

LAS ACTIVIDADES EN LÍNEA, UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Elvia Rosa Ruiz Ledezma, Alejandro Miguel Rosas Mendoza

CECyT Wilfrido Massieu. IPN, CICATA-IPN (México)

ruizelvia@hotmail.com, alerosas2000@gmail.com

Palabras clave: ambientes virtuales, génesis instrumental, campos conceptuales, esquemas de acción.

Key words: virtual environments, instrumental genesis, conceptual fields, action schemas.

RESUMEN: En este trabajo se aborda la aplicación de actividades didácticas en línea para la enseñanza de las funciones trigonométricas seno y coseno a estudiantes de nivel medio superior, así como se realizó el análisis de las respuestas obtenidas por los alumnos. Las actividades fueron aplicadas a estudiantes de los primeros semestres de un Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos en la Ciudad de México. Las sesiones fueron grabadas en video. Para realizar el análisis de las respuestas se utilizó la teoría de la Génesis Instrumental en conjunción con la teoría de los Campos Conceptuales. Las respuestas obtenidas permiten darnos una idea de cómo los estudiantes van construyendo el concepto de parámetro y el papel que desempeñan los parámetros en las variaciones de la gráfica de una función.

ABSTRACT: In this paper the application of online learning activities for teaching trigonometric sine and cosine functions to senior high students is discussed, as well as analysis of the responses made by students. The activities were applied to students in the first semester of a Centre for Science and Technology Studies in Mexico City. The sessions were videotaped. The theory of instrumental genesis in conjunction with the theory of conceptual fields used for the analysis of the responses. The answers obtained allow us an idea of how students are constructing the concept of parameter and the role parameter variations in the graph of a function.

■ INTRODUCCIÓN

En la primer parte del escrito partimos como antecedentes del uso de la tecnología, investigaciones basadas en la teoría de la aproximación instrumental y los ambientes virtuales. En un segundo momento, presentamos los fundamentos teóricos que sustentan nuestra investigación en donde se entrelazan la teoría de la génesis instrumental y la teoría de los campos conceptuales; la primera enfatiza el uso de la herramienta como un medio para que el estudiante construya su conocimiento a través de las técnicas y esquemas mentales que desarrolla y aplica mientras usa el artefacto. La segunda teoría se aboca al estudio del uso de los esquemas mentales en donde los aspectos técnicos y conceptuales están entrelazados; pero que no pueden ser observados directamente, puesto que no podemos mirar dentro de la cabeza de nuestros estudiantes, pero si podemos centrarnos en las técnicas instrumentadas observables, las cuales se definen como una secuencia más o menos estable de interacciones entre el usuario y el artefacto con una meta particular (Drijvers, Kieran y Mariotti, 2010).

Posteriormente presentamos los esquemas de utilización que definimos en las situaciones didácticas, así como las técnicas instrumentadas.

Por último presentamos el diseño y la metodología de la experimentación de nuestro problema de investigación y algunos resultados obtenidos en las formas de concepto en acción y teorema en acción.

■ ANTECEDENTES

Los antecedentes los presentamos considerando los dos elementos de que se sirve nuestra propuesta. Ambientes virtuales y aproximación instrumental

Ambientes virtuales.

Como antecedentes en el uso de ambientes virtuales para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (EVEAM), investigadores como, Bokhove, Koolstra, Boon y Heck (2007), utilizando applets programados en Java (WisWeb applets), para el desarrollo de habilidades algebraicas en alumnos de educación secundaria, encontraron varios puntos a favor para la implementación de estos ambientes; como permitir a los estudiantes trabajar a su propio nivel de pensamiento, ser divertidos, motivadores, interactivos, dinámicos, etc. Recomendando que deben integrarse en la clase diaria de matemáticas. En lo que se refiere a la enseñanza de las matemáticas en dos y tres dimensiones, Kaufman (2009), usando también (EVEAM), para el aprendizaje de álgebra y geometría, presenta una serie de investigaciones desarrolladas en los últimos diez años, encontrando que es necesario el diseño de contenidos interesantes e innovadores que justifique su uso. Aunque también menciona obstáculos (Los costos del hardware, número de usuarios limitado y la complejidad técnica), para tomarse en cuenta, en la implementación de estos ambientes. En otras aplicaciones de los entornos virtuales en donde participan gran cantidad de usuarios conectados en red llamados MUD (Multi-User Dungeon/Domain/Dimension), Dieterle y Clarke (2009) presentan cómo MUVes (multi-user virtual environments) se han utilizado en la educación y como pueden utilizarse para la enseñanza inmersos en un contexto psicosocial.

Aproximación instrumental.

Variedad de estudios sobre el uso de la tecnología en la educación matemática se refieren a la aproximación instrumental, como ejemplo mencionamos que de los nueve trabajos presentados en

el ICMI 17, no menos de siete se refieren a un enfoque instrumental como uno de los principales componentes del marco teórico.

La distinción entre artefacto e instrumento es esencial en la teoría de la instrumentación. Hablamos de un instrumento si existe una relación significativa entre el artefacto y el usuario en un determinado tipo de tarea, esto es $\text{Instrumento} = \text{Artefacto} + \text{esquemas y técnicas para un determinado tipo de tarea}$.

Así las investigaciones de Pierce y Stacey (2004), Camacho (2005), Drijvers y Gravemeijer (2005), Briceño y Cordero (2008), basan su sustento teórico en la aproximación instrumental, entendida como el proceso en el cual el sujeto transforma y adapta el artefacto a sus necesidades y circunstancias (Rabardel y Bourmaud, 2003), pasando por las etapas de descubrimiento, selección, personalización y transformación (Trouche, 2005). Así mismo se enfatiza la dimensión instrumental de los procesos de aprendizaje (Artigue, 2007). Lo que permite el desarrollo de esquemas de utilización, pero este proceso puede enriquecer o empobrecer la herramienta si no hay una tarea específica.

■ LA PROBLEMÁTICA Y EL PROPÓSITO DE INVESTIGACIÓN

La problemática se circunscribe al aprovechamiento escolar en el área de matemáticas en nuestro contexto (nivel medio superior) y las alternativas actuales existentes con el uso de la tecnología.

En Organisation for Economic Cooperation and Development [OECD], (2007), se observa que la prueba PISA (Program for International Student Assessment - Programa para la Evaluación internacional de los Alumnos) tiene como propósito evaluar el rendimiento de los alumnos de 15 años de varios países y es coordinada por la OCDE. Las asignaturas que comprende la evaluación son entre otras matemáticas, en donde México en 2009 solo alcanzó en promedio el nivel 1. En 2012, el número de estudiantes participantes fue de 33806, en 1471 escuelas. Donde el 55% de los alumnos no alcanza el nivel de competencia básica (nivel 2) en matemáticas y menos del 1% logra alcanzar los niveles 5 y 6.

Aunque en diferentes lugares del mundo se han creado actividades en línea, por ejemplo en la página del National Council of Teachers of Mathematics en Estados Unidos de América (NCTM, 2009) se pueden encontrar actividades para trabajar diversos conceptos matemáticos. Así mismo en España se tiene un proyecto con actividades en línea, el proyecto Descartes (MECD, 2001) y aún estas y otras actividades permiten experimentar con animaciones que involucran variables, posibilitando la utilización de diferentes valores que no permiten que el estudiante logre construir conceptos.

Nuestro propósito en este trabajo, se aborda a través de una propuesta de actividades didácticas, donde se usan herramientas tecnológicas para el estudio de conceptos matemáticos (funciones trigonométricas, seno y coseno) y las características de los conceptos que se construyen con el uso de estos recursos, revisando que pasa en esas construcciones y los momentos y formas en que se producen. Contribuyendo con esto al gran trabajo que se ha realizado hasta el momento, en el diseño y programación de actividades didácticas para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, mediante el uso de la computadora.

■ CONSIDERACIONES TEÓRICAS

Nuestro marco de referencia está conformado por la teoría de la Génesis Instrumental y la teoría de los Campos Conceptuales.

La génesis instrumental enfatiza el uso de la herramienta como un medio para que el estudiante construya su conocimiento a través de las técnicas y esquemas mentales que desarrolla y aplica mientras usa el artefacto.

Consideramos la teoría de la génesis instrumental para explicar la relación entre las actividades que se espera realice el estudiante, su implementación en ambientes virtuales y los tipos de conocimiento implicado; esto es, se espera que a través del ambiente virtual (en este caso la computadora con sus periféricos, sistema operativo y las actividades didácticas en línea), como mediadores entre los estudiantes y el concepto matemático sobre el que se trabaja, los alumnos se adapten a la herramienta y adapten la herramienta para la construcción de conocimientos (Rabardel, 1995, citado por Drijvers y Gravemeijer, 2005).

Los campos conceptuales se abocan al estudio del uso de los esquemas mentales en donde los aspectos técnicos y conceptuales están entrelazados; pero que no pueden ser observados directamente, puesto que no podemos mirar la forma en que se realizan los pensamientos dentro de la cabeza de los estudiantes, pero si podemos centrarnos en las técnicas instrumentadas observables, las cuales se definen como una secuencia más o menos estable de interacciones entre el usuario y el artefacto con una meta particular (Drijvers, Kieran y Mariotti, 2010).

Un esquema mental tiene una meta y sus componentes son los invariantes operacionales (conocimiento implícito en la acción) que se presentan en la forma de conceptos y teoremas en acción.

Los esquemas utilizados en nuestra investigación los categorizamos en: esquemas de uso y esquemas de acción instrumentada.

Los esquemas de uso son básicos y están relacionados directamente con el artefacto. Los esquemas de acción instrumentada son esquemas mentales coherentes y significativos y son acumulados o aumentados a partir de los esquemas de uso por medio de la génesis instrumental. La articulación de los esquemas de uso envuelve nuevas técnicas y aspectos conceptuales, que se integran en el nuevo esquema. Aún los esquemas de acción instrumentada pueden servir de base para un esquema de orden mayor o para formar esquemas compuestos.

Esto nos permite observar a los estudiantes en el momento de resolver las actividades didácticas e identificar los conceptos y teoremas en acción, y determinar los esquemas de acción instrumentada que desarrollan en esas soluciones.

■ DESARROLLO

Diseño

Las actividades didácticas están programadas en el lenguaje HTML5® utilizando la teoría de las situaciones a-didácticas y forman parte del proyecto CONACYT108952. En este proyecto se generó un conjunto de 20 actividades. Para nuestra investigación se realizó un análisis de las actividades de manera que se seleccionaron aquellas que por su nivel de complejidad y secuencia de conceptos incluidos formaran una clase de situaciones que permitieran la construcción de

esquemas. Debido a esto en nivel medio superior se utilizaron las actividades ordenadas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8.

Tabla 1. Tabla de Actividades.

Actividades	Nombre de la actividad	Notación algebraica
A1	Variaciones de la función seno y coseno	$f(x) = [] \text{sen } x$
A2	Variaciones de la frecuencia de las funciones seno y coseno	$f(x) = \text{sen}([]x)$
A3	Variaciones de la fase de las funciones seno y coseno	$f(x) = \text{sen}(x + []n)$
A4	Desplazamiento vertical de la función seno	$f(x) = \text{sen } x + []$
A5	Desplazamiento vertical de la función coseno.	$f(x) = \text{cos } x + []$
A6	Variaciones de altura y desplazamiento de la función seno.	$f(x) = [] \text{sen}x + []$
A7	Variaciones de altura en sumas de las funciones seno y coseno	$f(x) = [] \text{sen}x + [] \text{cos}x$
A8	Variaciones de las frecuencias en sumas de las funciones seno y coseno.	$f(x) = \text{sen}([]x) + \text{cos}([]x)$

Aplicación

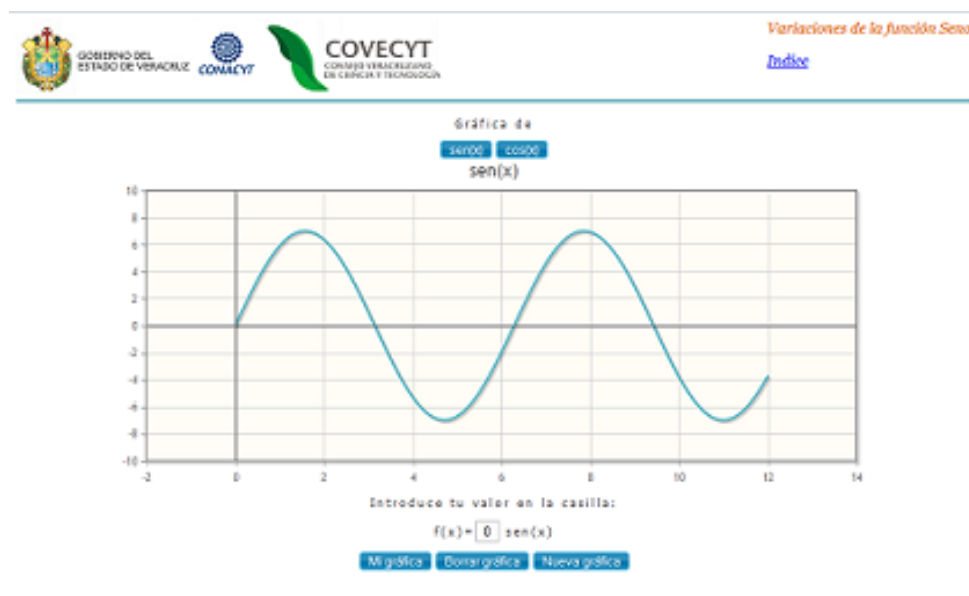
Se aplicaron en la Ciudad de México a estudiantes de primer semestre del Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos del Instituto Politécnico Nacional, en dos sesiones, de una y dos horas respectivamente. Los alumnos participantes fueron elegidos de acuerdo al conocimiento de los profesores del grupo, de esa manera se formaron tres parejas de alumnos, una de estudiantes de buenas calificaciones, otra con alumnos de calificaciones promedio y una más de alumnos con bajas calificaciones.

Los profesores que realizaron la aplicación permitieron que los estudiantes exploraran libremente las acciones que realizan cada una de las actividades. Se esperaba que de esta manera los alumnos desarrollaran conceptos y teoremas en acción. Para averiguar esto se video grabó a los alumnos y se les realizaron preguntas durante las sesiones de aplicación.

Procedimiento

Las actividades didácticas le piden al alumno que reproduzca una gráfica que el sistema le presenta mediante una pantalla semejante a la siguiente:

Figura 1. Imagen de la interfaz que el alumno utiliza en las actividades didácticas



En esta pantalla a los alumnos se les presenta una función (que depende de la actividad didáctica que están resolviendo), en la imagen es $y = [] \text{sen}(x)$. Donde $[]$ le permite al alumno introducir el valor (parámetro) que al graficar reproduzca la gráfica que le dio el sistema. También se tienen botones [Mi gráfica] [Borrar gráfica] [Nueva gráfica] que le permiten al alumno generar la gráfica de la función $y = [] \text{sen}(x)$ con el valor que haya introducido, borrar la gráfica previa y solicitarle al sistema que dibuje una nueva gráfica, respectivamente.

Se les dio una explicación a los estudiantes de lo que tenían que hacer, esto es generar una gráfica, identificar la colocación de un valor al que llamamos parámetro en el espacio que se requiriera para que la gráfica dada por el programa (en color azul) se igualara a la generada por ellos (en color naranja). Nunca se les dijo qué valor colocar, se les dejó libremente explorar con los valores que quisieran anotar, solo se les pidió que dijeran el por qué utilizaban ese valor y que comentaran sus observaciones de acuerdo a su gráfica generada en comparación con la que se presentaba en la pantalla.

Durante las sesiones de aplicación de las actividades se cuestionó a los estudiantes sobre lo que pensaban que haría el valor del parámetro que proporcionaron antes de que introdujeran el valor. Después de ver la gráfica resultante con el valor que dieron se les preguntó el por qué pensaban que la gráfica había o no resultado igual a la del sistema.

Además se les solicitó que se anticiparan comentando qué consideraban que haría en la gráfica el valor que habían escrito sin proceder a graficar. En ningún momento se les indujo a la respuesta correcta, pero se les pidió que generalizaran sus observaciones a través de una regla o una conclusión.

■ ANÁLISIS

Para el análisis se construyeron tres esquemas de acción instrumentada: 1) Mi gráfica, 2) Reproducir gráfica y 3) Repetición.

Primeramente se establecieron esquemas de acción generados por los estudiantes mediante la computadora y sus periféricos involucrados en la generación de la gráfica. Posteriormente se convirtieron esos esquemas de acción en esquemas de uso, utilizándose para generar otros esquemas de acción que le permiten al estudiante generar las gráficas que le solicita el sistema (concepto en acción). Finalmente, los anteriores esquemas nuevamente se convierten en esquemas básicos (de uso) para construir un esquema de acción que permite comprender cómo el estudiante ha construido la “regla” mediante la cual pueden predecir la forma de una gráfica dado un valor para un parámetro (teorema en acción).

Las respuestas de los estudiantes las hemos categorizado en concepto en acción y teorema en acción de acuerdo a los fundamentos teóricos considerados en esta investigación.

Estamos entendiendo concepto en acción, cuando el estudiante al observar una gráfica en la pantalla, relaciona su comportamiento con sus conocimientos previos, en este caso, el plano cartesiano, abscisas, ordenadas, origen, altura de la curva, escala de la curva, números positivos y negativos. Además de que al ir probando valores encuentre los casos particulares, que hagan cierta cada una de las curvas que se está generando, para poder construir una regla. Así mismo que relacione en la progresión de las actividades el lugar en que se encuentra cada parámetro con su comportamiento gráfico y cuando se combinan los acomodos de dichos valores pueda anticiparse a que efectos corresponden en el contexto gráfico.

Entendemos teorema en acción cuando el alumno interpreta a través de casos particulares el comportamiento de la función con la posición del parámetro y lo externa en una regla o conclusión; esto es cuando generaliza.

Concepto en acción y Teorema en acción construidos por la pareja de alumnos A1 y A2. Los momentos en que se producen las construcciones

Actividad 1. $f(x) = [] \text{sen } x$

Concepto en acción del parámetro altura

En ese momento el estudiante A1 efectivamente está viendo la función $f(x) = 2\text{sen } x$ y en el lugar del parámetro escribe el valor 2. Para el alumno A2 la gráfica que se dibujó en su pantalla fue $f(x) = 5\text{sen } x$, el valor 5 es el que el estudiante escribió, al darse cuenta que la curva (azul) llega a ese valor.

El alumno A1 comenta:

A1: Al ver que en esta gráfica el valle llega a -2 y la cresta a 2, concluyo que el parámetro es dos, el valor a donde llegan las crestas y los valles. (4:35 min)

A2: En esta gráfica la altura de la curva llega a 5 por tanteo coloco valores y veo que el parámetro es cinco.

A2: Observo que la onda llega al número 3 y desciende a -3 por lo que tres es el parámetro.

A2: En otra gráfica observo que llega la curva a 7 y ese es el valor por lo que lo escribo y si coincide mi gráfica.

Teorema en acción del parámetro altura

La gráfica que genera el programa para A2 es $f(x)=5\text{sen}x$, prueba con los valores 7,6 y comenta para concluir:

A2: *Cuando coloco valores pequeños la curva que dibuje disminuye su altura y con valores grandes aumenta (2:33 min).*

Al dibujarse en la pantalla para A1, $f(x)=8\text{sen}x$, y darle diferentes valores al parámetro: 12, 10, 9. Observa que la altura de la curva va disminuyendo, acercándose a la curva azul, por lo que va elaborando sus conclusiones:

A1: *El parámetro nos dice que entre más grande sea el valor más altas son las crestas y el valle disminuye en la curva que dibujo por lo que el valor es la altura de las crestas y los valles. (2:35 min)*

■ RESULTADOS

El análisis documentado a través de la construcción de esquemas, ha permitido establecer diferentes momentos (Actividad 1) en los que cada estudiante logra generar sus esquemas de acción de manera que, creemos, se puede identificar el instante en que el alumno está experimentando un concepto en acción, y cuándo logra un teorema en acción al paso de las repeticiones e intentos para reproducir las gráficas que el sistema le proporciona.

■ CONCLUSIONES

Considerando los primeros análisis de las respuestas obtenidas, se muestra que los alumnos construyen el concepto de parámetro (concepto en acción), utilizando esquemas de acción, de acuerdo a lo que observan en la pantalla de la computadora.

También hemos logrado ver que los alumnos logran generar reglas (teorema en acción) para predecir el efecto que tiene el variar los valores de un parámetro, así como la posición que tiene el parámetro dentro de la expresión matemática que representa una función.

Sin embargo es necesario continuar con estos análisis para verificar si estas observaciones preliminares se presentan en todos los alumnos que resuelvan estas actividades aún sin la presencia de un profesor.

■ REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Artigue, M. (2007). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental. En E. Mancera y C. Pérez (Eds.), *Historia y Prospectiva de la Educación Matemática*. Memorias de la XII CIAEM, pp. 9-21. México: Edebé. Ediciones Internacionales S.A. de C.V.
- Bokhove, C., Koolstra, G., Boon, P. y Heck, A. (2007). Towards an integrated learning environment for mathematics. En E. Milková y P. Prazák (Eds). *Electronic Proceedings of the 8th Conference on Technology in Mathematics Teaching*. Recuperado el 17 de octubre de 2012 de: <http://eprints.soton.ac.uk/348450/1/ICTMT8.pdf>

- Briceño, E y Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas bajo una perspectiva instrumental Un estudio socioepistemológico. En M. Chaleyat-Maurel (Ed.), *Topic Study Group 16: Research and development in The Teaching and learning of calculus*. ICME 11 México. Recuperado de: <http://tsg.icme11.org/document/get/656>
- Dieterle, E. y Clark, J. (2009). Multi-user virtual environments for teaching and learning. En M. Pagani (Ed.), *Encyclopedia of multimedia technology and networking* (2nd ed.) (pp. 1033-1054). USA: Idea Group, Inc.
- Drijvers, P. y Gravemeijer, K. (2005). Computer algebra as an instrument: examples of algebraic schemes. En D. Guin, K. Ruthven y L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of Symbolic Calculators: turning a computational device into a mathematical instrument* (pp. 163-196). New York: Springer Verlag.
- Drijvers, P., Kieran, C. y Mariotti, M.-A. (2010). En C. Hoyles y J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain: The 17th ICMI study* (pp. 89-132). London: Springer.
- Kaufmann, H. (2009, January 1st). Virtual Environments for Mathematics and Geometry Education. *Publishing History: In Themes in Science and Technology*, 2(1-2), 131-152.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2001). Recuperado el 15 de enero de 2010, de la página web del proyecto Descartes en <http://www.isftic.mepsyd.es/w3/Dcartes/index.html>.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2009). Página Web de *Illuminations Resources for Teaching Math*. Recuperado el 15 de enero de 2010 de <http://illuminations.nctm.org/>.
- Organisation for Economic Co-Operation and Devopment. (2004). *Primeros resultados de Pisa 2003. Resumen Ejecutivo*. Recuperado el 24 de enero de 2009 de www.oei.es/quipu/mexico/informe_pisa2003.pdf
- Organisation for Economic Co-Operation and Devopment. (2007). *El Programa PISA de la OCDE. Qué es y para qué sirve*. Recuperado el 24 de enero de 2009, de http://www.oecd.org/document/51/0,3343,en_32252351_32235731_39732595_1_1_1_1,00.html
- Pierce, R., y Stacey, K. (2004). Monitoring Progress in Algebra in a CAS Active Context: Symbol Sense, Algebraic Insight and Algebraic Expectation. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 11(1), 3-12.
- Rabardel, P., y Bourmaud, G. (2003). From computer to instrument system: a developmental perspective. *Interacting with Computers*, 15 (5), 665-691.
- Trouche, L. (2005). Calculators in mathematics education: a rapid evolution of tools with differential effects. En D. Guin, K. Ruthven, y L. Trouche (Eds.). *The didactical challenge of Symbolic Calculators: turning a computational device into a mathematical instrument* (pp. 9-40). New York: Springer Verlag.