

## MÉTODOS NUMÉRICOS PARA INGENIERÍA POR PROYECTOS USANDO HOJA ELECTRÓNICA

**Jorge Ávila Soria**

Universidad de Sonora (México)

javilas9@gmail.com

**Palabras clave:** métodos numéricos, enseñanza con proyectos, hoja de cálculo, enseñanza holística

**Key words:** numerical methods, teaching with projects, spreadsheet, holistic teaching

**RESUMEN:** Los métodos numéricos se empiezan a usar desde el nivel básico y los estudiantes de ingeniería continúan su aprendizaje y utilización durante toda su actividad profesional. En el nivel superior, se busca que los estudiantes de ingeniería fortalezcan su conocimiento y entendimiento de los métodos numéricos estudiados, para que sigan utilizándolos, no sólo en el resto de su que haber estudiantil, sino en su vida profesional. El uso de la hoja electrónica permite al estudiante, no sólo modelar y programar los métodos numéricos, sino interpretar el funcionamiento de estos e identificar los valores que aplicará en la resolución de problemas.

**ABSTRACT:** Numerical methods are beginning to be used since the elementary level and engineering students continue their learning and use during all his professional activity. At the undergraduate level, it is necessary for engineering students to strengthen their knowledge and understanding of the numerical methods, to continue using them, not only in the remaining of their studies, but in their professional life. The use of the spreadsheet allows students not only modeling and programming numerical methods, but interpret the operation of these and identify the values that apply in resolving problems

## ■ INTRODUCCIÓN

Los métodos numéricos se empiezan a usar desde el nivel básico y los estudiantes de ingeniería continúan su aprendizaje y utilización durante toda su actividad profesional. En el nivel superior, se incluyen materias como métodos numéricos o análisis numérico, buscando que los aspirantes a ingenieros fortalezcan su conocimiento y entendimiento tanto de los métodos numéricos estudiados con anterioridad, como de nuevos y útiles métodos que aún no ha estudiado, y así sigan utilizándolos en el resto de su quehacer estudiantil y en su vida profesional.

Nosotros promovemos el uso de la hoja electrónica para la enseñanza de los métodos numéricos, porque creemos firmemente que la hoja electrónica permite al estudiante, no sólo modelar y programar los métodos numéricos, sino interpretar el funcionamiento de estos e identificar o localizar los valores que necesita aplicar en la resolución de los problemas matemáticos que encuentre tanto en su vida profesional como diaria.

## ■ METODOLOGÍA DE DISEÑO Y MARCO TEÓRICO

La metodología de diseño y marco teórico que utilizamos en el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de esta materia, están fundamentados en ACODESA, propuesta por Hitt (2009), con la cual se busca que con el uso de manipulables se promueva la producción de representaciones funcionales por los estudiantes, lo cual creemos es fundamental para que estos tengan una mejor retención de las construcciones matemáticas estudiadas. De acuerdo con Hitt y Cortés (2009), entre los diversos marcos teóricos que soportan ACODESA, están el de campos conceptuales de Vergnaud, el de representaciones semióticas de Duval, y el de situaciones didácticas de Brousseau, los cuales vienen a fortalecer la propuesta de diseño de situaciones didácticas de acuerdo con la metodología aquí usada.

ACODESA está acorde con el uso de una hoja electrónica, ya que sirve al estudiante para manipular lo que se programa en ella. Por otra parte, también buscamos detonar el aprendizaje colaborativo por medio del debate científico de las ideas planteadas durante los procesos de modelación, implementación y resolución del problema, además de la auto-reflexión sobre los problemas tratados y los temas estudiados. Queremos que el estudiante reflexione sobre las diferentes representaciones tratadas, así como sobre las diversas herramientas utilizadas en la implementación de los proyectos, ya sea en la forma de los Métodos Numéricos involucrados en la conformación del proyecto, como en el uso hecho de los comandos de la hoja electrónica necesarios en la programación, no sólo del proyecto, pero de los propios métodos individualmente.

## ■ CONSIDERACIONES PARA LA IMPLEMENTACIÓN

A pesar de que ACODESA busca el aprendizaje colaborativo como uno de sus elementos principales, también busca el trabajo individual, lo cual se hace difícil cuando faltan computadoras para todos los estudiantes. Sin embargo, la implementación de la metodología ACODESA puede ser modificada dependiendo de la situación que se presente, pero no es recomendable que más de dos personas trabajen en una misma computadora y el número ideal de estudiantes por computadora sigue siendo uno; por lo tanto, para grupos grandes (40 estudiantes normalmente, laboratorio computacional 20 computadoras promedio) es recomendable partir el grupo en dos, si es que las computadoras no alcanzan para todos. Para grupos poco numerosos sería preferible

permitir dos alumnos por computadora, para no tener la mitad de las horas del curso con los estudiantes, pues esto siempre afectará al curso. Para terminar con este punto, diremos que se pueden tener peores problemas, como serían un grupo grande y un laboratorio de cómputo con pocas computadoras o peor aún, no contar con laboratorio, en cuyo caso, nuestra propuesta perdería algo de sentido y su implementación tendría que ser modificada para una modalidad a distancia.

En cualquiera de las modalidades acorde a las disponibilidades del equipo de cómputo, la metodologías de diseño ACODESA debe ser modificada para que cada estudiante intervenga en un proceso que incluye el debate de las ideas con sus pares en otras estaciones de trabajo (computadoras), interaccionar entre las estaciones de trabajo y el instructor, grupal con toda la clase y finalmente auto-reflexivo (individual) después de cada sesión. Cualquiera que sea el caso, sólo recomendamos una implementación en base a nuestros parámetros, cuando se cuente con un centro de cómputo apropiado para número de estudiantes y que esté disponible por al menos el 80% de las horas de clase.

El propósito de la utilización de la hoja de cálculo en lugar de otros software disponibles para hacer métodos numéricos es su disponibilidad, pues existen múltiples versiones de hoja de cálculo gratuitas, tanto para instalación como para ser usadas en la web y la facilidad que tienen estas para mostrar el procesado de los números. En comparación, el caso de Matlab se encuentra con diversas dificultades, como el hecho de que no sea un software gratuito, que no se encuentra instalado en todos los laboratorios, cuando lo tiene el departamento hay que pedir que lo instalen a la brevedad posible, solo se puede instalar en los laboratorios de la institución legalmente, y es posible que el laboratorio tenga varias deficiencias de funcionalidad como sería el caso de computadoras obsoletas, de infestación por virus o malware, o de configuración por deterioro que impidan su uso normal y continuo.

En el caso de cualquier otro lenguaje programable de propósito general, hemos encontrado que los estudiantes no tienen en su mayoría una formación, ni siquiera mediana en programación, lo cual dificultaría grandemente su desempeño y los alcances del curso.

## ■ PROPUESTA DE TRABAJO PARA EL CURSO

Nuestra propuesta para este curso es hacer que cada estudiante elabore un proyecto que sirva para resolver problemas matemáticos que posiblemente sepa o haya visto resolver con lápiz y papel o con algún implemento tecnológico, pero que sean suficientemente complejos como para requerir el uso combinado de múltiples métodos numéricos de los estudiados. El objetivo es mostrar a los estudiantes lo que se puede hacer cuando juntas algunos de los métodos implementados en la hoja electrónica y los pones a trabajar juntos de manera organizada para dar respuesta a alguna situación-problema compleja.

Dependiendo del número de alumnos que decidan tomar la materia hasta el final del curso, permitirá decidir el número de estudiantes que compartan un mismo proyecto, sin que esto signifique la entrega de un solo proyecto en equipo, pero si dejando la posibilidad del trabajo colaborativo, es decir en equipo, entre estudiantes con el mismo proyecto e incluso con proyectos diferentes con métodos compartidos. Consideramos que se debe de contar con tres a cinco proyectos diferentes con variaciones en cuanto al tipo de métodos utilizados para un proyecto

particular, esto con el propósito de diversificar las diferencias entre los proyectos, incluso cuando estos persiguen el mismo propósito. Si el número de estudiantes es mayor que diez podría requerirse que varios estudiantes tengan exactamente el mismo proyecto, pero es común que los estudiantes no concluyan un curso con estas características, pues por diversas razones pudieran sentirse agobiados con la cantidad de métodos que se busca implementen.

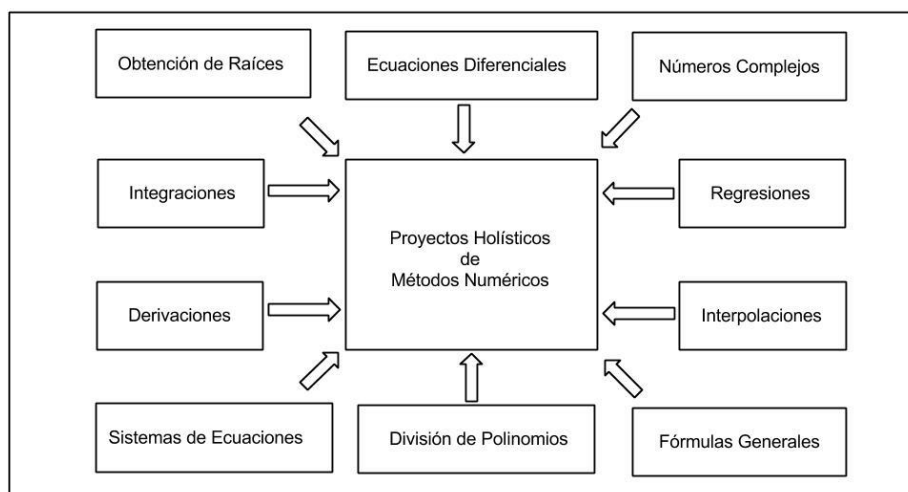
A pesar de que el curso de métodos numéricos requiere que los estudiantes hayan cursado un semestre de algún lenguaje de programación, es nuestra experiencia que llegan en su mayoría con muchas deficiencias en programación de cualquier tipo, esto aun cuando los estudiantes usan tecnología digital con familiaridad, pues la usan prácticamente desde su nacimiento.

El desarrollo de nuestra propuesta ha evolucionado durante múltiples imparticiones del curso de Métodos Numéricos para Ingenieros y hemos llegado a un punto en el que se le requiere a cada estudiante la elaboración de un proyecto que sirva para resolver problemas matemáticos que posiblemente sepa o haya visto resolver con lápiz y papel o con algún otro implemento tecnológico, pero que sean suficientemente complejos como para requerir el uso combinado de múltiples métodos numéricos de entre los estudiados. El objetivo es mostrar a los estudiantes lo que se puede hacer cuando juntas algunos de los métodos implementados en la hoja electrónica y los pones a trabajar juntos de manera organizada para dar respuesta a alguna situación-problema compleja.

Durante el curso, los estudiantes estudian los Métodos Numéricos que son requeridos en el currículo de la materia y nosotros les proponemos diversos materiales donde pueden ellos apoyarse para entender más allá de la clase, los diversos temas tratados en el curso. Chapra (2012) o cualquier versión disponible de este libro es aceptable, de la misma manera Mora (2013) les ofrece una versión accesible y digital de al menos parte del contenido del currículo.

El principal objetivo del curso es hacer que pueda resolver problemas con estos, lo cual hacen para cada uno de los métodos implementados. Los estudiantes usan, cada método implementado, para resolver problemas sencillos que les permitan tener experiencias de cuando usarlos, cómo funciona la implementación generada para dicho método, las potencialidades y deficiencias del método y la corrección de errores o mejoras en la implementación.

**Figura 1. Currículo de Métodos Numéricos.**



La Figura 1 presenta un diagrama que muestra a grandes rasgos los temas generales de la materia y en el centro, se relacionan los métodos que son necesarios para la implementación del proyecto asignado al estudiante. Es en esta parte del curso, que el estudiante verdaderamente comprende lo Holístico que el desarrollo de un proyecto puede ser, pues los estudiantes puedan observar directamente durante el proceso de implementación, que el todo es más que la suma de sus partes, ya que el estudiante sabe el uso particular de cada método utilizado, es responsable de la articulación del conjunto de ellos, y también conoce los alcances con los que la implementación finalizada de su proyecto debe cumplir.

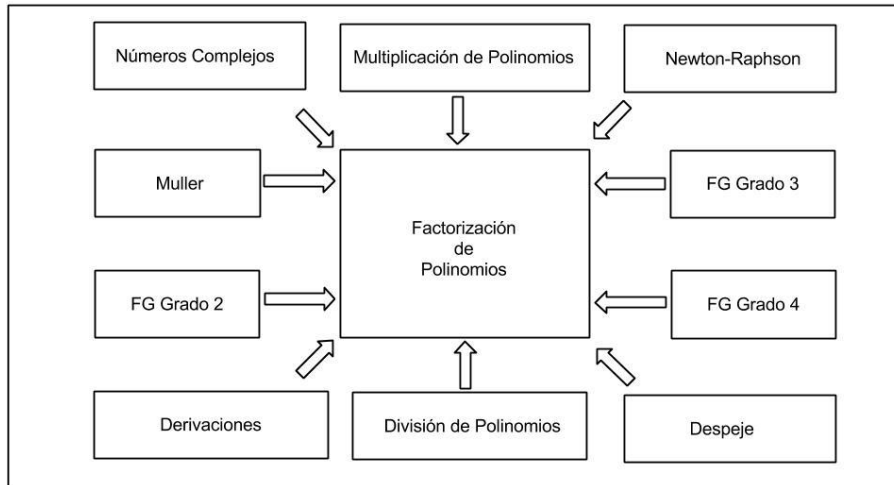
### ■ IMPLEMENTACIÓN DE PROYECTOS HOLÍSTICOS INDIVIDUALES

El proyecto final no es el único proyecto que los estudiantes tienen que implementar, pues a modo de entrenamiento, al estudiante se le va enfrentando con proyectos más pequeños donde mejora su capacidad para conectar los métodos numéricos que intervienen en tales casos, de modo que con estas articulaciones de proyectos efectuadas previamente a la asignación de lo que llamamos el proyecto final, el estudiante no sienta un salto tan abrupto entre la implementación de un solo método y la versión de método numérico holístico, en la forma del proyecto. Entre los Proyectos Holísticos que encargamos en el curso, se encuentran los siguientes:

- La resolución de ecuaciones diferenciales e integrales
- El cálculo de probabilidades usando la distribución normal
- La generación de números pseudo-aleatorios de una distribución de probabilidad acumulada
- La interpolación polinomial de datos
- La regresión polinomial de datos por mínimos cuadrados
- La integración numérica para el cálculo de longitudes de curvas
- La integración numérica para el cálculo de áreas entre dos funciones
- La integración numérica para el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución
- La integración numérica para el cálculo de centroide de masa
- La factorización de polinomios y obtención de raíces reales y complejas

La Figura 2 contiene un segundo diagrama que muestra, también a grandes rasgos, los métodos que podrían ser necesarios para la implementación de un ejemplo de Proyecto Holístico que sirva para la factorización de un polinomio de grado  $n$  (*sólo se implementa para polinomios de grados 7, como máximo, pero el estudiante entiende perfectamente cómo se podría extender el proyecto hasta cualquier grado deseado*), como se muestra al centro del diagrama, donde se relacionan todos los métodos que deben ser articulados en la implementación de este proyecto en particular. Al relacionar todos estos métodos, el estudiante que implemente este proyecto holístico, deberá ver con claridad las limitaciones de cada uno de los métodos intervinientes, en contraposición con el beneficio que se obtiene al utilizar conjuntamente varios de ellos para resolver una problemática mayor.

**Figura 2. Métodos Numéricos Usados en la Factorización de Polinomios.**



Al final de la implementación de cualquier proyecto holístico, la interface de debe quedar de forma que la persona que use el proyecto, sólo introduzca los datos y obtenga resultados de la implementación, a la manera de un comando de la hoja de cálculo. En el caso de la interface para la factorización de polinomios, con la introducción del grado del polinomio y sus coeficientes, el usuario deberá obtener la factorización de éste y sus raíces o soluciones reales y complejas, incluyendo las comprobaciones de que son correctas.

El propósito de cada método usado está bien definido en cada proyecto y para éste en particular, el estudiante aprende que funciona de la siguiente manera. Para describir el funcionamiento del proyecto para la factorización de polinomios usaremos como ejemplo un polinomio de grado 7, debido a que usa casi todos los elementos que mostramos en el diagrama de la Figura 2, excepto el de Despeje, el cual sólo se utiliza para polinomios de primer grado y otro método que no aparece en el diagrama de la Figura 2 es el de determinantes, pues forma parte del método de Müller para raíces múltiples. Supongamos que el polinomio de grado 7 sólo tiene una raíz real y todas las demás son complejas, lo cual quiere decir que el polinomio sólo corta en una ocasión el eje  $x$ ; por lo tanto el listado de pasos a seguir es como se muestra a continuación:

1. Como debe usarse el método de Newton-Raphson para obtener la raíz real del polonio de grado 7, éste debe ser Derivado primero.
2. Una vez Derivado el polinomio de grado 7, se puede usar el método de Newton-Raphson para obtener la única raíz real del polinomio, la cual es obtenida automáticamente con una búsqueda.
3. Obtenida la primera raíz, se hace una División de Polinomios, donde se dividen los coeficientes del polinomio entre la raíz real, para obtener un polinomio de un grado menor. La primera raíz se guarda.
4. Con el polinomio de grado 6, se usa el método de Müller para obtener 2 raíces complejas, porque aun cuando el método obtiene sólo una raíz, cuando ésta es compleja, automáticamente conocemos 2, pues la otra es su conjugado. De haber sido una raíz real,



se habrían tenido que repetir los primeros pasos para un polinomio de grado 5, pero al conocer 2 de las raíces podremos obtener un polinomio de grado 4.

5. Obtenidas las 2 raíces complejas del polinomio de grado 6, se hace una Multiplicación de Polinomios con los binomios de las raíces complejas, para obtener un trinomio al cuadrado con el que se hará una nueva División de Polinomios.
6. Ahora, estamos en posición de hacer una División de Polinomios, donde se dividen los coeficientes del polinomio entre los coeficientes del polinomio de grado 2, obtenido con las 2 soluciones complejas y obtenemos un polinomio dos grados menor. Esas dos raíces también se guardan y faltan 3 y llevamos 3.
7. Como queda un polinomio de grado 4, se utiliza directamente la Fórmula General de Grado 4 y se obtienen automáticamente las cuatro raíces faltantes. En este momento, parece que los otros elementos del diagrama en la Figura 2, no fueron utilizados, pero al utilizar FG Grado 4, automáticamente se están utilizando FG Grado 3 y FG Grado 2, pues FG Grado 4 requiere de ambas para poder dar resultados. Esta implementación es un pequeño proyecto en sí mismo.
8. Finalmente, se evalúan las raíces de números reales y las de Números Complejos en el polinomio original y se forma la expresión factorizada para desplegarlas como el resultado que arroja el proyecto.

En la Figura 3 mostramos un ejemplo de la interface de un proyecto para la Factorización de Polinomios. La implementación de la interface podría verse de esa manera para el proyecto propuesto en la Figura 2, pero en realidad, es el estudiante quien toma esas decisiones, ya que el rol del docente se reduce a explicar los proyectos, especificar su implementación y dar consejos en lo referente a la programación en la hoja de cálculo. La libertad otorgada al estudiante con respecto al diseño de la interface y la organización en la articulación de los métodos programados, hacen que el resultado final sea infinitamente diverso y quizás hasta colorido.

## ■ RESULTADOS

Los resultados obtenidos han sido interesantes y satisfactorios. No todos los proyectos tienen una funcionalidad del 100%, pero el 75% de nuestros estudiantes logra al menos un 70% de avance en sus proyectos y un 30% logra un avance del 90% al finalizar el curso.

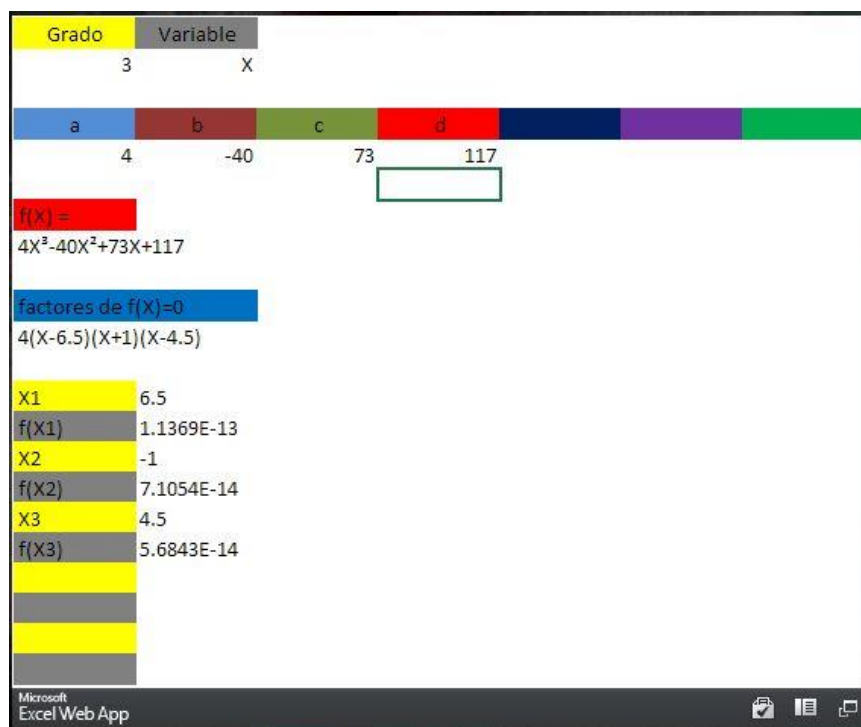
Este curso puede ser catalogado como exigente y de mucho trabajo, pues de los alumnos que se inscriben en éste, entre un 50% y 60% se dan de baja luego de no hacer las implementaciones pedidas y esto lo sabemos, porque toda la programación se efectúa en la Nube, en archivos compartidos con el docente, quien monitorea el avance en las implementaciones de cada estudiante y de esta manera puede evaluar su desempeño durante todo el curso.

## ■ CONCLUSIONES

Creemos que los estudiantes que terminan satisfactoriamente el curso, tienen la idea de haber hecho algo que puede seguir utilizando y mejorando, por las expresiones observadas cuando logran que funcione alguna parte del proyecto y puede ver que los diversos métodos utilizados

empiezan a trabajar conjuntamente de manera apropiada. También, muchos de esos estudiantes nos comentan la manera en algún método o proyecto les ha sido útil en otras materias o en trabajos externos de trabajos foráneos o prácticas profesionales.

**Figura 3.** Applet para la Factorización de Polinomios.



### ■ REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Chapra, C. S., Canale, P. R. (2012). *Métodos numéricos para ingenieros*, Quinta edición, McGraw-Hill.

Hitt, F. (2009). *Resolución de situaciones problema y desarrollo de competencias matemáticas en ambientes de aprendizaje en colaboración, debate científico y auto-reflexión* (ACODESA), Primer Seminario sobre Resolución de Problemas y el Uso de la Tecnología Computacional, pp. 9-21.

Hitt, F., Cortés, J. C. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet*, 10 (1), 1-30. Recuperado de [www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/](http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/)

Mora, W. (2013). Introducción a los métodos numéricos, *Revista Digital Matemática, Educación e Internet*. Actualizado 02-2013 Recuperado de [www.tecdigital.itcr.ac.cr/revistamatematica/Libros/WMora\\_MetodosNumericos/WMora-ITCR-MetodosNumericos.pdf](http://www.tecdigital.itcr.ac.cr/revistamatematica/Libros/WMora_MetodosNumericos/WMora-ITCR-MetodosNumericos.pdf)