\mathbf{I-4}$	**Encontrar dos números que estén en una razón dada y cuyo excedente sea dado.**

"…el mayor tendrá 5 aritmos, los cuales excederán a 1 en 20 unidades; luego 4 aritmos valen 20 unidades y, por tanto, ***1, o sea: el número buscado, es 5 y el mayor 25…****"*

En términos modernos queda:

El menor de los números buscados es ς

El mayor es 5ς, restándolos

$$4\varsigma = 20$$

$$\varsigma = 5$$

El mayor 5ς, es decir 25.

-

III − 13	**Encontrar tres números tales que el producto de dos cualesquiera de ellos, disminuido en el otro, forme un cuadrado.**

"… el producto de la semisuma de estos números por sí misma es el cuadrado mayor y el de la semidiferencia por sí misma el del menor, de donde se deduce que 1 aritmo vale $\frac{25}{20}$, ***que es el primer número,*** $\frac{105}{20}$ ***el segundo y*** $\frac{100}{20}$ ***el tercero****."*

En terminos actuales, según Muñoz et al. (2007) el problema se puede interpretar como, encontrar los x, y, z tales que:

$$xy - z = \square, \qquad yz - x = \square, \qquad xz - y = \square$$

En donde $x = \varsigma$ y $y = \varsigma + 4$; entonces $xy = \varsigma^2 + 4\varsigma$. Y si se pone $z = 4\varsigma$ se cumple la primera condición $(xy - z = \varsigma^2)$, de esta manera, se tendrá entonces:

$$yz - x = 4\varsigma^2 + 15\varsigma = \square, \qquad xz - y = 4\varsigma^2 - \varsigma - 4 = \square$$

La diferencia de estos cuadrados es $16\varsigma + 4$. Considerando la descomposición $16\varsigma + 4 = (4\varsigma + 1)4$, se tendrá

$$\left(\frac{(4\varsigma + 1) + 4}{2}\right)^2 = 4\varsigma^2 + 15\varsigma, \qquad \left(\frac{(4\varsigma + 1) - 4}{2}\right)^2 = 4\varsigma^2 - \varsigma - 4$$

Resolviendo de cualquiera de ellas se obtiene que $\varsigma = \frac{25}{20}$, y para encontrar las otras dos soluciones se evalúa, en lo inicialmente planteado, el valor de ς; por lo tanto, los otros dos números, que dan solución al problema son: $\frac{105}{20}$ y $\frac{100}{20}$. Siendo estos resultados los que corresponden a reemplazar $\varsigma = \frac{25}{20}$ en $y = \varsigma + 4$ y en $z = 4\varsigma$, respectivamente.

De igual manera sucede con el siguiente ejemplo, donde se encuentra el valor de ς y apartir de este se encuentran las otras soluciones.

-

$\mathbf{II-8}$	**Descomponer un cuadrado dado en dos cuadrados**

"…Este cuadrado tendrá, pues, 4 cuadrados de aritmo y 16 unidades menos 16 aritmos que igualaremos a 16 unidades menos 1 cuadrado de aritmo, y, sumadno a un y otro lado los terminos negativos y restando los semejantes, resulta que 5 cuadrados de aritm equivales a ***16 artimos, y, por tanto, 1 artimo vale 16/5; luuego uno de los números es 256/25 y el otro 144/25****, …"*

En terminos actuales, según Muñoz et al. (2007), el cuadrado que se quiere descomponer en dos cuadrados es 16. Si el primero es ς^2, el segundo será $16 - \varsigma^2$ y deberá ser entonces, $16 - \varsigma^2 = \square$. Se formara el cuadrado de un conjunto cualquiera de aritmos disminuido en tantas unidades como fuera la raíz de 16;

$$\square = (m\varsigma - 4)^2$$

Si $m = 2$, se tendrá:

$$\square = (2\varsigma - 4)^2$$

$$\square = 4\varsigma^2 + 16 - 16\varsigma$$

Igualando

$$4\varsigma^2 + 16 - 16\varsigma = 16 - \varsigma^2$$

Haciendo restauración y reducción, se obtiene $5\varsigma^2 = 16\varsigma$, luego $\varsigma = \frac{16}{5}$; por lo tanto los cuadrados son $\frac{256}{25}$ y $\frac{144}{25}$, y es precisamente en esta última parte donde se interpreta que se está utilizando la letra evaluda.

En los ejemplos presentados para esta tipificación, se muestra que Diofanto, al iniciar la solución de un problema, escribe expresiones que relacionan los números desconocidos con el aritmo, hace un manejo algebraico de las expresiones para encontrar el valor numérico del aritmo "ς" que luego se reemplaza o se evalúa en las expresiones restantes, para hallar los números que dan solución al problema. Identificar el uso de esta tipificación es sencillo porque en todos los problemas se repite lo descrito anteriormente, acá simplemente se mostraron unos ejemplos.

3.1.2 Letra como incógnita:

"*Cuando* [las letras] *se usan para representar números (u otros objetos) uno de cuyos valores posibles hace verdadera una expresión. La incógnita interviene como un objeto matemático desconocido que se manipula como si fuera conocido"*. (Godino y Font, 2003, p. 20).

Algunos ejemplos que muestran el uso de la letra como incógnita son:

-

I – 1	**Descomponer un número dado en dos partes cuya diferencia sea dada.**

"Sea 100 el número dado y 40 la diferencia. Suponiendo que la parte menor es 1 aritmo, la mayor será el aritmo más 40 unidades, y por tanto, la suma de ambas valdrá 2 aritmos más 40 unidades…"

En este fragmento, lo que Diofanto está mostrando, en términos modernos queda:

Si el número dado es $a = 100$ y la diferencia entre las partes $d = 40$, entonces, se tiene:

$$x + y = 100$$

$$x - y = 40.$$

Si $y < x$,

$y = \varsigma$, entonces, $x = \varsigma + 40$.

Aquí se observa cómo Diofanto, utilizando restauración y reducción, manipula la letra ς que representa un objeto matemático desconocido como si fuera uno conocido.

Sumándolas queda:

$$x + y = 2\varsigma + 40$$

Es decir

$$2\varsigma + 40 = 100$$

-

IV − 1	**Descomponer un número dado en dos cubos cuya suma de raíces sea dada.**

"Si el número es 370 y la suma de las raíces 10, supongamos que la raíz del primer cubo es 1 aritmo y 5 unidades, o sea: la mitad de la suma de las raíces. Por tanto, la raíz del otro cubo será 5 unidades…"

En términos modernos es:

Dados a y b encontrar x, y tales que

$$x^3 + y^3 = a, \qquad x + y = b$$

Si $a = 370$ y $b = 10$, y el lado del cubo es:

$$x = \varsigma + 5,$$

siendo 5 la mitad de b. El otro lado del cubo será:

$y = 5 - \varsigma$, y entonces

$$(\varsigma + 5)^3 + (5 - \varsigma)^3 = 370$$

Aquí se observa de nuevo cómo Diofanto, al realizar algunas operaciones, utiliza la letra ς, que representa un objeto matemático desconocido, como si fuera uno conocido, para encontrar que:

$$30\varsigma^2 + 250 = 370$$

$$\varsigma = 2$$

-

V – 15	**Encontrar tres números tales que el cubo de la suma de los tres, aumentado en cada uno de ellos, forme un cubo.**

"Suponiendo que la suma de los tres números es 1 aritmo y los números pedidos 7, 26 y 63 cubos de aritmo, el cubo de la suma de los tres, aumentado en cada uno de ellos, forma un cubo, y falta entonces conseguir que la suma de los tres números sea 1 aritmo, y, como la suma es 96 cubos de aritmo, estos 96 cubos de aritmo deben ser igual a 1 unidad.…"

En términos modernos es:

Encontrar x, y, z que cumplan:

$$(x + y + z)^3 + x = cubo; \quad (x + y + z)^3 + y = cubo; \quad (x + y + z)^3 + z = cubo$$

Si los números son:

$$x = (p^3 - 1)\varsigma^3; \qquad y = (q^3 - 1)\varsigma^3 \qquad z = (r^3 - 1)\varsigma^3$$

El cubo de la suma de los tres números, aumentado en cada uno de ellos, forma un cubo, y solo falta igualar $x + y + z = \varsigma$, es decir:

$$(p^3 - 1)\varsigma^3 + (q^3 - 1)\varsigma^3 + (r^3 - 1)\varsigma^3 = \varsigma$$

$$\big((p^3 - 1) + (q^3 - 1) + (r^3 - 1)\big)\varsigma^2 = 1$$

Se tiene que encontrar tres números que aumentados en una unidad sean cubos, cuya suma sea un cuadrado.

Según Muñoz et al. (2007) Para continuar con el ejercio Diofanto toma una incógnita auxiliar y dice:

Sean los lados de los cubos $\beta + 1{,}2 - \beta\ y\ 2$.

Y la identificación $9\beta^2 - 9\beta + 14 = \square \equiv (3\beta - 4)^2$ se obtiene $\beta = \frac{2}{15}$: así,

$$p^3 - 1 = 7, q^3 - 1 = \frac{1538}{3375} \text{ y } r^3 - 1 = \frac{18577}{3375} \ .$$

Acá nuevamnete se observa cómo Diofanto, utiliza ς como si fuese conocido.

Al reemplazar los valores encontrados en la ecuación:

$$(p^3 - 1)\varsigma^3 + (q^3 - 1)\varsigma^3 + (r^3 - 1)\varsigma^3 = \varsigma$$

resulta $\frac{43740}{3375}\varsigma^3 = \varsigma$, de donde $43740\varsigma^3 = 3375\varsigma$.

Tomando la quinceava parte de todo y diviviendo por un artimo resulta

$$2916\varsigma^2 = 225$$

Por tanto,

$$\varsigma = \frac{15}{54}$$

En este caso, como en los anteriores ejemplos de esta sección, es evidente el uso de letra como incógnita, en todos se puede observar que la letra ς incialmente es un valor desconocido que se manipula algebraicamente como si fuese conocido para hallar un valor que haga verdadera la expresión. Vale aclarar que algunos de los manejos algebraicos que aparecen citados en los ejemplos, Diofanto los escribe en lenguaje retórico. Estos no son los únicos ejemplos que se encontraron en la obra, simplemente se hace evidencia de algunos de ellos.

3.1.3 Letra como indeterminada o expresión de patrones generales:

"*Es el caso cuando la letra se usa en enunciados que son ciertos para todos los números*". (Godino y Font, 2003, p. 20). Esta concepción se asemeja a lo que Kücheman llamó *Letra como número generalizado.* Esquinas (2008) afirma que esta interpretación de la letra conlleva la idea de generalización.

Para este tipo de letra aparece en Muñoz et al (2007) expresiones en las cuales Diofanto generaliza ciertas propiedades, por ejemplo:

- (a) Todo lado, multiplicado por su lado, es un cuadrado. (b) Si se divide el cuadrado por uno de sus lados se obtiene el lado del cuadrado, (c) y si se lo divide por una cosa, que es la raíz del cuadrado, se obtiene un cuadrado

En términos actuales es:

(a) $\varsigma \cdot \varsigma = \varsigma^2$

(b) $\frac{\varsigma^2}{\varsigma} = \varsigma$

(c) $\frac{\varsigma^3}{\varsigma} = \varsigma^2$

Al respecto de esta tipificación es muy importante aclarar, como en el caso anterior, que el uso de la letra como expresión de patrones generales se encuentra en Muñoz et al (2007), mas no en la obra original de Diofanto, al parecer allí estaba escrita la expresión general en lenguaje retórico.

Para mencionar un ejemplo donde Diofanto utiliza una de las propiedades antes citadas (b), se recuerda un fragmento del problema $II-8$ (presentado antes para **letra evaluada**):

> *(…)Haciendo restauración y reducción, se obtiene* $5\varsigma^2 = 16\varsigma$*, luego* $\varsigma = \frac{16}{5}$*; por lo tanto los cuadrados son* $\frac{256}{25}$ *y* $\frac{144}{25}$*.*

- Otro ejemplo, es el ya expuesto anteriormente en la tabla 10, donde se describe el problema $I-28$, en éste es evidente el uso de la letra como expresión de patrones generales para la propiedad (a), este fragmento del problema es:

  (…) El número mayor y menor están dados por: $x+10; 10-x$

  Elevándolos al cuadrado tenemos:

  $$x^2+20x+100\ ;\ x^2-20x+100$$

  Sumándolos (…)

Otro ejemplo:

VI − 1	**Encontrar un triángulo rectángulo tal que el número de la hipotenusa, disminuido en cada uno de los números de las perpendiculares, forme un cubo.**

"Formando el triángulo pedido con los dos números 1 cuadrado de aritmo y 3 unidades, la hipotenusa será 1 cuadrado de aritmo más 9 unidades, la altura 6 aritmos y la base 1 cuadrado de aritmo menos 9 unidades.

Si de la hipotenusa se resta uno de los cateros: 1 cuadrado de aritmo menos 9 unidades, quedan 18 unidades, que no forman un cubo; observando que 18 es el doble del cuadrado de 3, tendremos que …"

Este problema hace parte de los problemas del libro VI que se refieren a triángulos rectángulos de lados racionales que, además de satisfacer la ecuación pitagórica, deben cumplir las condiciones que les imponen sus respectivos enunciados.

Para este tipo de problemas, Diofanto emplea según Vera (1970) la igualdad

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad (1)$$

Donde a es la hipotenusa b y c los catetos del triángulo rectángulo, igualdad que utiliza también bajo una de estas dos formas:

$$k^2 + \left(\frac{k^2 - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{k^2 + 1}{2}\right)^2 \qquad (2)$$

$$(2k + 1)^2 + \big(2k(k + 1)\big)^2 = (2k^2 + 2k + 1)^2 \qquad (3)$$

o bien, dados dos números m y n, toma como catetos los valores $b = m^2 - n^2$ y $c = 2mn$, y entonces la hipotenusa es $a = m^2 + n^2$, por lo tanto

$$(m^2 - n^2) + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2 \qquad (4)$$

Y también emplea en algunos problemas la identidad

$$m^2 + \left(\frac{m^2}{4} - 1\right)^2 = \left(\frac{m^2}{4} + 1\right)^2 \qquad (5)$$

Para la solución del problema que se presentó, se puede inferir que Diofanto utilizó la expresión (4) para $m = \varsigma$ y $n = 3$. Se resalta de nuevo que todo esto se encuentra escrito en términos modernos, es tomado de las traducciones de la obra de Diofanto, en este caso, de la traducción de Vera.

Para esta tipificación se mostraron ejemplos donde consideramos, puede verse la letra como expresión de patrones generales, en el primer y segundo ejemplo se mostró cuando su afectación se remite a una de las propiedades, aunque solo colocamos éstas, en la obra se encuentran ejemplos donde son utilizadas las demás propiedades.

En el último ejemplo se considera unas expresiones que según Vera son utilizados por Diofanto, siguiendo esta idea se identificó que se utilizaba la letra como patrones en (4) ya que esa expresión se cumple para todos los números en particular cuando $m = \varsigma$ y $n = 3$.

3.1.4 Letra para expresar cantidades que varían conjuntamente:

Las letras para expresar cantidades que varían conjuntamente o sencillamente letras que simbolizan una relación funcional, son descritas, por Godino y Font (2003) como *"La relación de dependencia entre variables ocurre cuando el cambio en una variable determina el cambio en la otra*". (p. 20)

Los ejemplos que utilizan Godino y Font son:

En la expresión $y = 5x + 6$, cuando cambia x también lo hace y.

En la fórmula $C = 2\pi r$, cuando cambia el radio r también cambia la longituddde la circunferencia C.

En la obra de Diofanto sólo se encuentra un par de ejemplos donde se reconoce el uso de este tipo de letra, los problemas VI-1 y VI-3. Como ya se presentó el primero en la tipificación anterior, se expondrá el segundo:

-

VI – 3	**Encontrar un triángulo rectángulo tal que el número de su área, aumentado en un número dado, forme un cuadrado.**

"…Igualándolo a 9 cuadrados de aritmo y restando lo semejante de lo semejante, resultan 3 cuadrados de aritmo igual a 5 unidades, y, por tanto, es preciso que la razón de término a término sea la de un cuadrado a otro, lo que nos lleva a buscar un triángulo rectángulo y un número cuadrado tales que, disminuido este en el número del área del triángulo, sea la quinta parte de un cuadrado, puesto que el número dado tiene 5 unidades.

Formando ahora un triángulo con 1 aritmo y 1 inverso de aritmo, el número del área de este triángulo será 1 cuadrado de aritmo menos 1 inverso de cuadrado de aritmo…"

Para la solución de este problema hay que considerar que se desea formar un triángulo rectángulo de lados a, b y c tal que:

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad (1)$$

Donde a es la hipotenusa b y c los catetos del triángulo rectángulo, igualdad que utiliza también bajo una de estas dos formas:

$$k^2 + \left(\frac{k^2 - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{k^2 + 1}{2}\right)^2 \qquad (2)$$

$$(2k+1)^2 + \big(2k(k+1)\big)^2 = (2k^2 + 2k + 1)^2 \qquad (3)$$

o bien, dados dos números m y n, toma como catetos los valores $b = m^2 - n^2$ y $c = 2mn$, y entonces la hipotenusa es $a = m^2 + n^2$, por lo tanto observamos que estas expresiones varían conjuntamente; en este caso, según lo que muestra Diofanto en la solución de su problema los valores correspondientes a m y n son:

$$m = \delta \text{ y } n = \frac{1}{\delta}$$

Siguiendo la misma idea de Vera, en la que según él Diofanto nuevamente utilizaba dichas expresiones de las cuales se pueden identificar las siguientes, en la que varían conjuntamente, estas son:

$$b = \delta^2 - \frac{1}{\delta}^2 ; \qquad c = 2\delta \frac{1}{\delta}; \qquad a = \delta^2 + \frac{1}{\delta}^2$$

Estas varían dependiendo de los valores que tome δ. Cabe aclarar que solo en el libro VI se encuentran ejemplos de esta tipificación y de nuevo, utilizando lenguaje moderno puesto Diofanto utiliza el retórico.

3.1.5 Letra como objeto:

"*Se considera la letra como una abreviación del nombre de un objeto o como un objeto en sí*". (Morales y Díaz, 2003, p. 111).

Originalmente Kücheman clasifica en esta categoría los errores al utilizar la letra como si se tratara de un objeto concreto; según Godino y Font (2003) estos errores aparecen comúnmente en los problemas que involucran objetos concretos como lápices, manzanas, peras, dulces, etc., Godino y Font afirman que "*es esencial distinguir entre los objetos y las cantidades de los mismos.*" (p. 49). La letra m se utiliza como la abreviatura del nombre de un objeto particular, por ejemplo, la expresión matemática $5m + 2m$ y la frase "cinco manzanas y dos manzanas" se consideran como equivalentes. Frases como: se juntan x con las x

y los números con los números, o, no se pueden sumar peras con manzanas, favorecen que los estudiantes incurran en estos errores.

Nuevamente, no se utilizará la concepción de la letra como objeto atendiendo al error o errores descritos por Kücheman, por el contrario, se utilizará nuevamente en un sentido estrictamente literal, la letra como abreviación del nombre de un objeto, debido al uso de abreviaciones de palabras introducidas por Diofanto, y que son utilizadas para representar objetos, por citar un ejemplo la palabra aritmo ($\acute{\alpha}\rho\iota\vartheta\mu\acute{o}\varsigma$), que es representada –abreviada- por ς; o también las representaciones del aritmo que se encuentra en la tabla 5 del capítulo 2, utilizadas con frecuencia por el autor alejandrino y que es tratada como un objeto, operando con él e incluso respondiendo a la tipificación de letra como incógnita.

Un resultado interesante de este estudio es que a pesar del lenguaje natural empleado por Diofanto para expresar y resolver sus problemas, resultan muchos usos que el autor da a la letra, si bien, unos son más evidentes y recurrentes que otros, inmerso en el trabajo del alejandrino se encuentran variados usos que da a la letra, claro, desde la interpretación actual.

3.2. El lenguaje algebraico empleado por Diofanto

Después de haber interpretado posibles usos distintos de las letras en la obra de Diofanto, se describe de manera breve el tipo de lenguaje reconocido en la historia del álgebra, esto con el fin de caracterizar el lenguaje algebraico de Diofanto. Se hará énfasis en aquellas características que permitan vislumbrar si el lenguaje utilizado por Diofanto pertenece a una u otra tipología.

Inicialmente se presentarán los tres tipos de lenguaje reportados por la literatura.

3.2.1 Lenguaje retórico

Usualmente se denomina álgebra retórica, pero su principal característica es que los problemas y sus soluciones se plantean en lenguaje retórico, se describen mediante lenguaje natural, sin incluir ningún símbolo, ni siquiera el de las operaciones, además, los problemas eran particulares y no había métodos generales de resolución. (Boyé y Nantes, 2007).

3.2.2 Lenguaje sincopado:

Este tipo de lenguaje ha generado la denominación “álgebra sincopada”. Se reconoce como un tránsito entre la retórica y la simbólica, y se diferencia de la primera en que aparecen abreviaturas no universales de ciertas palabras, aunque en algunos casos es utilizado el lenguaje natural, como por ejemplo en el desarrollo de los cálculos. (Boyé y Nantes, 2007).

3.2.3 Lenguaje simbólico:

Y por último está el álgebra simbólica que corresponde con la fase moderna del desarrollo de lenguaje algebraico, en ésta se usan distintos literales para las incógnitas donde casi siempre no hay que usar lenguaje natural, ya que cada cosa que se quiera hacer tiene su símbolo. (Boyé y Nantes, 2007).

En relación con la obra de Diofanto, es evidente que utilizó abreviaciones de palabras que incluso se convirtieron en símbolos, por ejemplo, el caso del aritmo y el símbolo para la resta; aunque Diofanto sigue utilizando lenguaje natural y esto precisamente lo aleja del lenguaje simbólico.

De manera similar, vale precisar que a pesar que Diofanto utilizó lenguaje natural para describir sus problemas, después del análisis de la obra, es fácil identificar que el autor incluyó el uso de diferentes símbolos.

Según lo descrito en los párrafos precedentes y los capítulos anteriores, es innegable que la obra *La Aritmética* entra en la segunda fase del desarrollo del lenguaje algebraico tal como lo señalan autores como Cajori (1929), es decir, en la de álgebra sincopada ya que, como se ha observado en el segundo y tercer capítulo, Diofanto hace abreviaciones de las palabras como sucedía en el ejemplo mostrado en la tabla 5 del capítulo 2, o cuando se hizo la representación de expresiones como:

$\mathbf{K}^{\Upsilon}\overline{\alpha}\varsigma\overline{\varepsilon} \pitchfork \Delta^{\Upsilon}\overline{\iota\gamma}\mu^{o}\overline{\beta}$	$x^3 + 5x - (13x^2 + 2)$

Donde aparecen distintos símbolos, entre ellos el símbolo de la resta ⫛, o el del aritmo ς, cuyo signo, como lo habíamos dicho anteriormente, es una abreviatura de la palabra griega $\acute{\alpha}\rho\iota\vartheta\mu\acute{o}\varsigma$.

Y además porque también utiliza la retórica para representar algunos de sus resultados, por ejemplo:

> *(…) el número multiplicado por el número da el cuadrado; por el cuadrado, da el cubo; por el cubo, el cuadrado-cuadrado; por el cuadrado-cuadrado, el cuadrado-cubo; por el cuadrado-cubo, el cubo-cubo. A su vez, el cuadrado multiplicado por el cuadrado da el cuadrado-cuadrado; por el cubo, el cuadrado-cubo; por el cuadrado-cuadrado, el cubo-cubo y el cubo multiplicado por el cubo da el cubo-cubo*. (Muñoz et al., 2007, p. 20)

Una vez establecido que el lenguaje algebraico utilizado por Diofanto fue el sincopado, se presenta a continuación algunos de los problemas como ejemplo:

3.3. Ejemplo de problemas que hacen uso del lenguaje algebraico sincopado

I-3: Descomponer un número en dos partes que estén en una razón dada con una diferencia dada

Sea el número 80 y propongámonos descomponerlo en dos partes tales que la mayor sea triple de la menor y la exceda, además, en 4 unidades.	Si x representa la parte mayor e y la menor, entonces $x + y = 80$ $x = 3y + 4$
Si la parte menor es 1 aritmo, la mayor será 3 aritmos más 4 unidades,	$y = \varsigma$ $x = 3\varsigma + 4$
y como la suma de ambas tiene que ser igual a 80 unidades y la de las dos partes es 4 aritmos y 4 unidades, resulta que 4 aritmos y 4 unidades valen 80 unidades.	Sumándolos $x + y = 4\varsigma + 4$ $4\varsigma + 4 = 80$
Restando los términos semejantes de los semejantes, las 76 unidades restantes equivalen a 4 aritmos,	Haciendo reducción $4\varsigma = 76$
y, por tanto, 1 aritmo vale 19 unidades, que es la parte menor;	$\varsigma = 19$
luego la mayor es 61.	$3\varsigma + 4 = 3 \cdot 19 + 4$ $= 61$

IV-24: Descomponer un número dado en dos partes tales que su producto sea la diferencia entre un cubo y su raíz.	
Si el numero dado es 6	Es decir, $x + y = 6$
y suponemos que la primera parte tiene 1 aritmo, la segunda tendrá 6 unidades menos 1 aritmo,	Sea x primera parte e y la segunda parte $x = \varsigma$ $y = 6 - \varsigma$

cuyo producto debe ser igual a un cubo menos su raíz,	$x \cdot y = l^3 - l$
y como tal producto es 6 aritmos menos 1 cuadrado de aritmo, esto será igual a un cubo menos su raíz.	$x \cdot y = 6\varsigma - \varsigma^2$
Formaremos el cubo de una cantidad cualquiera de aritmos menos 1 unidad, y sea el de 2 aritmos menos 1 unidad, que es 8 cubos de aritmo menos 12 cuadrados de aritmo mas 6 aritmos menos 1 unidad, que es 8 cubos de aritmo menos 12 cuadrados de aritmo más 6 aritmos menos 1 unidad, y restando la raíz 2 aritmos menos 1 unidad, el resto 8 cubos de aritmo menos 12 cuadrados de aritmo más 4 aritmos, lo igualaremos a 6 aritmos menos 1 cuadrado de aritmo.	Diofanto, hace un tanteo de la solución formando el cubo iniciando con la siguiente expresión: $2\varsigma - 1$ $(2\varsigma - 1)^3 = 8\varsigma^3 - 12\varsigma^2 + 6\varsigma - 1$ Restando la raíz, es decir, $2\varsigma - 1$ $8\varsigma^3 - 12\varsigma^2 + 4\varsigma$ Igualándolo a $x \cdot y = 6\varsigma - \varsigma^2$ $8\varsigma^3 - 12\varsigma^2 + 4\varsigma = 6\varsigma - \varsigma^2$
Si las cantidades de aritmos fueran iguales en uno y otro lado de la ecuación, quedarían cubos de aritmo iguales a cuadrados de aritmo y 1 aritmo seria racional; pero 4 aritmos provienen de un excedente sobre 2 aritmos, como el de 3 veces 2 aritmos; y entonces, si a 3 veces 2 aritmos se le restan 2 aritmos quedan 2 veces 2 aritmos, y como 6 se ha tomado	De esto se deduce que el número correspondiente es 3

arbitrariamente por hipótesis, esto nos lleva a encontrar, lo mismo que para 2, que es la cantidad de aritmos, un número que tomado 2 veces, forme 6. Este número es 3,	
y, por tanto, igualemos 6 aritmos menos 1 cuadrado de aritmo a un cubo menos su raíz, y suponiendo que la raíz del cubo es 3 aritmos menos 1 unidad, el cubo de esta raíz, disminuido en la raíz, forma 27 cubos de aritmo menos 27 cuadrados de aritmo que , igualados a 6 aritmos menos 1 cuadrado de aritmo, se obtiene el valor $\frac{26}{27}$ de aritmo, y, por tanto, la primera parte de la descomposición es $\frac{26}{27}$ y la segunda $\frac{136}{27}$	$$6\varsigma - \varsigma^2 = (3\varsigma - 1)^3$$ $$6\varsigma - \varsigma^2 = 27\varsigma^3 - 27\varsigma^2 + 9\varsigma - 1$$ Restando la raíz, es decir, $3\varsigma - 1$ $$27\varsigma^3 - 27\varsigma^2 + 6\varsigma$$ Se obtiene $$6\varsigma - \varsigma^2 = 27\varsigma^3 - 27\varsigma^2 + 6\varsigma$$ Haciendo reducción, se halla la primera parte $$26\varsigma^2 = 27\varsigma^3$$ $$\varsigma = \frac{\mathbf{26}}{\mathbf{27}}$$ La segunda parte será $$6 - \varsigma$$ $$6 - \frac{\mathbf{26}}{\mathbf{27}}$$ que es igual a $\frac{136}{27}$

III-6: Encontrar tres números que valgan un cuadrado y tales que, tomados de dos en dos, formen un cuadrado.

Suponiendo que la suma de los tres números es 1 cuadrado de aritmo más 2 aritmos y 1 unidad y que el primero,	Sean los números $x, y, z,$ tales que $$x + y + z = (\varsigma + 1)^2$$ Y que la suma de los dos primeros sea

aumentado en el segundo, valga 1 cuadrado de aritmo, el tercero tendrá 2 aritmos y 1 unidad, y puesto que queremos que el segundo número, aumentado en el tercero, forme un cuadrado, sea 1 cuadrado de aritmo más 1 unidad menos 2 aritmos, cuya raíz es 1 aritmo menos 1 unidad.	$x + y = \varsigma^2$ El tercera tendrá $z = 2\varsigma + 1$ Como queremos que sea $y + z = (\varsigma - 1)^2$ $\varsigma^2 + 1 - 2\varsigma$
Como la suma de los tres números es 1 cuadrado de aritmo más 2 aritmos y 1 unidad, el primer número restante tendrá 4 aritmos; pero el primer número añadido al segundo se ha supuesto igual al cuadrado de aritmo; luego el segundo será 1 cuadrado de aritmo menos 4 aritmos.	Así $x = (x + y + z) - (y + z) = 4\varsigma$ e $x = (x + y) - x = \varsigma^2 - 4\varsigma$
Es preciso aún que el primer número, tomado con el tercero, es decir: 6 aritmos y 1 unidad, forme un cuadrado, de modo que si tiene 121 unidades, 1 aritmo tendrá 20, y, por tanto, el primer número será 80, el segundo 320 y el tercero 4	Que todavía que sea $x + z = 6\varsigma + 1$ Y si ponemos este cuadrado igual a 121 $6\varsigma + 1 = 121$ $\varsigma = 20$ El primer número será $x = 80$ el segundo $y = 320$, el tercero $z = 41$

II-8: Descomponer un cuadrado dado en dos cuadrados.	
Si queremos descomponer 16 en dos cuadrados	$x^2 + y^2 = 16$
y suponemos que el primero es 1 aritmo,	$x^2 = a^2$

el otro tendrá 16 unidades menos 1 cuadrado de aritmo, y, por tanto, 16 unidades menos 1 cuadrado de aritmo son un cuadrado.	$y^2 = 16 - a^2$
Formemos el cuadrado de un conjunto cualquiera de aritmos disminuido en tantas unidades como tiene la raíz de 16 unidades,	$y^2 = (ma - 4)^2$ Con m entero positivo
y sea el cuadrado de 2 aritmos menos 4 unidades.	$y^2 = (2a - 4)^2$
Este cuadrado tendrá, pues, 4 cuadrados de aritmo y 16 unidades menos 16 aritmos, que igualaremos a 16 unidades menos 1 cuadrado de aritmo,	$y^2 = (2a - 4)^2 = 4a^2 + 16 - 16a$ $= 16 - a^2$
y, sumando a uno y otro lado los términos negativos y restando los semejantes, resulta que 5 cuadrados de aritmo equivalen a 16 aritmos,	$4a^2 + 16 - 16a = 16 - a^2$ $4a^2 + a^2 + 16a + 16 - 16a = a^2 + 16a + 16 - a^2$ $5a^2 + 16 = 16a + 16$ $5a^2 = 16a$
y, por tanto, 1 aritmo vale 16/5;	$5a^2 = 16a$ $5a = 16$ $a = 16/5$
luego uno de los números es 256/25 y el otro 144/25, números cuya suma es 400/25, es decir: 16 unidades, y cada	$x^2 = a^2$ $x^2 = \left(\frac{16}{5}\right)^2$

uno de ellos es un cuadrado.	$x^2 = \frac{256}{25}$ $y^2 = \frac{144}{25}$ $x^2 + y^2 = \frac{400}{25} = 16$

CONCLUSIONES

11. Gracias a la consulta del material bibliográfico es posible afirmar en este documento que el álgebra de Diofanto se constituyó en uno de los primeros trabajos que se alejaron del planteamiento geométrico, a pesar de haber sido escrito en tiempo y espacio en los que los geómetras habían dominado por largo tiempo la producción matemática; mostrando que el manejo de los números podía ser deducido a partir de reglas exentas de prejuicios geométricos.

12. Se encontró evidencia, tanto en los libros de fuente griega como los de fuente árabe, de frases que hacen pensar que *La Aritmética* de Diofanto es una obra escrita con una clara intención de enseñanza.

13. A pesar de enunciar solo el manejo de los números hasta la sexta potencia, Diofanto utiliza en su obra potencias superiores, incluyendo octava y novena potencia.

14. Diofanto, a lo largo de *La Aritmética* enuncia una serie de problemas para los cuales, independiente de la cantidad de variables posible, utiliza solo una incógnita para representar una cantidad desconocida (el llamado aritmo), el mérito del autor consiste en expresar todas las cantidades desconocidas en términos del aritmo y así dar solución al problema planteado.

    Diofanto, al presentar la solución declara que será el aritmo, luego, hábilmente transforma el problema inicial en términos de ese aritmo y en algunas ocasiones le resulta un *subproblema*, para el cual declara un aritmo diferente al del problema inicial, le da solución al *subproblema* y retoma el problema original junto y su aritmo original.

15. Se encontró que Diofanto utilizó la letra no solo para indicar una cantidad desconocida, se encontraron usos de la letra que corresponden a asignaciones directas (letra evaluada), letra que expresa patrones generales y relaciones funcionales (letra para expresar cantidades que varían conjuntamente), también fue encontrado el uso para la letra como

objeto, lo que permitió a Diofanto operar correctamente entre lo que él llamó especies de números. (sumar o restar cuadrados con cuadrados y no con cubos, sumar o restar cubos con cubos y no con números de otras potencias), aunque, como se mencionó, haciendo la traducción al lenguaje actual, pues Diofanto usualmente lo hacía de manera retórica.

16. No se puede establecer si Diofanto cuestiona la existencia de la solución de una ecuación para solucionarla o no, desde la relación que se hace con el uso de la letra. Diofanto asigna un valor a la letra o busca el aritmo según las condiciones del problema

17. Se evidenció de propia mano, que las características del lenguaje sincopado corresponden con el lenguaje utilizado por Diofanto en su obra coincidiendo con lo anotado por (Cajori, 1928) (O'Connor y Robertson, 1999), entre otros.

    Aunque el lenguaje sincopado fue el utilizado por Diofanto, para avanzar en el trabajo, debimos desarrollar la habilidad de interpretar el lenguaje retórico aún presente en *La Aritmética*, haciendo la traducción al lenguaje simbólico moderno.

18. Como resultado de la consulta de material bibliográfico se lograron establecer varios asuntos, antes desconocidos, de la obra Diofantina, por ejemplo:

    - El sistema de numeración empleado por Diofanto fue el sistema de numeración jónico,
    - Recientemente fueron encontrados cuatro libros de fuente árabe que se suman a los ya conocidos históricamente de fuente griega,
    - Wilbur Knorr quien es un reconocido historiador matemático sugiere que el libro *Preliminaries to the Geometric Elements*, atribuido usualmente a Herón de Alejandría, fue escrito por Diofanto.

19. Sin duda, el análisis de una obra histórica deja, para quien lo hace, el placer de estar redescubriendo las maneras en que operaban los matemáticos de la antigüedad, lo que hace pensar en las dificultades con las que se encontraron los antiguos matemáticos y las hábiles maneras que

encontraron para avanzar, esto permite, a quienes se preparan como futuros docentes, reorientar el proceso de aprendizaje personal y enseñanza a sus próximos estudiantes.

El estudio de una obra histórica, permite transformar la visión de la actividad matemática, para el caso de la obra de Diofanto, su estudio permitió evidenciar que el rigor empleado por Diofanto compuesto por una serie de problemas sus soluciones a partir de ejemplos generales no coincide, como se pensaría intuitivamente, con el sistema de axiomas, definiciones y proposiciones de Euclides.

20. En referencia a competencias profesionales el presente trabajo aportó a nuestra formación docente en cuanto fue necesario realizar la lectura, comprensión e interpretación de textos en otros idiomas.

BIBLIOGRAFÍA

Bachet C.(ed). (1621). *Diophanti Alexandrini Arithmeticorum Libri sex, et de numeris multangulis liber unus. Nunc primum Graecé et Latiné ediiti, atque absolutissimis Commentariis ilustrati.* (C. Bachet, Ed.) Paris: sumptibus Hieronymi Drouart.

Baldor, A. (1999). *Algebra: con gráficos y 6.523 ejercicios y problemas con respuestas.* Giron Spanish Books Distributors.

Boyé, A., & Nantes, I. (2007). ¿FRANÇOIS VIÈTE, INVENTOR DEL ÁLGEBRA? *Los Orígenes de la Ciencia Moderna Actas Año XI y XII* (págs. 259-276). Canarias: Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia.

Cajori, F. (1928). A History of Mathematical Notations. *1. Notations in Elementary Mathematics*.

Esquinas, A. (2008). *Dificultades de Aprendizaje del Lenguaje Algebraico: Del Símbolo a la Formalización Algebraica. Aplicación a la Práctica Docente.* Madrid, España: Universidad Complutense de Madrid.

Godino, J., & Font, V. (2003). *Razonamiento Algebraico y su Didáctica Para Maestros.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Hawking, S. (2006). *Dios creó los números: Los descubrimientos matemáticos que cambiaron la Historia.* Barcelona - España: Editorial Critica.

Heath, T. L. (1910). *Diophantus of Alexandria. A Study in the History of Greek Algebra, 2nd ed. with a supplement containing an account of Fermat's theorems and problems connected with diophantine analysis and some solutions of diophantine problems by Euler.* (unabridged and corrected repub. Dover, NewYork, 1964): Cambridge University Press.

Ifrah, G. (2000). *The Universal History of Numbers: From Prehistory to the Invention of the Computer* (Vol. 1). (D. Bellos, E. Harding, S. Wood, & I. Monk, Trads.) New York. US.: John Wiley & Sons.

Knorr, W. (1985). Books IV to VII of Diophantus' Arithmetica: In the Arabic Translation Attributed to Qusta Ibn Luqa. Review. *The American Mathematical Monthly, 92*(2), 150-154.

Knorr, W. (1993). Arithmêtike stoicheiôsis: On Diophantus and Hero of Alexandria. *Historia Matematica, 20*(2), 180-192.

Mazur, B. (2006). About the Cover: Diophantus's Arithmetica. *American Mathematical Society*, 399-401.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Matemáticas. Lineamientos Curriculares.* Bogotá - Colombia: MEN.

Morales, L., & Díaz, J. (2003). Concepto de Variable: Dificultades de su Uso a Nivel Universitario. *Mosaicos Matemáticos*, 109-114.

Muñoz, M., Fernández, E., & Mercedes, S. (2007). *DIOFANTO DE ALEJANDRÍA: La Aritmética y el libro Sobre los números poligonales.* (Vol. 2). Madrid: Nivola (Colección Epistéme).

Muñoz, M., Fernández, E., & Sánchez, M. E. (2007). *DIOFANTO DE ALEJANDRÍA: La Aritmética y el libro Sobre los números poligonales.* (Vol. 2). (M. Muñoz, E. Fernández, & M. Sánchez, Edits.) Madrid: Nivola (Colección Epistéme).

NordNordWest. (10 de 08 de 2008). *Wikimedia Commons.* Recuperado el 10 de 09 de 2012, de http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Egypt_location_map.svg

O'Connor, J., & Robertson, E. (Febrero de 1999). *MacTutor History of Mathematics*. Recuperado el 17 de Octubre de 2011, de http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Diophantus.html

Ruiz, Á. (2003). *Historia Y Filosofía de Las Matemáticas.* EUNED.

Sesiano, J. (1982). Books IV to VII of Diophantus' Arithmetica: In the Arabic Translation Attributed to Qusta Ibn Luqa. *the History of Mathematics and Physical Sciences*(3), xii - 502.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectivas.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Tannery, P. (. (1895). *Diophanti Alexandrini Opera omnia cum groecis commentariis, edidit et latini interpretatus est Paul Tannery* (Vol. 2 Vols). Lipsiae, in aedibus B. G. Teudneri.

Tannery, P. D. (1895). *Diophanti Alexandrini Opera omnia cum graecis commentariis, edidit et latini interpretatus est Paul Tannery* (Vol. 2 Vols). (P. Tannery, Ed.) Lipsiae, in aedibus B. G. Teudneri.

Ver Eecke, P. (1959). *Diophante d 'Alexandrie: Les Six Livres arithmétiques et le Livre des nombres polygones.(Euvres traduites pour la premiere fois du grec en franr;ais, avec une introduction et des notes.* París: Librairie scientifique et technique Albert Blanchard.

Vera, F. (1970). *Científicos Griegos.* Madrid: Aguilar.

Yuste, P. (s.f.). Reseña DIOFANTO DE ALEJANDRÍA: La Aritmética y el libro Sobre los números poligonales.