UN RECORRIDO HISTÓRICO DE ALGUNOS MÉTODOS DE SOLUCIÓN PARA ECUACIONES ALGEBRAICAS DE SEGUNDO Y TERCER GRADO

Yuli Andrea Medina Leguizamón

Juan Manuel Barragán Pérez

Asesor
Edwin Alfredo Carranza Vargas
Docente Catedrático de la Universidad Pedagógica Nacional

Universidad Pedagógica Nacional
Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D. C.

Diciembre 2012

UN RECORRIDO HISTÓRICO DE ALGUNOS MÉTODOS DE SOLUCIÓN PARA ECUACIONES ALGEBRAICAS DE SEGUNDO Y TERCER GRADO

Yuli Andrea Medina Leguizamón

Juan Manuel Barragán Pérez

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Asesor
Edwin Alfredo Carranza Vargas
Docente Catedrático de la Universidad Pedagógica Nacional

Universidad Pedagógica Nacional
Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D. C.
Diciembre 2012

Resumen Analítico en Educación

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Titulo del documento	*Un recorrido histórico de algunos métodos de solución para ecuaciones algebraicas de segundo y tercer grado.*
Autor(es)	*Medina Leguizamón, Yuli Andrea* *Barragán Pérez, Juan Manuel*
Director	Edwin Alfredo Carranza Vargas
Publicación	Bogotá, 2012, (80 páginas).
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional.
Palabras Clave	Ecuación cuadrática, Ecuación cúbica, métodos geométricos, métodos algebraicos, historia.

2. Descripción
El presente Trabajo de Grado nace como interés particular de los autores, en el cual se realiza una descripción de algunos métodos de solución para las ecuaciones de segundo y tercer grado que se han presentado en la Historia de las Matemáticas; ampliando el desarrollo que se le da en los libros especializados en el estudio histórico y en las fuentes originales, realizando justificaciones que se consideran acordes, según el momento histórico. Con esto, Se busca además mostrar en este trabajo una postura metodológica para el abordaje del estudio de los métodos, que sirva para profesores interesados en generar actividades en torno a la solución de ecuaciones de segundo y tercer grado.

3. Fuentes
Las principales fuentes consultadas fueron libros donde se realizaban recopilaciones históricas de métodos de solución de ecuaciones de segundo y tercer grado, así como traducciones y adaptaciones de libros originales de los autores que presentaron los métodos de solución de tales

ecuaciones. Entre los más destacados se encuentran: Acevedo & Falk (1997), Bell (2003), Cajori (1985), Castillo (2002), Collete (1985), Moreno (2002) y Prada Coronado & Angulo Escamilla (2008).

4. Contenidos

Este trabajo consta de dos capítulos: en el primero se desarrolla el estudio de tres métodos de solución para las ecuaciones de segundo grado, donde se tratar con minucia los métodos de solución presentados por los babilonios, al-Kwarizmi y René Descartes. Se muestran ejemplos de aplicación de algunos de los métodos. En el segundo capítulo se presentan tres métodos de solución para los casos de la ecuación de tercer grado. Para el apartado dedicado a los babilónicos se realiza una descripción del método empleado; mientras que para los métodos presentados por Omar al-Khayyam y el de del-Ferro-Tartaglia-Cardano se realiza una descripción detallada, tratando de llegar a la raíz de los métodos y encontrar vías de acceso a cómo se gestaron. Además, se presentan ejemplos que muestran la aplicabilidad del método.

5. Metodología

El trabajo se desarrolló en tres fases principales para cada uno de los métodos. En primer lugar se realizó una revisión bibliográfica de libros que mostrarán una recopilación histórica, de contexto y de los métodos de solución de ecuaciones cuadráticas y cúbicas. En la segunda parte, se realizó una discriminación de los métodos a los cuales se iba a realizar un estudio profundo y detallado, para los cuales se extendió la consulta bibliográfica tratando de llegar, en cuanto fue posible, a las fuentes originales. En tercer lugar, se realizó una disertación sobre la funcionalidad del método, en relación con el *por qué* y *cómo* funciona, de manera que fueran posibles cuestionamientos acerca de los argumentos matemáticos inmersos en cada uno de los métodos estudiados.

La realización del trabajo se llevó a cabo en el periodo académico 2012-II, donde se realizó trabajo independiente de los estudiantes autores, con asesorías semanales por parte del profesor asesor, en las cuales se discutían los resultados obtenidos en el transcurso de la semana y las

posibles tareas que se debían realizar, así como las mejoras que se podrían elaborar.

6. Conclusiones
Al realizar este trabajo, se logró estudiar varios de los métodos propuestos a lo largo de la historia para resolver ecuaciones de segundo y tercer grado. A partir de la elaboración de dicho estudio, fue posible ver algunos de los avances que se han realizado a lo largo de las diferentes épocas y a través de algunas de las culturas que intervinieron en el desarrollo de este tema. Además, fue posible evidenciar desde un punto de vista más profundo algunos métodos desde sus orígenes, esto debido a que no para todos se contó con una bibliografía extensa, pues en el caso de los babilónicos es muy poco lo que se ha logrado reunir. Por otro lado, al ver desde un enfoque histórico características de los métodos como la intención que motiva la ecuación con su resultado, interpretación y posible generalización, se comprende de una mejor forma el significado de la solución propuesta. Por otro lado, este trabajo sirve de aporte para el estudio de libros de historia de las matemáticas donde se recopilan diferentes hechos en torno a la solución de ecuaciones de segundo y tercer grado, así mismo como complemento para las clases de historia que se dictan en el Departamento de para lo cual este trabajo realiza una extensión de lo encontrado en los libros usualmente y propone además una metodología de estudio que incentiva a profesores y estudiantes para apropiarse de hechos históricos para lograr comprender diferentes objetos matemáticos inherentes en la construcción de los métodos de solución de ecuaciones, pero que no son evidentes cuando se trabaja exclusivamente con el resultado arrojado por el método.

Elaborado por:	Medina Leguizamón, Yuli Andrea; Barragán Pérez, Juan Manuel
Revisado por:	Carranza Vargas, Edwin Alfredo

Fecha de elaboración del Resumen:	17	12	2012

Contenido

Introducción

En el presente Trabajo de Grado se presenta una recopilación de algunos métodos de solución para ecuaciones polinómicas de segundo y tercer grado, que han surgido en el transcurso de la Historia; el estudio realizado apunta a tres momentos muy diferentes: el periodo Antiguo, con los Babilonios; luego se traslada hasta el Siglo VIII de la era actual, donde los árabes desarrollaron notablemente lo que ellos denominaron *el arte de la cosa;* por último, el Renacimiento Europeo presentó grandes avances para la Matemática, por lo cual se muestra lo realizado por René Descartes y Gerolomo Cardano, en Francia e Italia respectivamente.

Para cada una de los métodos estudiados se realizará una contextualización que muestre el momento cronológico en el que fue desarrollado; se realizará una breve descripción de la cultura o del autor principal que trabajó en el método de solución; y en seguida se hace una descripción del método, procurando llegar a una explicación de la manera más precisa y clara posible; para cada método se muestran ejemplos que evidencien la aplicabilidad de éste.

Finalmente, este documento se divide en dos capítulos, en los que se han de explicar las soluciones a las ecuaciones de segundo y tercer grado, respectivamente. Para el primer capítulo se abordarán los métodos para la ecuación cuadrática propuesto por los Babilonios, al Kwarizmi y por Descartes. Para el segundo capítulo se presentan los métodos de solución de ecuaciones cúbicas empleado por los babilonios, luego se presenta lo expuesto por Omar Khayyam y por Cardano. Al finalizar cada uno de los capítulos se realiza a manera de conclusión, los comentarios más relevantes en cuanto a las particularidades de cada uno de los métodos, así como las diferencias entre ellos. Para finalizar, se realizan unas conclusiones generales, donde se resalten diferentes aportes de este trabajo, y la importancia de continuar con este estudio.

Justificación

En los últimos años ha aumentado el interés por el estudio de la Historia de las Matemáticas, siendo cada vez más incluida en los diferentes currículos de las carreras de Matemáticas y licenciaturas en Matemáticas, ya que se ha visto la necesidad de profundizar en algunos campos de ésta para la comprensión de la propia Matemática. Algunas de las investigaciones en Didáctica supone el estudio de la génesis y la evolución de los conceptos y objetos matemáticos, facilitando los procesos de comprensión y aclarando el sentido por el cual fueron desarrollados (Suárez & Caballero, 2001). En el caso de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, se ve cómo en algunos de los cursos de fundamentación en Matemáticas, se hace énfasis en el desarrollo histórico de los objetos matemáticos; por ejemplo, los primeros cursos de la línea del Álgebra, parten de un recorrido por diferentes sistemas numéricos, y por el desarrollo de la idea de Número en diferentes épocas y culturas de la Historia. En otro ejemplo, los cursos de Enseñanza y Aprendizaje tanto del Cálculo como del Álgebra, proponen dentro de sus planes de estudio, el recuento histórico del desarrollo de estas dos ramas de las Matemáticas.

Las Matemáticas son una ciencia en constante desarrollo. La manera en que fueron concebidos los conceptos y los procedimientos son el resultado de un largo proceso que en los contenidos mostrados en los libros de texto de Matemáticas no pueda ser evidenciada con facilidad. Con el estudio de la historia es posible conocer las diferentes vías de acceso y los sucesos que dieron cabida a la concepción de algún concepto y a la hora de abordar el estudio del objeto matemático puedan hacerse de una *manera natural.*

El reconocimiento de la Historia de las Matemáticas como una herramienta poderosa frente a los procesos de enseñanza permite que las Matemáticas no se vean como un cuerpo rígido y hermético donde no hay formas de manipulación directamente sobre el objeto matemático, sino que los estudiantes pueden tener una concepción de las matemáticas como una teoría donde es posible realizar descubrimientos y formular conjeturas desde el abordaje de una situación histórica que diera cabida a algún concepto (Sierra, 2012).

En la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas podemos ver que el conocimiento del desarrollo histórico de los conceptos matemáticos, permite establecer los momentos en que se encontraron obstáculos y en qué pasos se puede ver obstruido el proceso, siendo previsibles los momentos en que los estudiantes tendrán dificultades en esos mismos pasos.

La realización de un estudio de algunos métodos de solución de ecuaciones de segundo y tercer grado ofrece a los profesores oportunidades para el abordaje de situaciones problema que fueron propuestos en diferentes épocas como resultado de una actividad humana, tomando como referente los medios por los cuales se pudo llegar a un desarrollo dentro de la misma Matemática y emplearlo como una actividad de desarrollo conceptual en los estudiantes.

El presente trabajo de grado no se concibe como una propuesta didáctica, ya que no ofrece al lector las herramientas necesarias para implementar como situaciones de enseñanza y de aprendizaje en una clase de matemáticas los métodos de solución aquí presentados. Sin embargo, se ofrece un aporte metodológico donde los profesores de Matemáticas puedan proponer estrategias para abordar los problemas que a través de la historia se han presentado y que dieron vía a la resolución de ecuaciones algebraicas de segundo o tercer grado.

Objetivos

Con el desarrollo del presente trabajo se pretende realizar una recopilación histórica y conceptual de algunos métodos para encontrar raíces de ecuaciones polinómicas de segundo y tercer grado.

Para ello se proponen los siguientes objetivos específicos:

- Hacer un estudio histórico sobre algunos métodos existentes para hallar raíces de ecuaciones polinómicas de segundo y tercer grado.
- Organizar la información recopilada siguiendo una clasificación de acuerdo al tipo de método de solución (geométrico, analítico, simbólico., etc.) encontrado para cada una de las ecuaciones, evidenciando posibles avances conceptuales que se hubieran presentado a través de la historia. Sistematizar el estudio llevado a cabo a cerca de las raíces de ecuaciones polinómicas de grado dos y tres en un documento donde se muestre claramente la información relevante en cuanto a cada método estudiado.
- Aportar con la documentación y la sistematización que se realice a algunos cursos de fundamentación de La Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional donde se estudien métodos de solución de ecuaciones algebraicas.

Capítulo I:
Ecuaciones de segundo grado

En este capítulo se realiza una descripción de tres métodos para la resolución de la ecuación cuadrática, que surgieron en diferentes periodos de la historia, comenzando en la época antigua con los babilonios, luego pasando al Siglo VIII de la era moderna, en la península de Arabia, con al-Kwarizmi, quien recopiló y sistematizó las reglas básicas de lo que hoy se conoce, gracias a él, como "*el álgebra*". Luego finaliza este recorrido en la Europa Medieval, donde René Descartes, desde sus estudios en geometría y la inserción de lo que dio origen a la notación algebraica moderna, empleó diferentes relaciones geométricas para encontrar solución a ecuaciones cuadráticas.

En el estudio de las ecuaciones cuadráticas se encuentran múltiples autores que han trabajado con estas, de modo que es pertinente realizar una acotación que permita enfatizar nuestro estudio en alguna característica principal. Es por esto que se decide escoger tres representantes de épocas muy diferentes, cada una con apariciones históricas que están al orden del milenio de distancia. Todo ello con el fin de poder observar la evolución que se puede presentar en diferentes aspectos, como por ejemplo la incentivación que tuvieron en la época para el surgimiento del método, o para el estudio del mismo, o cómo se realizó la justificación del resultado.

I.1 Babilonios

Suele llamarse *babilonios* a las civilizaciones mesopotámicas que tuvieron lugar entre los ríos Tigris y Éufrates a finales del cuarto milenio antes de nuestra era. Estas civilizaciones tuvieron importantes desarrollos tecnológicos, tales como la escritura, el uso de la rueda y de los metales. Pese a sus importantes avances, la región mesopotámica sufrió múltiples invasiones, hasta que en el 600 a.C. el territorio cayó ante los persas y el imperio llegó casi a su extinción. Las producciones escritas de los babilonios fueron prolíferas; se han encontrado alrededor de 50.000 tablillas en escritura cuneiforme, con escritos de diferente índole, incluidas tablillas dedicadas a las matemáticas (Boyer, 1992).

Las Matemáticas babilónicas emplearon un sistema de numeración posicional sexagesimal, a partir de marcas cuneiformes sobre tablillas de arcilla, con el cual desarrollaron aritmética; diferentes tablillas muestran lo que parecen ser tablas de multiplicar, fracciones y operaciones entre ellas, entre otros diferentes aportes a la Matemática.

Ilustración[1] 1. Tabla de arcilla usada por babilonios

La manera que los babilónicos calculaban raíces cuadradas de números racionales positivos era a partir de medias aritméticas que permitieran realizar mejores aproximaciones de la raíz; es decir, si se quiere hallar $\sqrt{a}$ se realiza una aproximación para algún valor b, tal que

[1] Imagen tomada de http://jose-chamorro.blogspot.com/2011/01/el-teorema-de-pitagoras-en-babilonia.html

$b^2 \approx a$, y se prosigue a encontrar un valor $b_1$tal que $b * b_1 = a$, lo que se traduce como un problema de ecuación lineal, que los babilónicos podían resolver con comodidad; ahora se procede a realizar la media aritmética $c = \frac{b+b_1}{2}$, la cual será una mejor aproximación al valor de la raíz, y se procede nuevamente a encontrar un valor c_1 tal que $c * c_1 = a$; la recurrencia del método sugiere una aproximación eficiente para el cálculo de las raíces cuadradas. Una interpretación que se le puede dar a este resultado, que parte desde una representación geométrica y que se va desarrollando a partir de los procesos aritméticos, es que dado un número a, encontrar la longitud x del lado de un cuadrado cuyo área sea a.

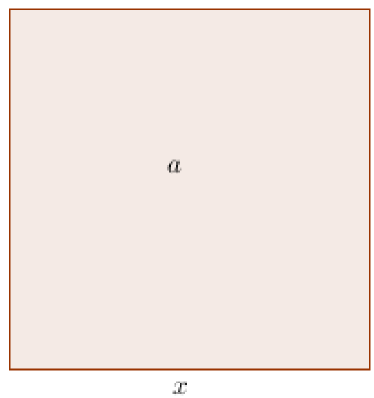

Ilustración 2: representación gráfica de la raíz cuadrada

Supóngase que se quiere encontrar $x = \sqrt{2}$, la cual está entre 1 y 2. Por lo tanto se toma un rectángulo de lados 1 y 2, donde su producto es igual al radicando.

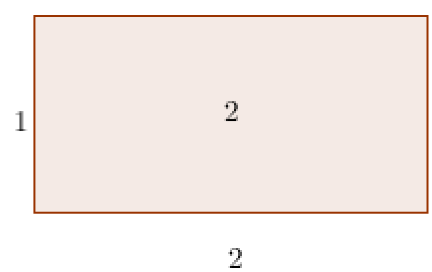

Ilustración 3: primera aproximación de la raíz

Ahora se halla la media aritmética entre los valores para encontrar una mejor aproximación

$$b = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

Ahora se encuentra un número b_1 tal que $b_1 * b = 2$

$$\frac{3}{2} b_1 = 2$$

$$b_1 = \frac{4}{3} = 1.\overline{3}$$

Por lo tanto se construye un rectángulo con dimensiones b_1 y b

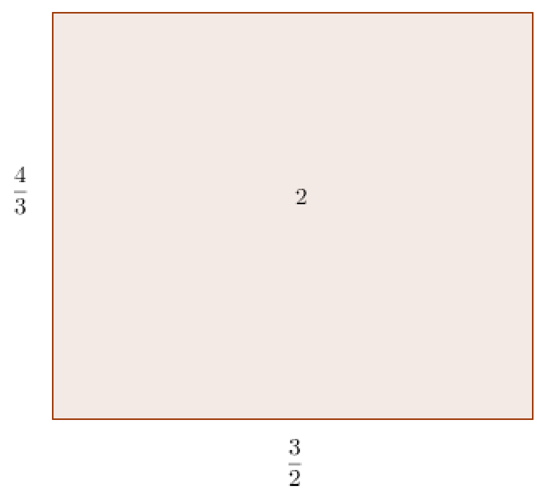

Ilustración 4: segunda aproximación de la raíz

Reiterando el proceso utilizado anteriormente se puede encontrar una mejor aproximación para el $\sqrt{2}$:

$$c = \frac{\frac{3}{2} + \frac{4}{3}}{2} = \frac{17}{12} = 1.41\overline{6}$$

$$\frac{17}{12} c_1 = 2$$

$$c_1 = \frac{24}{17} \approx 1.411764$$

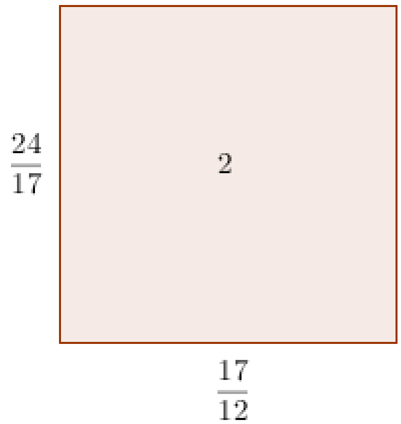

Ilustración 5: tercera aproximación de la raíz

El promedio entre los lados de éste rectángulo es

$$d_1 = \frac{\frac{24}{17} + \frac{17}{12}}{2} = \frac{577}{408} \approx 1.41421568$$

En la tercera iteración se puede observar que se puede alcanzar una aproximación para $\sqrt{2}$ con exactitud en 5 decimales, con lo cual se verifica que este método propone una forma sencilla y rápida para obtener una buena aproximación del número al que se le desea extraer la raíz cuadrada.

Las ecuaciones cuadráticas que consideraron los babilonios tienen sus raíces principalmente en los problemas donde se considera el área xy y el semiperímetro $x + y$ de un rectángulo. Se basan principalmente en problemas relacionados con la agrimensura, por lo cual las soluciones eran más de fácticas, no obstante, pese a la particularidad de las soluciones encontradas, el método permitía ser generalizable siguiendo los mimos pasos en la solución de ecuaciones de este tipo. En este aparte se realiza una justificación de manera general y empleando notación moderna.

Para el sistema

$$x + y = a \quad (1)$$

$$xy = b \quad (2)$$

se tiene por (1) que la suma del largo y el ancho de un rectángulo es a; para lo cual se considera inicialmente un cuadrado de lado $\frac{a}{2}$, ya que en éste el producto entre el largo y el ancho es máximo[2].

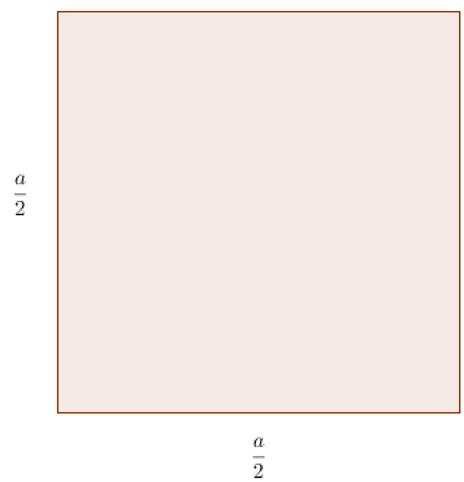

Ilustración 6: cuadrado con semiperímetro igual a

Ahora, por (2) se tiene que cumplir que el producto entre el largo y el ancho sea b, para lo cual se considera una longitud z, que aún no se conoce, que si se le agrega al largo, se le descuenta al ancho, de tal manera que se mantenga el semiperímetro constante. Al largo será representado por x y el ancho por y; de donde se obtiene que

$$x = \frac{a}{2} + z \qquad (3)$$
$$y = \frac{a}{2} - z \qquad (4).$$

[2] Es posible que los babilonios hubiesen tenido conocimiento de este hecho ya que en sus tablas fueron encontradas múltiples cálculos de productos.

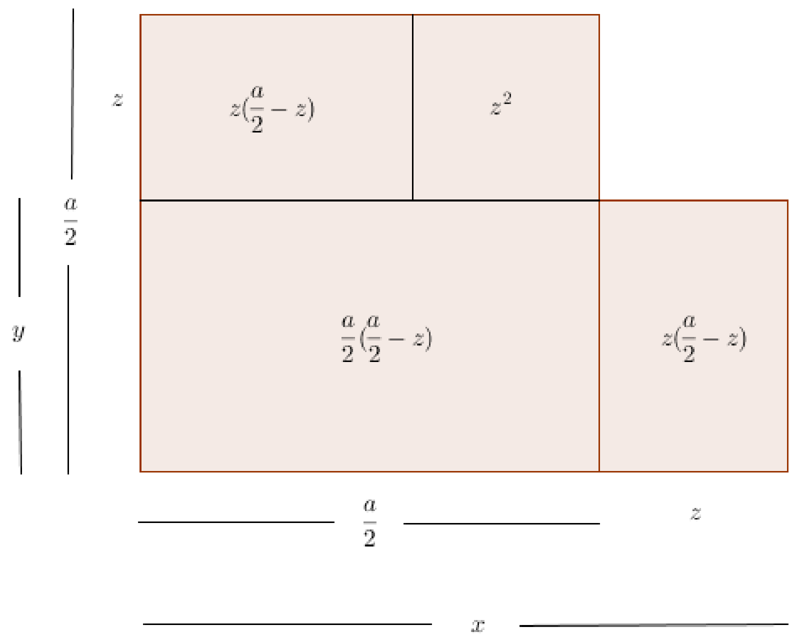

Ilustración 7: representación geométrica de la ecuación del sistema de ecuaciones $(\boldsymbol{x + y = a})$ y $(\boldsymbol{xy = b})$

De la construcción geométrica se puede extraer que

$$b = \frac{a}{2}\left(\frac{a}{2} - z\right) + z\left(\frac{a}{2} - z\right) = \left(\frac{a}{2} + z\right)(\frac{a}{2} - z),$$

lo cual corresponde con lo establecido en (2) sustituyendo los valores de x e y dados en (3) y (4) respectivamente. Finalmente, es posible determinar que

$$z^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b.$$

Por lo tanto, conocer el valor de z se traduce a la extracción de la raíz cuadrada de $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b$, ya que a y b son dados, por lo tanto

$$z = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \quad (5),$$

y en con secuencia, sustituyendo (5) en (3) y (4), obtenemos los valores de x e y:

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \quad (6)$$

$$y = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \quad (7)$$

En otro caso, si se conocen la diferencia $x - y = a$ y el producto de los dos números $xy = b$, con a y b conocidos; entonces se tiene que

$$x - y = a \qquad (8) \qquad \text{y} \qquad xy = b \qquad (9)$$

Se considera un rectángulo de largo x y ancho y, de tal manera que la diferencia entre los lados sea a.

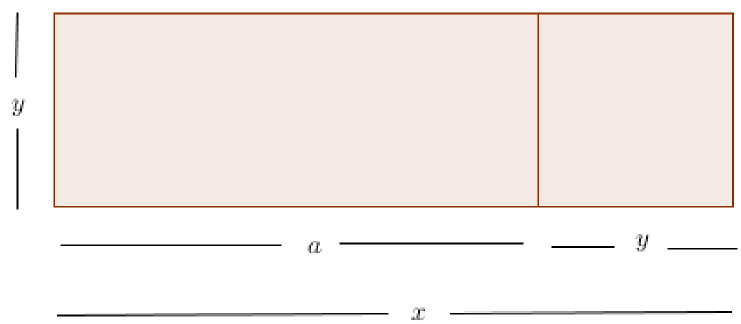

Ilustración 8: rectángulo de dimensiones x e y

La longitud a se divide entre dos, de tal manera que el rectángulo quede separado en dos partes, la parte de dimensión $\frac{a}{2}$ y la otra, que será $\frac{a}{2} + y$ la cual se denotará con z. Por lo anterior, se puede establecer que

$$x = z + \frac{a}{2} \quad (10)$$

$$y = z - \frac{a}{2} \quad (11).$$

Se construye el cuadrado de lado z, determinando la siguiente construcción geométrica, de la cual se puede concluir el valor de z, de la siguiente manera:

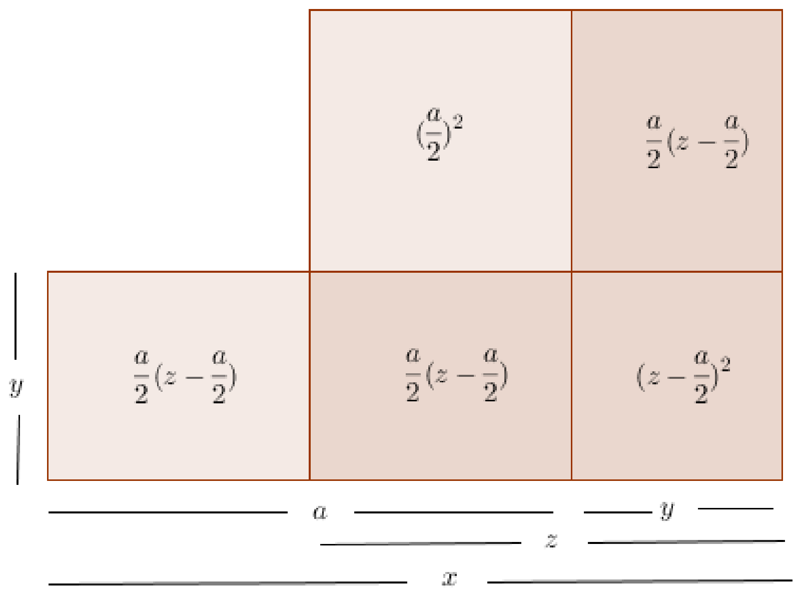

Ilustración 9: representación geométrica de la ecuación del sistema de ecuaciones $(x - y = a)$ y $(xy = b)$

Como $xy = b$, entonces se puede observar que

$$z^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b \quad (12),$$

para lo cual, como a y b son conocidos, haciendo uso del método para la extracción de raíz cuadrada, se tiene que

$$z = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} \quad (13).$$

Por lo tanto, las longitudes del largo y el ancho del rectángulo son

$$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} + \frac{a}{2} \quad (14)$$

$$y = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} - \frac{a}{2} \quad (15)$$

Un problema, similimar a los encontrados en las tablas babilónicas, dice lo siguiente (Acevedo & Falk, 1997):

"El área de un rectángulo se suma al largo añadido el ancho resultando 175; además la suma del largo y el ancho es 25"

Este problema se puede traducir a un lenguaje algebraico moderno:

$$xy + (x + y) = 175 \quad (16)$$

$$x + y = 25 \quad (17)$$

Los babilónicos poseían y habían encontrado múltiples conocimientos algebraicos; para situaciones como esta, los babilónicos hacían la resta de las ecuaciones para obtener un sistema ya conocido y familiar para ellos. En el ejemplo, haciendo la diferencia entre (16) y (17) resulta el siguiente sistema equivalente:

$$xy = 150$$

$$x + y = 25$$

Resolviendo por el método babilónico se sabe por (6) las soluciones del sistema

$$x = \frac{25}{2} + \sqrt{\left(\frac{25}{2}\right)^2 - 150} = \frac{25}{2} + \sqrt{\frac{625}{4} - 150}$$

$$= \frac{25}{2} + \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{25}{2} + \frac{5}{2} = \frac{30}{2}$$

$$x = 15$$

$$y = \frac{25}{2} - \sqrt{\left(\frac{25}{2}\right)^2 - 150} = \frac{25}{2} + \sqrt{\frac{625}{4} - 150}$$

$$\frac{25}{2} - \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{25}{2} - \frac{5}{2} = \frac{20}{2}$$

$$y = 10$$

Por lo tanto las longitudes de los lados del rectángulo son $x = 15$ y $y = 10$.

I.2Al-Kwarizmi

Fue un matemático, geógrafo y astrónomo musulmán; nació hacia el 780 d.C. en el territorio que hoy se conoce como Khiva, Uzbekistán y falleció en 850 d.C en Bagdad.

Poco se sabe de la vida de Mohammed ibn-Musa al-Kwarizmi. Fue miembro de la Casa de Sabiduría fundada por al-Mamún. Pese que es posible que hubieran existido muchos escritos por parte de al-Kwarizmi, sólo se conservan cinco documentos, entre esos *al-Mujtasar fi al-jabrwa-l-muqabala* que es un tratado de álgebra del cual existe una copia en árabe que data del siglo XIV y dos traducciones al latín realizadas en el siglo XII. En este tratado se realiza una descripción del *arte de la cosa,* que era como se le denominaba al tratamiento de las ecuaciones, que dio origen a la palabra *álgebra*[3] (Castillo, 2002).

Entre los estudios realizados por Al-Kwarizmi estaba el de la matemática griega que se basaba en la geometría, siendo el pilar *Los Elementos* de Euclides, donde Al-Kwarizmi sintetizó los diferentes casos que se tenían para la ecuación cuadrática de acuerdo a la distribución de los términos, ya que él no tomaba en cuenta los coeficientes y soluciones negativas. La manera en que las ecuaciones eran dadas era de forma retórica, donde la incógnita era llama *la cosa*. Por ejemplo, tres veces la cosa al cubo más cinco es igual al cuadrado de la cosa se expresa actualmente como $3x^3 + 5 = x^2$

A continuación se presentan las diferentes combinaciones de ecuaciones cuadráticas que consideró al-Kwarizmi[4] (Castillo, 2002):

Cuadrado de la cosa igual a cosa:	$x^2 = bx$
Cuadrado de la cosa igual a número:	$x^2 = c$
Cuadrado de la cosa más cosa igual a número:	$x^2 + bx = c$
Cuadrado de la cosa más número igual a cosa:	$x^2 + c = bx$
Cuadrado de la cosa igual a cosa más número:	$x^2 = bx + c$

Cada caso se trabaja de manera independiente con procedimientos distintos para cada uno, empleando en el desarrollo de la solución construcciones geométricas. En lo que sigue, se presenta el proceso a seguir para encontrar la solución a cada caso respectivamente,

[3] Del vocablo árabe *al-jabr* que hace alusión, en el contexto matemático, a la trasposición y reducción de términos.
[4] En el desarrollo de la presente sección se usará las letras c y b como números, mientras que la letra x representará la incógnita de la ecuación.

nombrándolo como lo hacía al-Kwarizmi y dando a conocer su solución geométrica a la vez que se realiza una interpretación algebraica.

I.2.1 Cuadrado de la cosa igual a cosa ($x^2 = bx$)

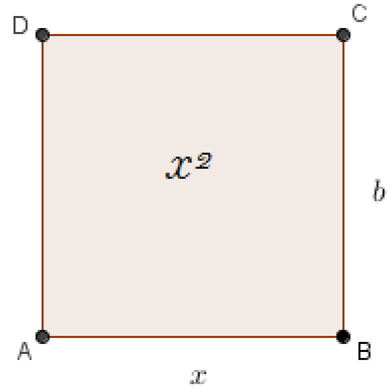

Ilustración 10: cuadrado de la cosa igual a cosa

Para esta situación la única solución razonable geométricamente es $x = b$, ya que el 0 no se considera como medida de alguna figura geométrica.

I.2.2 Cuadrado de la cosa igual a número ($x^2 = c$)

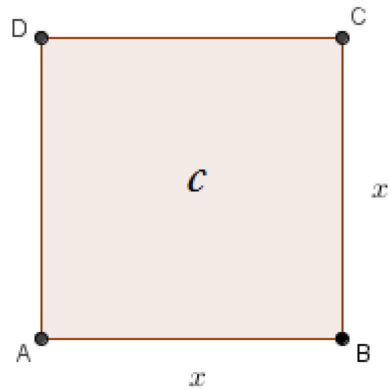

Ilustración 11: cuadrado de la cosa igual a número

Para este caso la solución de la ecuación se reduce a la extracción de la raíz cuadrada de c ($x = \sqrt{c}$), para lo cual los árabes tenían algoritmos ya establecidos siempre y cuando c no fuese un número negativo o nulo.

I.2.3 Cuadrado de la cosa más cosa igual a número ($x^2 + bx = c$)

La interpretación geométrica para esta expresión algebraica es la superposición de un cuadrado de lado x y un rectángulo de lados b y x tal que la suma de sus áreas sea igual a c.

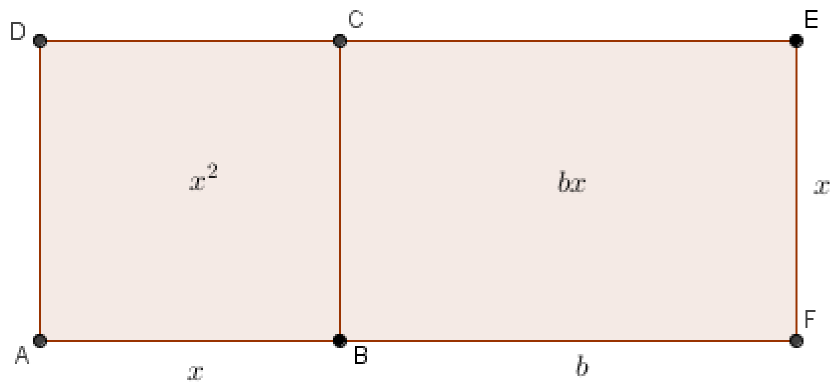

Ilustración 12: cuadrado de la cosa más cosa igual a número

Ahora se realiza una partición del rectángulo $CBEF$ con área bx en dos partes iguales con área $\frac{b}{2}x$

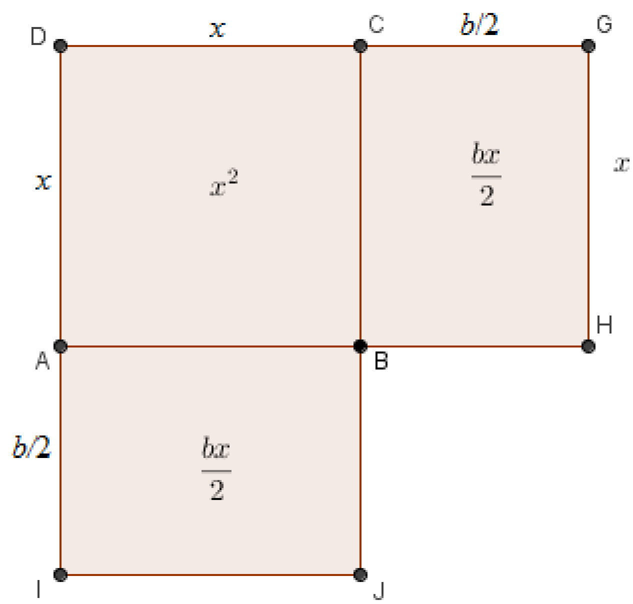

Ilustración 13: división del rectángulo de área bx

Completando el cuadrado se obtiene:

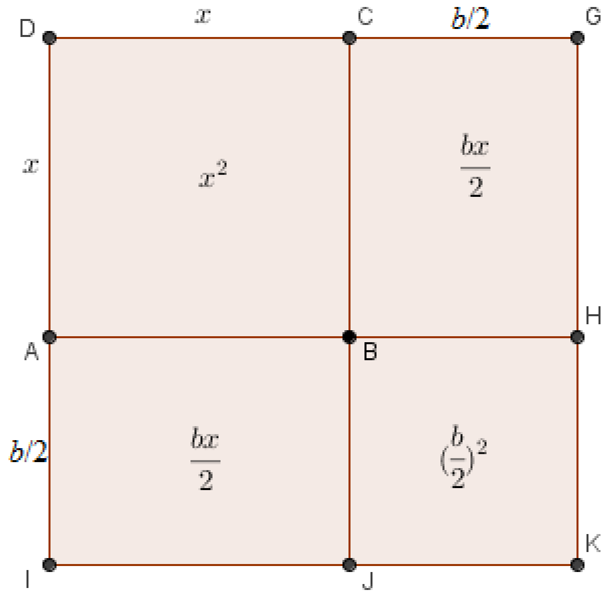

Ilustración 14: completando el cuadrado

Y esta imagen, se puede interpretar algebraicamente, usando las áreas sugeridas allí, como se muestra a continuación:

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c \qquad (1)$$

Como b y c son números positivos dados, esta expresión se convierte en una ecuación de la forma *cuadrado de la cosa igual a número:* $y^2 = k$. Donde

$$y = x + \frac{b}{2} \qquad \text{y} \qquad k = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$$

Conocida la solución para y, basta con restar $\frac{b}{2}$ y de esta manera se puede encontrar el valor para x.

Verificando a través de argumentos algebraicos, se puede justificar que la relación encontrada a partir de las figuras geométricas corresponde con la solución positiva de la ecuación cuadrática, ya que de acuerdo a (1) se llega a que

$$x + \frac{b}{2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$$

Lo que implica directamente que:

$$x = -\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} \qquad (2)$$

La cual es la solución que corresponde a la ecuación de la forma: $x^2 + bx = c$.

I.2.4 Cuadrado de la cosa más número igual a cosa ($x^2 + c = bx$)

Se toma un cuadrado de lado x y una región cuya área sea c, como el resultado requerido es bx se asume que un lado de c debe ser x, por lo tanto el rectángulo resultante será de lados x y b (en la figura, la distancia entre los puntos F y H es b)

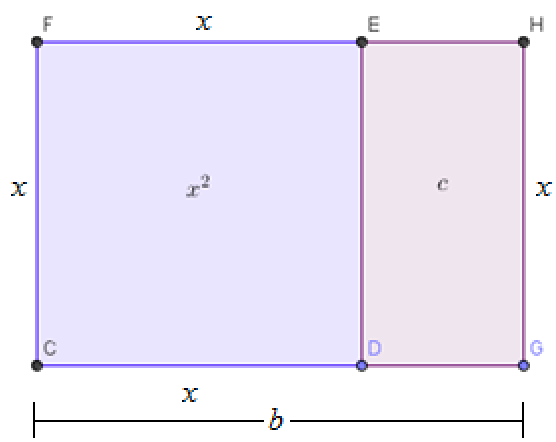

Ilustración 15: cuadrado de la cosa más número igual a

Ahora se divide el rectángulo por un segmento JI, tal que J sea punto medio del $\overline{CG}$ e I del $\overline{FH}$, respectivamente, obteniendo dos rectángulos de igual área $A = \frac{b}{2}x$. Al realizar la construcción del segmento, se pueden dar dos casos: o bien, que la partición recaiga sobre el cuadrado $CDEF$ o sobre el rectángulo $DGHE$. En primer lugar, se analiza qué sucede si cae sobre el cuadrado, por lo cual se traza un segmento perpendicular al $\overline{CG}$ por su punto medio.

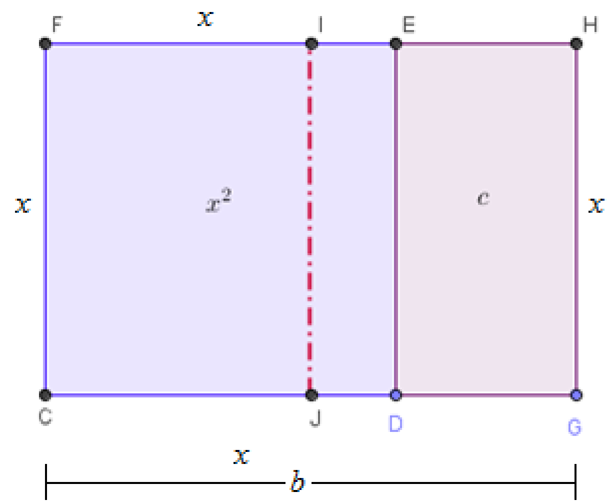

Ilustración 16: división del rectángulo con área bx

En el rectángulo $JGHI$ se realiza una nueva partición:

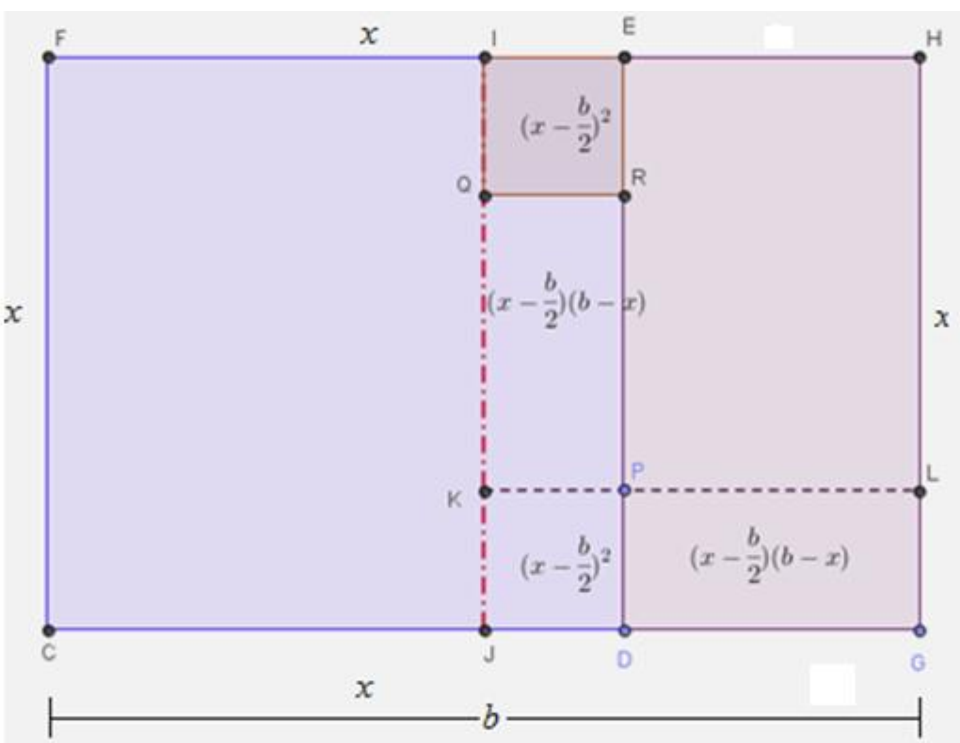

Ilustración 17: nueva partición

De tal manera que $IH = \frac{b}{2}$, por lo tanto $KLHI$ es un cuadrado con área $\left(\frac{b}{2}\right)^2$. Los rectángulos $KPRQ$ y $DGLP$ tienen las mismas dimensiones, dadas por segmentos cuya medida es $x - \frac{b}{2}$ y $b - x$, respectivamente, por lo tanto ambos rectángulos tienen área $\left(x - \frac{b}{2}\right)(b - x)$. De igual manera, los cuadrados $QREI$ y $JDPK$ tienen área $\left(x - \frac{b}{2}\right)^2$.

El rectángulo $DGHE$, cuya área es c, está conformado por los rectángulos $PLHE$ y $DGLP$, como el área de $DGLP$ es igual al área de $KPRQ$ se puede asegurar que

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \sqrt{c} \qquad (3)$$

Que como en el caso anterior se reduce a una ecuación de la forma $y^2 = k$. En este caso, se tiene que:

$$y = x - \frac{b}{2} \qquad \text{y} \qquad k = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$$

Al operar en (3), se puede verificar que la solución de la ecuación es:

$$x = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \qquad (4)$$

Ahora se analizará qué sucede si el segmento IJ cae sobre el rectángulo $EHGD$

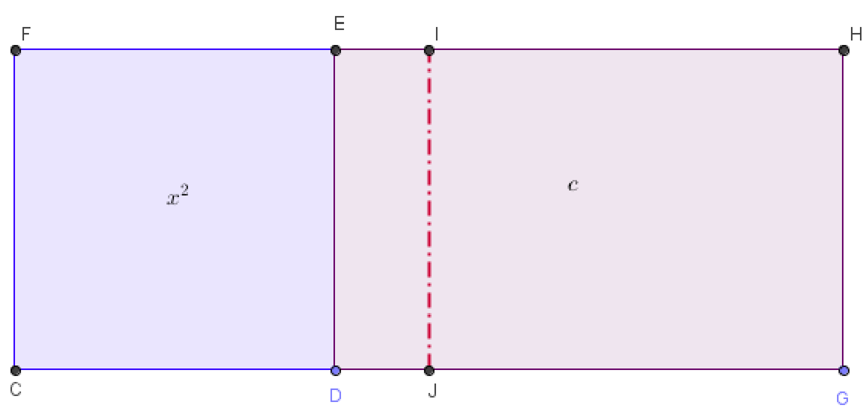

Ilustración 18: partición del rectángulo, caso dos

Copiando el rectángulo $DJIE$ en la parte inferior del rectángulo y completando el rectángulo con lado $CJIF$ para obtener así el cuadrado de lado IF, se llega a la siguiente figura:

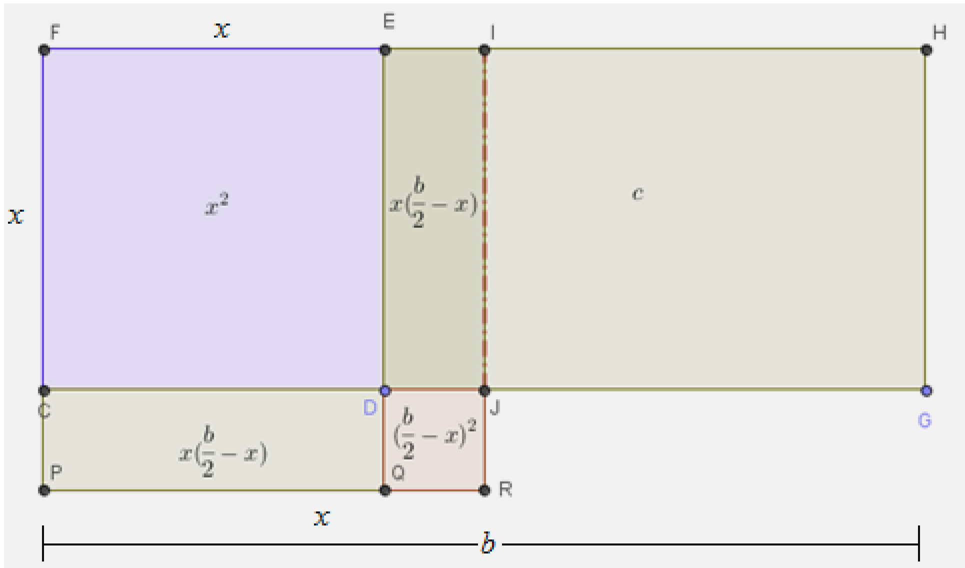

Ilustración 19: completando el cuadrado

Se puede observar que el área de $CJIF$ más el área de $PQDC$ es igual a c, ya que el rectángulo $EIJD$ está compartido, y que tiene igual área que $CDQP$. Por lo tanto se extrae la siguiente relación:

$$\left(\frac{b}{2}-x\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c \quad (5)$$

Por lo tanto, se observa que nuevamente se reduce el caso al caso $y^2 = k$, donde

$$y = \frac{b}{2} - x \qquad \text{y} \qquad k = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$$

En este caso, primero se tendrá que hallar y y luego a $\frac{b}{2}$ se le restará el valor encontrado para establecer x. Realizando la justificación algebraica resulta que:

$$\left(\frac{b}{2}-x\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$$

Se sabe, por condiciones de construcción, que $x < \frac{b}{2}$ y que $c < \frac{b}{2}$, además $b, c > 0$. Por lo anterior, se puede operar del siguiente modo para determinar a x:

$$\frac{b}{2} - x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

$$x = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \quad (6)$$

Se puede observar que para este tipo de ecuaciones se obtienen dos soluciones, dependiendo de la relación de orden entre $\frac{b}{2}$ y c, que, coinciden con las dos soluciones que se contemplan actualmente al solucionar la ecuación usando la fórmula cuadrática.

I.2.5 Cuadrado de la cosa igual a cosa más número $(x^2 = bx + c)$

Para la construcción se tomará un cuadrado de área x^2 y se tomarán dos partes, una correspondiente a bx y la otra a c.

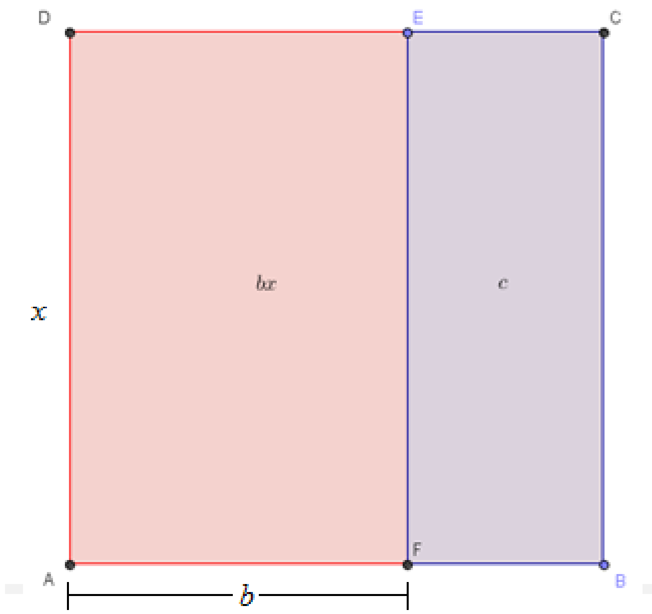

Ilustración 20: cuadrado de la cosa igual a cosa más número

Por la construcción se observa que la medida del segmento AF es b por lo tanto, si se toma el punto medio del segmento resulta un punto G tal que $AG = GF = \frac{b}{2}$ y trazando el segmento perpendicular a $\overline{AF}$ por G, se hallará el punto H, el cual es la intersección de dicha perpendicular con $\overline{DE}$ y a su vez punto medio de dicho segmento.

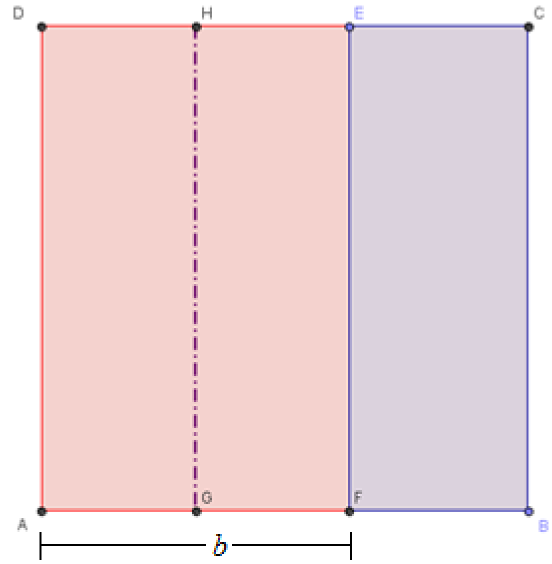

Ilustración 21: división del rectángulo con área bx

Ahora, se construye el cuadrado con lado $x - \frac{b}{2}$ que es la medida del segmento CH y el cuadrado con lado HE de medida $\frac{b}{2}$

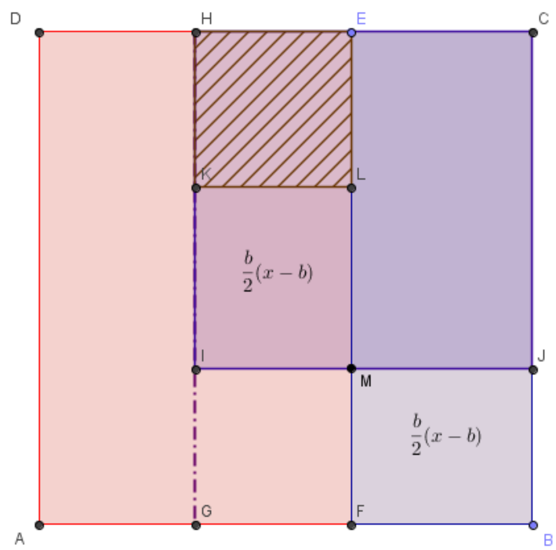

Ilustración 22: completando el cuadrado

La distancia $BJ = \frac{b}{2}$ y $BF = x - b$, de igual manera se tiene para las distancias $KI = x - b$ y $KL = \frac{b}{2}$ por lo tanto, las áreas de tales rectángulos son iguales; como c está conformado por el área de $MJCE$ más el área de $FBJM$ entonces al sustituir entre el área de $BFMJ$ y el área de $IKLM$ se tiene que:

$$\left(x-\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+c \quad (7)$$

Y por lo tanto se reduce la ecuación al caso $y^2=k$, con

$$y=x-\frac{b}{2}\text{y}k=\left(\frac{b}{2}\right)^2+c$$

Realizando la justificación algebraica, se establece la solución de la ecuación despejando x en (7)

$$\left(x-\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+c$$

$$x-\frac{b}{2}=\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}$$

$$x=\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c} \quad (8)$$

I.3 Descartes

René Descartes, filósofo y matemático francés. Nació en La Haya, Turena. Hijo de una prestigiosa familia burguesa, fue alumno de los jesuitas en el colegio de La Flèche entre 1604 y 1612. Dedicó su vida a estudiar varias disciplinas del conocimiento como la Filosofía, la Física, la Astronomía, la Música, la Mecánica y las Matemáticas. Para esta última, desarrollo la obra *La Geometrie*, que fue publicada en 1637 como apéndice de su famoso *Discurso del Método*. (Libraire Larousse, 1981).

La geometría que propuso es el resultado de investigaciones propias, teniendo como referente el trabajo realizado por otros matemáticos anteriores a él, como por ejemplo Euclides, quien instituyó de manera deductiva el estudio de la Geometría haciendo uso de postulados y teoremas y Apolonio, quien estableció propiedades, planteó y resolvió problemas relacionados la Geometría plana. Descartes en esta obra, hace énfasis en la resolución de problemas geométricos clásicos y modernos apoderándose de un lenguaje retórico apoyado de construcciones geométricas y de expresiones algebraicas para dar cabida a nuevas curvas, con lo cual trascendió de lo geométrico a lo algebraico.

Lo anterior, le otorgó a Descartes el nombre de Padre de la Geometría Analítica, ya que realizó un salto revolucionario sin precedentes en el simbolismo, que inició con el uso de letras del alfabeto (las primeras para los parámetros y las últimas para las incógnitas a notar) con el ánimo de establecer una notación algebraica. Y también porque a través de su método pudo establecer una traducción en doble sentido de la geometría y el álgebra. *La Geometrie* (Descartes, 2003) presenta la derivación de ecuaciones de los lugares geométricos y la construcción geométrica de las soluciones de ecuaciones, y se divide en tres libros.

En su primer libro, presenta una construcción geométrica de la solución de ecuaciones de segundo grado y realiza la descripción algebraica de la solución.

La primera ecuación que Descartes analiza es

$$\boldsymbol{z^2 = az + b^2}$$

Para lo cual considera la siguiente construcción, donde LM es tangente a la circunferencia, LN es radio y M, P, N yO son colineales. Por las propiedades anteriores se puede concluir que el triángulo MLN es rectángulo.

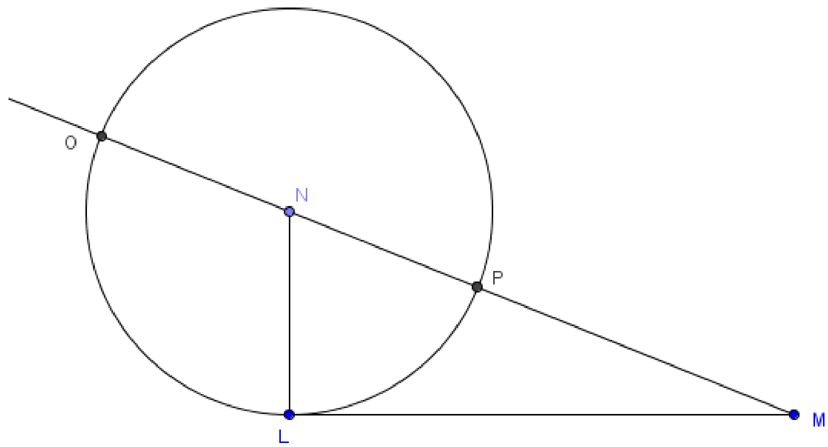

Ilustración 23: construcción propuesta por Descartes

Aplicando el Teorema de Pitágoras obteniendo la siguiente relación

$$MN^2 = LM^2 + LN^2 \quad (1)$$

Y por la colinealidad presentada en la construcción se concluye que

$$OM = ON + MN$$

Elevando al cuadrado la expresión anterior

$$OM^2 = ON^2 + 2 * ON * MN + MN^2 \quad (2)$$

Haciendo sustitución de (1) en (2), obtenemos la igualdad (3)

$$OM^2 = ON^2 + 2 * ON * MN + LM^2 + LN^2 \quad (3)$$

Como LN y ON son radios de la circunferencia, entonces $LN = ON$, que al sustituir en (3) se llega a:

$$OM^2 = LN^2 + 2 * ON * MN + LM^2 + LN^2$$

$$OM^2 = 2 * LN^2 + 2 * LN * MN + LM^2$$

Agrupando $2 * LN$ como factor común:

$$OM^2 = 2 * LN(LN + MN) + LM^2$$

Volviendo la sustitución $LN = ON$ y teniendo en cuenta la expresión (2) se encuentra que:

$$OM^2 = 2 * LN * OM + LM^2, \quad (4)$$

la cual, es una expresión con la forma de la ecuación que se quiere solucionar, donde

$$OM = z$$
$$LM = b$$
$$2LN = a$$

Es decir que la cantidad desconocida z se puede obtener a partir del Teorema de Pitágoras, como:

$$\left(z - \frac{1}{2}a\right)^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + b^2$$

Extrayendo raíz cuadrada y despejando z se encuentra la solución de la ecuación cuadrática

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}$$

Como Descartes no concibe cantidades negativas, su solución no permite una generalización para cualquier valor, y es por eso que contempla el siguiente caso

$$\boldsymbol{y^2 = -ay + b^2}$$

Para la solución se tomará el segmento exterior a la circunferencia PM, haciendo uso de la proposición 36 de *Los Elementos* de Euclides[5] se extrae la siguiente relación

$$LM^2 = PM * OM$$

Tomando nuevamente las longitudes de los segmentos como $LM = b$ y $2LN = a$, se obtiene

$$b^2 = y(y + a)$$

$$b^2 = y^2 + ay \qquad (5)$$

Que es una ecuación equivalente a la que se quiere resolver, realizando un tratamiento análogo al de la expresión anterior, se puede establecer que la solución a ésta ecuación es:

$$y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2} \qquad (6)$$

La siguiente ecuación que Descartes analizó fue:

$$\boldsymbol{z^2 = az - b^2}$$

Posiblemente Descartes trató de analizar la ecuación de una manera similar a como había analizado las ecuaciones anteriores, sin embargo éste análisis, a partir del Teorema de Pitágoras se queda corto, y se da cuenta que sólo arroja una parte de la solución. Es por esto que se hace necesario realizar una nueva construcción:

[5] Esta proposición es conocida en la geometría como el Teorema de Proporción Punto-Potencia.

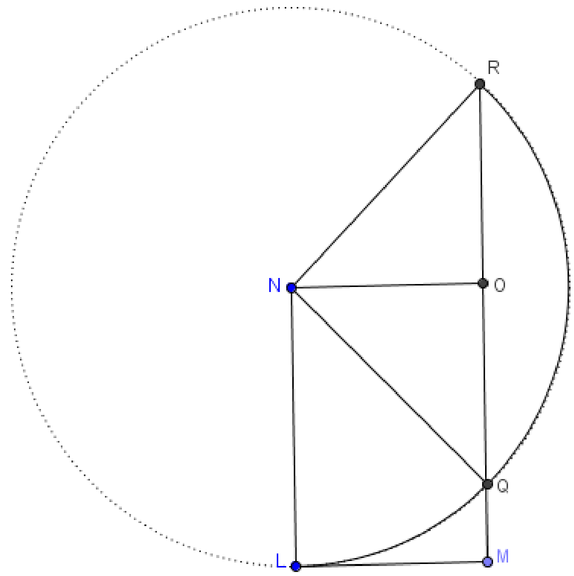

Ilustración 24: segunda construcción propuesta por Descartes

Donde los ángulos MLN, LMO y MON son rectos. LN, QN y NR son radios de la circunferencia. De la construcción se establece que:

$$MQ = OM - OQ \quad (7)$$

Elevando al cuadrado (7) se obtiene:

$$MQ^2 = (OM - OQ)^2$$

$$MQ^2 = OM^2 - 2 * OM * OQ + OQ^2 \quad (8)$$

Haciendo uso del Teorema de Pitágoras para el triángulo rectángulo NOQ resulta:

$$QN^2 = OQ^2 + ON^2$$
$$QN^2 - ON^2 = OQ^2 \quad (9)$$

Realizando una sustitución de (9) en la expresión (8), se encuentra que:

$$MQ^2 = OM^2 - 2 * OM * OQ + QN^2 - ON^2 \quad (10)$$

Además, de la construcción se puede extraer que

$$LM = ON \quad (11)$$

$$LN = OM \quad (12)$$

Por ser el cuadrilátero $LMON$ un paralelogramo, también LM y NO, LN y OM son lados opuestos respectivamente del paralelogramo, entonces al sustituir (11) y (12) en (10) se llega a que

$$MQ^2 = LN^2 - 2 * LN * OQ + QN^2 - LM^2 \quad (13)$$

Y por (7) se tiene en (13) la siguiente igualdad:

$$(OM - OQ\ )^2 = LN^2 - 2 * LN * OQ + QN^2 - LM^2$$

$$(LN - OQ\ )^2 = LN^2 - 2 * LN * OQ + QN^2 - LM^2 \quad (14)$$

Desarrollando el binomio al cuadrado

$$LN^2 - 2 * LN * OQ + OQ^2 = LN^2 - 2 * LN * OQ + QN^2 - LM^2$$

$$OQ^2 = QN^2 - LM^2 \quad (15)$$

Pero $QN = LN$ por ser radios de la circunferencia, lo que implica que:

$$OQ^2 = LN^2 - LM^2$$

Por lo tanto,

$$OQ^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 - b^2$$

$$OQ = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 - b^2}$$

Es decir, se tomará el valor desconocido z como:

$$z = MO - OQ$$

$$z = LN - OQ$$

Por lo que se puede concluir que la solución de la ecuación es:

$$z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 - b^2} \quad (16)$$

Sin embargo, no se ha considerado el triángulo rectángulo NOR, para el cual al utilizar el Teorema de Pitágoras se obtiene que

$$OR^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 - b^2$$

$$OR = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 - b^2}$$

De la colinealidad en la construcción se puede concluir que:

$$MR = OR + OQ + QM \quad (17)$$

Y remplazando (7) en (17):

$$MR = OR + OQ + OM - OQ$$

$$MR = OR + OM$$

Sustituyendo los valores de OR y de OM resulta finalmente que:

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 - b^2}$$

Es decir, cuando la circunferencia corte la recta MO en dos puntos se encontrará dos valores positivos diferentes que solucionan la ecuación, tales soluciones son:

$$z = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 - b^2}$$

Si MR es tangente a la circunferencia con centro N y radio LN, es decir si $b = \frac{1}{2}a$, las raíces son iguales; mientras que si $b > \frac{1}{2}a$, la línea MR no cortará a dicha circunferencia, lo que significaría que no existen soluciones reales. Descartes expresa esto en el mismo lenguaje usado por los geómetras griegos:

> *Y si el círculo que tiene su centro en N y pasa por el punto L no corta [no es secante] ni toca [no es tangente] la línea recta MQR, no hay ninguna raíz de la ecuación, de manera que puede asegurarse que la construcción del problema propuesto es imposible.* (2003: 397)

A continuación se presenta un ejemplo de una ecuación de la forma $z^2 = az - b^2$ que será resuelta a partir de la construcción realizada por Descartes. La ecuación a solucionar es

$$x^2 = 10x - 16,$$

donde

$$a = 10$$
$$b = 4$$

Para lo cual se considerará la siguiente construcción:

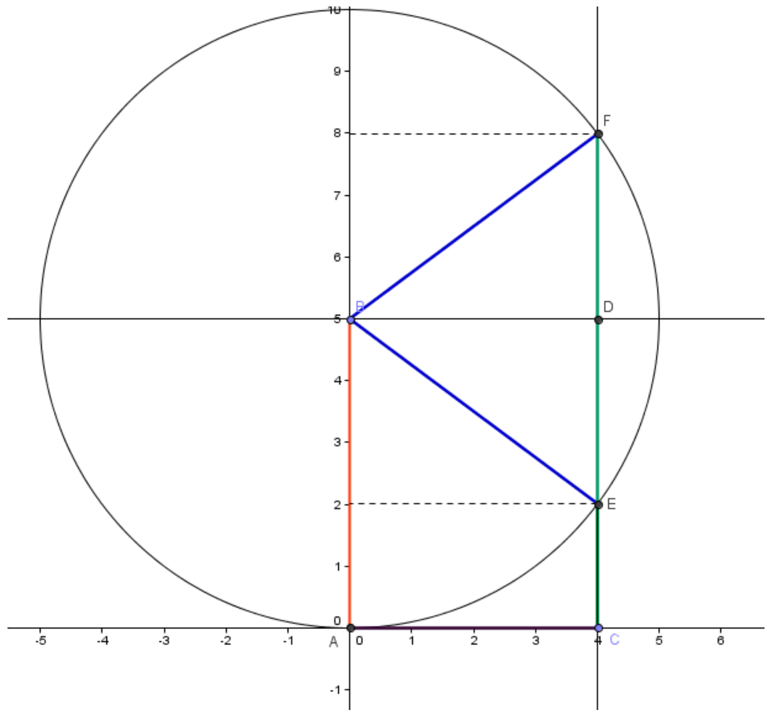

Ilustración 25: Construcción correspondiente al ejemplo

En donde:

$$AB = \frac{a}{2} = 5$$

$$AC = b = 4$$

tomando como radio el segmento AB y centro en B haciendo circunferencia, cortando la recta paralela a AB por C en los puntos E y F. Los segmentos BE y BF son radios de la circunferencia, por lo tanto su medida es igual a 5, formando los dos triángulos rectángulos BDE y BDF, donde utilizando el Teorema de Pitágoras se puede concluir que el segmento DE y DF son de longitud 3, quedando entonces que el segmento $CE = 2$ y el segmento $CF = 8$, es decir que, por lo propuesto por Descartes, la soluciones de la ecuación

$$x_1 = 2 \quad y \quad x_2 = 8$$

I.4 A manera de conclusión

En los métodos de solución expuestos en este capítulo se evidencian avances sobre los métodos de solución de las ecuaciones de segundo grado. En primer lugar, los babilónicos resolvían problemas concretos usando tablas para facilitar operaciones y aproximarse a resultados, que servían como guía para resolver problemas similares y llegar a conclusiones de forma general en el sentido operacional, lo cual refleja un matiz algebraico dentro de la solución, que busca dejar en evidencia un algoritmo que puede reproducirse dependiendo el caso.

En el caso de los árabes y su solución a los diferentes posibilidades que podría presentar la ecuación cuadrática[6], es un método basado en argumentos geométricos, dada la influencia de las matemáticas griegas y la geometría de Euclides; llegando a la solución de la ecuación desde un razonamiento que relacionaba áreas de figuras planas, en particular, cuadrados y rectángulos.

Con la Geometría de René Descartes se puede ver claramente un híbrido que se presenta, de los argumentos geométricos y los resultados algebraicos, ya que la solución que propone Descartes parte de un razonamiento geométrico, y a partir de la introducción de una notación versátil, permitió llegar a una relación algebraica. Es de notar la generalidad con la que realiza las construcciones y el análisis de sus resultados, siguiendo la línea de lo realizado por al-Kwarizmi y evolucionando la posición babilónica de los casos puntuales.

[6] Como ellos no consideraban coeficientes negativos, resultaban diferentes articulaciones de los términos de la ecuación.

Capítulo II:
Ecuaciones de tercer grado

En el siguiente capítulo se dará a conocer por orden cronológico la descripción de tres métodos que se han aplicado para reducir o bien, para resolver en forma general una ecuación de tercer grado. En lo consultado, se puede dar una leve idea de algunas conexiones históricas que unen a los que, poco a poco, construyeron lo que hoy conocemos como métodos de reducción y resolución de ecuaciones cúbicas. Sin embargo, se hace oportuno destacar el trabajo hecho en tres momentos principales, lo que implicará seleccionar tres representantes de épocas distintas, con métodos diferentes. Dichas épocas se encuentran tan alejadas una de la otra, que es posible distinguir ciertos rastros de cambio y evolución presentados por medio de diferentes características, como por ejemplo el propósito de cada autor para proponer una solución o estudiar el problema, así como también la forma se dar respuesta.

Se partirá desde el siglo XVIII a. C., aproximadamente, dando un ejemplo de reducción hecho por los babilónicos, quienes usaban tablas para solucionar sus problemas cotidianos (Collete, 1985), luego se continúa con la solución propuesta por Omar Jayyam hacia 1070 **Fuente especificada no válida.**, también conocido como Omar Al- Khayyam quien con aportes de otros árabes se encargó de plasmar la solución para 14 casos de la ecuación cúbica que él mismo propuso. Por último, se pasará a trabajar lo elaborado por tres grandes matemáticos: Del Ferro, Tartaglia y Cardano, quienes envueltos en una *apasionante historia logran llegar al gran resultado de la ecuación cúbica, que a mitades del siglo XVI parecía algo insoluble* (Boyer, 1992).

II.1 Babilonios

Uno de los aspectos por los cuales los babilonios han sido famosos es la compilación de tablas aritméticas. Para nuestro estudio, se pueden destacar algunas que se encontraron hacia el año 2000 a. C., como las tablas de cubos, convenientemente leídas como tablas de raíces cúbicas; una tabla con los valores de $n^3 + n^2$ para $n = 1, 2, \ldots, 30$. Ésta era usada para solucionar varios de los problemas encontrados en textos babilónicos que eran del tipo

$$x^3 + x^2 = h.$$

Además, en algunas de tablas babilónicas es posible observar una serie de *instructivos* que orientan al lector a la solución de un determinado tipo de problema (Bell, 2003). Sin embargo, aunque algunos de los procedimientos necesarios eran mentales y en general, el álgebra babilónica se determinaba por medio de reglas sin uso de algún simbolismo de tipo algebraico, por lo que en dichas tablas se encuentra la solución detallada de varios problemas numéricos haciendo uso de instrucciones verbales regidas por pautas ya definidas con anterioridad dentro de esta civilización.

Otro de los aspectos a resaltar de esta cultura es su metodología para transformar y reducir ecuaciones. Específicamente logran reducir la expresión:

$$x^3 + px^2 + q = 0$$

a la ecuación:

$$y^3 + y^2 = r$$

Usando las sustituciones:

$$y = \frac{x}{p} \qquad \text{y} \qquad r = -\frac{q}{p^3},$$

y multiplicando el término $\frac{1}{p^3}$ a la ecuación original. Cuando r resultaba ser positivo, y si además estaba contenido dentro de la tabla de los valores $n^3 + n^2$, entonces el valor de y, así como el de x se podrían deducir.

Cabe resaltar que de dicha metodología no se han encontrado registros anteriores, por lo que se puede pensar que la reducción babilónica de ecuaciones de tercer grado es el primer caso de este procedimiento (Collete, 1985). Por otro lado, hay quienes afirman que los escribas operaban partiendo de los valores tabulados para r, de modo tal que al plantear sus ecuaciones de tipo $x^3 + px^2 = q$, pudieran encontrar su solución.

En general, una ecuación de la forma:

$$ax^3 + bx^2 = c,$$

se puede reducir, de acuerdo con el razonamiento seguido por los babilónicos, en primer lugar multiplicando (1) por el factor a^2/b^3:

$$\frac{a^3x^3}{b^3} + \frac{a^2x^2}{b^2} = \frac{a^2c}{b^3} \qquad (1)$$

Lo que se puede escribir como:

$$\left(\frac{ax}{b}\right)^3 + \left(\frac{ax}{b}\right)^2 = \frac{ca^3}{b^3} \qquad (2)$$

Y si se realiza la sustitución:

$$y = \frac{ax}{b} \qquad (3)$$

Es posible escribir la siguiente expresión:

$$y^3 + y^2 = \frac{ca^3}{b^3} \qquad (4)$$

Con ello y con la tabla $n^3 + n^2$, es posible encontrar un valor h cercano a ca^3/b^3, con lo que se determina aproximadamente el número que corresponde a y, y con esto es posible hallar a x, pues la igualdad (3) se puede escribir como:

$$x = \frac{by}{a}$$

De ese modo se llega a reducir de forma general la ecuación de forma $ax^3 + bx^2 = c$ y, en algunos casos, atendiendo a las condiciones que surgieron durante el proceso anterior, también es posible encontrar la solución para ciertas ecuaciones. A continuación se muestra una expresión que se resolverá usando el procedimiento explicado anteriormente:

La ecuación

$$2x^3 + 3x^2 - 108 = 0$$

también podría ser expresada como:

$$\frac{8}{27}x^3 + \frac{4}{9}x^2 - 16 = 0$$

que es lo mismo que tener:

$$\left(\frac{2x}{3}\right)^3 + \left(\frac{2x}{3}\right)^2 = 16$$

De este modo se obtiene una igualdad de la forma:

$$y^3 + y^2 = r,$$

en donde:

$$y = \frac{2x}{3} \qquad \text{y} \qquad r = 16$$

Por lo que la ecuación inicial, en términos de y, se escribirá como:

$y^3 + y^2 = 16$Ahora, siguiendo el método de los babilonios, se aproxima el valor de y en la tabla de $n^3 + n^2 = h$, sabiendo que $h = 16$.

II.2 Omar Al-Khayyam

La mayoría de los primeros trabajos desarrollados en la escuela de Al-Karagi, en lo referente al álgebra, no trascienden más allá de la reducción de ecuaciones cuadráticas. Sin embargo, un problema que sirvió de estímulo para el estudio de las ecuaciones cúbicas fue:

"Cortar una esfera con un plano de manera que los volúmenes de los segmentos obtenidos estén en una razón dada."

Ésta es la cuarta proposición del segundo libro de la obra "*Sobre la esfera y el cilindro*" de Arquímedes. En otras palabras, lo que se debe determinar es la intersección de un plano con una esfera, de manera que la relación entre los volúmenes de los dos hemisferios esféricos resultantes sea igual a un valor dado. Al buscar la solución para dicha proposición, se ha de resolver la ecuación:

$$\frac{a-x}{c}=\frac{b^2}{x^2}$$

Que, Arquímedes resuelve geométricamente (según Eutocio de Ascalón, alrededor del año 500 d.C.) geométricamente cortando secciones cónicas. Además, este problema sirvió de estímulo para el estudio posterior de las ecuaciones cúbicas. Tiempo después, Al-Mahani retomó este problema para darle una interpretación algebraica:

"La igualdad de un cubo y de un número a un cuadrado."$(x^3+r=px^2)$

Sin embargo, no tuvo éxito para encontrar la raíz de la ecuación. Varios matemáticos del Siglo X, se interesaron en el estudio de varios problemas alejandrinos como: la trisección del ángulo, la construcción de polígonos regulares y en particular, los relativos a construcciones geométricas que conducían a resolver ecuaciones de tercer grado, lo que aún no era posible en dicha época y por lo tanto no eran construibles con regla y compás como lo demostró el francés Wantzel en 1843.

Por otro lado, se cree que entre los años 780 y 850 aproximadamente vivió Al-Jwarizmi, quién junto a, Al-Karayi,Alhacén y Al-Biruni, fue uno de los precursores de Omar Jayyam. Si bien, Al-Jwarizmi, como se menciona en la solución de ecuaciones cuadráticas, sólo tiene en cuenta números y soluciones no negativas, genera seis casos para las ecuaciones de primer y segundo grado, que soluciona usando construcciones geométricas basándose en los *Elementos* de Euclides, al igual que Abu Kail quién trabaja con varias incógnitas y tiene en cuenta cantidades irracionales. Por su parte, Al-Karayi realiza la obra Al-Fahri, en donde además de usar métodos geométricos, proporciona otro aritmético, llegando a procedimientos más generales y estudiando ecuaciones de grado superior de la forma:

$$ax^{2n+m} + bx^{n+m} = cx^m$$

Pero más tarde, es Alhacén uno de los primeros árabes en abordar exitosamente la cuarta proposición de Arquímedes, expuesta anteriormente. Él parte en dos trozos la esfera de radio R con un plano que la corta a una distancia $R - x$ del centro. Con lo cual, los volúmenes de cada trozo será:

$$V = \pi\left(Rx^2 - \frac{x^3}{3}\right) \text{y} V^* = \pi\left(\frac{4}{3}R^3 - Rx^2 + \frac{x^3}{3}\right)$$

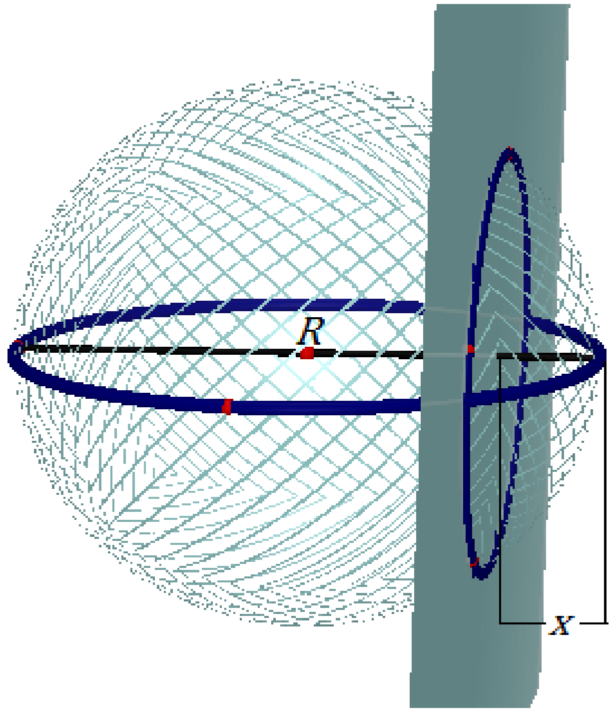

Ilustración 26: intersección del plano y la esfera

Así que ahora debe calcular x, de manera que:

$$\frac{V}{V^{*}} = \frac{m}{n}$$

Donde la razón m/n está dada. Al sustituir con los valores respectivos, se obtiene:

$$\frac{\pi\left(Rx^2 - \frac{x^3}{3}\right)}{\pi\left(\frac{4}{3}R^3 - Rx^2 + \frac{x^3}{3}\right)} = \frac{m}{n}$$

$$n\left(Rx^2 - \frac{x^3}{3}\right) = m\left(\frac{4}{3}R^3 - Rx^2 + \frac{x^3}{3}\right)$$

Al expandir el producto, se logra:

$$\frac{4}{3}R^3m - Rx^2m + \frac{x^3}{3}m - Rx^2n + \frac{x^3}{3}n = 0$$

Lo que equivale a:

$$4R^3m = 3Rx^2m - x^3m + 3Rx^2n - x^3n$$

Agrupando factores:

$$4R^3m = 3Rx^2(m+n) - x^3(m+n)$$

Factorizando,

$$4R^3m = (3Rx^2 - x^3)(m+n)$$

Con lo cual se llega a:

$$\frac{4R^3m}{m+n} = 3Rx^2 - x^3$$

O lo mismo que

$$x^3 + \frac{4R^3m}{m+n} = 3Rx^2$$

Cuya solución encuentra usando una parábola y una hipérbola

En particular, durante el siglo X se tendía a traducir los problemas a un lenguaje algebraico. Esta tendencia se fortaleció gracias al avance en la teoría de ecuaciones de segundo grado, que a su vez condujo a usar radicales en las soluciones. No obstante, fueron las necesidades en la astronomía y óptica, que junto al avance en las ecuaciones cuadráticas lo que impulsó la búsqueda de soluciones a problemas que implicaban la resolución de ecuaciones de tercer grado.

Debido a que la cantidad e importancia que adquirieron los problemas que generaban ecuaciones cúbicas o reducibles a éstas, era creciente, surgió la necesidad de realizar una teoría más sistemática y general, como a continuación desarrolla Jayyam, quién en el año 1074, escribe su *Álgebra*, en la cual reconoce 25 formas distintas de las ecuaciones algebraicas de grado menor o igual que tres. Sus antecesores ya habían estudiado 6 y otras 5 son reducibles a éstas. Las 14 restantes son:

Cubo de la cosa igual al número	$x^3 = c$
Cubo de la cosa más cosa igual a número	$x^3 + bx = c$
Cubo de la cosa más número igual a cosa	$x^3 + c = bx$
Cubo de la cosa igual a cosa más número	$x^3 = bx + c$
Cubo de la cosa más cuadrado de la cosa igual a número	$x^3 + ax^2 = c$
Cubo de la cosa más número igual a cuadrado de la cosa	$x^3 + c = ax^2$
Cubo de la cosa igual a cuadrado de la cosa más número	$x^3 = ax^2 + c$
Cubo de la cosa más cuadrado de la cosa más cosa igual a número	$x^3 + ax^2 + bx = c$
Cubo de la cosa más cuadrado de la cosa más número igual a la cosa	$x^3 + ax^2 + c = bx$
Cubo de la cosa más cosa más número igual a cuadrado de la cosa	$x^3 + bx + c = ax^2$
Cubo de la cosa igual a cuadrado de la cosa más cosa más número	$x^3 = ax^2 + bx + c$
Cubo de la cosa más cuadrado de la cosa igual a cosa más número	$x^3 + ax^2 = bx + c$
Cubo de la cosa más cosa igual a cuadrado de la cosa más número	$x^3 + bx = ax^2 + c$
Cubo de la cosa más número igual a cuadrado de la cosa más cosa	$x^3 + c = ax^2 + bx$

Al- Jayyam nació en 1048 en Nishapur, en el Jorasán. Hacia 1070 obtuvo el apoyo de Abu Tahir, quién lo patrocinó para escribir su gran tratado *Demostraciones de Problemas de Al-Jabr y Al-Muqabala*en ecuaciones cúbicas. En éste, el álgebra es desprendida de la aritmética: las cantidades desconocidas, además de los enteros, son cantidades continuas (línea, superficie, volumen e incluso el tiempo) y su resolución requiere tanto respuestas numéricas como geométricas. En lo referente a la solución "*por radicales*" de las ecuaciones cubicas, Al- Jayyam reconoció que había fracasado, sin embargo señaló que para hallar soluciones geométricas, era necesario depender de los dos primeros libros de las Cónicas de Apolonio, puesto que los Elementos de Euclides no bastarían.

En el tratado se puede encontrarla clasificación de ecuaciones dada en la tabla anterior[7] y las construcciones geométricas de raíces por medio de las cuales se determinaba la existencia y el número de raíces positivas. Allí también se puede evidenciar que Al-Jayyam sostuvo estrictamente el principio de homogeneidad de dimensiones, así como sus antecesores. En conclusión, este matemático generalizó el método de intersección de cónicas para la resolución de todas las ecuaciones de tercer grado con raíces y coeficientes positivos. Para ello usó tres lemas[8]:

LEMA 1: Dados dos número a y b, encontrar otros dos x e y tales que:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

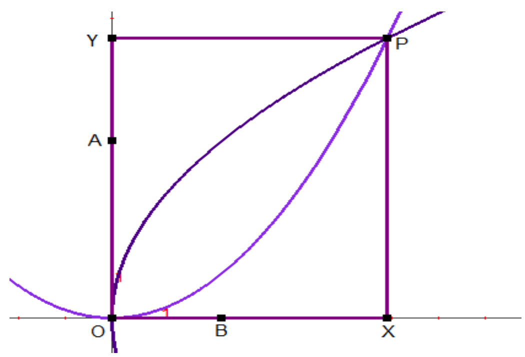

Ilustración 27: construcción de la proporción propuesta

PASOS DE LA CONSTRUCCIÓN:

1. Dadas dos rectas perpendiculares que se intersecan en O, sobre una de estas se ubica A, tal que OA=a y sobre la otra se halla B, de modo que OB=b

[7] Allí se observa que se toman en cuenta las ecuaciones de forma general, pero son expresadas de una forma totalmente retórica.

[8] En lo que sigue del documento, se tendrá en cuenta que: $OX = x; OY = y; OB = b; OA = a$

2. Se dibujan las parábolas de lado recto OA y OB, respectivamente con vértice O.[9]

3. La intersección de las parábolas es P, que a partir del el cual se crean dos se crean dos segmentos: OX de medida x y OY de medida y.

DEMOSTRACIÓN:

Como P está en la primera parábola, entonces:

$$PY^2 = OX^2 = OA \cdot OY$$

Según la proposición[10] 11 del libro I de las *Cónicas*. Por lo cual,

$$\frac{OA}{OX} = \frac{OX}{OY}$$

Y como P está en la segunda parábola, se obtiene que:

$$PX^2 = OY^2 = OB \cdot OX$$

Según la proposición 11 del libro I de las *Cónicas*. Por lo cual,

$$\frac{OY}{OB} = \frac{OX}{OY}$$

De las proporciones anteriores, se deduce que:

$$\frac{OA}{OX} = \frac{OX}{OY} = \frac{OY}{OB}$$

[9]Puesto que el lado recto de una parábola mide 4 veces lo que su distancia focal, para dibujar por ejemplo, la parábola de lado recto OA con vértice en O, sabemos que la distancia del foco a la directriz es de OA/2, así que fácilmente se encuentra foco y directriz que determinan dicho lugar geométrico.

[10]Llamemos **parábola** a tal sección. En cuanto al segmento k, llamémosle la recta a la cual se aplica el área $PF \cdot PF$ sobre el diámetroEF. Llamémosla también el lado recto. (http://gaussianos.com/la-definicion-de-la-parabola-de-apolonio/)

Y al sustituir por las medidas originales,

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

LEMA 2: Dados dos paralelepípedos de bases cuadradas, el primero con lado de base a y altura h. si la altura del segundo es b, ¿cuál es su altura para que ambos tengan idéntico volumen?

DEMOSTRACIÓN:

Por la proposición 11 del libro VI de los *Elementos* se determina un segmento de longitud *m* tal que:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m}$$

Por tanto, también es posible construir un segmento *k*, tal que:

$$\frac{m}{a} = \frac{h}{k}$$

Y *k* es la medida de la altura buscada:

$$V_1 = a^2h = a(ah) = a(mk) = (am)k = b^2k = V_2$$

LEMA 3: Se conoce la altura del segundo paralelepípedo y se desea saber el lado de su base.

DEMOSTRACIÓN:

Se halla un segmento de medida *m*, tal que:

$$\frac{k}{h} = \frac{a}{m}$$

De acuerdo con la proposición 13 del libro VI, existe un segmento de medida b, que cumple:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m}$$

Y b es la medida del lado de la base buscado:

$$V_1 = a^2h = a(ah) = a(mk) = (am)k = b^2k = V_2$$

Solución de ecuaciones

Durante la presentación de su tratado, Al- Jayyam plantea condiciones para obtener raíces positivas teniendo en cuenta los valores de ciertos parámetros. Por ejemplo, para resolver $x^3 + a = cx^2$, la raíz se construye mediante la parábola $y^2 = \sqrt[3]{a}(c - x)$ y la hipérbola $xy = \sqrt[3]{a^2}$, para lo cual Al- Jayyam demuestra que cuando $\sqrt[3]{a} \geq c$ no hay solución. Luego de ello, él estudia los casos para los cuales $\sqrt[3]{a}$ es mayor, menor o igual a $c/2$, y da los límites de los intervalos en donde puede existir una raíz. Finalmente él concluyó que una ecuación de tercer grado puede tener dos raíces positivas, particularmente en el caso $x^3 + bx = cx^2 + a$.A continuación se dan a conocer las soluciones propuestas por Al-Jayyampara tres de los casos nombrados en la tabla anterior.

II.2.1 Cubo de la cosa igual a número $(x^3 = c)$

Del lema 1 se asegura la existencia de dos números, x e y que cumplen la siguiente proporción:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

De acuerdo con lo anterior, se asegura que $x^2 = y$, lo que implica que:

$$\frac{x^2}{c} = \frac{y}{c} = \frac{x}{y} = \frac{1}{x}$$

O lo equivalente a que $x^3 = c$. Por tanto, la solución a la ecuación es el número x.

Por ejemplo, para encontrar la solución de la ecuación $x^3 = 7$, en primer lugar se deben hallar dos números que cumplan con la primera proporción:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{7}$$

Se construyen las parábolas, de tal modo que:

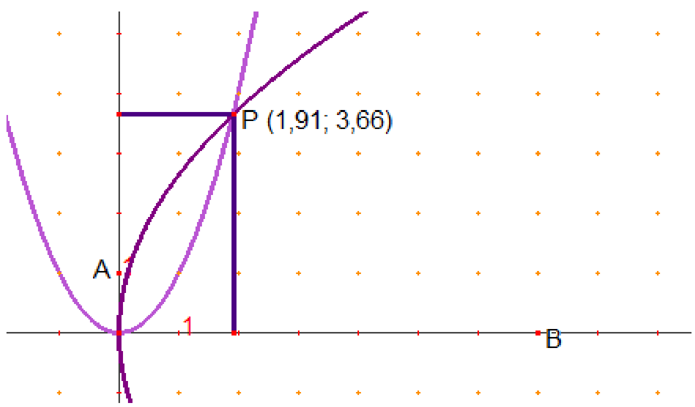

Ilustración 28: cubo de la cosa igual a número

Encontrando que $x = 1{,}91$ mientras que $y = 3{,}66$. En efecto se comprueba que cumplan la proporción:

$$\frac{1}{1{,}91} = \frac{1{,}91}{3{,}66} = \frac{3{,}66}{7} = 0{,}52$$

Así que la solución a la ecuación $x^3 = 7$ es $x = 1{,}91$.

II.2.2 Cubo de la cosa más cosa igual a número $(x^3 + bx = c)$

Para solucionar dicha ecuación, Jayyam construye un cuadrado de lado[11] $\sqrt{b}$, y de acuerdo con el lema 2, se asegura la existencia de un paralelepípedo de altura h con volumen c. Luego, se traza la parábola de vértice O y lado recto $OA = \sqrt{b}$, y una circunferencia de diámetro $OH = h$ que sea tangente al eje de la parábola por O.En la imagen se puede ver que ambas curvas se cortan en dos puntos: O y P.

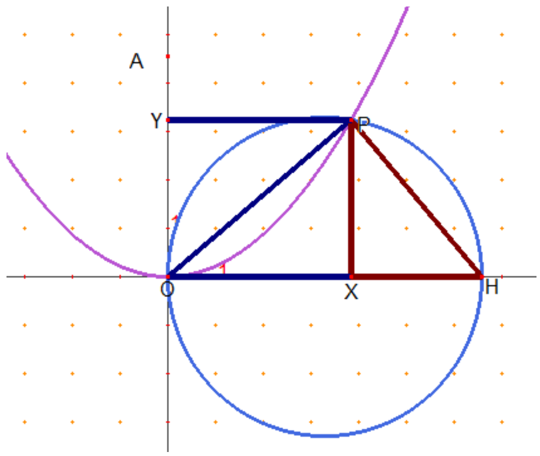

Ilustración 29: cubo de la cosa más cosa igual a número

Ahora, por la proposición 33 del libro III y usando el corolario de la proposición 8 del libro VI de los *Elementos*, se puede extraer que:

$$\Delta OPH \sim \Delta OXP \sim \Delta PXH$$

De donde se deduce:

$$\frac{OX}{PX} = \frac{XP}{XH}$$

Como $PX = XP = OY$, entonces:

$$\frac{OX}{OY} = \frac{OY}{XH} \quad (1)$$

[11]Esta construcción se hace con base en algunas proposiciones hechas por Euclides en el libro VI de los Elementos

Por otro lado, el hecho de que P pertenezca a la parábola implica:

$$\frac{OA}{OX} = \frac{OX}{OY} \quad (2)$$

Al combinar (1) y (2) y elevando (2) al cuadrado, se logra:

$$\frac{OA^2}{OX^2} = \frac{OX}{OY} \cdot \frac{OY}{XH} = \frac{OX}{XH}$$

$$OX^3 = OA^2 \cdot XH$$

Se sabe que $OX = x$, que, es una solución:

$$\begin{aligned} x^3 + bx = OX^3 + OA^2 \cdot OX \\ &= OA^2 \cdot XH + OA^2 \cdot OX \\ &= OA^2 \cdot (XH + OX) \\ &= OA^2 \cdot OH \\ &= b \cdot (h) \\ &= c \end{aligned}$$

Por ejemplo, si se tiene la ecuación $x^3 + 25x = 175$, se construye un cuadrado de lado $\sqrt{b} = \sqrt{25} = 5$, y de acuerdo con el lema 2, se asegura la existencia de un paralelepípedo de altura h con volumen $c = 175$. Luego, se traza la parábola de vértice O y lado recto $OA = 5$, y una circunferencia de diámetro $OH = 7$ que sea tangente al eje de la parábola por O:

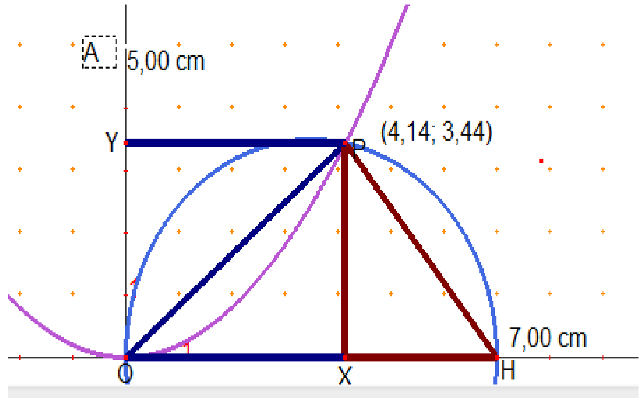

Ilustración 30: construcción asociada al ejemplo

De modo que $x = 4{,}14$, con lo que se ha encontrado una solución a la ecuación propuesta. Al comprobar este valor en la ecuación:

$$x^3 + 25x = 175$$

$$(4{,}14)^3 + 25(4{,}14) = 70{,}96 + 103{,}5 = 174{,}457 \cong 175$$

Por lo cual, el valor hallado para x, en efecto resulta ser una respuesta a la ecuación.

II.2.3 Cubo de la cosa más cuadrado de la cosa más cosa igual a número $(x^3 + ax^2 + bx = c)$

En este caso, se hará la construcción teniendo en cuenta las siguientes medidas iniciales:

$$AB = a; OB = \sqrt{b}; BC = h$$

Donde h es la altura de un prisma de volumen c y base cuadrada de lado $\sqrt{b}$, lo que es justificable por el segundo lema. La construcción se realiza de forma que $\overline{BC}$ prolongue a $\overline{AB}$, donde $\overline{OB}$ sea perpendicular al $\overline{AC}$. En seguida, se dibuja un círculo tal que su diámetro sea AC, junto con la hipérbola que pasa por C y tiene como asíntotas a la recta OB y su perpendicular por O. Las dos figuras anteriores se han de intersecar en un punto P.

Se supondrá que el punto de coordenadas de P es (X,Y), luego se determinan dos rectángulos: $OYPX$ y $OBCD'$. Dichos rectángulos tienen la misma cantidad de superficie[12], al quitar su parte común (el rectángulo $OBDX$) se obtendrán lógicamente otros dos rectángulos con la misma superficie: $BYPD$ y $XDCD'$. Por consiguiente, se obtiene la siguiente expresión:

$$PX \cdot OX = OB \cdot BC$$

$$(PD + DX) \cdot OX = OB \cdot (BD + DC)$$

$$(PD \cdot OX) + (DX \cdot OX) = (OB \cdot BD) + (OB \cdot DC)$$

Pero al saber que el cuadrilátero $OBDX$ es un rectángulo se deduce inmediatamente que $DX \cdot OX = OB \cdot BD$. Con lo cual, aplicando la propiedad cancelativa, se llega a:

$$PD \cdot OX = OB \cdot DC$$

$$\frac{PD}{DC} = \frac{OB}{OX}$$

Como el ΔAPC es rectángulo, al usar la proposición 32 del libro III de los Elementos y el corolario de la proposición 8 del libro VI, se establece:

$$\frac{PD}{DC} = \frac{AD}{PD}$$

Lo que implica directamente que al tener:

$$\frac{OB^2}{OX^2} = \frac{PD}{DC} \cdot \frac{AD}{PD} = \frac{AD}{DC}$$

Se genere la siguiente igualdad:

$$OB^2 \cdot DC = OX^2 \cdot AD$$

Que es necesaria para resolver la ecuación:

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx = OX^3 + AB \cdot OX^2 + OB^2 \cdot OX \\ &= OX^2(OX + AB) + OB^2 \cdot OX \\ &= OX^2(AD) + OB^2 \cdot OX \\ &= (OB^2 \cdot DC) + (OB^2 \cdot OX) \\ &= OB^2(DC + OX) \\ &= OB^2 \cdot BC \end{aligned}$$

[12] Deben tener la misma área ya que de lo contrario no se cumplirían las condiciones iniciales respecto a las medidas, ya que dichos rectángulos representan una de las caras del sólido en cuestión.

$$= c$$

Por ejemplo, para resolver la ecuación $x^3 + 3x^2 + 4x = 26$, siguiendo los pasos nombrados anteriormente, se obtiene la siguiente figura:

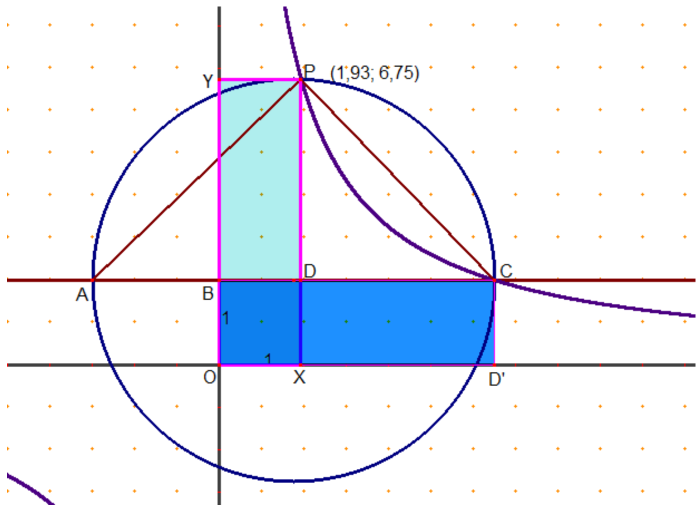

Ilustración 31: cubo de la cosa más cuadrado de la cosa más cosa igual a número

De modo que se inicia por ubicar el punto B sobre los ejes, cuya coordenada es $(0,2)$. Luego se dibuja la recta BC, perpendicular al eje y, sabiendo que $BC = 6{,}50$ y $AB = 3$, esto por las condiciones iniciales de la construcción. Ubicando el punto medio entre A y C, es posible construir la circunferencia cuyo diámetro es el segmento AC. Ahora se construye la hipérbola[13] con los ejes coordenados como asíntotas tal que pase por el punto C. La intersección de la circunferencia con la hipérbola se da en un punto P, cuyas coordenadas son $(2{,}61\ ;\ 6{,}67)$. Lo cual indica que una de las soluciones a la ecuación dada tiene que ser:

$$x = 1{,}93$$

Al comprobar, se encuentra:

$$x^3 + 3x^2 + 4x = 26$$

$$(1{,}93)^3 + 3(1{,}93)^2 + 4(1{,}93) = 7{,}19 + 11{,}19 + 7{,}72 = 26{,}08$$

[13] Si se construye una recta l que pase por C y se interseque con las asíntotas (en este caso los ejes coordenados), se obtendrá que E y F serán los puntos de intersección con los ejes x e y, respectivamente. Luego, se copia la distancia FC sobre l a partir de E obteniendo así un punto Q, que será otro punto que pertenece a la hipérbola. Al continuar construyendo puntos con el mismo proceso que se aplicó para Q, se obtendrán los cinco puntos necesarios para dibujar la hipérbola correspondiente.

Y dado que no se obtuvo una mayor cantidad de cifras significativas, la respuesta encontrada es una aproximación a la solución real.

II. 3 Del Ferro-Tartaglia-Cardano

En el Renacimiento italiano, por el Siglo XVI, cuando las escuelas del ábaco[14] habían generado muchos libros sobre las *técnicas de cálculo* y *el arte de la cosa*[15] heredadas por los árabes, como por ejemplo el *Liber Abaci* de Fibonacci, los cuales fueron estudiados por muchos y lo suficientemente dominada por algunos como para enseñarla, existía aún un problema sin resolver: el concerniente al cubo, el cuadrado, la cosa y el número en sus diversas variantes, es decir, lo que hoy se conoce como las ecuaciones cúbicas (Casadelrey, 2000).

Durante mucho tiempo diferentes matemáticos de la época se habían apropiado del problema sin tener éxito; incluso a finales del siglo XV Luca Paciolli, quien era una figura de gran autoridad en cuanto al álgebra concierne (ya que él había sido quien compilara los saberes de la época) dejó a un lado la labor de buscar la solución a la ecuación cúbica, manifestando sus dudas frente a la posibilidad de resolver de manera general este tipo de ecuaciones, comparándolas con el problema de cuadrar el círculo.

Fue hasta que Scipione del Ferro (1465-1526), profesor de la Universidad de Bolonia, encontró la solución a la ecuación $x^3 + px = q$, empleando la fórmula

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

[14] Las escuelas del ábaco surgieron en Italia en el Siglo XIII hasta el Siglo XVI; uno de sus principales exponentes fue Leonardo de Pisa (Fibonacci)

[15] Para algunos matemáticos como Al'Khwarizmi*el arte de la cosa* se le conocía al estudio de ecuaciones, lo que dio surgimiento a lo que hoy se conoce como Álgebra

que es la que aún se sigue empleando; sin embargo, aún no se conoce cómo hizo del Ferro para llegar a dicho resultado. No se tiene tampoco certeza sobre en qué momento se hizo tal descubrimiento, pero se dice que puede ser en 1505 ó en el 1515, según algunas pocas fuentes que mencionan tan importante hito de la Historia de las Matemáticas. Lo que sí se sabe es que fueron sólo dos los afortunados conocedores de este brillante resultado: uno fue su yerno y sucesor en la cátedra de la Universidad, Annibaledella Nave, y Antonio María del Fiore, alumno de del Ferro y protagonista crucial en esta historia.

Cuando del Fiore regresó a su natal Venecia después de culminar sus estudios en la Universidad de Bolonia, concordó su estancia con la de Niccoló Tartaglia, quien en ese tiempo era un prestigioso profesor de Aritmética de las escuelas del Ábaco e ingeniero de las fuerzas militares venecianas. Del Fiore quien se sentía confiado por poseer la valiosísima fórmula heredada por del Ferro, decidió confrontar a Tartaglia en una disputa pública, donde cada contrincante proponía treinta problemas relacionados con matemáticas. Los problemas propuestos por del Fiore a Tartaglia resultaban ser todos relacionados con ecuaciones de la forma $x^3 + px = q$. Fue ahí donde una noche de febrero de 1535, después de largos días, Niccoló Tartaglia pudo llegar al tan anhelado resultado: una forma de solucionar los problemas relacionados con *el cubo y la cosa igual al número;* después de hallado el resultado solucionar los problemas era cuestión de cálculos.

Tartaglia puso resolver los treinta problemas propuestos por del Fiore, en cambio su contrincante no pudo alguno de los propuestos por Tartaglia; incluso uno que tenía que ver con una ecuación cúbica, para la cual Tartaglia conocía un método particular de solución; otorgando de esta manera la victoria de la contienda a Niccoló Tartaglia, quien aparte de recibir el reconocimiento por esta victoria, el premio mayor fue el de redescubrir la fórmula para la ecuación cúbica.

La victoria de Tartaglia llegó a oídos de Gerolamo Cardano en 1539, quien estaba terminando de escribir el libro *Practica Arithmetica Generalis*, que pretendía ser el sustito de *Summa de Arithmetica, geometría, proportioni et proportionalitá* (Luca Paciolli, 1494) y deseaba que el resultado de Tartaglia fuera incluido, a lo que Tartaglia contestó en negativa. Luego de múltiples intentos por hacerse a la fórmula, Tartaglia cedió y le participó a Cardano la forma de resolver tres tipos de ecuaciones cúbicas; éstas son:

$$x^3 + px = q$$
$$x^3 + q = px$$
$$x^3 = px + q$$

Luego de publicar el *Practica Arithmetica*, Cardano se dedicó al estudio de la ecuación cúbica y sus diferentes variantes; cuando logró resolver la ecuación completa

$$x^3 + px^2 + qx = r,$$

reduciéndola a una de las versiones ya presentadas por Tartaglia, Cardano encuentra resultados con raíces de números negativos, que para este tiempo se consideraban *soluciones falsas* de la ecuación. Al tratar de solventar tal situación, Cardano se encontró con que el primer descubridor de la fórmula de la cúbica no había sido Tartaglia sino del Ferro. Por tal motivo Cardano decidió hacer públicos sus resultados en su *Artis Magnae, sive de regulis algebraicis*, donde expuso la solución para las diferentes variaciones de la ecuación cúbica, siendo acusado por Tartaglia como plagiador de su trabajo. Hoy día se conoce a este método como el método Tartaglia- Cardano, haciendo alusión a los dos grandes protagonistas de la travesía que comprende uno de los descubrimientos más importantes de la historia de las matemáticas del Renacimiento italiano.

A continuación se realizará la descripción de cómo Cardano obtiene la solución de la ecuación $x^3 + px = q$,que es un caso particular de la ecuación de tercer grado reducida, aunque en el *Ars Magnae* se realiza a partir de un ejemplo, aquí se realizará de manera general.

Se tomarán los cubos con lado $AB = \alpha$ y $IJ = \beta$ tales que la diferencia entre sus volúmenes sea q y el producto $\alpha\beta = \frac{p}{3}$, es decir, el área del rectángulo cuyos lados son α y β.

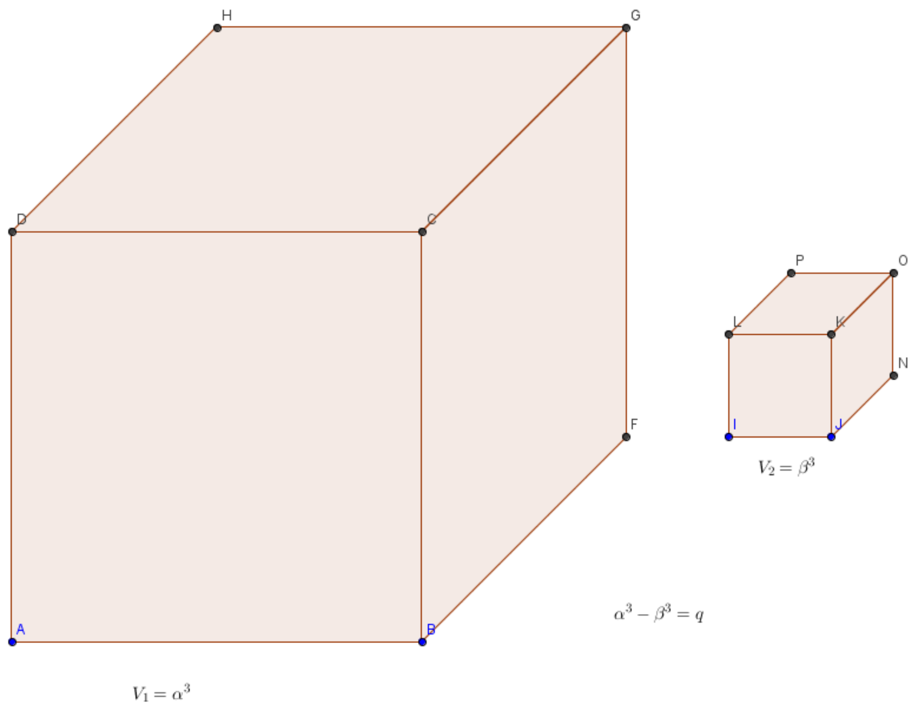

Ilustración 32: cubos de arista α y β respectivamente

Ahora se ubica el cubo de lado IJ en el interior del cubo de lado AB, de tal manera que $QB = IJ$. De esta manera se determina el punto Q tal que $AQ = \alpha - \beta$

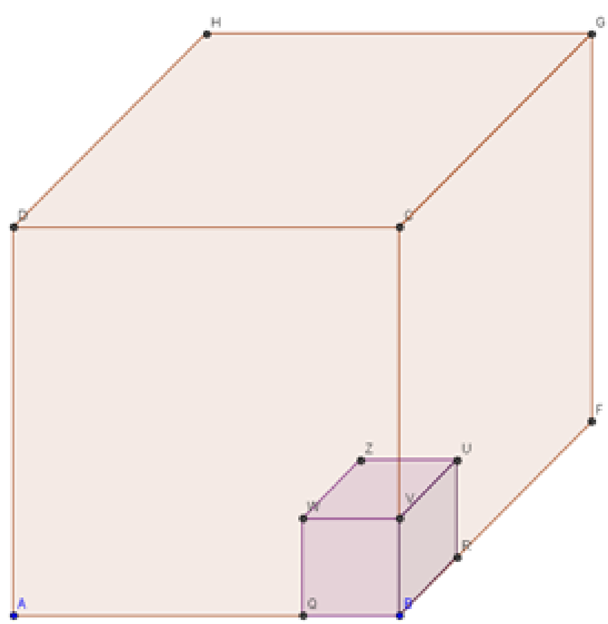

Ilustración 33: cubos solapados

Ahora Cardano establece en su *Ars Magna*, en el capítulo VI, la forma de construir sólidos a partir de segmentos dados; es así como él propone la construcción de los sólidos formados por los cortes paralelos a los lados del cubo de lado QB.

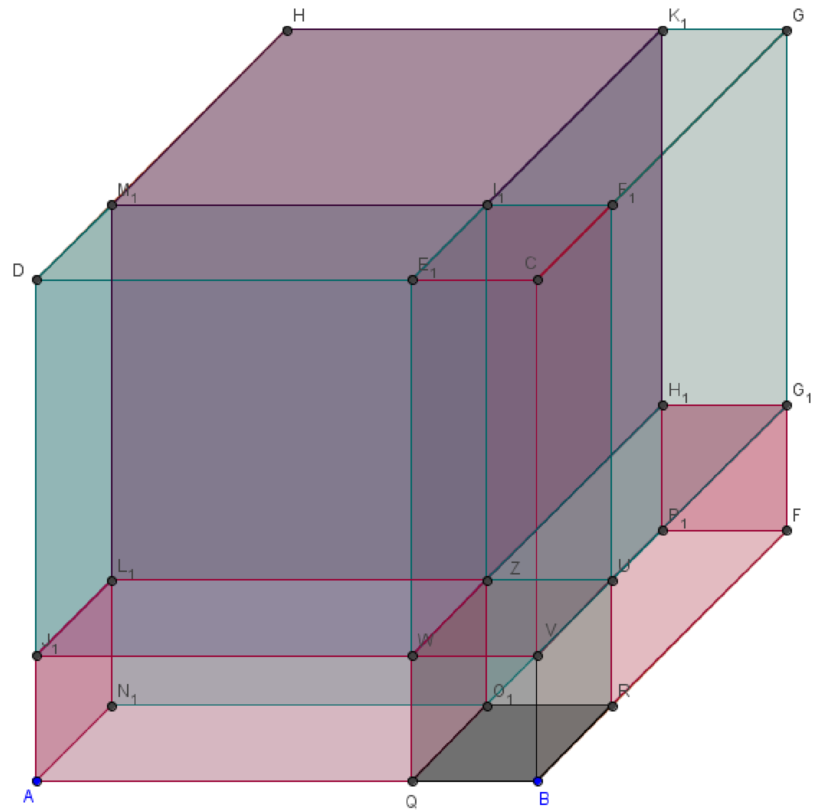

Ilustración 34: división del cubo

De acuerdo con la construcción se puede verificar que $AB \cdot BV = \frac{p}{3}$ ya que era una condición dada para la escogencia de las aristas de los cubos iniciales. Se tiene además que el sólido que tiene como dimensiones los lados AQ, QP_1 y QW, el sólido con dimensiones RF, FG y FP_1, y el sólido formado por los segmentos VC, CD y VU, tienen el mismo volumen, donde $AQ = RF = VC$. De lo que se puede concluir que

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta)$$

Y por las condiciones iniciales $\alpha^3 - \beta^3 = q$ y $\alpha\beta = \frac{p}{3}$, resulta la siguiente expresión

$$(\alpha-\beta)^3+p(\alpha-\beta)=q$$

Por lo tanto, se establece que $\alpha-\beta=x$.

La demostración de Cardano radica en encontrar dos números que cumplan con las condiciones iniciales establecidas, esto es, encontrar los números α y β tales que $\alpha^3-\beta^3=q$ y $\alpha\beta=\frac{p}{3}$. Sin embargo no se establece un criterio claro para hallar estos números.

En este caso, se emplearán estrategias algebraicas para encontrar el valor de α y β para posteriormente encontrar el valor de x. Para ello, considerando el sistema de ecuaciones

$$\alpha^3-\beta^3=q \quad (1)$$

$$\alpha\beta=\frac{p}{3} \quad (2)$$

Despejando α en (2) obteniendo

$$\alpha=\frac{p}{3\beta} \quad (2.1)$$

Y sustituyendo este valor en (1)

$$\left(\frac{p}{3\beta}\right)^3-\beta^3=q \quad (1.1)$$

Desarrollando el cubo y multiplicando por β^3 se obtiene

$$\frac{p^3}{27\beta^3}-\beta^3=q \quad (1.2)$$

$$\frac{p^3}{27}-\beta^6=q\beta^3$$

De donde se llega a una ecuación cuadrática para β^3

$$\beta^6 + q\beta^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

Donde la solución es

$$\beta^3 = \frac{-q + \sqrt{q^2 - \frac{4p^3}{27}}}{2} (3)$$

Extrayendo la raíz cúbica resulta β

$$\beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \qquad (3.1)$$

Si se sustituye (3) en (1) se podrá conocer el valor de α

$$\alpha^3 + \frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3} = q \qquad (4)$$

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \qquad (4.1)$$

De esta manera se encontrarán los números que cumplan las condiciones iniciales establecidas por Cardano para la solución de la ecuación $x^2 + px = q$, donde el valor de x estaría dado por la expresión

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Pero la demostración anterior es dada para un caso particular de la ecuación cúbica. Se puede generar un método de solución para la ecuación general de tercer grado

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

donde los coeficientes pueden ser números reales. Cardano en el capítulo XVII de su *Ars Magna* propone reducir la ecuación de alguna manera, de manera que sea más sencillo abordar el problema. Para eso supone algún cambio de variable

$$x = u + v$$

Remplazando esta nueva variable en la ecuación obtiene

$$(u + v)^3 + b(u + v)^2 + c(u + v) + d = 0$$

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + bu^2 + 2buv + bv^2 + cu + cv + d = 0$$

Ahora agrupando los términos según el grado de u, resulta

$$u^3 + (3v + b)u^2 + (3v^2 + 2bv + c)u + v^3 + bv^2 + cv + d = 0$$

Por lo tanto, si se quiere reducir el término que tiene u^2

$$(3v + b)u^2 = 0$$

Pero como no necesariamente $u = 0$ entonces tiene que cumplirse que

$$3v + b = 0$$

De donde se obtiene que

$$v = -\frac{b}{3}$$

Es decir que para reducir[16] la ecuación

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

deberá hacerse un cambio de variable

$$x = u - \frac{1}{3}b.$$

Se mirará ahora el caso en el que se desea reducir el término que tiene . Para ese caso se debe cumplir que

$$(3v^2 + 2bv + c)u = 0$$

de donde se obtiene que

$$3v^2 + 2bv + c = 0$$

que es una ecuación cuadrática para v, cuyas soluciones pueden o no existir. Además, considerar dos soluciones complicará la simplificación de la ecuación. Es por esto que se considera la ecuación reducida del término al cuadrado.

Se continuará entonces con la sustitución

$$x = u - \frac{1}{3}b$$

para dejar la ecuación de una forma reducida

[16] Se le denomina *ecuación reducida* a una ecuación polinómica de grado n tal que el coeficiente del término con exponente $n - 1$ es igual a cero.

$$\left(u-\frac{1}{3}b\right)^3+b\left(u-\frac{1}{3}b\right)^2+c(u-\frac{1}{3}b)+d=0$$

Desarrollando los factores, simplificando los términos semejantes y agrupando, se obtiene

$$u^3-u^2b+\frac{1}{3}ub^2-\frac{1}{27}b^3+b(u^2-\frac{2}{3}ub+\frac{1}{9}b^2)+cu-\frac{1}{3}bc+d=0$$
$$u^3-u^2b+\frac{1}{3}ub^2-\frac{1}{27}b^3+u^2b-\frac{2}{3}ub^2+\frac{1}{9}b^3+cu-\frac{1}{3}bc+d=0$$
$$u^3-\frac{1}{3}ub^2+\frac{2}{27}b^3+cu-\frac{1}{3}bc+d=0$$
$$u^3+\left(-\frac{1}{3}b^2+c\right)u+\left(\frac{2}{27}b^3-\frac{1}{3}bc+d\right)=0$$

que es una ecuación reducida, de la forma

$$x^3+px+q=0$$

Ahora supóngase u como una raíz de la ecuación, donde $u=\alpha+\beta$, de donde se obtiene

$$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^3+\beta^3$$
$$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$
$$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta u$$

Es decir que la expresión

$$u^3+pu+q=0$$

se convierte en

$$\alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta u + pu + q = 0$$

Agrupando el término u

$$\alpha^3 + \beta^3 + u(3\alpha\beta + p) + q = 0$$

Ahora se impone una nueva condición a α y β, de tal manera que el término $u(3\alpha\beta + q)$ se elimine con la sustitución. Por lo tanto el factor

$$3\alpha\beta + q = 0$$

$$\alpha\beta = -\frac{1}{3}q \qquad (1)$$

Sustituyendo esta condición en la ecuación, se reduce a la siguiente expresión

$$\alpha^3 + \beta^3 + r = 0$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = -r \qquad (2)$$

Elevando al cubo la ecuación (1) se obtiene

$$\alpha^3\beta^3 = -\frac{1}{27}q^3$$

De donde despejando β^3 y remplazando en la ecuación (2) resulta

$$\beta^3 = -\frac{q^3}{27\alpha^3}$$

De donde se obtiene

$$\alpha^3 - \frac{q^3}{27\alpha^3} = -r$$

$$\alpha^6 + r\alpha^3 - \frac{q^3}{27} = 0$$

Que es una ecuación cuadrática para $\alpha^3 = y$

$$y^2 + ry - \frac{q^3}{27} = 0$$

Donde se puede conocer el valor de y dado por

$$y = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 + \frac{4q^3}{27}}}{2}$$

Extrayendo raíz cúbica a y se puede conocer el valor de α y β

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{-r + \sqrt{r^2 + \frac{4q^3}{27}}}{2}}$$

$$\beta = \sqrt[3]{\frac{-r - \sqrt{r^2 + \frac{4q^3}{27}}}{2}}$$

Es decir que la solución a la ecuación $u^3 + qu + r = 0$ tiene como solución

$$u = \alpha + \beta$$

$$\boldsymbol{u = \sqrt[3]{\frac{-r + \sqrt{r^2 + \frac{4q^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-r - \sqrt{r^2 + \frac{4q^3}{27}}}{2}}}$$

Se verifica ahora que ésta es realmente una solución, para lo cual se sustituye el valor de u en la ecuación y se comprueba que al remplazarlo la ecuación se hace 0. Partiendo entonces de la ecuación

$$x^3 + qx + r = 0,$$

se sustituye u, obteniendo

$$\left(\sqrt[3]{\frac{-r+\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-r-\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}\right)^3+q\left(\sqrt[3]{\frac{-r+\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-r-\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}\right)+r$$

Desarrollando la potencia del primer término se obtiene:

$$=\frac{-r+\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}+\frac{-r-\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}+3\left(\sqrt[3]{\frac{-r+\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}\right)^2\left(\sqrt[3]{\frac{-r-\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}\right)$$
$$+3\left(\sqrt[3]{\frac{-r+\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{-r-\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}\right)^2+q\left(\sqrt[3]{\frac{-r+\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-r-\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}\right)+r$$

$$=-\frac{r}{2}+\frac{\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}-\frac{r}{2}-\frac{\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}+3\left(\sqrt[3]{\frac{-r+\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}\right)^2\left(\sqrt[3]{\frac{-r-\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}\right)$$
$$+3\left(\sqrt[3]{\frac{-r+\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{-r-\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}\right)^2+q\left(\sqrt[3]{\frac{-r+\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-r-\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}\right)+r$$

Simplificando los términos semejantes, se llega a

$$=3\left(\sqrt[3]{\frac{-r+\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}\right)^2\left(\sqrt[3]{\frac{-r-\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}\right)+3\left(\sqrt[3]{\frac{-r+\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{-r-\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}\right)^2$$
$$+q\left(\sqrt[3]{\frac{-r+\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-r-\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}\right)$$

Extrayendo el factor común $3\left(\sqrt[3]{\frac{-r+\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{-r-\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}\right)$ de los dos primero términos se obtiene

$$= 3\left(\sqrt[3]{\frac{-r+\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{-r-\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{-r+\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-r-\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}\right)$$

$$+ q\left(\sqrt[3]{\frac{-r+\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-r-\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}\right)$$

$$= 3\left(\sqrt[3]{\left(\frac{-r+\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}\right)\left(\frac{-r-\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}\right)}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{-r+\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-r-\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}\right)$$

$$+ q\left(\sqrt[3]{\frac{-r+\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-r-\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}\right)$$

Por diferencia de cuadrados resulta

$$= 3\left(\sqrt[3]{\frac{r^2-(r^2+\frac{4q^3}{27})}{4}}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{-r+\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-r-\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}\right)+q\left(\sqrt[3]{\frac{-r+\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-r-\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}\right)$$

Simplificando los términos semejantes y, posteriormente, extrayendo raíz cúbica se obtiene

$$= 3\left(\sqrt[3]{\frac{-\frac{4q^3}{27}}{4}}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{-r+\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-r-\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}\right)+q\left(\sqrt[3]{\frac{-r+\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-r-\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}\right)$$

$$= 3\left(\sqrt[3]{-\frac{q^3}{27}}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{-r+\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-r-\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}\right)+q\left(\sqrt[3]{\frac{-r+\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-r-\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}\right)$$

$$= 3\left(-\frac{q}{3}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{-r+\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-r-\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}\right)+q\left(\sqrt[3]{\frac{-r+\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-r-\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}\right)$$

$$= -q\left(\sqrt[3]{\frac{-r+\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-r-\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}\right)+q\left(\sqrt[3]{\frac{-r+\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-r-\sqrt{r^2+\frac{4q^3}{27}}}{2}}\right)=0$$

Por lo tanto u es solución de la ecuación.

A continuación se presentará el ejemplo empleado por Cardano en su *Ars Magna*, donde a través de la situación *el cubo y seis veces la cosa es igual a veinte* realiza la descripción del método para la solución de las ecuaciones de la forma $x^3+px=q$. Traduciendo el problema propuesto por Cardano en notación moderna, resulta la siguiente ecuación:

$$x^3+6x=20$$

que se puede reescribir en la forma general

$$x^3+6x-20=0$$

Y esta ecuación es una ecuación reducida en el término cuadrático, por lo tanto, aplicando la solución de la ecuación cúbica para $p=6$ y $q=-20$ se tiene que

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Sustituyendo por los valores de p y q respectivos se llega a que

$$x=\sqrt[3]{-\frac{-20}{2}+\sqrt{\left(\frac{-20}{2}\right)^2+\left(\frac{6}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{-20}{2}-\sqrt{\left(\frac{-20}{2}\right)^2+\left(\frac{6}{3}\right)^3}}$$

Simplificando la expresión

$$x=\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}+\sqrt[3]{10-\sqrt{108}}$$

$$x=\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$$

Para encontrar la raíz cúbica se supondrá que $10+6\sqrt{3}$ es potencia para algún binomio de la forma $a+b\sqrt{3}$, por lo tanto se tendrá que

$$\left(a+b\sqrt{3}\right)^3=a^3+3a^2b\sqrt{3}+9ab^2+3b^3\sqrt{3}=10+6\sqrt{3}$$

De donde se obtiene el sistema de ecuaciones

$$a^3+9ab^2=10 \qquad \text{y} 3a^2b+\ 3b^3=6$$

A simple vista se puede observar que los valores que satisfacen esta condición son:

$$a=1 \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad b=1$$

Por lo tanto $10+6\sqrt{3}=\left(1+\sqrt{3}\right)^3$, de manera análoga se puede encontrar que $10-6\sqrt{3}=\left(1-\sqrt{3}\right)^3$ y por lo tanto se reescribe el valor de x como

$$x=\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{3}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{3}\right)^3}$$

Simplificando la raíz con la potencia se obtiene

$$x=1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}$$

Donde finalmente se halla finalmente el valor de la incógnita

$$x=2$$

A continuación se presenta, amanera de ejemplo el siguiente problema que fue planteado por el matemático chino QinJinshao, en el siglo XIII, el cual se va a solucionar haciendo uso de la solución de ecuaciones cúbicas propuesta por Cardano y con herramientas algebraicas modernas (Ivorra, 2012):

Una ciudad está rodeada por una muralla circular con dos puertas, una al norte y otra al sur. Saliendo por la puerta norte y caminando 3 *li hacia el norte se llega hasta un árbol. Saliendo por la puerta sur, hay que caminar* 9 *li hacia el este para ver el mismo árbol. Calcular el diámetro de la ciudad.*

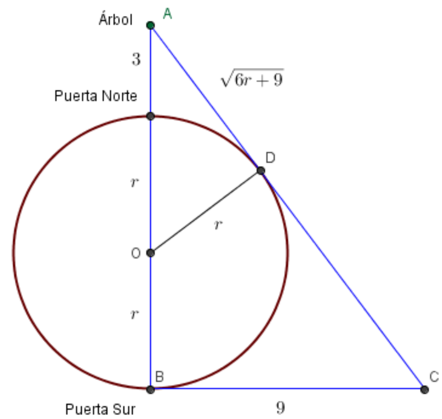

Ilustración 35: Gráfica asociada al ejemplo

El triángulo ΔADO es rectángulo, ya que $\overline{AC}$ es tangente a la circunferencia, por lo tanto $\overline{DO}$ es perpendicular a $\overline{AC}$. Por el Teorema de Pitágoras se tiene que

$$(r+3)^2 = r^2 + AD^2$$

Despejando para AD

$$AD = \sqrt{(r+3)^2 - r^2}$$

$$AD = \sqrt{r^2 + 6r + 9 - r^2}$$

$$AD = \sqrt{6r+9} = \sqrt{3(2r+3)}$$

Además, como los dos triángulos son rectángulos y comparten el ángulo $\angle BAC$, los triángulos son semejantes, por lo que se extrae la siguiente proporción:

$$\frac{2r+3}{9} = \frac{\sqrt{3(2r+3)}}{r}$$

Elevando al cuadrado la igualdad obtenida

$$\frac{(2r+3)^2}{81} = \frac{3(2r+3)}{r^2}$$

Simplificando uno de los factores $(2r+3)$ en cada lado de la igualdad y despejando queda

$$2r^3 + 3r^2 = 243$$

De donde se resulta la ecuación de tercer grado

$$r^3 + \frac{3}{2}r^2 - \frac{243}{2} = 0$$

Para utilizar el método de Cardano, primero se hace la sustitución $r = t - \frac{1}{2}$ para obtener una ecuación reducida.

$$\left(t - \frac{1}{2}\right)^3 + \frac{3}{2}\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{243}{2} = 0$$

Desarrollando los factores se obtiene

$$t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{4}t - \frac{1}{8} + \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{3}{8} - \frac{243}{2} = 0$$

Simplificando los términos semejantes

$$t^3 - \frac{3}{4}t - \frac{485}{4} = 0$$

Aplicando la fórmula de la ecuación cúbica, con $p = -\frac{3}{4}$ y $q = -\frac{485}{4}$ para encontrar el valor de t obtenemos

$$t = \sqrt[3]{-\frac{\left(-\frac{485}{4}\right)}{2} + \sqrt{\left(\frac{\left(-\frac{485}{4}\right)}{2}\right)^2 + \left(\frac{\left(-\frac{3}{4}\right)}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{\left(-\frac{485}{4}\right)}{2} - \sqrt{\left(\frac{\left(-\frac{485}{4}\right)}{2}\right)^2 + \left(\frac{\left(-\frac{3}{4}\right)}{3}\right)^3}}$$

$$t = \sqrt[3]{\frac{485}{8} + \sqrt{\left(-\frac{485}{8}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{485}{8} - \sqrt{\left(-\frac{485}{8}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^3}}$$

Desarrollando las potencias y simplificando

$$t = \sqrt[3]{\frac{485}{8} + \sqrt{\frac{235225}{64} - \frac{1}{64}}} + \sqrt[3]{\frac{485}{8} - \sqrt{\frac{235225}{64} - \frac{1}{64}}}$$

$$t = \sqrt[3]{\frac{485}{8} + \sqrt{\frac{235224}{64}}} + \sqrt[3]{\frac{485}{8} - \sqrt{\frac{235224}{64}}}$$

$$t = \sqrt[3]{\frac{485 + 198\sqrt{6}}{8}} + \sqrt[3]{\frac{485 - 198\sqrt{6}}{8}}$$

Por un procedimiento similar al del ejemplo anterior[17] se puede establecer que

$$\frac{485 \pm 198\sqrt{6}}{8} = \left(\frac{5}{2} \pm \sqrt{6}\right)^3$$

Por lo tanto la solución se traduce a

[17] Donde se determinó que $10 \pm 6\sqrt{3} = \left(1 \pm \sqrt{3}\right)^3$

$$t = \sqrt[3]{\left(\frac{5}{2} + \sqrt{6}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{5}{2} - \sqrt{6}\right)^3} = \frac{5}{2} + \sqrt{6} + \frac{5}{2} - \sqrt{6} = 5$$

Reemplazando este resultado en la sustitución $r = t - \frac{1}{2}$ realizada para la reducción de la ecuación se obtiene que

$$r = 5 - \frac{1}{2}$$

$$r = \frac{9}{2}$$

Por lo tanto el diámetro de la ciudad es de $2r = 9$ li.

II.4 A manera de conclusión

Para finalizar este recorrido por la solución de ecuaciones cúbicas, es indispensable señalar que, si bien no son expuestos la totalidad de aportes hechos por todas las culturas y personajes, hay que resaltar las contribuciones que varios matemáticos han dado al desarrollo tanto conceptual como procedimental. Contrastando lo hecho por los tres representantes estudiados anteriormente, es posible llegar a hacer una clasificación de cada uno de los métodos, dependiendo de su naturaleza, de cada método, siendo así los babilonios aplicaron un método numérico[18] para reducir la ecuación de tercer grado a una de segundo; luego; Omar Al-Khayyam construye las soluciones a los 14 modelos de ecuaciones que él mismo clasifica, por medio de procedimientos geométricos extrayendo de las construcciones geométricas, proporciones y relaciones algebraicas; por último Del Ferro, Tartaglia y Cardano estudian la ecuación de tercer grado a partir de construcciones geométricas, gracias a la herencia de la escuela griega, mostrando una necesidad de presentar sus resultados de una manera más formal, ya que para la época, las únicas justificaciones que se consideraban como demostraciones formales eran las que se sustentaban en argumentos geométricos.

[18] Entiéndase por método numérico (para resolver una ecuación), la secuencia de procedimientos en la cual se registran los posibles valores numéricos que toma dicha ecuación de acuerdo al valor que tome la variable.

Conclusiones

En los procedimientos presentados anteriormente es posible evidenciar principalmente dos aspectos importantes que contribuyeron en la formulación del método de solución: la motivación por la que surgió el método y el tipo de respuesta que da cada aporte; por ejemplo, la intención de los babilónicos era la de solucionar problemas de áreas y perímetros, concernientes a contextos de agrimensura, en términos de ecuaciones cuadráticas, mientras que el interés suscitado en otros personajes es el de resolver problemas, como lo es el caso de Khayam. La motivación ofrecida por la época para resolver las situaciones propuestas influencia directamente sobre la forma en que se desarrolló el método y el sentido que pueda tener la respuesta obtenida; por ejemplo, la forma lógica y fáctica de las respuestas de los babilónicos es resultado del interés que se tiene en el conocimiento de la solución, por ser esta el resultado de un problema que atañe a las dimensiones de un terreno.; pero las construcciones geométricas propuestas por Descartes, no presentan contexto más allá de las matemáticas, es por esto, que la interpretación de la respuesta se atañe a un sentido meramente numérico. En cuanto a la enseñanza, los profesores de Matemáticas pueden hacer uso de las diferentes interpretaciones para generar problemas que apunten a diferentes contextos, dotando al número de un amplio sentido. Es importante recordar que es gracias a los hechos que anidan la historia de las matemáticas, que se logran grandes avances en dicha materia, lo cual la enriquece. Y, análogamente se dan a conocer las contribuciones de estos a la enseñanza.

Lo anterior, se puede referenciar como una evidencia de lo importante que puede llegar a ser la historia para el desarrollo del mismo constructo teórico de las Matemáticas. Además, la reconstrucción de los hechos históricos puede llegar a ser una tarea que permite comprender la complejidad que tiene llegar a un resultado en Matemáticas, permitiendo comprender también resultados inherentes, que son visibles únicamente en un estudio profundo de los resultados obtenidos en la historia.

La trascendencia de los aportes dados por cada uno de los autores de los métodos, es de ayuda para sus sucesores, quienes los han utilizado de cierta forma para lograr avances, lo que muestra cómo la Matemática es un cuerpo en constante evolución y desarrollo; un ejemplo es el desarrollo que se produjo en la cultura árabe: el interés inicial era resolver el problema propuesto por Arquímedes, y al tratar dicho problema se llega a elaborar nueva teoría en lo referente a ecuaciones cubicas, soportado todo sobre el desarrollo de la geometría dada en *Los Elementos* de Euclides y en la geometría de las cónicas de Apolonio.

Dentro del desarrollo de los métodos, aunque se trató de clasificar según su naturaleza, no fue posible esclarecer si los métodos pertenecen a un único tipo, ya sea aritmético, geométrico o algebraico; más bien, lo que se puede ver es una simbiosis entre dos o más tipos, y particularmente, en los métodos estudiados, se vio siempre que la interpretación geométrica propone medios para abordar las ecuaciones y generar un significado al contexto en que se trabaja; es importante entonces, resaltar cómo la aritmética y la geometría no se pueden desligar de los procesos algebraicos que están susceptibles a interpretaciones del contexto

Este trabajo representa un aporte a los libros de Historia de las Matemáticas o que recogen resultados históricos donde no se hace evidente un claro tratamiento sobre los objetos matemáticos que se manejan en los métodos de solución de las ecuaciones, ya que con este trabajo se busca proponer un una interpretación al trabajo realizado por los diferentes autores presentados; por lo tanto es importante ver cómo este trabajo puede incentivar el trabajo de otros profesores o estudiantes con vías a investigar otros métodos de solución de ecuaciones cuadráticas o cúbicas y generar una metodología de trabajo que busque indagar sobre los orígenes y raíces de los métodos expuestos, ampliando así el trabajo aquí presentado.

Bibliografía

Acevedo, M., & Falk, M. (1997). *Recorriendo el álgebra: De la solución de ecuaciones al álgebra abstracta.* Bogotá: Colciencias.

Bell, E. (2003). *Historia de las matemáticas.* México D.F.: Fondo de Cultura Económica.

Boyer, C. (1992). *Historia de la Matemática.* Madrid: Alianza.

Casadelrey, F. (2000). *Cardano y Tartaglia, Las matemáticas en el Renacimiento italiano* . Madrid: Nivola, Libros y ediciones S,L.

Castillo, R. M. (2002). *Omar Jayyam, Poeta y matemático.* Madrid: Nivola, Libros y ediciones S,L.

Collete, J.-P. (1985). Historia de las Matemáticas. *Traducción de Pilar González y Alfonso Casal* . Madrid: Siglo XXI de España Editores.

Descartes, R. (2003). La Geometría. En R. Descartes, *Discurso del Método.* Madrid: Tecnos Editorial.

Ivorra, C. (05 de 11 de 2012). *http://www.uv.es/ivorra/.* Obtenido de http://www.uv.es/ivorra/Libros/Ecuaciones.pdf

Sierra, M. (11 de 11 de 2012). *El Papel de la Historia de la Matemática en la enseñanza.* Obtenido de http://www.sinewton.org: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/43-44/Articulo18.pdf

Suárez, C., & Caballero, J. (2001). APRENDER MATEMÁTICAS A TRAVÉS DE SU HISTORIA. *Proyecto de Innovación Educativa, Memoria Final del Proyecto* .

Bibliografía de Apoyo

Luque, C., Mora, L., & Torres, J. (2009). *Actividades Matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: Representar estructuras algebraicas no numerables.* Bogotá : Javegraf.

Prada Coronado, A. M., & Angulo Escamilla, H. A. (2008). Un método geométrico para resolver ecuaciones cúbicas. *XVIII Encuentro de Geometría y sus aplicaciones. VI Encuentro de Aritmética* (págs. 215-222). Bogotá, D.C.: Universidad Pedagógica Nacional Fondo Editorial.