Ecua-parqués: una alternativa para la enseñanza de las ecuaciones lineales

Trabajo de grado asociado al interés profesional del estudiante

Para optar por el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presentado por:

Sandra Viviana Gómez Mora

William Andrés Cárdenas

Asesor: Yeison Alexander Sánchez Rubio

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ 2015

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	ECUA-PARQUÉS: UNA ALTERNATIVA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS ECUACIONES LINEALES
Autor(es)	Gómez Mora, Sandra Viviana; Cárdenas, William Andrés
Director	Sánchez Rubio, Yeison Alexander
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2015. 136 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	ECUACIONES, NÚMEROS ENTEROS, MATERIALES MANIPULATIVOS, GENERALIZACIÓN, RAZONAMIENTO.

2. Descripción
Esta propuesta de trabajo de grado tiene como objetivo presentar una alternativa para la enseñanza de las ecuaciones lineales de la forma $ax + b = c$ siendo x, a, b y c números enteros, a, b y c números conocidos y x desconocido, partiendo de la idea del "Ecua-parqués" desarrollada por los autores de este documento en 2013, la cual permite abordar ecuaciones de la forma $x + a = b$ en los números enteros. El objetivo principal de esta alternativa es permitir al estudiante, además de solucionar

este tipo de ecuaciones, visualizar las propiedades inmersas en dicho proceso.

3. Fuentes
Para la construcción de este documento, fueron consultados 26 documentos , entre ellos se encuentran libros, artículos publicados en revistas especializadas, tesis de maestría, artículos no publicados y otros documentos no publicados como la unidades didácticas. Las siguientes son las principales fuentes de este documento:
Alonso, F., Barrero, C., Fuentes, I., Azcárate, A., Dozagarat, J.M., Gutiérrez, S., Ortiz, M.A., Rivière, V & Veiga da, C. (1993). Ideas y Actividades para Enseñar Álgebra. Madrid: Síntesis.
Chamoso, J. M., Durán J., García, J.F., Lalanda, J. & Rodríguez, M. (2004). Análisis y experimentación de juegos como instrumentos para enseñar matemáticas. Revista Suma, 47 (1), 47-58. Disponible en: http://bit.ly/1maJhC0
Duarte, D. & Fernández, J. (2012). Ecuaciones lineales de primer grado con una incógnita: Un enfoque a la Resolución de Problemas. Unidad Didáctica no publicada. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
Escobar, A. & Urrea, A. (2010). Diferentes Modelos en la Enseñanza de ecuaciones de primer grado (Trabajo de grado de especialización). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
Gómez, A. (2013). ¿Por qué somos tan malos en matemáticas? El Tiempo [en línea]. Septiembre 28 del 2013. [Fecha de consulta: Marzo 03 del 2015]. Recuperado de http://bit.do/3LEz.
Gómez, S. V & Cárdenas W. A. (2014). Ecua-parqués: una alternativa para la enseñanza

de las ecuaciones lineales (Anteproyecto). Documento no publicado. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Socas, M., Camacho, M., Palarea, M. & Hernández, J. (1989). Iniciación al álgebra. Madrid: Síntesis.

Uicab, G. R. (2011). Materiales tangibles y su influencia en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Yucatán: Universidad Autónoma de Yucatán. Recuperado de http://bit.do/3LCW.

4. Contenidos

El documento está compuesto por cuatro capítulos. En el primero se encuentra el marco matemático del objeto de estudio, las ecuaciones, estudiando al conjunto de los números enteros como el conjunto sobre el cual se trabajará, para luego abordar el tratamiento de las ecuaciones lineales de la forma $ax + b = c$ en $\mathbb{Z}$.

El segundo capítulo contiene el marco didáctico, donde se exponen algunos errores y dificultades asociados al aprendizaje de las ecuaciones lineales y el uso de material tangible, y modelos para la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones. En el tercer capítulo se encuentra la génesis del material, las consideraciones sobre el diseño, la descripción del Ecua-parqués y las orientaciones para su uso. Finalmente, en el cuarto capítulo se encuentran las conclusiones, reflexiones y recomendaciones que surgieron tras el desarrollo de este trabajo de grado y construcción del presente documento.

5. Metodología

De acuerdo con el cronograma de actividades, expuesto en el anteproyecto de grado (Gómez & Cárdenas, 2014), se realizó una revisión de bibliografía relacionada con los aspectos matemáticos del objeto a estudiar (ecuación lineal) y Didáctica del Álgebra relacionada con las ecuaciones; al mismo tiempo que se trabajó en el diseño de la segunda versión del Ecua-parqués y las orientaciones básicas para su gestión en el aula, de tal manera que este permita además de solucionar ecuaciones de la forma $ax + b = c$ en $\mathbb{Z}$, visualizar las propiedades inmersas en dicho proceso y desarrollar competencias matemáticas.

6. Conclusiones

Teniendo en cuenta los objetivos planteados al inicio de este documento, se puede decir que fue posible desarrollar una herramienta para la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones, que es familiar a la cotidianidad de los estudiantes, llamativa, fácil de llevar al aula, accesible y asequible, que respeta las propiedades de la estructura algebraica de los números enteros; contribuyendo positivamente en el ambiente escolar de las matemáticas, promoviendo el estudio de este contenido de manera lúdica, considerando al juego como una vía importante para la construcción de conocimiento, siendo esta una experiencia valiosa para los autores, pues involucró un acercamiento a la innovación en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, dejando como enseñanza que no es fácil asumir la responsabilidad y el riesgo que implica innovar, pero que este esfuerzo permite pasar por una experiencia de aprendizaje realmente enriquecedora para la formación de los autores, dejando en los autores la inquietud por las posibilidades que se abren tras el desarrollo del Ecua-parqués.

Por otro lado, algunas reflexiones que surgieron tras la construcción de este trabajo de grado permiten constituir al juego Ecua-parqués en un modelo para la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones lineales, promoviendo en los estudiantes, a través del juego, una actitud positiva hacia las Matemáticas.

La experiencia de construcción del Ecua-parqués dio lugar a ideas para futuros trabajos que se basen en el Ecua-parqués que lo pueden enriquecer y potenciar, como la idea de replantear las orientaciones y el instructivo para hacer uso del Ecua-parqués con ecuaciones de la forma $ax + b = c$ en los enteros cuando $-6 \leq a \leq -1$.

Elaborado por:	Gómez Mora, Sandra Viviana; Cárdenas, William Andrés
Revisado por:	Sánchez Rubio, Yeison Alexander

Fecha de elaboración del resumen:	30	07	2015

Tabla de Contenido

Tabla de figuras

Introducción

Según docentes del programa Colombia Aprendiendo (2010), dirigido por Carlos Zuluaga, hay un mito de que las Matemáticas son difíciles y que el deber como docentes es romper todas aquellas concepciones que han surgido a partir de la enseñanza tradicional, que han mostrado no ser las más ventajosas para su aprendizaje, generando herramientas que motiven a los estudiantes y les causen curiosidad; en razón a esto, en 2013 los autores de este documento tomaron la iniciativa de desarrollar un material manipulable que permitiera además de representar y dar solución a ecuaciones lineales, dar significado a los procedimientos empleados para hallar dicha solución, haciendo evidentes las propiedades inmersas evitando de esta manera favorecer el desarrollo de procesos memorísticos.

El Ecua-parqués fue el producto que se obtuvo tras el desarrollo de esta idea y el presente documento sustenta desde las Matemáticas y La didáctica, su creación como modelo para la enseñanza de las ecuaciones lineales de la forma $ax + b = c$ en $\mathbb{Z}$, describiendo la experiencia vivida por los autores durante su diseño, así como las conclusiones y reflexiones que surgieron tras dicho ejercicio. Anexo a este documento, se hace entrega de un juego Ecua-parqués, cada juego contiene un tablero, 4 fichas, 2 dados, 2 tablas de registro y un instructivo.

El documento está conformado por cuatro capítulos, el primero es el marco matemático del objeto de estudio, en el que se realiza un breve acercamiento al concepto de ecuación, números enteros, ecuaciones en el conjunto de los números enteros y ecuaciones equivalentes.

En el segundo capítulo se constituye al juego Ecua-parqués como un modelo para la enseñanza de las ecuaciones lineales en el conjunto de los números enteros indicando algunos errores en los que comúnmente incurren los estudiantes al solucionar este tipo de ecuaciones y que posiblemente el uso del Ecua-parqués evite cometer; para esto, primero se describe la importancia del juego y de los materiales tangibles como instrumentos facilitadores del aprendizaje, mostrando qué es un modelo para la enseñanza y describiendo algunos de los modelos más populares para la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones lineales. En el tercer capítulo se encuentra la génesis de la propuesta, las consideraciones que se tuvieron en cuenta para el diseño de las diferentes versiones, la evolución del material y su descripción. Finalmente, en el cuarto capítulo reposan las conclusiones, reflexiones y recomendaciones tras el desarrollo de este trabajo de grado.

Justificación

"*No hay materia más exacta que las matemáticas pero tampoco una más odiada*", afirma Gómez (2013) en su artículo ¿Por qué somos tan malos en matemáticas? publicado en el diario El Tiempo, en donde expone que, en habilidades matemáticas, los jóvenes colombianos tienen un rezago de más de dos años de escolaridad frente a estudiantes de otros países, debido, entre otras causas, al uso de métodos pedagógicos inapropiados, en especial, la memorización de fórmulas y procedimientos sin significado, ignorando el porqué de dichos procedimientos, su razón de ser y su importancia.

En este sentido y teniendo en cuenta a Socas, Camacho, Palarea & Hernández (1989) quienes afirman que los recursos didácticos engendran esquemas que hacen más fácil el aprendizaje, se desarrolla este trabajo de grado; el cual está dirigido a profesores de matemáticas, estudiantes de básica secundaria, media y autodidactas, como un material que permite resolver algunas ecuaciones lineales y que pretende, además de reforzar los conocimientos que tienen los estudiantes sobre las propiedades inmersas en dicho proceso, favorecer la construcción de la solución general de dichas ecuaciones.

La intervención en el aula del Ecua-parqués en su primera versión y su acogida en la comunidad académica que hasta la fecha teniendo en cuenta su divulgación e implementación en el aula de clase[1], permiten afirmar que la interacción entre los estudiantes con el material contribuye positivamente en el ambiente escolar de las matemáticas, haciendo los contenidos amigables y llamativos, fomentando así la buena disposición por aprender y el interés por el contenido abordado.

Este trabajo de grado es muy importante para la formación de los autores como futuros docentes de matemáticas, debido a que contribuye a su consolidación como maestros innovadores, pues se espera aportar positivamente a la didáctica de las matemáticas con esta propuesta, la cual se ha desarrollado por dos años, logrando construir un material que además de permitir solucionar algunas ecuaciones de la forma $ax + b = c$ en el conjunto de los números enteros, pretende dar sentido a los procedimientos empleados para hallar dicha solución, relacionando directamente las reglas del juego con las

[1] La primera versión del Ecua-parqués fue llevada al aula en el marco de las prácticas iniciales correspondientes al espacio académico Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra, en el Colegio Nydia Quintero de Turbay, con el grado 801 de la jornada mañana, además de esto ha sido divulgada en diferentes eventos académicos que más adelante serán descritos.

propiedades matemáticas que intervienen, intentando favorecer en el estudiante apoyado en las orientaciones del docente la posibilidad de construir la forma general de la solución de este tipo de ecuaciones.

Objetivo general

Desarrollar una herramienta innovadora para la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones lineales de la forma $ax + b = c$ en $\mathbb{Z}$, con el fin de contribuir positivamente en el ambiente escolar de las matemáticas, provocando el estudio de este contenido de manera lúdica.

Objetivos específicos

- Aportar al aula una herramienta familiar a la cotidianidad de los estudiantes, que permita por medio de la manipulación de un juego tradicional como lo es el parqués, el acercamiento a objetos matemáticos como ecuación, proceso de resolución y propiedades inmersas.
- Fomentar el espíritu innovador en la formación de los maestros en matemáticas autores de este documento, aportando un material didáctico a la enseñanza y aprendizaje del álgebra.

Capítulo 1

Referentes Matemáticos

En este apartado se realiza un esbozo desde las Matemáticas de la ecuación lineal en el conjunto de los números enteros, por lo que se dará iniciando definiendo qué es ecuación, cuál es el conjunto de los números enteros y cómo es su comportamiento, para finalmente hallar la solución de las ecuaciones de la forma $ax + b = c$ en el conjunto de los números enteros.

1.1. Ecuación

Las ecuaciones se pueden describir como proposiciones abiertas o predicados que han sido construidos en una teoría matemática particular; una definición más precisa de la ecuación puede expresarse a partir de su construcción en un lenguaje formal.

1.1.1. Proposiciones en un lenguaje formal

Los lenguajes formales están conformados términos, relatores y funtores, los términos son un conjunto de símbolos específicos, los cuales pueden ser constantes o variables.

Los términos que son constantes representan objetos fijos del conjunto, es decir, los mismos todo el tiempo; por ejemplo, en el conjunto de los números naturales, los términos constantes son los números $1, 2, 3, 4, 5, ...$, mientras que los términos que son variables están representados generalmente por letras como $n, x, y, z,$ etc. Una variable según Luque, Ávila y Soler (2013), representa cualquier elemento de un conjunto de términos constantes y es susceptible de ser reemplazada por cualquiera de dichos términos.

Los funtores son operaciones internas que se efectúan entre términos del conjunto, estas pueden ser unitarias, binarias, ternarias, etc., y permiten obtener un nuevo término al operar uno o más términos, por ejemplo, los términos variables x y y, con el funtor $+$ representan al nuevo término $x + y$, pues a pesar de que x y y toman valores del conjunto, cuando estas son sustituidas y operadas, generan un término constante.

Los relatores son relaciones entre dos o más términos, su significado se puede asociar, entre otros, a relaciones de equivalencia u orden entre los términos que se relacionen.

Por ejemplo, en la expresión "$1+1=2$", el símbolo "$=$" es un relator entre los términos constantes "$1+1$" y "2" diciendo que "$1+1$" es equivalente a "2".

Al utilizar términos, relatores y funtores en una expresión, se construyen "expresiones con sentido", a las cuales se les puede asignar un valor de verdad (verdadero o falso), cuando estas expresiones involucran términos constantes se denominan **proposiciones**[2], por ejemplo $1+1>3$ es una proposición cuyo valor de verdad es falso pues no se cumple la relación.

Cuando una proposición involucra uno o más términos variables se denominan **predicados** o **funciones proposicionales**, estos se caracterizan porque su valor de verdad depende de los términos constantes por los que se reemplacen las variables involucradas, (por ejemplo la expresión $x+2>6$ en el conjunto de los números naturales es una función proposicional, cuando x es reemplazada por la constante 4 la proposición es verdadera, mientras que cuando x es reemplazada por un valor distinto a 4 la proposición es falsa).

Ahora, cuando el relator de una función proposicional es de equivalencia "=", dicha función se denomina **ecuación** y su solución está dada por el conjunto de las $n-plas$ (si la función proposicional está construida con n variables) de términos constantes que al sustituir las variables generan una proposición verdadera.

Por ejemplo, la expresión algebraica[3] $x+6=7$ en el conjunto de los números naturales es una ecuación, y la solución es 1, pues cuando se sustituye la variable por 1 se obtienen una proposición verdadera, mientras que con cualquier otro valor se obtiene una falsa.

1.2. El conjunto de los números enteros

Tras esto, y para dirigir la vista directamente a las ecuaciones lineales en el conjunto de los números enteros, objeto matemático abordado en este trabajo; vale la pena presentar de manera breve el conjunto de los números enteros, en esta oportunidad desde la axiomática propuesta por Le Veque que de una forma muy sencilla proporciona los elementos necesarios para caracterizar el conjunto, mostrando las propiedades que satisfacen los números enteros con la adición y la multiplicación.

[2] Dado R un relator, entre $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ términos, entonces $R(t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n)$ es una proposición simple o fórmula atómica.

[3] Según Stewart, Redlin y Watson (2007) una expresión algebraica es aquella que combina términos variables y constantes usando operaciones como la suma, multiplicación, entre otras.

Axiomas de los números enteros según Le Veque

Nociones Primitivas: El sistema axiomático propuesto por Le Veque para los números enteros parte de los siguientes objetos no definidos:

- Conjunto de los números enteros.
- Dos operaciones, la adición y la multiplicación.
- Dos elementos diferentes en el conjunto, el cero (0) y el uno (1).

Axiomas: Le Veque basado en las anteriores nociones primitivas propone los siguientes axiomas:

1. Cada pareja de enteros a y b tienen una única suma $a + b$ y un único producto ab, de manera que se cumplen las siguientes leyes:
    - Ley Asociativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$ y $a(bc) = (ab)c$
    - Ley Conmutativa: $a + b = b + a$ y $ab = ba$
    - Ley Distributiva: $a(b + c) = ab + bc$
    - Los enteros distintos de 0 y 1 tienen las propiedades de $a + 0 = a$ y $1 \cdot a = a$.
2. Para cada entero a, la ecuación $a + x = 0$ tiene una solución única x llamada $-(a)$
3. Si $c \neq 0$ y $ca = cb$, entonces $a = b$
4. Existe un subconjunto de números enteros, llamados enteros positivos, con las siguientes propiedades:
    - La suma y el producto de dos enteros positivos son positivos.
    - Cualquier entero a diferente de cero se cumple que solamente uno de los dos enteros a o $-a$ es positivo.

Definición de menor que: Se dice que a es menor que b y se escribe $a < b$ si $b - a$ es un entero positivo y se escribe $a \leq b$ si $a < b$ o $a = b$.

Todo conjunto de enteros positivos que contenga al menos un elemento, contiene un elemento mínimo, es decir, existe un entero a en el conjunto tal que $a \leq b$ para todo b del conjunto.

Con lo anterior, se caracteriza al conjunto de los números enteros con la suma y la multiplicación como un dominio de integridad ordenado y completo, que satisface las siguientes propiedades:

- **Conmutativa:** Si $a, b \in \mathbb{Z}$ entonces $a + b = b + a$ y $a \cdot b = b \cdot a$.
- **Asociativa:** Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$ entonces $a + (b + c) = (a + b) + c$ y $a \cdot \ b \cdot c \ = \ a \cdot b \ \cdot c$
- **Existencia del elemento idéntico:** Existe 0, $0 \in \mathbb{Z}$ tal que $a + 0 = 0 + a = a$, y existe 1, $1 \in \mathbb{Z}$ que pertenece a los números enteros tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
- **Existencia del inverso aditivo**: Para todo número entero a existe un elemento llamado inverso aditivo, el cual se denota como $-a$, tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$
- **Cancelativa:** Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$ y se tiene que $a + c = b + c,$ entonces $a = b.$ Y si $a \cdot c = b \cdot c,$ donde $c \neq 0$ entonces $a = b$[4].
- **Distributiva de la multiplicación con respecto a la adición,** para la cual, si $a, b, c \in \mathbb{Z}$ entonces $a \cdot \ b + c \ = \ a \cdot b \ + (a \cdot c)$.

1.3. Ecuaciones lineales en el conjunto de los números enteros

Volviendo la mirada hacia las ecuaciones lineales, objeto de estudio de este trabajo, se define ecuación lineal de una variable $\mathbb{Z}$, como una función proposicional donde se cumple que:

- Los términos están formados por el conjunto de los números enteros.
- Los funtores son la adición y el producto.
- Aparece una sola variable.
- El relator es la relación de igualdad.

Ya se había dicho que la solución de una ecuación está dada por las $n - plas$ de términos que al sustituir las variables originan una proposición verdadera y la solución será dada por el conjunto de términos constantes que al ser reemplazados por la variable

[4] Siendo la propiedad cancelativa para la multiplicación, una de las más interesantes del dominio de integridad de los números enteros.

originen una proposición verdadera; dentro de las ecuaciones lineales encontramos expresiones como:

$$3x + 5x - 7 = 6x + 8$$

$$0x = 3$$

$$0x = 0$$

$$2x + 8 = 9$$

Para el caso de las ecuaciones lineales de la forma $ax + b = c$ en el conjunto de los números enteros con $a \neq 0$ las cuales gracias a las propiedades cancelativa de la suma y multiplicación de números enteros tienen a lo más una solución, y tiene exactamente una solución en el conjunto de los números enteros si y solo si $a \ c - b$ y para hallarla por lo general se hace uso de las propiedades que satisface la estructura algebraica $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ con el fin de construir **ecuaciones equivalentes** más sencillas que la original en donde la solución sea evidente; es importante tener claro que dos o más ecuaciones lineales se son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución y para que cumplan esta condición, las ecuaciones deben tener el mismo número de variables.

Es posible determinar cuándo dos ecuaciones lineales son equivalentes si aún no se conoce su conjunto solución o generar, dada una ecuación lineal ecuaciones equivalentes a esta.

Según Sánchez (2014), hay dos métodos en las Matemáticas para construir ecuaciones equivalentes y son consecuencia de las propiedades que satisface la estructura algebraica $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

Método 1, sumando a ambos lados de la ecuación una constante:

La ecuación $ax + b = c$, es equivalente a la ecuación $ax + b + d = c + d$

Ejemplo:

Dada $6x + 16 = 34$ encontrar una ecuación equivalente.

Sumando una constante a cada lado de la ecuación:

$$6x + 16 + \ -5 \ = 34 + (-5)$$

$$6x + 16 - 5 = 34 - 5$$

$$6x + 11 = 29$$

Entonces, $6x + 16 = 34$ es equivalente a $6x + 11 = 29$, y la solución de x en las dos ecuaciones es 3.

A este método en las matemáticas escolares se le llama ***propiedad uniforme de la igualdad con la adición***.

Método 2, multiplicando a ambos lados por una constante diferente de cero.

La ecuación $ax + b = c$, es equivalente a la ecuación $d(ax + b) = d \cdot c$

Ejemplo:

Dada $6x + 16 = 34$ encontrar una ecuación equivalente.

Multiplicando una constante a cada lado de la ecuación:

$$6x + 16 = 34$$

$$2(6x + 16) = 2(34)$$

$$2(6x) + 2(16) = 2(34)$$

$$12x + 32 = 68$$

Entonces, $6x + 16 = 34$ es equivalente a $12x + 32 = 68$ y la solución de x en ambas ecuaciones es 3.

A esta regla en las matemáticas escolares se le llama ***propiedad uniforme de la igualdad con la multiplicación***.

El procedimiento inverso a la multiplicación por un término constante a cada lado de la ecuación es el asociado a la propiedad cancelativa de la multiplicación, en el cual se cancelan los factores comunes de los términos de la ecuación.

La ecuación $ax + b = c$, es equivalente a la ecuación $fx + g = h$ si y solo si existe un $d \neq \ 0{,}1$ tal que d es divisor[5] de a, b y c.

$$ax + b = c$$

$$si\ d\ \ a,\ d\ \ b\ y\ d\ \ c\ , entones\ a = df, b = dg\ y\ c = dh$$

$$dfx + dg = dh$$

$$d\ \ fx + g\ \ = dh$$

$$fx + g = h$$

Ejemplo:

Dada $12x + 32 = 68$ encontrar una ecuación equivalente.

Cancelando una constante a cada lado de la ecuación:

---

[5]**Ser divisor de**: Sean a, b números enteros con a diferente de cero. Decimos que a divide a b si existe un entero c tal que $b = ac$. En tal caso escribimos $a \mid b$. Decimos también que a es un divisor de b o que b es un múltiplo de a. Rubiano (2004).

$$12x + 32 = 68$$
$$2(6x) + 2(16) = 2(34)$$
$$2(6x + 16) = 2(34)$$
$$6x + 16 = 34$$

Entonces, $12x + 32 = 68$ es equivalente a $6x + 16 = 34$ y la solución de x en ambas ecuaciones es 3.

Es importante tener claro que no todas las operaciones generan en todos los casos ecuaciones equivalentes; una operación que no permite generar ecuaciones equivalentes es la potenciación, un ejemplo sencillo son las ecuaciones $x = 3$ y $x^2 = 9$ que no son equivalentes ya que su conjunto solución es diferente, pues la solución de x en la primera ecuación es 3, mientras que en la segunda es 3 y -3.

Es decir, por lo general cuando se tiene una ecuación lineal de la forma $ax + b = c$, se busca la solución hallando una ecuación equivalente a la original de la forma $x = d$, usando los métodos para construir ecuaciones equivalentes.

Por ejemplo, para la ecuación $6x + 16 = 34$ buscando la solución vía ecuaciones equivalentes.

$6x + 16 = 34$	
$6x + 16 + \ -4\ = 34 + (-4)$	Propiedad uniforme de la adición.
$6x + 16 - 4 = 34 - 4$	Def de la sustracción[6]
$6x + (16 - 4) = (34 - 4)$	Propiedad asociativa
$6x + 12 = 30$	Def de la sustracción
$6x + 6(2) = 6(5)$	Factor común[7]
$x + 2 = 5$	Propiedad cancelativa de la multiplicación
$x + 2 + (-2) = 5 + (-2)$	Existencia del inverso aditivo
$x + 2 - 2 = 5 - 2$	Def de la sustracción
$x + (2 - 2) = (5 - 2)$	Propiedad asociativa

[6] Estas definiciones pueden ser consultadas por el lector en el libro Estructuras Algebraicas de Pérez (2008).

[7] El factor común es consecuencia de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, esta puede ser consultada por el lector en el libro Estructuras Algebraicas de Pérez (2008).

$x + 0 = 3$	Existencia del inverso aditivo
$x = 3$	Existencia del elemento idéntico

Llegando entonces a la ecuación $x = 3$ en la cual es evidente que la solución para x es 3.

Un camino un poco más corto, es:

$6x + 16 = 34$	
$6x + 16 + \ -16\ = 34 + (-16)$	Existencia del inverso aditivo
$6x + 16 - 16 = 34 - 16$	Def de la sustracción
$6x + (16 - 16) = (34 - 16)$	Propiedad asociativa
$6x + 0 = 18$	Existencia del inverso aditivo
$6x = 18$	Existencia del elemento idéntico
$6x = 6(3)$	Factor común
$x = 3$	Propiedad cancelativa de la multiplicación

Llegando nuevamente a la ecuación $x = 3$ en la cual es evidente que la solución para x es 3, y que las ecuaciones que se obtuvieron tras realizar una operación y usar una propiedad son equivalentes, además de esto que la solución hallada pertenece al conjunto de los números enteros.

Es importante precisar que la solución de la ecuación $ax + b = c$ existe en el conjunto de los números enteros si para esta ecuación o una equivalente a esta existe un $d \in \mathbb{Z}$ tal que $d = MCD\ \ a, b\ $, y d es divisor de c, siendo d diferente de 1[8].

La siguiente es una de las alternativas para hallar la solución general de la ecuación $ax + b = c$ en los números enteros:

$ax + b = c$	
$ax + b + (-b) = c + (-b)$	Existencia del inverso aditivo

[8]Las siguientes definiciones son tomadas de Rubiano (2004):

$\boldsymbol{MCD(a,b)}$**:** Sean a y b enteros no ambos iguales a cero. El conjunto de todos los divisores comunes de a y b (un divisor común de a y b es un entero que divide a ambos números a y b) es un conjunto finito de números enteros cuyo máximo se denomina el Máximo Común Divisor de a y b. Lo notamos $MCD(a, b)$.

Teorema. Sean a y b enteros no ambos cero. Entonces $d = (a, b)$ si y solamente si d satisface las siguientes propiedades:

1. $d > 0$. 2. $d \mid a$ y $d \mid b$. 3. Si $f \mid a$ y $f \mid b$ entonces $f \mid d$.

$ax + b - b = c - b$	Def de la sustracción
$ax + (b - b) = (c - b)$	Propiedad asociativa
$ax + 0 = (c - b)$	Existencia del inverso aditivo
$ax = (c - b)$	Existencia del elemento idéntico
$ax = ak$	Sustitución[9]
$x = k$	Propiedad cancelativa de la multiplicación
$x = \frac{c - b}{a}$	Sustitución

Llegando entonces a la ecuación $x = \frac{c-b}{a}$, en la cual es evidente que la solución general para x es $\frac{c-b}{a}$, siendo esta solución para este caso (las ecuaciones lineales en el conjunto de los números enteros) un número entero.

[9] Teniendo en cuenta que la solución de x es entera, entonces, para este caso $a\ c - b$, entonces existe un elemento k que pertenece a los $\mathbb{Z}$, tal que $ak = c - b$ y $k = \frac{c-b}{a}$.

Capítulo 2

Referentes Didácticos

En este apartado se aborda la importancia del uso juegos en la enseñanza de las matemáticas y de materiales manipulativos en el aula, así como el uso del Ecua-parqués como modelo para la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones lineales (puntualmente aquellas de las forma $ax + b = c$ en los números enteros), mostrando algunos de los errores y dificultades que los estudiantes según la literatura cometen cuando resuelven ecuaciones lineales y que el material posiblemente puede impedir o superar.

2.1. Los juegos en la enseñanza de las matemáticas

El juego es un fenómeno cultural que se ha constituido en un elemento fundamental en la educación, ya que favorece el desarrollo físico, emocional, intelectual y social de los niños; según Crespillo (2010) el niño aprende a prestar atención en lo que está haciendo, a memorizar, a razonar, y a través del juego, su pensamiento se desarrolla hasta lograr ser conceptual, lógico y abstracto; en la misma corriente Chamoso, Durán, García, Lalanda & Rodriguez (2004) realizan un análisis sobre la gran importancia del juego, pero esta vez en la enseñanza de las matemáticas, pues las matemáticas comenzaron como algo puramente recreativo, indicando varias razones por las que es aconsejable llevar juegos al aula; por ejemplo, por ser atractivos y aceptados con facilidad generando un ambiente lúdico[10] que estimula la curiosidad y permite disfrutar y sentir placer mientras se aprende, disminuyendo el rechazo de algunos estudiantes hacia la materia; porque favorece la igualación entre todos al introducir novedad, suerte y variabilidad, estimulando el desarrollo social de los estudiantes; porque los juegos permiten desarrollar e cierto sentido los mismo hábitos y habilidades que las Matemáticas, pues se comportan de forma similar siguiendo unas reglas al buscar la estrategia ganadora; requieren esfuerzo y rigor, atención, memoria, estimulando la imaginación, la creatividad, el pensamiento crítico, desarrollando la capacidad de seguir

[10] Para Chamoso et al. (2004) las actividades de carácter lúdico, se utilizan como divertimento y deleite sin esperar que proporcione una utilidad inmediata ni que ejerza una función moral

instrucciones, además recomiendan su uso por generar aprendizajes duraderos pues las condiciones de aprendizaje son agradables.

Además de lo anterior Chamoso et al. (2004) indican que la incursión de los juegos en el aula debe ser de una forma planificada, teniendo en cuenta entre otros, los conocimientos previos del estudiante y el objetivo de llevar dicho juego al aula; contando estos, con ciertas características para que sean provechosos en el aula, por ejemplo ser lúdicos e improductivos en su fase inicial siendo utilizados únicamente para jugar, para posteriormente darle utilizad didáctica; debe ser libre y despertar en el estudiante las ganas de jugar, con reglas propias y sencillas, de partidas rápidas, es decir que sean temporalmente limitados.

Según Sánchez y Casas (1998) los juegos en Matemáticas, son una actividad divertida y mental, dotado de un conjunto de reglas, siendo útiles en tres momentos, para presentar contenidos matemáticos, trabajar los contenidos presentados y afianzar contenidos, y con tres finalidades: motivar, desarrollar la creatividad y desarrollar estrategias para resolver problemas.

2.2. Uso de material tangible en el aula de clase

Según los planteamientos de Godino, Batanero y Font (2003) entre los diferentes recursos didácticos que utilizan los docentes de matemáticas para orientar sus clases, se encuentran las ayudas el estudio y los materiales manipulativos, últimos que a su vez se agrupan en dos categorías, aquellos que son tangibles (materiales concretos , entre los cuales se encuentran la balanza, el tablero de fichas de colores, etc.) entendiéndose estos como cualquier material u objeto físico, con el cual los estudiantes pueden “palpar” y de cierta manera, ver y experimentar con el objeto matemático, y los gráfico-verbales-textuales en los que participa la percepción visual y auditiva (gráficos, palabras, textos y símbolos matemáticos, programas de ordenador); se considera que los materiales manipulativos son usados para apoyar el desarrollo del pensamiento, el lenguaje oral y escrito, y la socialización entre otros aspectos, estimulando los sentidos y la imaginación.

Según Uicab (2011) las siguientes son algunas de las características que poseen los materiales manipulativos:

- Carácter exploratorio, que propicia un marco para la resolución de problemas, discusión, comunicación y reflexión. Las limitaciones que puede presentar un material pueden ser foco de discusión en clase.
- Hacen más comprensibles los conceptos Matemáticos.
- Apoyan la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Se aclara que los materiales didácticos pueden representar la idea de cierto objeto matemático, más nunca el objeto como tal, esto se debe a que las Matemáticas son una disciplina que estudia entidades netamente abstractas.

De acuerdo con Fischbein (1987, citado por Uicab, 2011) los conceptos matemáticos y las operaciones matemáticas son creaciones abstractas y formales, por lo que con frecuencia se producen modelos mentales que proporcionan algún significado práctico. En este sentido Uicab (2011) manifiesta que en el proceso de enseñanza y aprendizaje no es sencillo desarrollar el razonamiento abstracto en los estudiantes, por tal motivo es fundamental que el docente promueva la actividad manipulativa y deductiva de los conceptos matemáticos, permitiendo así, visualizar la abstracción e ir de lo concreto a lo abstracto para proporcionar a los estudiantes elementos para la construcción de sus propias ideas matemáticas.

2.3. Modelos para la Enseñanza y Aprendizaje de las ecuaciones lineales

A continuación se presenta una definición de modelo para la enseñanza de las ecuaciones lineales y se muestran algunos como, el tablero de fichas de colores, la balanza, y los diagramas, y de acuerdo a esto, en el capítulo 3, se explica por qué el Ecua-parqués puede constituirse en un modelo para la enseñanza de las ecuaciones de la forma $ax + b = c$ en $\mathbb{Z}$.

2.3.1. ¿Qué es un modelo para la enseñanza de las ecuaciones lineales?

Las representaciones propias de las ecuaciones son llamadas en Socas, Camacho, Palarea & Hernández (1989) modelos, los cuales se pueden ver como lenguaje y como recurso didáctico que engendran esquemas que hacen más fácil el aprendizaje. En Didáctica de las Matemáticas se acepta que "los modelos son fundamentales en la creación de conceptos y procesos de razonamiento, pues permiten hacer accesibles y manipulables conceptos intelectualmente más difíciles" (Escobar & Urrea, 2010, p. 29).

Socas et al. (1989) afirman que los modelos concretos como balanzas, gráficas y tablero de fichas de colores, brindan a los aprendices una introducción al Álgebra desarrollando habilidades en el proceso de simbolización a partir de la manipulación; en este mismo sentido Bressan (citada por Escobar & Urrea, 2010), indica que las representaciones físicas actúan como estímulo en los procesos de construcción de ideas mentales y para la auto-validación de las comprensiones.

De acuerdo con Escobar y Urrea (2010) el material concreto o manipulativo se constituye como un modelo de ideas matemáticas representadas en forma tridimensional donde intervienen la percepción visual, táctil y kinestésica[11] que llevan a los estudiantes a identificar conceptos y estructuras matemáticas. La modelización en el Álgebra permite facilitar el proceso de enseñanza y aprendizaje de conceptos, es así como los modelos usados para la enseñanza de ecuaciones lineales permiten la construcción de esquemas que posibilitan entender algunos conceptos como el significado del signo igual en Álgebra y su diferencia con el igual aritmético, la habilidad para transcribir una situación planteada en una situación concreta al lenguaje algebraico, iniciar a los estudiantes en la resolución y conocimiento de las reglas de manipulación de las ecuaciones entre otras.

2.3.2. Algunos modelos para la enseñanza de las ecuaciones lineales

A continuación se mencionan algunos aspectos importantes de los modelos balanza, diagramas y tablero de fichas de colores.

2.3.2.1. La balanza

Pretende la adquisición del concepto de ecuación, el uso de propiedades de igualdades (Figura 2-1) y la resolución de ecuaciones sencillas. Usualmente se utiliza una balanza de dos platos que se inclinan dependiendo del peso puesto sobre cada uno de ellos. Se inicia la actividad con la manipulación de objetos y de una balanza de brazos con la intención de realizar la comparación de varios elementos de cada plato y manteniendo la igualdad (regla básica del concepto de ecuación) y se realizan movimientos de objetos a fin de encontrar el valor de alguno de ellos.

[11] La kinestésica es la percepción del equilibrio y de la posición de las partes del cuerpo, en este sentido Arzalello y Edwards (2005, citado por Vergel, 2014, p. 72) los movimientos y gestos que realiza un estudiante contribuyen a la construcción de significados de conceptos matemáticos.

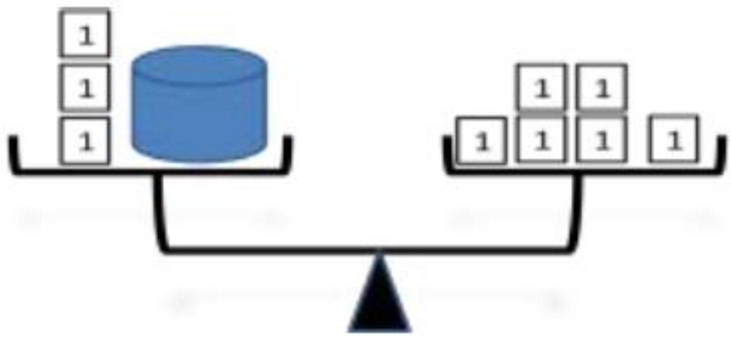


Figura 2-1. Representación de la ecuación x+3=6

Sin embargo este modelo tiene varias dificultades ya que no es posible representar números negativos, fracciones, ecuaciones igualadas a cero o ecuaciones cuadráticas.

2.3.2.2. Diagramas

Son esquemas expresados de manera pictórica, con signos parecidos a los diagramas de flujo, estos se pueden utilizar para mostrar una proposición geométrica, resolver un problema o expresar de forma lógica o gráfica la variación de un suceso. En la Figura 2-2 los rectángulos y las flechas indican las órdenes de cálculo.

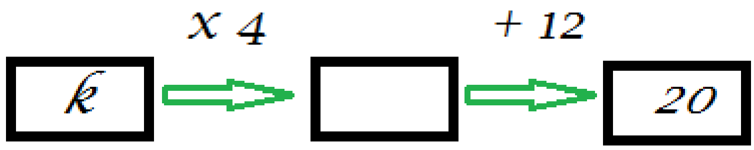


Figura 2-2. Representación de la ecuación 4k+12=20

2.3.2.3. Tablero de fichas de colores

Corresponde a una representación de un tablero dividido en dos secciones con un símbolo igual en el centro (Ver Figura 2-3). También se utilizan fichas de dos formas en dos colores diferentes para diferenciar números conocidos y desconocidos, así como valores positivos y negativos. Por ejemplo en Socas et al. (1989) utilizan fichas en forma de triángulo para representar a las incógnitas y círculo para representar los números conocidos, las que están de color negro representan los números positivos y las de color blanco los negativos. La única regla del material, llamada regla de eliminación consiste en “parejas de la misma forma y distinto color en un mismo lado del tablero, se neutralizan y se eliminan” (Socas et al, 1989, p. 183)

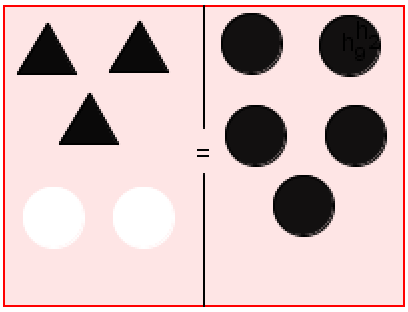


Figura 2-3. Representación de la ecuación $3x - 2 = 5$

Teniendo en cuenta los anteriores modelos, Socas et al. (1989, citado por Escobar & Urrea, 2010, p. 42), muestran algunas recomendaciones que hay que considerar al momento de resolver ecuaciones. Cuando se realiza una transición del lenguaje natural al algebraico, esto es, el estudiante parte de su lenguaje natural involucrado las cantidades, relaciones y el enunciado verbal para llegar al lenguaje algebraico, el cual hace referencia al lenguaje que utiliza de manera escrita, letras y números unidos con signos de operaciones aritméticas; es posible trabajar con la resolución de una ecuación, en una primera fase, ellos aconsejan utilizar procedimientos informales de “descomposición de la aritmética” o “por ensayo y error” y apoyarse en las limitaciones de los procedimientos informales para establecer los formales. Seguido a esto, encontrar la solución con la utilización de algún modelo, para que el estudiante halle una relación entre el modelo y el método formal, ya que los modelos pueden fallar si los estudiantes nunca ven la relación entre el modelo y los procedimientos formales, de esta manera hay que seleccionar cuidadosamente cada modelo, para que se evidencie esta relación. Por último y basado en las limitaciones que puede presentar el material concreto, se aconseja pasar a un sistema de representación algebraica con mayor generalidad que pueda impulsar a la interiorización de conceptos y finalmente la generalización de algunas “reglas en la manipulación de ecuaciones”.

2.4. El Ecua-parqués en el aula

Ya que el diseño del Ecua-parqués dependió directamente del objeto matemático, pues tanto la configuración del tablero, la creación de las reglas y las orientaciones al maestro, fueron ejercicios que se desarrollaron desde el principio en torno a las ecuaciones lineales de la forma $ax + b = c$ en los números enteros y a las propiedades matemáticas que se involucran en la resolución de este tipo de ecuaciones, la estructura que se consiguió para el Ecua-parqués se asemeja a la de los números enteros con las operaciones adición y multiplicación, por los que permite al estudiante acercarse a las ecuaciones lineales, representarlas, explorar y solucionarlas, posibilitando el desarrollo del proceso de Generalizar que según Mora y Soler (2010) está ligado a los procesos: inducir, observar, descomponer, hacer analogías e identificar características comunes, entre otros, así como a procesos de nivel superior como Abstraer y Simbolizar, razones por las cuales el juego Ecua-parqués se constituye como un modelo para la enseñanza de las ecuaciones lineales.

Semejante a la balanza y al tablero de fichas, la forma del tablero del Ecua-parqués y las reglas asociadas al movimiento de las fichas, también hacen alusión a las propiedades de las igualdades; pero va más allá, pues con el Ecua-parqués es posible trabajar con números negativos, fraccionarios[12] y ecuaciones igualadas a 0.

Por otro lado, similar a los diagramas, que dan un orden o secuencia para solucionar una ecuación de forma explícita, el objetivo del juego y su dinámica sugiere a los estudiantes de una forma tácita y no tan estricta pues contempla diferentes caminos que puede tomar el estudiante para solucionar una ecuación lineal, permitiéndoles construir ideas, conjeturar y facilitar la aproximación a la forma general de la solución de estas ecuaciones.

Una de las bondades adicionales del Ecua-parqués es que siendo un juego, hace la actividad agradable favoreciendo el desarrollo afectivo y emocional del estudiante, rescatando el carácter lúdico de las actividades que se llevan al aula, además de esto, el azar involucrado al hacer uso de los dados para determinar (como en el parqués tradicional) la cantidad de casillas que se deben desplazar las fichas, da la oportunidad de ganar no solo a los estudiantes con mayor desarrollo de competencias matemáticas,

[12] Esta idea, no se desarrolla de forma directa en este documento; sin embargo, se propone en las orientaciones al docente.

por lo que permite generar un espacio de participación inclusivo, en el que todos los tienen las mismas posibilidades.

Una noción de competencia matemática, de acuerdo con los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (Men, 2006) se puede interpretar como:

El conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socioa-fectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores. (p.49)

2.5. Errores y dificultades

Las dificultades y errores que se exponen a continuación, comúnmente son presentados por los estudiantes al momento de resolver ecuaciones lineales y son mencionados por que se cree que es posible evitar caer en estos con el uso del Ecua-parqués, teniendo en cuenta que dichos errores pueden estar vinculadas con los procedimientos que se supone, son comúnmente enseñados en el aula para la resolución de estas ecuaciones.

2.5.1. Asociados al cambio del concepto igual

Alonso, Barrero, Fuentes, Azcárate, Dozagarat, Gutiérrez, Ortiz, Rivière y Veiga. (1993) afirman que los estudiantes manejan siempre el signo igual como un mandato operacional. Cuando se encuentran con los dos miembros de la ecuación ninguno de los cuales resulta de operar aritméticamente en el otro, se les hace difícil aceptar el nuevo significado de la igualdad como un equilibrio que solo se mantiene para determinado valor de la incógnita.

Por ejemplo; hacen:

$$4x + 3 = 2x + 6$$

$$4x + 3 - 3 = 2x + 6 - 3 = 4x = 2x + 3 = 4x - 2x = 2x - 3 - 2x$$

En este sentido, Caballero (2010), manifiesta la idea extendida entre algunos estudiantes de que el signo igual es la "señal de hacer algo", lo que implica que sea considerado como un operador, es decir, separa una cadena de operaciones a realizar de un resultado a obtener, y no verlo como un símbolo de la equivalencia entre los miembros izquierdo y derecho de una ecuación. Esto lleva a los estudiantes a utilizar de forma errónea las propiedades simétrica y transitiva de la igualdad, además, de no encontrarle sentido a expresiones tales como $x + 4 = 2x + 3$, es decir, no conciben que la incógnita pueda estar presente en ambos lados de la igualdad.

2.5.2. Asociados al significado del signo menos en inversos aditivos

Alonso et al. (1993) dicen, basándose en el siguiente ejemplo que algunos estudiantes no reconocen el inverso aditivo de un número negativo, por ejemplo; escriben:

$$52x - 32 = 25x + 130$$

$$52x - 32 - 32 = 25x + 130 - 32$$

$$52x = 25x + 98$$

$$52x - 25x = 25x + 98 - 25x$$

$$98 = 27x$$

Fallan en el segundo paso, al intentar aplicar la operación inversa de la sustracción para eliminar 32 del primer miembro, pero lo hace correctamente al planteárselo con $25x$ en el cuarto paso, a pesar de que este término parece más complicado por ir acompañado de la incógnita, lo cual revela escasa consistencia en la utilización de las operaciones inversas.

2.5.3. Asociados a los números racionales

Alonso et al. (1993) afirman que las fracciones y números racionales son fuente continua de errores que comenten los estudiantes al resolver ecuaciones, por ejemplo resuelven:

$$\frac{5\ \ 4x - 1}{4} - 7 = 8$$

$$\frac{20x - 5}{4} - 7 = 8$$

$$20x - 5 - 7 = 8 \times 4$$

$$20x = 32 + 5 + 7$$

$$x = \frac{43}{20}$$

En esta situación, se puede observar cómo al encontrase con un denominador en uno de los términos, resuelve pasarlo al otro lado de la igualdad desconociendo que $\frac{20x-5}{4} - 7$

comprenden un único término, siendo necesario antes de realizar ese procedimiento o eliminar -7 del término izquierdo o convertir el 7 en una fracción equivalente con denominador 4 y efectuar la adición entre las dos fracciones homogéneas.

2.5.4. Asociados a determinar x como la única incógnita

En Alonso et al. (1993) se hace mención a un ejemplo en el cual Laura de 14 años debe resolver la ecuación:

$$\frac{3}{b}+\frac{4b+3}{5}=4$$

Ella pregunta que si puede cambiar la b por x. Esta pregunta pone de manifiesto que la estudiante relaciona la idea de ecuación únicamente cuando la incógnita es representada por la letra x. "Un simpe cambio en la representación de la incógnita es una dificultad importante" (p. 90).

2.5.5. Asociados a la transición conceptual de la aritmética al álgebra:

Moreno y Castellanos (1997) afirman:

> Se pueden concretar en: Cambio del signo de un miembro de la ecuación sin tener en cuenta el otro; cambio del signo a términos que no se transponen[13]; asignación del mismo valor a la incógnita que a su opuesto; cambio del signo al transponer un factor; transposición y conservación de factor. (p.257)

2.5.6. Asociado al significado de las letras

Caballero (2010), afirma que una dificultad que se puede presentar en la resolución de ecuaciones, está relacionada con el significado que se le atribuye a las letras. Teniendo en cuenta que, en aritmética las letras designan en algunas ocasiones unidades de medida, entre otros, mientras que en álgebra su significado cambia y pueden representar números generalizados o una variable[14]; se considera que los estudiantes al no realizar

---

[13] En este trabajo, se pretende cambiar la idea de "trasponer términos" a la de las operaciones fundamentales en el tratamiento de las ecuaciones planteadas por Al-Kowarizmi (Sessa, 2005, p. 54) las cuales son, **aljabr**: restaurar, componer, complementar, agregar, completar; **al-muqabala:** poner en oposición, balancear.

[14] De acuerdo con Kücheman (1981, citado por Alonso et al., 1993) la letra en Álgebra puede tener entre otras, las siguientes interpretaciones:

- **Letra como número generalizado:** La letra puede tomar varios valores, pero sin llegarse a considerar como una variable.

una adecuada transición siguen considerando a las letras como etiquetas, lo cual obstaculiza el significado de estas en las ecuaciones algebraicas. En este sentido, las variables, por ejemplo la “x”, son identificadas como objeto. De ese modo, entienden la expresión $5x$ como 5 manzanas, 5 peras etcétera.

2.5.7. Asociados al aprendizaje deficiente de conceptos previos.

Moreno y Castellanos (1997) dicen qué:

Se concretan así: hallan en forma incorrecta el resultado de sumas o restas de enteros; hallan en forma incorrecta el signo del resultado de la división de dos enteros cuando éstos son de diferente signo; asignan como resultado de una división, el mismo resultado que para su inverso multiplicativo, cuando el divisor es múltiplo del dividendo. (p. 257)

Un ejemplo de este error puede ser:

$$x - 1 = -1$$

$$x - 1 + 1 = -1 + 1$$

$$x = 2$$

Con lo anterior, se reúnen algunos aspectos importantes para justificar la creación y uso del Ecua-parqués como modelo para la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones lineales, señalando la importancia del juego como elemento fundamental para el desarrollo de los niños, el uso del material tangible en el aula de clase y algunos modelos para la enseñanza de las ecuaciones lineales, mostrando sus bondades y limitaciones, para luego hablar del juego Ecua-parqués como un modelo para la enseñanza de las ecuaciones lineales en el conjunto de los números enteros, haciendo un paralelo entre los modelos comunes y el Ecua-parqués, con el fin de señalar los beneficios adicionales que esta nueva herramienta ofrece y finalmente los errores que el uso del Ecua-parqués posiblemente puede evitar en los estudiantes o ayuda a superar.

- **Letra como variable:** Representa un rango de valores no específico y se ve como una relación sistemática entre dos conjuntos de valores.
- **Letra como incógnita especifica:** la letra es un número específico, aunque desconocido, con el cual se puede operar

Capítulo 3

Ecua-parqués

El Ecua-parqués como modelo para la enseñanza de las ecuaciones lineales, es un material tangible diseñado en dos versiones, las cuales serán descritas en este capítulo, centrando la atención en la segunda versión, creada especialmente para este trabajo de grado, la cual permite representar y solucionar ecuaciones de la forma $ax + b = c$ en el conjunto de los números enteros, usando un tablero, fichas, dados, una tabla de registro y un conjunto de reglas que están ligadas directamente con las propiedades de la igualdad inmersas en la resolución de ecuaciones lineales.

3.1. Génesis de Ecua-parqués

La idea de diseñar un recurso didáctico para abordar la enseñanza de un objeto matemático, surgió como parte de las actividades propuestas en la práctica pedagógica inicial correspondiente al espacio académico Enseñanza y Aprendizaje del Álgebra y la Aritmética en el periodo 2013-1; para lo cual, pensando en las ecuaciones lineales, los autores diseñaron la primera versión del Ecua-parqués basados en la idea de Duarte y Fernández (2012) de usar un tablero de parqués tradicional y fichas para dar solución a determinadas ecuaciones lineales; esta primera configuración logró satisfacer algunas de las características de la estructura aditiva de los números enteros y permitiendo al jugador, además de solucionar ciertas ecuaciones lineales de la forma $x + a = b$ en el conjunto de los números enteros, identificar propiedades inmersas en dicho proceso; como la propiedad uniforme de la igualdad con la adición de números enteros, la existencia de elementos inversos aditivos y elemento idéntico, y las propiedades cancelativa, conmutativa y asociativa de la adición.

Tras ver la acogida que tuvo el material por algunos miembros de la comunidad académica[15], y las ideas que surgieron para potenciarlo tras su divulgación y uso en varios espacios, a mediados de 2014 nació la intención de desarrollar el Ecua-parqués

[15] Teniendo en cuenta que la idea inicial del Ecua-parqués fue presentada en diferentes jornadas y eventos ante estudiantes y profesionales de la educación, esta experiencia será descrita con mayor detalle en el desarrollo de este apartado.

como modelo para la enseñanza de las ecuaciones lineales de la forma $ax + b = c$ en el conjunto de los números enteros; tras los retos que se presentaron en de desarrollo de este diseño se logró obtener una configuración que satisface la mayoría de las características de la estructura aditiva y multiplicativa de los números enteros, en la cual gracias a las reglas y uso de la tabla de registro, es posible representar dichas ecuaciones, solucionarlas y evidenciar otras propiedades como la uniforme de la igualdad con la multiplicación en los números enteros, la propiedad cancelativa de la multiplicación, distributiva de la multiplicación con respecto a la adición, y las otras ya mencionadas que están inmersas en la resolución de este tipo de ecuaciones lineales.

A continuación se describe cómo fue el desarrollo de la idea del Ecua-parqués, mostrado algunas de las consideraciones que se tuvieron en cuenta en el diseño del juego y algunas experiencias de divulgación y uso que enriquecieron el material.

3.1.1. Primera versión

Para la propuesta de enseñanza correspondiente a la Práctica pedagógica inicial relacionada con el Espacio Académico Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra del periodo 2013-1, se pretendía tomar la idea de Duarte y Fernández (2012) que consistía en usar una estación semejante a las del tablero tradicional de parqués, con dos sectores (Figura 2-1), el de la izquierda (trayecto final del parqués tradicional) con 19 casillas y la derecha 21 casillas (trayecto cercano a la cárcel del formato tradicional), algunas fichas y un dado.

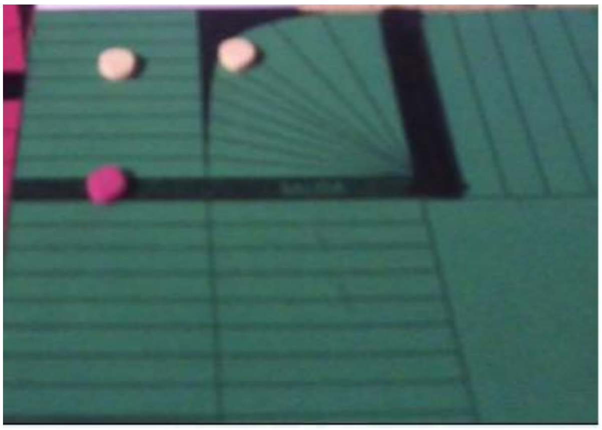


Figura 2-1. Propuesta Duarte y Fernández

En esta iniciativa las ecuaciones a solucionar eran tomadas al azar de un paquete de papelitos en las que estaban escritas aquellas que se podían solucionar con esta configuración; el objetivo de llevar el juego al aula era la ejercitación de la solución de ecuaciones lineales, usando el dado para determinar la cantidad de casillas a mover las fichas sobre el tablero.

Sin embargo, la primera asesoría con la profesora titular del espacio y revisión que se le hizo a la propuesta de enseñanza que incluía este material no fue satisfactoria, pues se discutió sobre la pertinencia de llevar este material al aula, pues no era evidente cómo aportaría a la enseñanza de las ecuaciones lineales, razón por la cual, en vez de desistir de la idea, se tomó la decisión de desarrollarla, rescatando que a pesar de sus limitantes la propuesta era diferente a la balanza y al tablero de fichas, involucraba el juego y el azar al involucrar un dado, además de esto, la configuración permitía representar y hallar la solución de algunas ecuaciones de la forma $x + a = b$ en el conjunto de los números enteros con la posición de las fichas en el tablero; otra cosa muy importante que se tomó de esta propuesta fue la idea de mover las fichas de los dos sectores de forma simultánea.

Al perfilar la idea, con el objetivo de solucionar ecuaciones que con la ayuda de un par de dados fuese planteada y mostrar de forma directa las propiedades inmersas en la solución de ecuaciones lineales de la forma $x + a = b$ en $\mathbb{Z}$, se rediseñó el tablero denominándolo Ecua-parqués[16] y complementó con un par de dados de diferente color y una tabla de registro que favoreciera en el estudiante el desarrollo de procesos de visualización, con el fin de aproximarse a la forma general para solucionar ecuaciones de este tipo, además de lo anterior, el uso de la tabla de registro permitía al jugador validar con la posición de las fichas en el tablero las operaciones que realizaba.

El tablero (Figura 2-2), fue diseñado manteniendo las características generales de un tablero de parqués tradicional, con seis espacios de diferente color, uno para cada uno de los jugadores, denominados *estaciones*, cada estación con las casillas suficientes para poder dar solución a cualquier ecuación planteada con los dados, por ejemplo, la ecuación $x + 6 = -6$ que en la anterior configuración no era posible abordar.

[16] En el anexo 1, se encuentra el instructivo del material Ecua-parqués elaborado en 2013

Figura 2-2 Versión 1 Ecua-parqués

La forma arqueada de las estaciones y la disposición de estas, fue pensada buscando una presentación funcional, estética y que diera la idea de un juego de mesa sencillo y divertido.

La tabla de registro (Figura 2-3), surgió con la intención de seguir la idea de Duval (1998) quien afirma que un concepto determinado se adquiere cuando se es capaz de transitar entre por lo menos dos representaciones, por lo que se propuso en una hoja de papel una tabla con columnas y filas ofreciendo al jugador la posibilidad de consignar tras cada jugada sus movimientos y posiciones de una forma organizada, usando expresiones algebraicas, y de esta manera lograra en la tabla observar los procedimientos que realizaba para dar solución a la ecuación pretendiendo que con las orientaciones del docente se acercara a la forma general de la solución de las ecuaciones de la forma $x + b = c$ en $\mathbb{Z}$, donde $-12 < x < 12$, $-6 < b < 6$ y $-6 < c < 6$.

Los dados de color verde y rojo, tenían la intención de dar al jugador la opción de avanzar o retroceder en cada jugada, poniendo en juego la toma de decisiones y el azar, pues la rápida solución de las ecuaciones no dependería de las competencias matemáticas del jugador, sino de los números que arrojaran los dados y la decisión que el jugador tomara, posiblemente dando esto la oportunidad de ganar (solucionar primero la ecuación) a los estudiantes con habilidades matemáticas menos desarrolladas.

El color del dado verde fue pensado haciendo referencia al semáforo, que al estar en verde indica que es posible avanzar, y el color del dado rojo, pensando en que este indica retroceder (la acción opuesta a avanzar) teniendo en cuenta que la posición del color en el círculo cromático se encuentra en la gama de colores opuestos al verde.

______+_______=			
Dado Rojo	Dado Verde	Tus jugadas	Lo que obtienes

Figura 2-3. Tabla de registro V1

En el proceso de planeación de la clase de la propuesta de enseñanza, fueron realizadas diferentes pruebas del uso del material, para detectar las ventajas y desventajas de este; la primera prueba de aplicación del material, se realizó en el marco de la Jornada del Educador Matemático de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional en la jornada “Mesas Temáticas: Aritmética y Álgebra con Materiales Didácticos” realizada del 17 de abril del 2013, dirigida por la profesora Lyda Constanza

Mora, docente titular del espacio académico Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra.

En esta jornada, se presentó el material a docentes del programa, estudiantes de diferentes semestres de la Licenciatura en Matemáticas y otros programas, en donde conocieron el material e interactuaron con él.

El objetivo de esta primera prueba era detectar posibles fallas en la configuración y metodología del juego, así como recibir comentarios, ideas y sugerencias por parte de los asistentes para enriquecer y mejorar la propuesta.

La presentación del material contó con una gran audiencia y especial acogida, y los comentarios recibidos fueron muy alentadores lo que confirmó que el material era innovador y llamativo; por otro lado, la experiencia permitió la enseñanza de las ecuaciones lineales a dos estudiantes del programa de la Licenciatura en Español e Inglés (Figura 2-4), quienes al ser invitados por los autores a jugar y conocer el material generaron resistencia sabiendo que se trataba de objetos matemáticos, expresando que para las Matemáticas, ellos "eran malos"; sin embargo, se dieron la oportunidad de conocer el juego y participar; el desarrollo del juego con estos estudiantes, permitió que se acercaran al objeto matemático de una forma amigable, generando en ellos una actitud positiva frente a la actividad, para que finalmente con agrado aseguraran que habían comprendido cómo se resolvían este tipo de ecuaciones, expresando además con un lenguaje natural que identificaron algunas de las propiedades (uniforme de la igualdad con la adición de números enteros, la existencia de elementos inversos aditivos, la propiedad cancelativa de la adición, entre otras) que se encontraban detrás de los procedimientos a los que, según ellos, nunca hallaron sentido cuando los aprendieron en el colegio de una forma mecánica y memorística.

En esta primera prueba el asesor de este trabajo sugirió llevar más allá al Ecua-parqués, intentando que este permitiera representar y solucionar ecuaciones con coeficiente[17] mayor a 1, idea que no se desarrolló en ese momento a falta, tal vez, de consciencia sobre el potencial que tenía el material.

[17] Entendiendo como coeficiente o parámetro al factor multiplicativo, en este caso del valor desconocido.

Figura 2-4. Estudiantes de la licenciatura en Español e Inglés de la UPN

La segunda prueba realizada tuvo la intención de analizar el posible impacto que generaría el material en una comunidad escolar inmersa en un contexto diferente a la institución donde se realizaría la clase (Colegio Nydia Quintero de Turbay), por lo que se pensó en realizar la prueba con estudiantes a quienes en ocasiones las Matemáticas les resultan difíciles y tal vez, desagradables; atendiendo a esto, la segunda prueba se llevó a cabo en la Escuela de Dirección Académica EDIAC, institución de educación formal para jóvenes y adultos, en su sede del municipio El Rosal - Cundinamarca, con 24 estudiantes de grado décimo y once de la jornada de los sábados, con edades entre los 17 y 20 años. Se escogió esta población, teniendo en cuenta que uno de los autores interactuaba con ellos como docente y había logrado de antemano identificar la gran resistencia ante las actividades matemáticas; es importante indicar que estos estudiantes procedían de distintos niveles socioculturales, que predominaban en ellos las ocupaciones asociadas a la agricultura, además de esto, su intención de obtener

rápidamente el título como bachiller por la presión social o familiar que les exigía culminar el bachillerato o en algunos casos para mejorar sus condiciones salariales, así como su permanente resistencia a las actividades que les implicaba un rol activo en el aula.
La actitud de los estudiantes al conocer la intención de la actividad fue negativa, se mostraron apáticos, negándose en su mayoría a participar, por lo que el inicio de la actividad fue lento y se vio interrumpido por las constantes negativas de los estudiantes; sin embargo, al desarrollar la primera ronda con seis estudiantes, el interés por el juego y la participación voluntaria fue aumentando, de esta manera, tras cada ronda de juego se evidenciaban los cambios de actitud y disposición frente a la actividad, tornándose divertida e interesante, obteniendo tras la actividad un muy buen resultado, dado que se logró que dejaran de lado la resistencia hacia la actividad viviendo la experiencia de una forma amigable, alcanzando satisfactoriamente dos de los objetivos de la actividad (resolver ecuaciones de la forma $x + a = b$ en $\mathbb{Z}$ e identificar las propiedades que se utilizan en la resolución de ecuaciones).

Tras realizar las anteriores pruebas y realizar las modificaciones en las tareas que se consideraron pertinentes, el material fue llevado al aula en el marco de las prácticas iniciales correspondientes al espacio académico Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra, en el Colegio Nydia Quintero de Turbay, con el grado 801 de la jornada mañana.

Figura 2-5. Estudiantes del grado 801 del Colegio Nydia Quintero de Turbay jugando con el Ecua-parqués

Treinta y cuatro estudiantes participaron en la actividad, el grupo en general realizó las tareas planeadas jugando con el Ecua-Parqués, las cuales eran jugar con el material siguiendo algunas instrucciones, identificar las propiedades inmersas en la resolución de ecuaciones y construir la generalización de la solución de las ecuaciones de la forma $x + a = b$ en $\mathbb{Z}$ haciendo uso de las propiedades identificadas. La aplicación del material, con su correspondiente planeación, fomentó la interacción entre estudiantes y les posibilitó un ambiente donde fue posible vivir el desarrollo de competencias matemáticas, como comunicar ideas para explicar, justificar y refinar su propio pensamiento y no limitarse a procesos memorísticos.

En la figura (Figura 2-5), se pueden apreciar algunas fotografías de los estudiantes jugando con la primera versión del Ecua-parqués.

En el XIV Encuentro Colombiano de Matemática Educativa organizado por la Asociación Colombiana de Matemática Educativa y desarrollado en la ciudad de Barranquilla en las instalaciones de la Universidad del Atlántico en octubre del 2013, gracias a la iniciativa de la profesora Lyda Mora, fue presentada la experiencia en aula gestionada con el Ecua-parqués en modalidad de ponencia, en la cual se obtuvo gran acogida e interés por parte de los asistentes que en su mayoría eran estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Atlántico y algunos docentes de educación básica y media de la región, quienes indicaron que hubiese sido pertinente y enriquecedor incluir como parte de la ponencia un espacio para que ellos interactuaran directamente con el Ecua-parqués.

En el año 2013, para el segundo periodo académico, la Vicerrectoría de Gestión Universitaria, la División de Recursos Educativos, el Fondo Editorial y el Grupo de Comunicaciones Corporativas de la Universidad Pedagógica Nacional abrió la convocatoria *Haz para materiales educativos*, cuyo objetivo era apoyar y acompañar el diseño, la producción y la difusión de materiales educativos que realiza la comunidad universitaria (profesores, estudiantes e investigadores).

Los maestros en formación y la profesora Lyda Constanza Mora presentaron en dicha convocatoria la propuesta titulada "*Ecua-parqués: una alternativa innovadora para la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones lineales*" con la cual se pretendía proporcionar una herramienta interactiva como recurso hipermedia de fácil acceso a la comunidad estudiantil, basada en el Ecua-parqués que permita cumplir con el mismo objetivo que se plantea en su versión concreta, el cual es solucionar ecuaciones de la forma $x + a = b$ en donde a, b y x son números enteros, $-6 \leq a \leq 6$ y $-12 \leq b \leq 12$, en la que fuese posible identificar algunas de las propiedades inmersas en la resolución de dichas ecuaciones.

Tras ser seleccionada la propuesta, se desarrolló en el 2014-1 la versión hipermedia del Ecua-parqués, la cual cuenta con los mismos elementos del Ecua-parqués en su versión inicial física, como el tablero con sus respectivos sectores (izquierdo y derecho) y casillas, las dos fichas de parqués (representan a a y b), los dados y la tabla de registro. En esta versión cambia la representación de la incógnita, esta vez ya no va ser una ficha verde sino que en la zona neutra se encontrará una viñeta con la letra que el participante elija para representar al valor desconocido.

El aplicativo (Figura 3-6) permite que en un mismo computador jueguen hasta 6 participantes, ofreciendo cuatro niveles de dificultad. Cabe resaltar que a la fecha de elaboración y entrega de este documento, el recurso cuenta con algunos errores en los niveles 3 y 4 los cuales fueron reportados a la División de Recursos Educativos en 2015-I, y se está a la espera de que sean realizadas las correcciones; los niveles 1 y 2 funcionan correctamente.

Figura 3-6. Ecua-parqués Versión hipermedia

El diseño y la programación fueron realizados por el equipo de profesionales de la División de Recursos Educativos, quienes en varias ocasiones se reunieron con los autores para construir una ruta de trabajo y de ejecución de proyecto; con el fin de definir el alcance y características de cada nivel, los autores suministraron diagramas de bloques para cada uno de los niveles en los cuales se representa claramente qué se espera que realice el usuario y el aplicativo en cada nivel.

Para facilitar la programación y optimizar los tiempos de entrega se tomó la decisión de diseñar las los sectores de la estación de forma lineal (Figura 3-7).

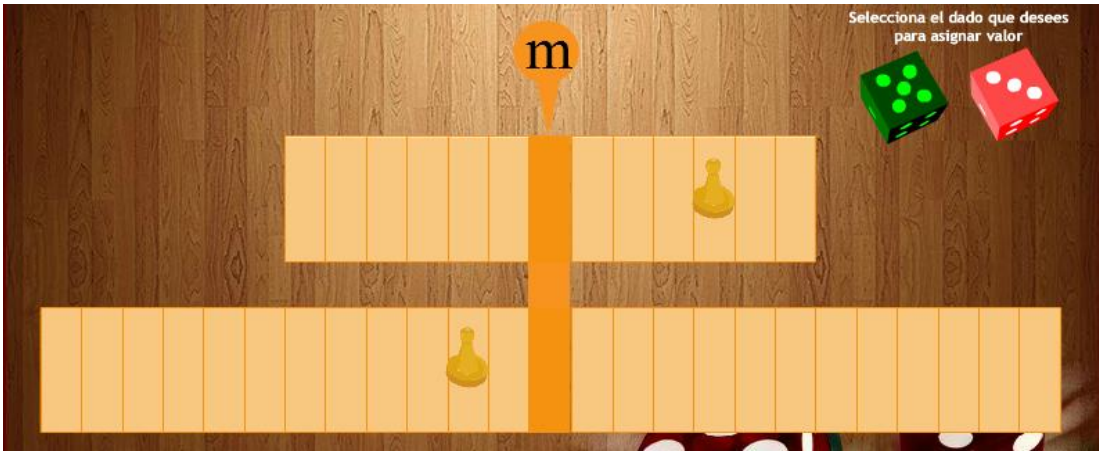


Figura 3-7. Estación Ecua-parqués Hipermedia

Todos los elementos de la tabla de registro, las tareas de la versión inicial, fichas y dados, se encuentran en el aplicativo; por ejemplo, como se observa en la Figura 3-8 es posible que el estudiante elija cualquier letra del abecedario para representar la incógnita.

Figura 3-8. Selección de letra

Y con ayuda de un par de dados (Figura 3-9) insertados en la ventana, establezca la ecuación a solucionar.

Figura 3-9. Dados versión hipermedia

Los espacios “Posicion actual”, “Tu jugada” y “Nueva posición” cumplen la misma funcion que los espacios de la tabla de registro de la version inicial en la que se realizan las operaciones de acuerdo a los movimientos realizados; en esta versión fue integrada una tabla (Figura 3-10) en la que quedan guardadas todas las posiciones a las que se ha llegado tras el desarrollo del juego y búsqueda de la solución, además de eso tiene un botón de validación, que permite comprobar que los movimientos y operaciones sean correctos.

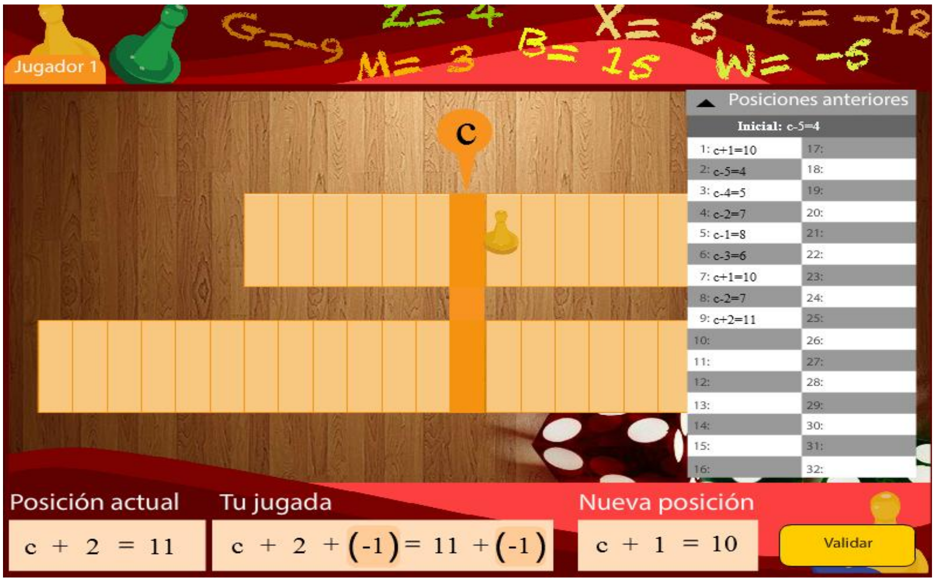


Figura 3-10. Campos del entorno gráfico Ecua-parqués

En el VI Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas que se desarrolló en las instalaciones de la Universidad de Medellín en Mayo del 2014, los maestros en formación realizaron un taller en donde los participantes resolvieron ecuaciones de la forma $x + a = b$ en $\mathbb{Z}$ utilizando el Ecua-parqués. El material causó interés en los asistentes (en su mayoría docentes de básica y media), quienes además de resolver las ecuaciones, identificaron fácilmente las propiedades que el material permitía evidenciar. Uno de los asistentes indicó que sería interesante estudiar, haciendo uso de la probabilidad, cuántos lanzamientos o jugadas son necesarias para llegar a la solución y si dicha sucesión de lanzamientos siempre converge a la solución de la ecuación[18], además de esto, invitaron a los autores a explotar el potencial del Ecua-parqués desarrollándolo en una versión digital, manifestando su interés por participar en dicho desarrollo[19].

A inicios del segundo periodo académico del año 2014, tras ver que el Ecua-parqués resultó ser una idea innovadora con mucho potencial, se tomó la decisión de hacer este trabajo de grado intentando rediseñar la configuración del juego, de tal forma que este permitiera abordar además de la aditiva, la estructura multiplicativa de los números enteros y con este representar y solucionar ecuaciones de la forma $ax + b = c$ en $\mathbb{Z}$, manteniendo la idea de evidenciar las propiedades inmersas a través de las reglas del juego, razón por la que se empezó a desarrollar la idea sugerida un año atrás por el profesor Sánchez.

En agosto del 2014 por invitación del profesor Edgar Guacaneme, los autores socializaron la propuesta del Ecua-parqués a maestros en formación continuada de la Especialización en Educación Matemática de la UPN en el espacio académico Didáctica Específica. Tras mostrar el material en su versión concreta e hipermedia, los autores comunicaron su intención de rediseñar el juego con el fin abordar ecuaciones de la forma $ax + b = c$ en $\mathbb{Z}$ por lo que surgieron discusiones sobre las posibilidades de abordar otro tipo de ecuaciones, por ejemplo, pensando en la aritmética modular, ecuaciones de la forma $x + a \equiv b(mod\ p)$; como actividad para los maestros asistentes

[18] Esta sugerencia fue suministrada por un integrante del Grupo de estudio y Desarrollo de Software de la Universidad del Quindío.
[19] Para ese momento ya se estaba desarrollando la propuesta Ecua-parqués como recurso hipermedia, tras su presentación en la convocatoria HAZ.

se propuso diseñar alternativas basadas en el Ecua-parqués, estas propuestas fueron estudiadas por los autores del presente documento, confirmado que es posible y muy interesante diseñar un juego que permita, a través de un tablero, resolver este tipo de ecuaciones, destacando dos de estas que permitieron reafirmar la idea de dividir los sectores del juego en niveles; además, el hallazgo de algunos inconvenientes en estas propuestas, permitió tenerlos en cuenta y así evitar incurrir en ellos.

A continuación se muestran dos de las propuestas consideradas[20] y se resaltan algunos de los aspectos que aportaron al diseño del Ecua-parqués en su segunda versión.

Propuesta 1.

El maestro en formación propone un nuevo diseño del tablero (Figura 3-11), donde la zona blanca la llama nivel 1 y a la zona sombreada nivel 2.

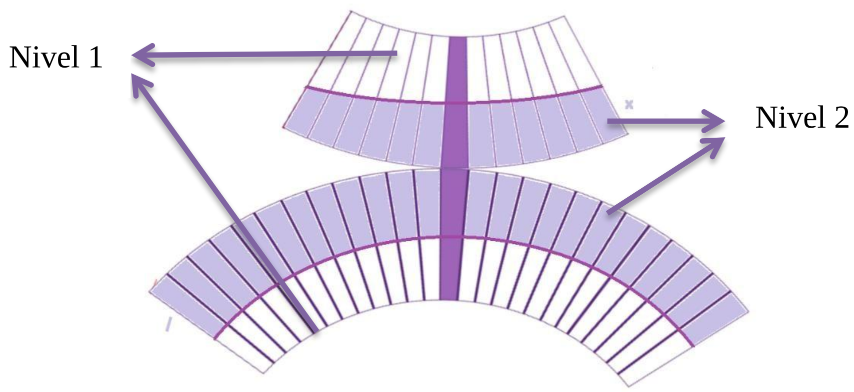


Figura 3-11. Propuesta 1

Se propone hacer uso de 5 fichas, 2 de color verde oscuro que se ubicaran en el nivel 1, 2 rojas en el nivel 2 y una de color verde claro que representa la incógnita. También considera los dados verde y rojo con la misma función que tienen en el Ecua-parqués.

Instrucciones del juego:

1. *Plantear la ecuación con ayuda de los dados.*
2. *Se ubican las fichas de acuerdo a la ecuación: la incógnita siempre está en la zona "neutra" en la parte superior del nivel 2. Una ficha (roja) siempre se ubicará en la zona neutra en la parte inferior del nivel 2 (Figura 3-12). Inicialmente se ubica las fichas de la zona superior según los resultados del paso 1; ficha verde oscura en el*

[20] Las explicaciones e instrucciones fueron tomadas textualmente de las propuestas originales.

nivel uno y la ficha (roja) en el nivel dos. Se ubica el otro valor del dado del paso uno en la zona inferior nivel uno.

3. Se inicia jugando en el NIVEL 1 cuyo objetivo es dejar la ficha (verde oscura) en la zona neutra. Se lanzan dos dados (verde y rojo), y el jugador selecciona el que le quiera, corre las fichas verdes la cantidad de veces que lo indique el valor del dado que seleccionó. Acaba el nivel 1 cuando cumpla el objetivo.

4. En el NIVEL 2 el objetivo es dejar la ficha roja de la zona superior en la zona neutra. Se lanzan dos dados y el jugador selecciona el que le convenga. Corre la ficha de la zona superior la cantidad de veces que lo indique el valor del dado que seleccionó. Corre la ficha de la zona inferior la cantidad de veces que lo indique el valor del dado que seleccionó, pero en sentido contrario.

5. Gana el jugador que logre cumplir el objetivo del nivel 2[21].

A continuación se muestra el ejemplo que propuso el maestro, para resolver una ecuación de la forma $\mathrm{ax} + \mathrm{b} = \mathrm{c}$ con este tablero.
Resolver la ecuación $4x - 5 = 3$ *(Figura 3-12)*

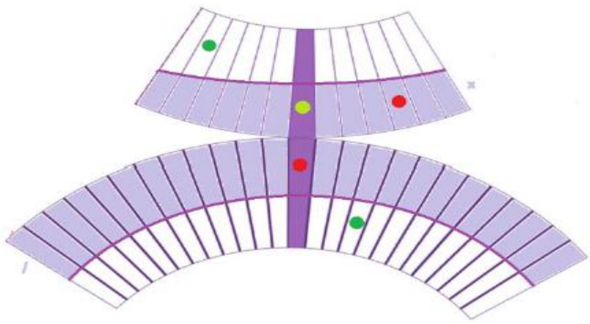


Figura 3-12. Representación de la ecuación $4x - 5 = 3$. Propuesta 1

Después de haber jugado lo suficiente para dejar la ficha verde oscura se encuentra en la zona neutra, así la nueva ecuación a resolver será $4x = 8$ *(Figura 3-13).*

[21]El maestro no lo menciona, pero se intuye por el ejemplo, que el movimiento que tienen las fichas verdes y rojas es el mismo que tienen las fichas amarillas en la primera versión del Ecua-parqués de los autores.

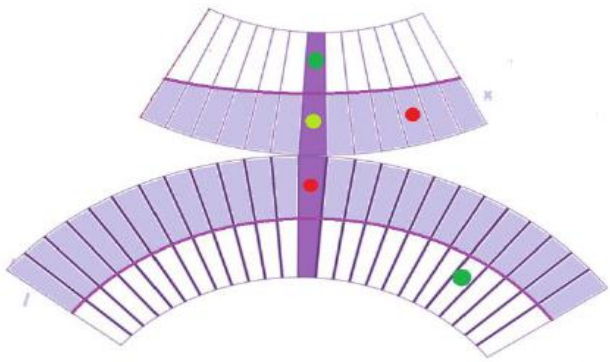


Figura 3-13. Representación de la ecuación $4x = 8$. Propuesta 1

Luego se procede a dejar en la zona neutra la ficha roja tratando de cumplir el objetivo del nivel 2. (Figura 3-14) La ecuación resultante es $x = \frac{8}{4}$.

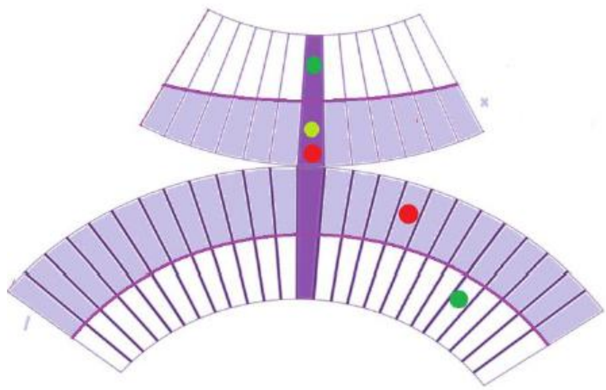


Figura 3-14. Representación de la ecuación $x = \frac{8}{4}$. Propuesta 1

Esta propuesta fue muy valiosa, pues sugiere la idea de generar un espacio en el tablero para la ubicación de aquellas fichas que representan al valor desconocido y otro para las que representan los términos conocidos, así como el uso de reglas para que las fichas realicen movimientos de forma simultánea.

Se identificaron algunos errores asociados a la ubicación y movimientos de las fichas.

Errores asociados a la interpretación de las casillas neutras según la estructura algebraica.

En la propuesta 1, al representar la ecuación $4x - 5 = 3$, y al ubicar la ficha roja en la zona neutral, la lectura de la ecuación de acuerdo a la posición de las fichas (Figura 3-15) es $4x - 5 = \frac{3}{0}$.

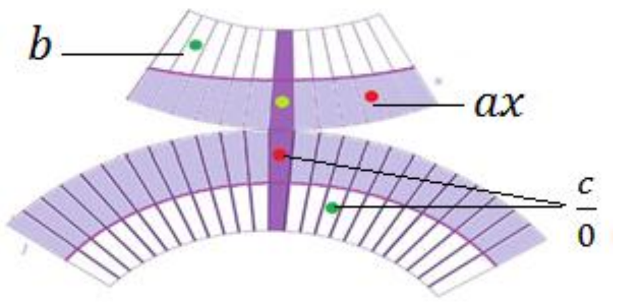


Figura 3-15. Ecuación $4x - 5 = 3$ Propuesta 1

De la misma manera, la solución de la ecuación sería $0x = \frac{8}{4}$.

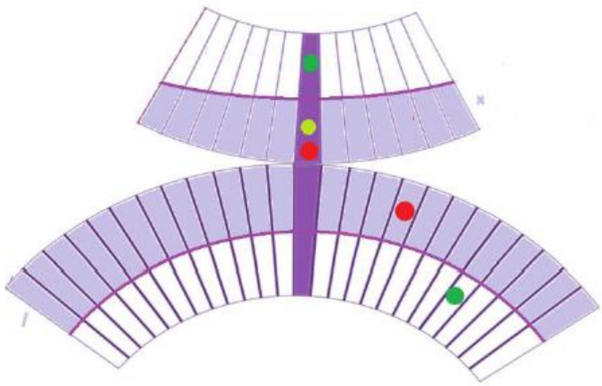


Figura 3-16 Ecuación $x = \frac{8}{4}$ Propuesta 1

Este error permite ser conscientes de la importancia de pensar muy bien en los movimientos y ubicación de las fichas de acuerdo a la estructura algebraica que se vaya a representar; por ejemplo, una de las consideraciones que no se tuvo en cuenta en este caso es que el elemento neutro de los números enteros con la suma es diferente al elemento neutro de los números enteros con la multiplicación.

Errores asociados al movimiento de las fichas y las propiedades de la estructura algebraica.

El maestro sugiere que el movimiento de la ficha roja debe ser análogo al movimiento de la ficha verde, por lo que la representación y lectura de la ecuación de acuerdo a la posición de las fichas (Figura 3-17 a Figura 3-21) tras cada movimiento, mostraría como equivalentes las ecuaciones $4x - 5 = \frac{3}{0}$, $3x - 5 = \frac{3}{\mathbf{1}}$, $2x - 5 = \frac{3}{\mathbf{2}}$, $1x - 5 = \frac{3}{\mathbf{3}}$ y

$x = \frac{8}{4}$ que no lo son, dejando de lado la idea de hallar ecuaciones cada vez más sencillas hasta llegar a una en la que la solución sea evidente.

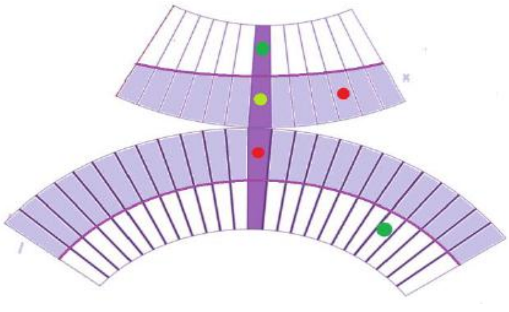


Figura 3-17. Ecuación $4x - 5 = \frac{3}{0}$

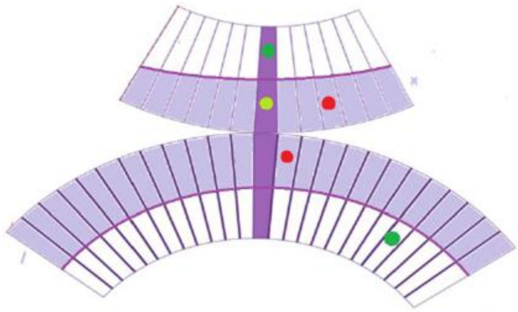


Figura 3-18. Ecuación $3x - 5 = \frac{3}{1}$

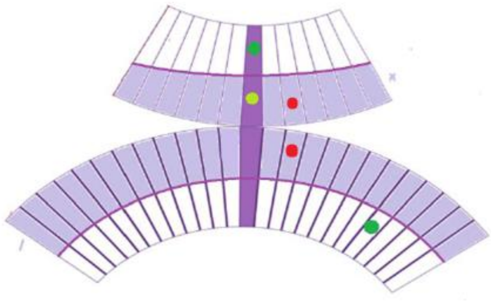


Figura 3-19. Ecuación $2x - 5 = \frac{3}{2}$

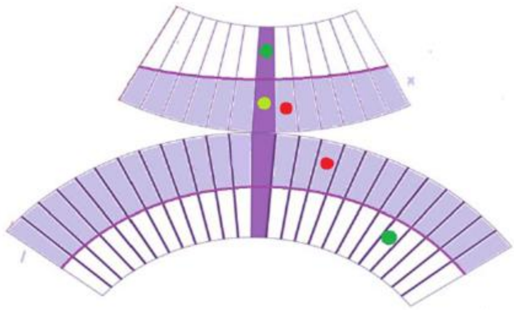


Figura 3-20. Ecuación $1x - 5 = \frac{3}{3}$

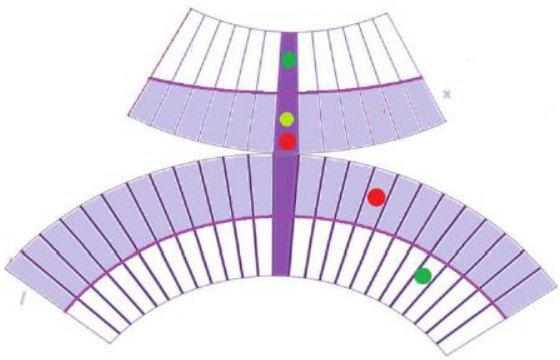


Figura 3-21. Ecuación $x = \frac{8}{4}$

Este error permite notar que es de vital importancia diferenciar el movimiento de las fichas que representan el valor desconocido al de las otras fichas y de esta forma lograr asociar dichos movimientos con las propiedades de la estructura multiplicativa de los números enteros que es uno de los objetivos principales en el diseño del Ecua-parqués.

Propuesta 2

El maestro en formación propone un nuevo diseño del tablero (Figura 3-22), donde se realizan una serie de subdivisiones en cada casilla.

1) *Se Consideran los siguientes elementos adicionales:*

a. *Un dado de fraccionarios*

b. *Fichas extra para las variables o valores desconocidos*

c. *Una modificación en el tablero, donde cada unidad quede dividida en 60 partes.*

d. *El tablero debe ser plastificado para poder escribir sobre él.*

e. *Marcadores borrables*

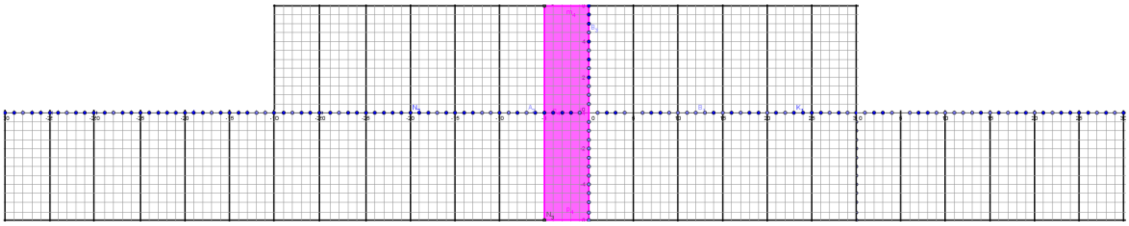


Figura 3-22. Propuesta 2

2) *Nueva regla: Se trabajara ahora con ecuaciones de la forma* $ax + b = c$*, de tal manera que* $0 \leq a \leq 6$*. Una vez hallas llevado las fichas al centro, de manera usual, se obtiene una ecuación de la forma* $ax = c - b$*. Se extrae la ficha se llevó al centro y ahora se juega con el dado fraccionario. Se debe realizar en cada turno un lanzamiento, de tal manera que se obtenga un fraccionario de la forma* $\frac{1}{a}$*, solo esto permitirá eliminar una de las incógnitas.*

Ejemplo: $2x - 6 = 5$

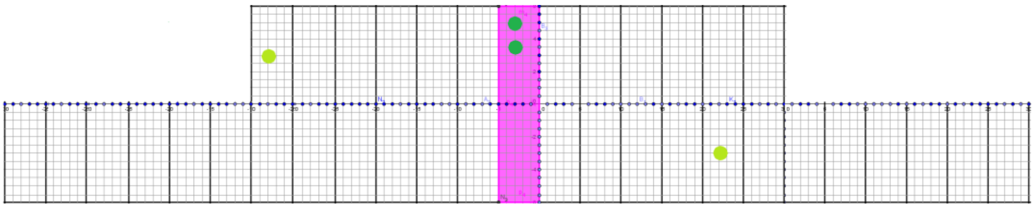


Figura 3-23. Representación de la ecuación $2x - 6 = 5$. Propuesta 2

Aplicando El juego usual la ecuación a resolver será $2x = 11$

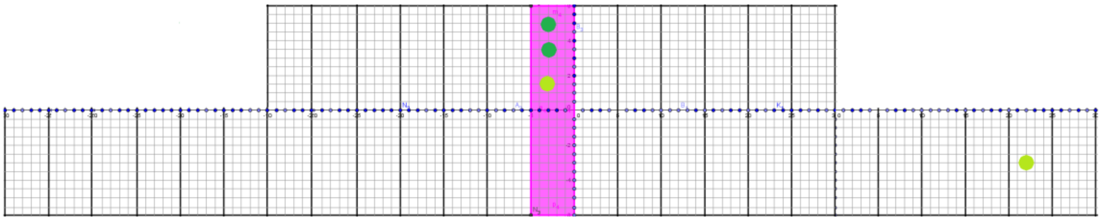


Figura 3-24. Representación de la ecuación $2x = 11$. Propuesta 2

En este caso, se extrae la ficha que llego al centro (verde claro).

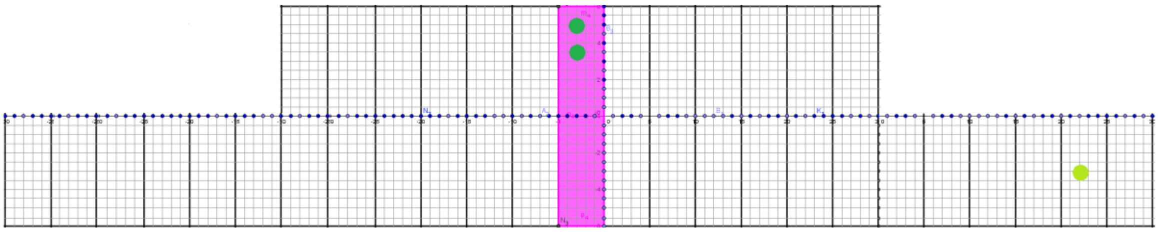


Figura 3-25. Eliminación ficha verde claro. Propuesta 2

Con esto, se utiliza el dado fraccionario, por turnos, hasta que en este caso de que se obtenga ½, es decir si lanza y no se obtiene el fraccionario que se necesita se pierde turno.

Para este caso, se necesita ½; supongamos que se obtiene, esto automáticamente hará que se quite una de las fichas verdes que representan la incógnita. Y el movimiento que debes realizar con la ficha del tablero de solución es: dividir el número en que estas (para este caso 11), en la cantidad de partes que indique el denominador del fraccionario y recorre una parte de este, acercándose hacia el seguro del tablero (en este caso se mueve hacia la izquierda).

Para facilitar el movimiento, se puedes acudir con ayuda de los cuadritos pequeños del Ecua-parqués; y realizar una marca con el marcador en la nueva posición que encuentras.

Para este caso: la cantidad de cuadritos pequeños que hay hasta la posición 11 *que es donde está la ficha verde, es* $11 \cdot 60 = 660$. *Y se debe realizar la mitad de ese recorrido, entonces se recorre* $\frac{660}{2} = 330$ *cuadritos; lo cual puede correrse contando de* 60 *en* 60 *hasta llegar a* 330 *cuadritos, si se devuelve un espacio completo, se han recorrido* 60, *si nos regresamos otro espacio completo, hemos recorrido* $60 + 60 = 120$; *si se regresa otro espacio completo, se habrá recorrido* $60 + 60 + 60 = 180$, *y así sucesivamente hasta* 360. *La respuesta para este ejemplo debe estar entre el devolverse* 5 *y* 6 *espacios completos, así que si se recorre cinco espacios, acercándose* *al seguro, se han recorrido* 300 *cuadritos, pero como son* 330, *faltan* 30 *cuadritos lo cuales se tomaran continuando el conteo en la dirección que inicie (Figura 3-26); lo cual implica que la marca queda ubicada (punto rojo) es:*

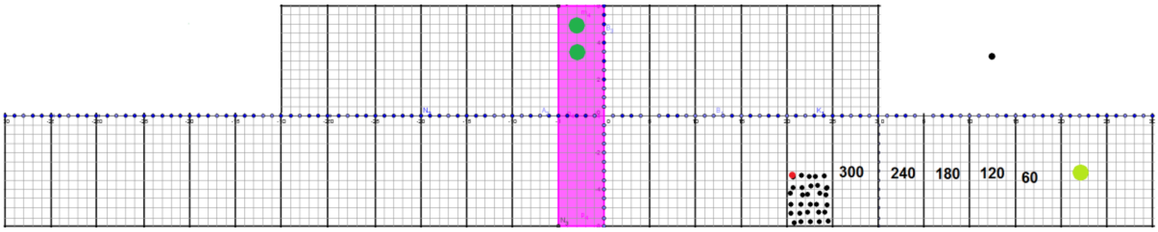


Figura 3-26. Conteo de 330 cuadritos. Propuesta 2.

De esta manera se puede calcular cual es la solución a la ecuación:

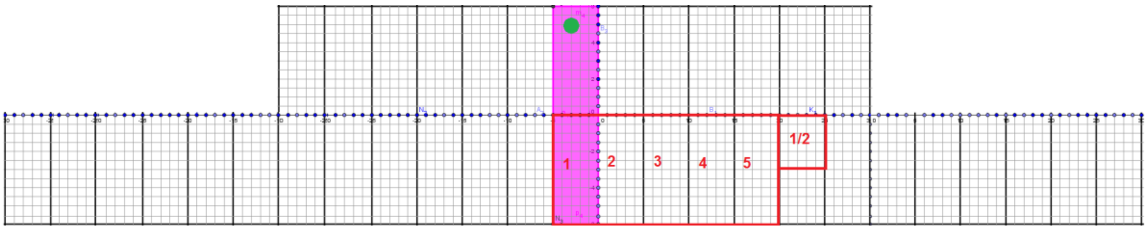


Figura 3-27. Representación de la ecuación $x = 5\frac{1}{2}$. Propuesta 2

La cual es:

$$x = 5\frac{1}{2}$$

De esta iniciativa se destaca nuevamente la idea de subdividir las casillas, en ese caso para representar términos de la forma $\frac{a}{b}$; sin embargo, al igual que la propuesta anterior, busca únicamente hallar la solución de ecuaciones sin tener en cuenta el procedimiento para llegar a esta.

Además de esto la configuración del tablero puede hacer del juego algo confuso y abrumador para los estudiantes, teniendo en cuenta las múltiples divisiones del tablero; por otro lado, los cálculos adicionales que el estudiante debe realizar para llegar al número de cuadritos que necesita y su posterior conteo, los lleva a realizar procedimientos que no están directamente ligados con la solución usual de ecuaciones lineales.

Este ejercicio permitió ser conscientes del reto que constituye diseñar un juego que logre materializar en su configuración física, apoyado en un conjunto de instrucciones y reglas, la estructura de los números enteros con la adición y la multiplicación de los números enteros, y que además de esto sirva como apoyo para la enseñanza de ecuaciones.

A partir de este momento se empezó a rediseñar el Ecua-parqués manteniendo la idea usar un tablero con dos sectores, fichas, dados y una tabla de registro, pero en este caso que permitiera abordar ecuaciones de la forma $ax + b = c$ en $\mathbb{Z}$, creando un tablero con pisos para representar al coeficiente de la incógnita y toboganes para bajar de un piso a otro, entre ecuaciones equivalentes, cada piso subdividido en casillas que representarían los términos conocidos.

La creación de la configuración final tomo alrededor de 6 meses, pues la idea partió de generar un tablero en el que fuera posible representar y solucionar ecuaciones de la forma $ax + b = c$, en donde $-6 < a < 6$, $-36 < b < 36$ y $-36 < c < 36$, identificando de alguna manera las ecuaciones con solución en los números enteros; además de esto, trazando toboganes que permitieran pasar de un nivel a otro conectando ecuaciones equivalentes.

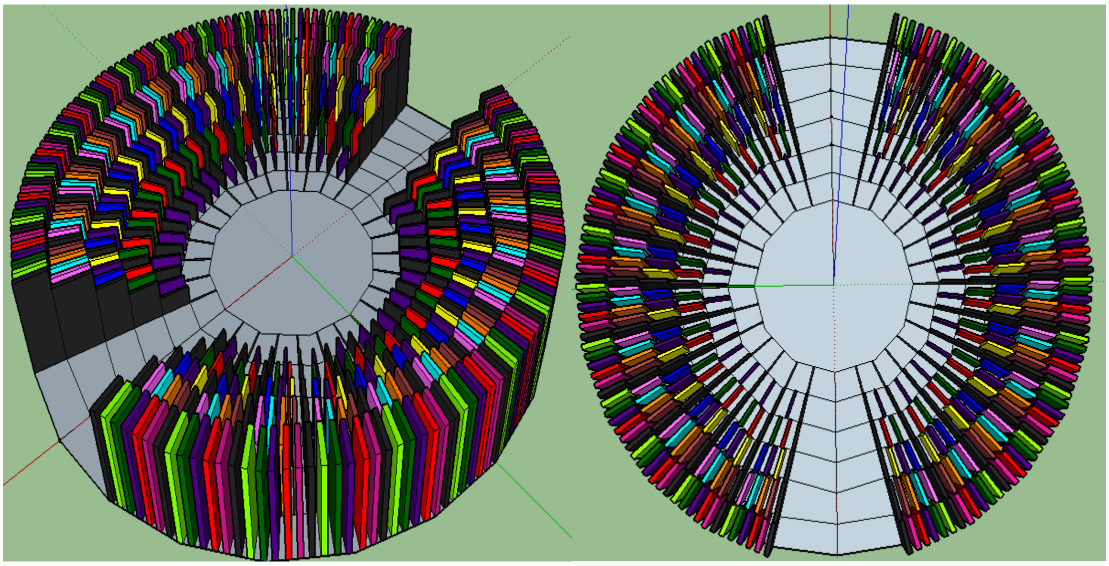


Figura 3-28. Primer boceto V3

Esta idea género un formato en 3D de seis pisos (cada uno de ellos representa al coeficiente del término desconocido) y gran cantidad de casillas separadas entre sí (Figura 3-28) ya que se trataba de una representación de los números enteros, que análogo a la versión anterior representaría los términos conocidos, en la cual no fue posible ensamblar los toboganes pues desde ese momento se notó que dicha configuración requería un tamaño considerable, además de esto, se veía confusa y con muchos elementos que complicarían su diseño, reproducción y posterior uso en un aula de clase; sin embargo, el ejercicio fue provechoso pues ante la imposibilidad de usar toboganes, se hizo uso de colores que relacionarían las ecuaciones equivalentes entre pisos, identificando además a aquellas ecuaciones que tienen solución en los números enteros.

De esta manera, la ecuación que representaba la ubicación de las fichas (sobre el mismo nivel) en casillas que coincidan en color tendría solución en los números enteros.

Luego de esta idea se pensó en un formato a modo de "borrador" que satisfizo las condiciones de los colores y la cantidad de casillas por piso (Figura 3-29), en el que fuera posible hacer una primera exploración para identificar y definir la forma del juego, las posibles reglas y las limitaciones y problemas que presentaría la idea.

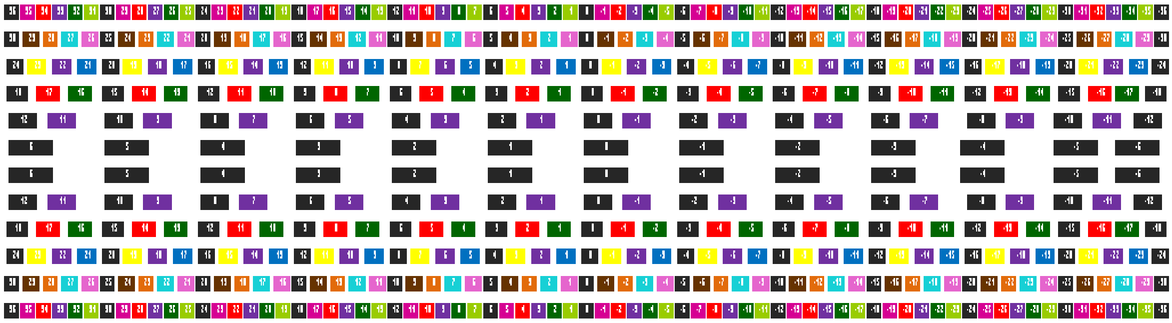


Figura 3-29. Segundo boceto V3

Sobre este formato se establecieron las nuevas reglas del juego, manteniendo las de la versión anterior, complementándolas con otras que se relacionan directamente con las propiedades de la estructura aditiva y multiplicativa de los números enteros, por ejemplo las relacionadas con los saltos[22] entre niveles que pueden realizar las fichas.

Este formato fue muy útil; sin embargo, mantenía un gran tamaño y no resultaba estéticamente llamativo, por lo que se tomó la decisión de reducir el conjunto de ecuaciones a abordar, dejando únicamente aquellas de coeficiente positivo entre 1 y 6, disminuyendo también el conjunto de número para los términos b y c estando $-18 < b < 18$ y $-18 < c < 18$, reduciendo considerablemente el tamaño del formato (Figura 3-30) y favoreciendo de esta manera, además de la estética, la posibilidad de manipulación, costos de producción, y su uso en el aula.

[22] Estas reglas están descritas en el instructivo del juego, anexo a este documento.

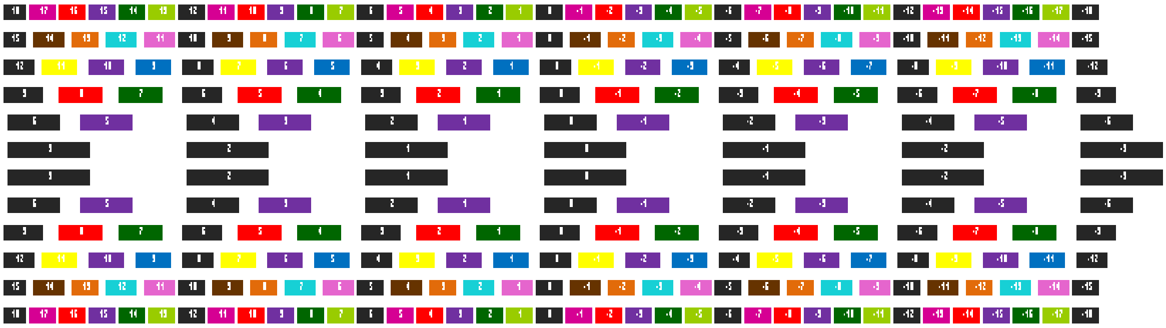


Figura 3-30. Segundo boceto V3

Con el fin de proponer un formato final que resultara estéticamente agradable y armonioso, se planteó una forma ovalada (Figura 3-31) en la que se incorporaron todos los elementos ya pensados en boceto de la Figura 3-30.

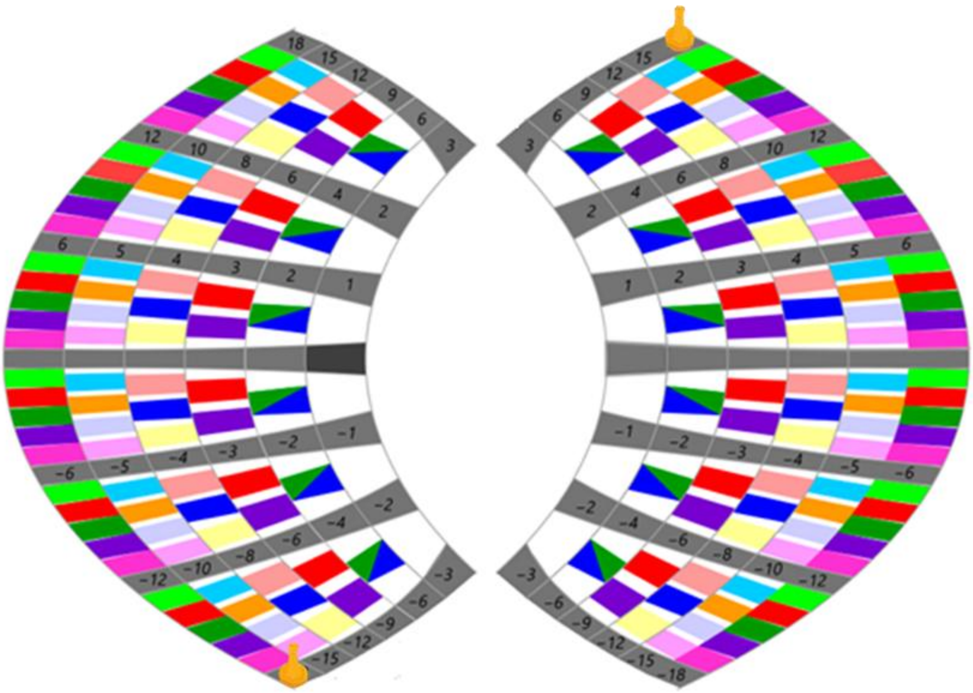


Figura 3-31. Tercer boceto

En esta configuración se eliminó la numeración de las casillas internas de colores dejando únicamente numeradas las casillas que comprenden los deslizadores (casillas grises), con el fin de facilitar el conteo a la hora de buscar el número de la casilla en la que queda ubicada cada ficha tras cada desplazamiento.

Sin embargo, tras las pruebas, se observó que era necesario ampliar la cantidad de casillas del nivel 1 en el sector derecho (Zona marcada en la Figura 3-32), pues en esta propuesta, dicho nivel contaba con 6 casillas[23] (-3 a 3) lo cual no permitia la solución de algunas ecuaciones, por ejemplo la ecuación $6x + 18 = -18$ representada por las fichas amarillas[24] en la Figura 3-31, cuya ecuación equivalente en el nivel 1 es $x + 3 = -3$ no era posible solucionar con el tablero, pues la cantidad de casillas no eran suficientes para permitir desplazar la ficha a la posición que representa a la ecuación $x = -6$.

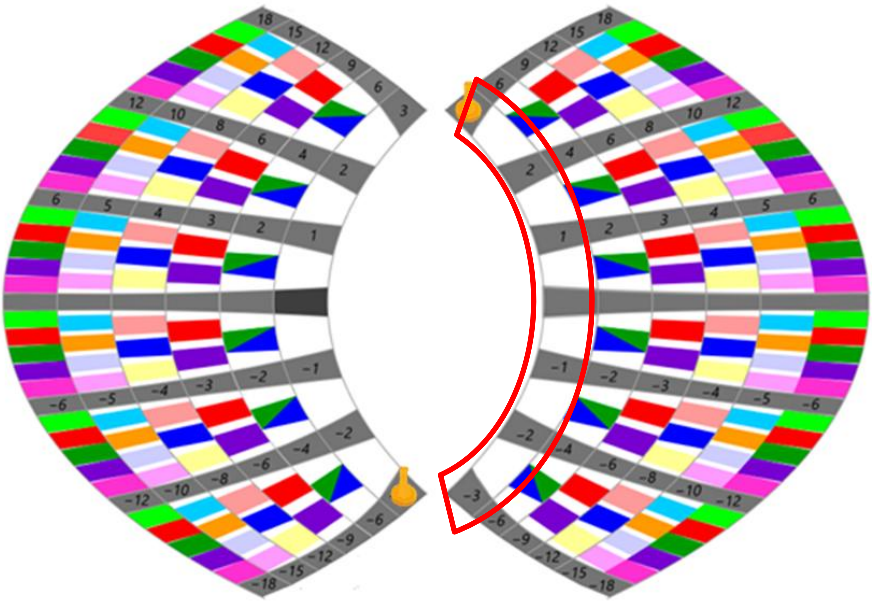


Figura 3-32. Tercer boceto, ecuación $x + 3 = -3$, nivel 1 sector derecho

Por lo que se modificó el nivel 1 del tercer boceto, quedando este nivel muy parecido a la primera versión del juego, en donde la cantidad de casillas del sector que representa el término derecho de la igualdad es el doble a la cantidad de casillas del sector que representa al término izquierdo de la ecuación, llegando a la versión final de la propuesta (Figura 3-33), la cual satisface la estructura de anillo de los números enteros, pues es posible asociar los movimientos con la mayoría de las propiedades que dicha estructura satisface.

[23] Para una mejor comprensión observe la Figura 3-38 y su respectiva explicación en la página41.
[24] Para una mejor comprensión sobre la ubicación de las fichas remítase a la descripción del juego en la página 38.

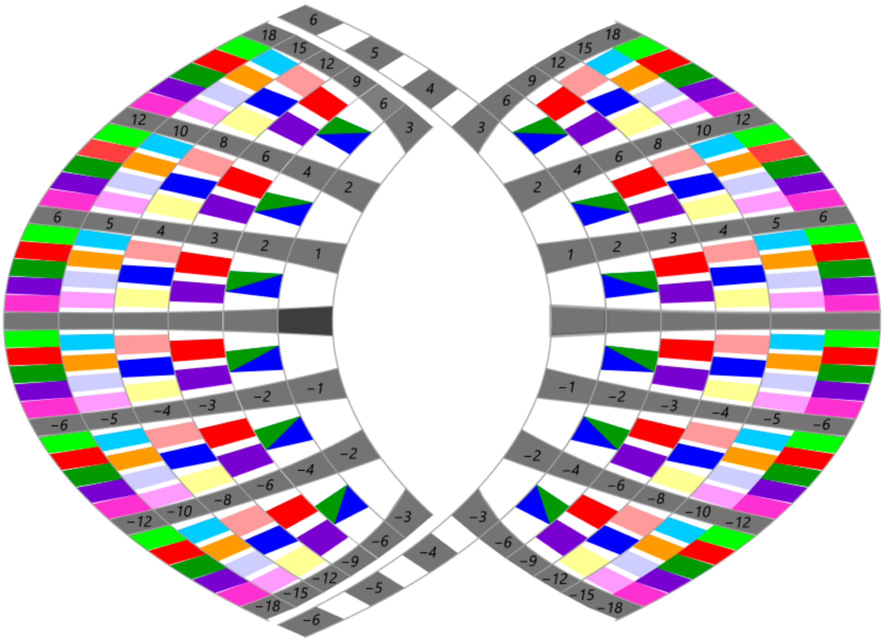


Figura 3-33. Configuración final Ecua-parqués Versión 2

En cuanto a la tabla de registro para esta versión, se consideró necesario incluir algunas casillas, con el fin de facilitar la notación de la ubicación de las fichas en el tablero, buscando además, mejorar la visualización de las operaciones efectuadas.

Al lado izquierdo de la tabla respecto a la versión inicial (Ver Figura 2-3) en la página 25) se insertaron las casillas *Dado, movimiento, nivel, casilla del sector izquierdo y casilla del sector derecho,* en las que es posible registrar de forma individual el número y el dado con el que decidió realizar la jugada, el movimiento que realizó (subir, bajar, saltar, deslizar), el nivel y casillas en las que están ubicadas las fichas; además, al lado derecho de la tabla los espacios para registrar el "movimiento algebraico" es decir, realizar la operación correspondiente a cada lado de la expresión de acuerdo al movimiento realizado y la casilla "expresión" en la que se registra la ecuación que representa la posición de las fichas tras cada jugada, en la que de forma análoga al encabezado de la tabla, se presentan los espacios $nivel,\ \boxdot\ ,\ Casilla\ Sector\ Izquierdo,$ y $Casilla\ Sector\ \ Derecho$, se pensó en esta disposición de las casillas, esperando que los jugadores logren visualizar e identificar con más facilidad los términos y las operaciones efectuadas, llevando la posición de las fichas en el tablero a la representación algebraica en la tabla.

En cada una de las filas, como el las tablas de las versiones anteriores, cada jugador registrará una por una sus jugadas.

Posición inical							
Nivel	Casilla sector izquierdo	Casilla sector derecho	Nivel	$\boxed{}$	+ C.S. Izquierdo	=	C. S. Derecho

Dado	Nueva Posición										
	Movimiento	Nivel	Casilla Sector Izquierdo	Casilla Sector Derecho	Casilla Ecuación	Expresión					
						Nivel	$\boxed{}$	+	C.S. Izquierdo	=	C.S. Derecho

Figura 3-34. Tabla de registro V3

3.2. Descripción segunda versión del material

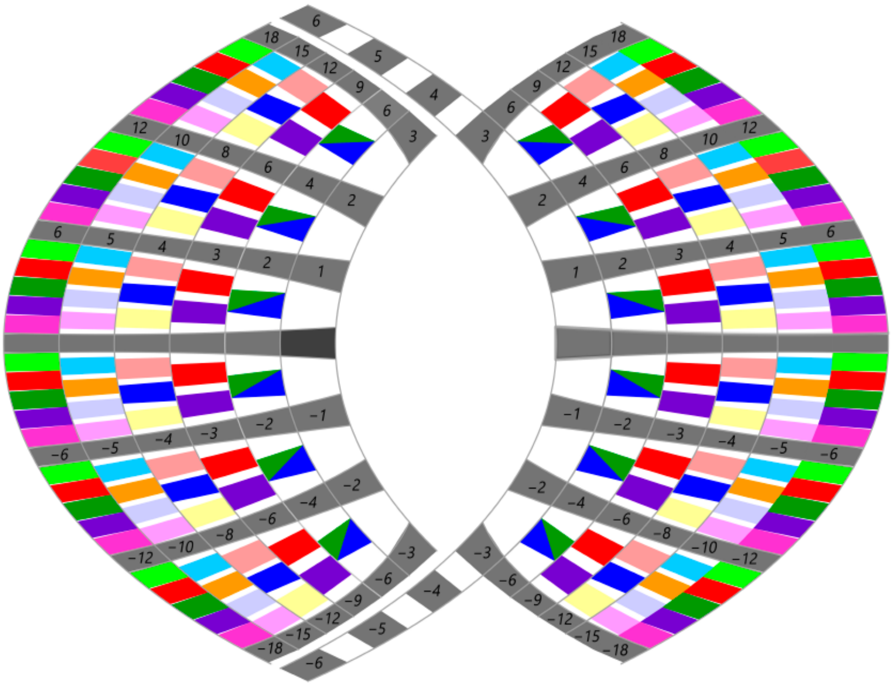


Figura 3-0-35. Ecua-parqués V2

El Ecua-parqués en su segunda versión cuenta con un tablero, tabla de registro, dos dados, uno de color verde y otro de color rojo, y un par de fichas por jugador; el tamaño sugerido por los autores permite dos jugadores en un mismo tablero.

Con ayuda de dos fichas de parqués del mismo color y su posición en el tablero, es posible representar algunas ecuaciones de la forma $ax + b = c$, en donde a pertenece a los números naturales y, b y c pertenecen a los números enteros, adicional a esto, se cuenta con una tabla de registro, en la que el estudiante consigna las jugadas realizadas usando expresiones algebraicas.

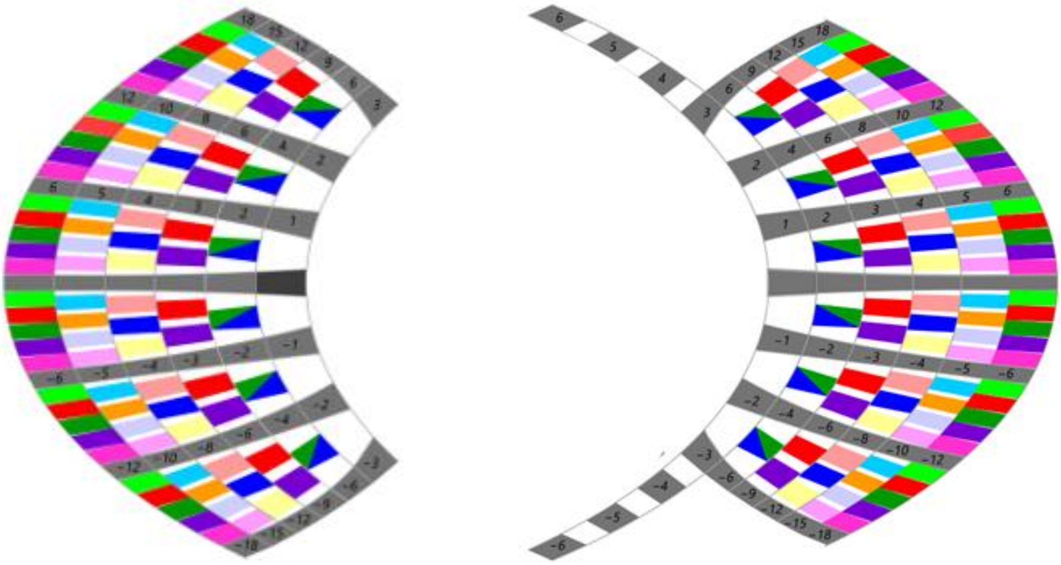
Los movimientos de las fichas y las reglas, están pensadas con el fin de relacionarlas con algunos de los procedimientos efectuados en la resolución de ecuaciones lineales.

3.2.1. Tablero

El tablero está conformado por dos sectores, el sector izquierdo (lado izquierdo del tablero) y el sector derecho (lado derecho del tablero, ver Figura 3-36**), cada uno de ellos con 6 niveles (Ver**

Figura 3-37).

La posición de las fichas en el tablero, representará a las expresiones que se encuentran a ambos lados de la igualdad, es decir, la ubicada en el sector izquierdo (Ver Figura 3-36) representará a la expresión $ax + b$ y la ficha que se encuentre ubicada en el sector derecho al término c.



Sector izquierdo Sector derecho

Figura 3-36. Sectores Ecua-parqués V3

Como se puede notar en la

Figura 3-37, cada nivel representa al coeficiente de la variable de la ecuación a solucionar, es decir, en la ecuación $ax + b = c$, los niveles representan a a, en donde $1 \leq a \leq 6$, de esta manera, cuando $a = 6$, las fichas se encontrarán ubicadas en el nivel 6; cuando $a = 5$, las fichas se encontrarán ubicadas en el nivel 5 y así sucesivamente hasta el nivel 1, en el que las fichas estarán ubicadas cuando $a = 1$.

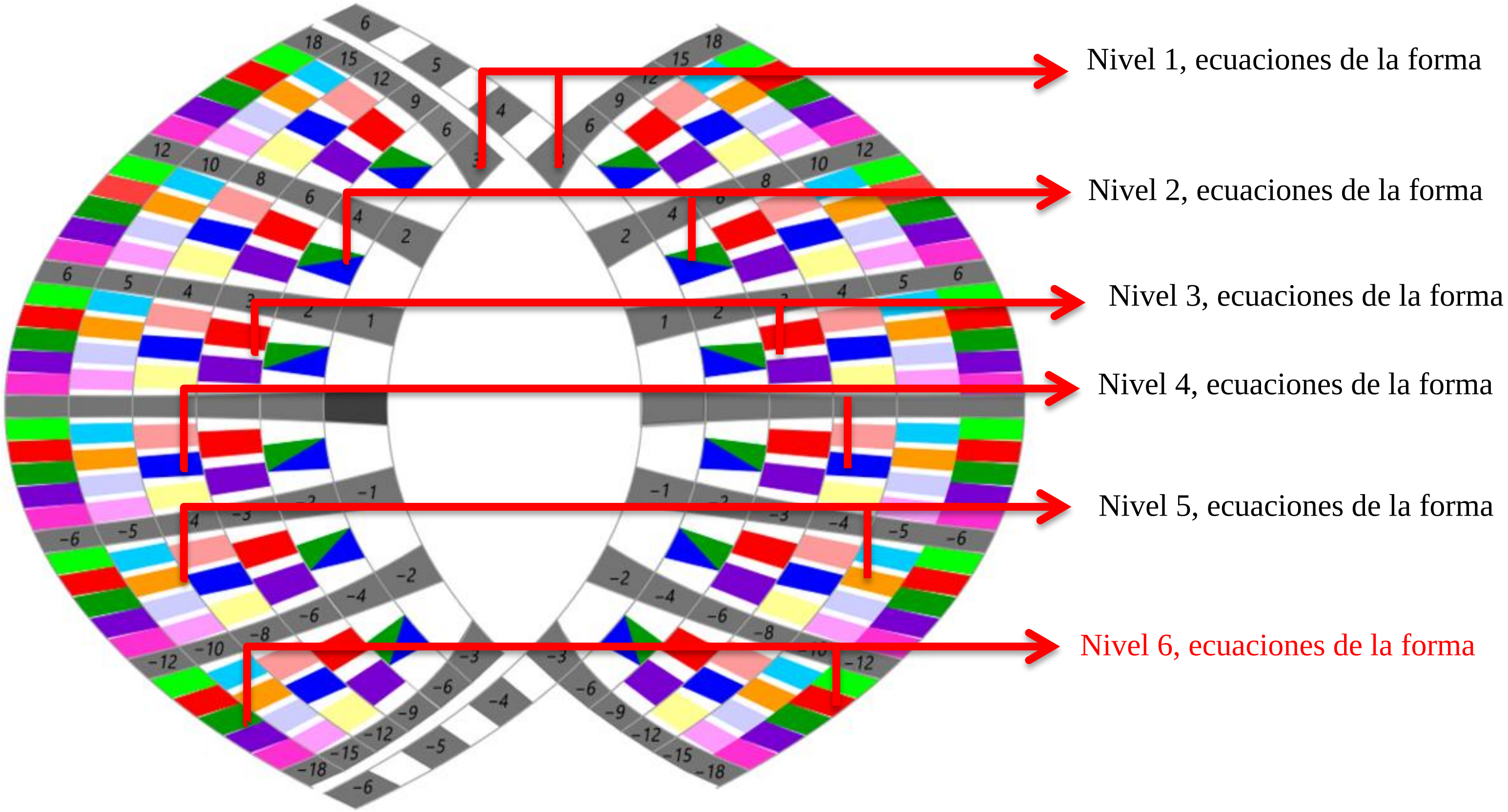


Figura 3-37. Niveles Ecua-parqués V2

Nivel 1 ($a = 1$)

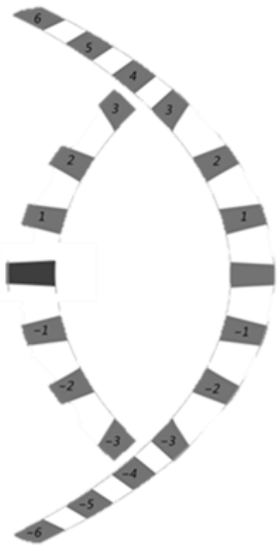


Figura 3-38. Nivel 1 V2

El nivel 1 del sector izquierdo cuenta con 7 casillas de color gris, que según la posición de la ficha en este nivel, representan a b cuando
$-3 \leq b \leq 3$, las casillas que representan a b cuando $b = 0$ en cada sector se denominan *casilla neutra.*
Observe que el nivel 1 del sector derecho, tiene 13 casillas, de forma análoga, las casillas representan al término c cuando
$-6 \leq c \leq 6$.
Ejemplo:
Observe en la Figura 3-39 que ambas fichas se encuentran en el Nivel 1, una de ellas en el sector izquierdo, en la casilla que representa a $b = -2$ y la otra en el sector derecho en la casilla que representa a $c = 3$, de esta manera, la posición de las fichas indica que la ecuación de la forma $ax + b = c$ a solucionar es $x - 2 = 3$, pues $a = 1$, $b = -2$ y $c = 3$.

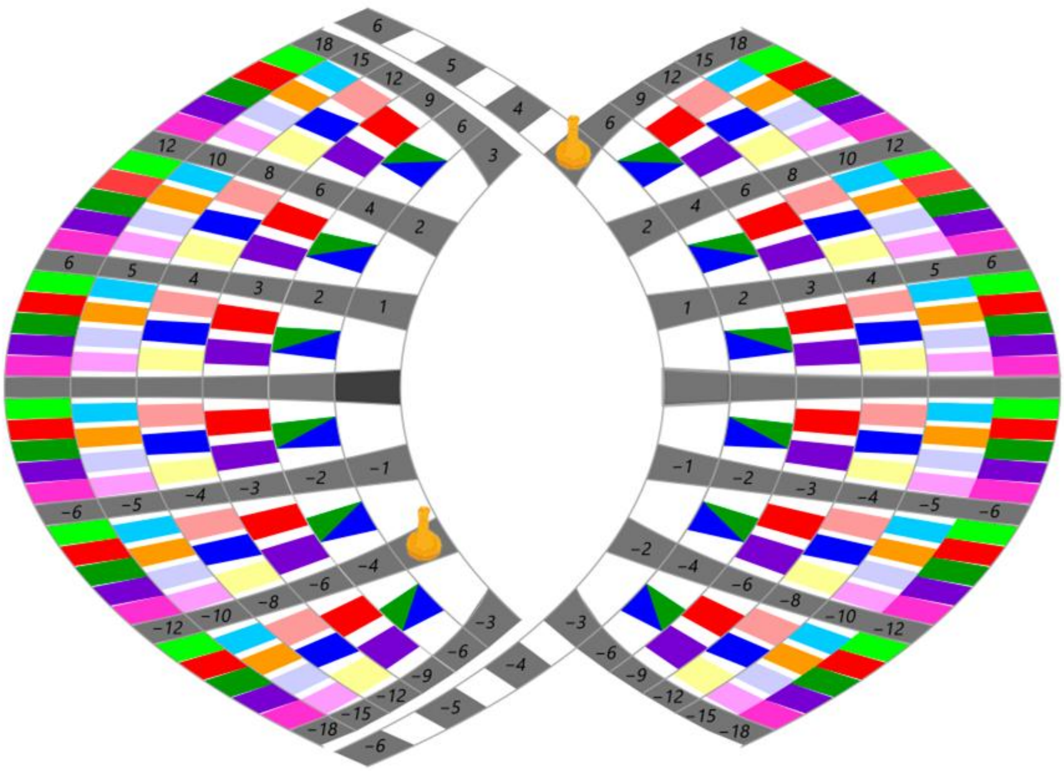


Figura 3-39. Ecuación $x - 2 = 3$

Nivel 2 ($a = 2$)

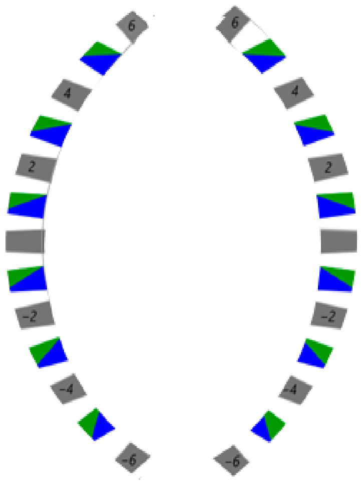


Figura 3-40. Nivel 2 V2

El nivel 2 cuenta con 13 casillas (de color gris y de color verde/azul), en el sector izquierdo la posición de la ficha representa a b, cuando $-6 \leq b \leq 6$ y en el sector derecho representa a c, cuando $-6 \leq c \leq 6$.

Ejemplo:

Observe en la Figura 3-41 que ambas fichas se encuentran en el Nivel 2, una de ellas en el sector izquierdo, en la casilla que representa a $b = 3$ y la otra en el sector derecho en la casilla que representa a $c = -5$, de esta manera, la posición de las fichas indica que la ecuación de la forma $ax + b = c$ a solucionar es $2x + 3 = -5$, pues a $= 2$, $b = 3$ y $c = -5$.

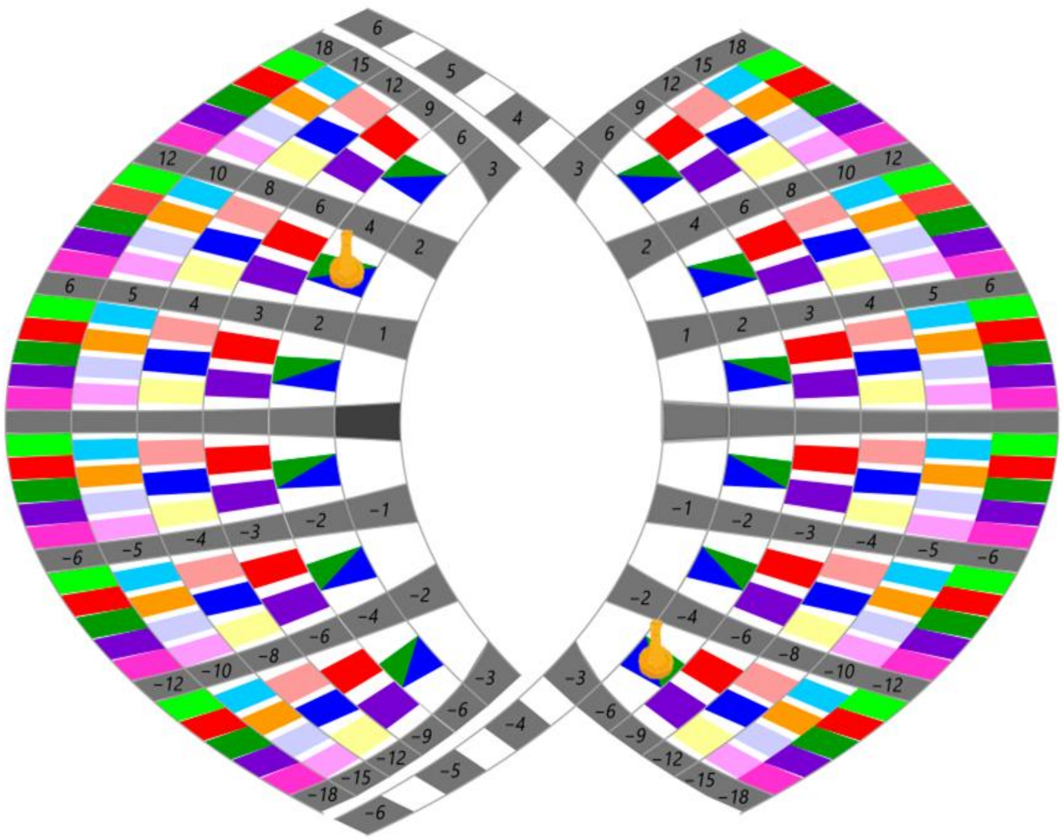
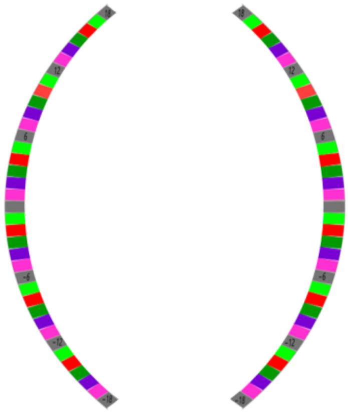


Figura 3-41. Ecuación $2x + 3 = -5$

Nivel 6 ($a = 6$)



El nivel 6 cuenta con 37 casillas en cada sector, la posición de la ficha en estas casillas representa al término b (en el sector izquierdo), cuando $-18 \leq b \leq 18$ y a c (en el sector derecho), cuando $-18 \leq c \leq 18$.

Observe que el único nivel que tiene diferente cantidad de casillas en cada sector es el nivel 1, los demás niveles, tienen la misma cantidad en cada sector.

Figura 3-42. Nivel 6

Ejemplo:

En la Figura 3-43 ambas fichas se encuentran en el Nivel 6, una de ellas en el sector izquierdo, en la casilla que representa a $b = -17$ y la otra en el sector derecho en la casilla que representa a $c = 7$, de esta manera, la posición de las fichas indica que la ecuación de la forma $ax + b = c$ a solucionar es $6x - 17 = 7$, pues $a = 6$, $b = -17$ y $c = 7$.

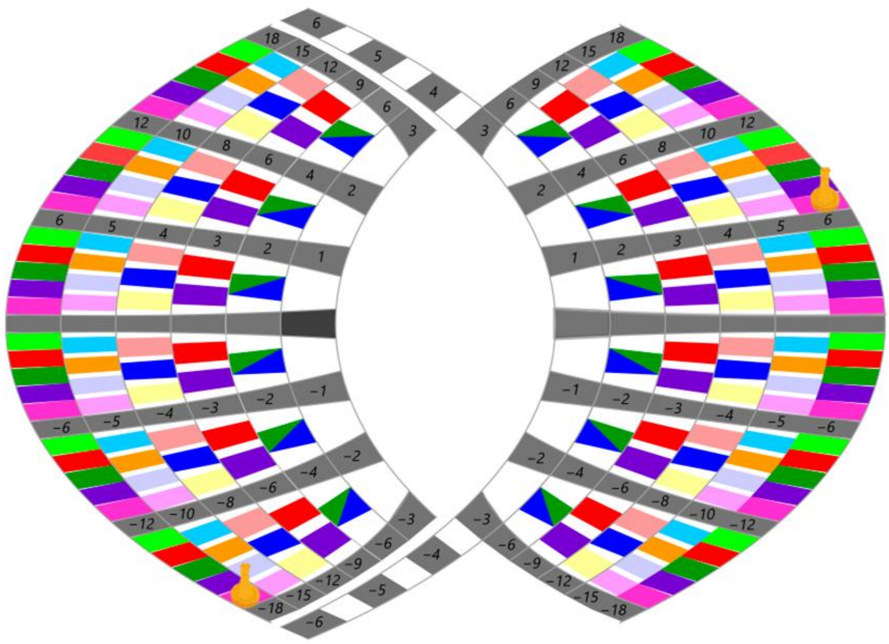


Figura 3-43. Ecuación $6x - 17 = 7$

Además de niveles, cada sector tiene 6 secciones transversales limitadas por las casillas denominadas “deslizadores” (los deslizadores son aquellas columnas comprendidas por las casillas de color gris), en cada una de estas secciones, hay algunas casillas que coinciden en color con otras de niveles inferiores, estas casillas son denominadas “trampolines”.

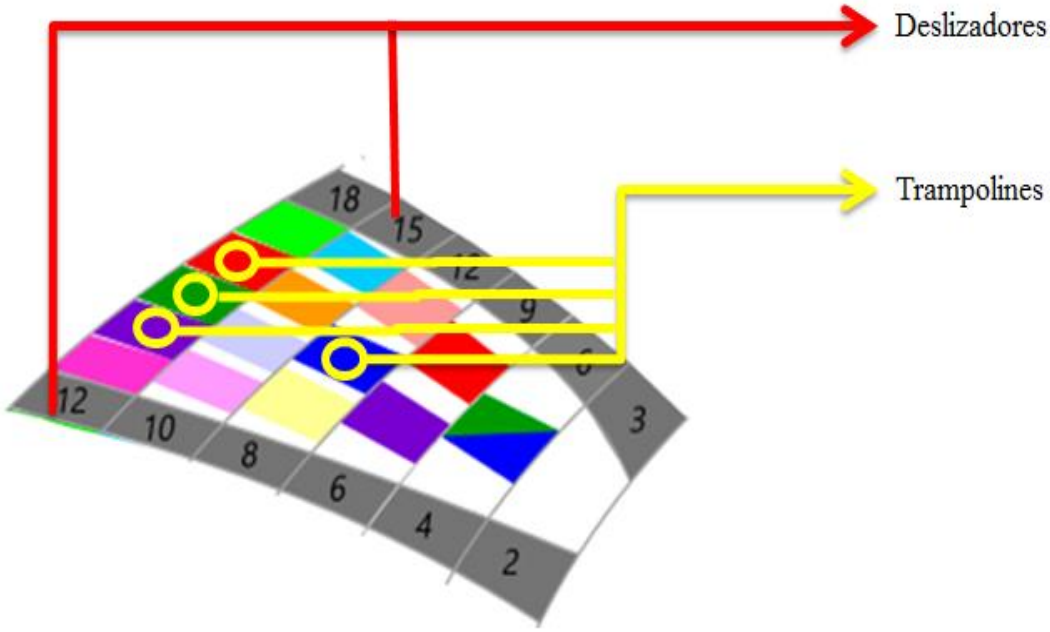


Figura 3-44. Deslizadores y trampolines

Coincidencia de colores

La coincidencia de color en la ubicación de las fichas permite que, todas aquellas ecuaciones que sean representadas en el tablero tengan solución en los números enteros, de esta manera, siempre que la ecuación se plantee, cuidando que las fichas, además de encontrarse en el mismo nivel, se encuentren en casillas del mismo color, la ecuación tendrá solución en los números enteros y será posible solucionarla haciendo uso del material.

Además de esto, es posible observar en las secciones transversales que las casillas que coinciden en color, se relacionan entre sí, por ejemplo, es posible observar que la casilla 15 del nivel 6 (denominada “trampolín” pues coincide en color con otra de niveles inferiores), está relacionada con la casilla 5 del nivel 2, pues $15 = 5 \cdot 3$, o que la casilla -6 del nivel 4, está relacionada con la casilla -3 del nivel 2, pues $-6 = -3 \cdot 2$ es decir, la ecuación $6x + 15 = 3c$ es equivalente a la ecuación $2x + 5 = c$, así como lo son las ecuaciones $4x - 6 = 2c$ y $2x - 3 = c$; esta relación permite al jugador saltar desde un trampolín hasta la casilla del mismo color que se encuentre en los niveles inferiores a este, es decir, estas casillas permiten bajar de nivel las fichas pasando de la representación de una ecuación a otra que sea equivalente, respetando la propiedad cancelativa de la multiplicación del dominio de integridad de los números enteros.

Por su parte, los deslizadores permiten llevar las fichas al nivel 1 de forma directa, por ejemplo (ver Figura 3-45 y Figura 3-46), si las fichas están ubicadas en el nivel 5, la del sector izquierdo en la casilla 10 (deslizador) y la del sector derecho en la casilla -5 (deslizador) es decir, la ubicación de las fichas representa a la ecuación $5x + 10 = -5$, es posible, deslizar las fichas hasta el nivel 1 y su nueva ubicación representará a la ecuación equivalente $x + 2 = -1$.

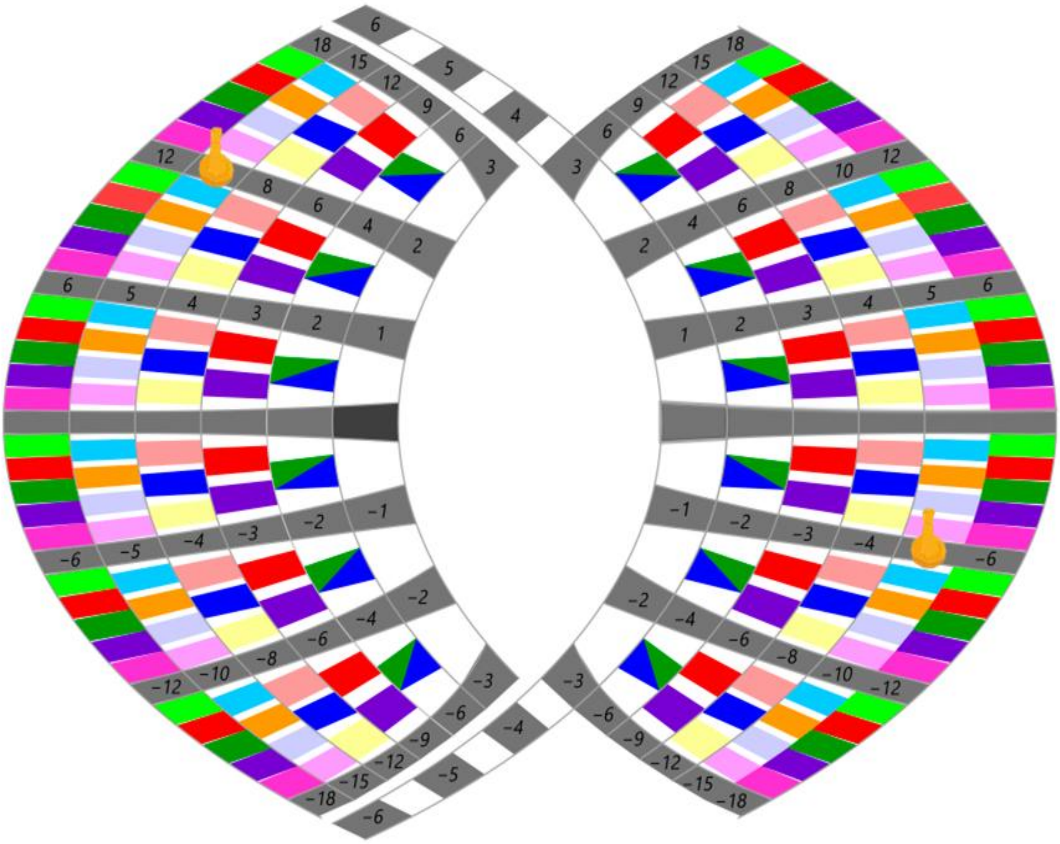


Figura 3-45. Ecuación $5x + 10 = -5$

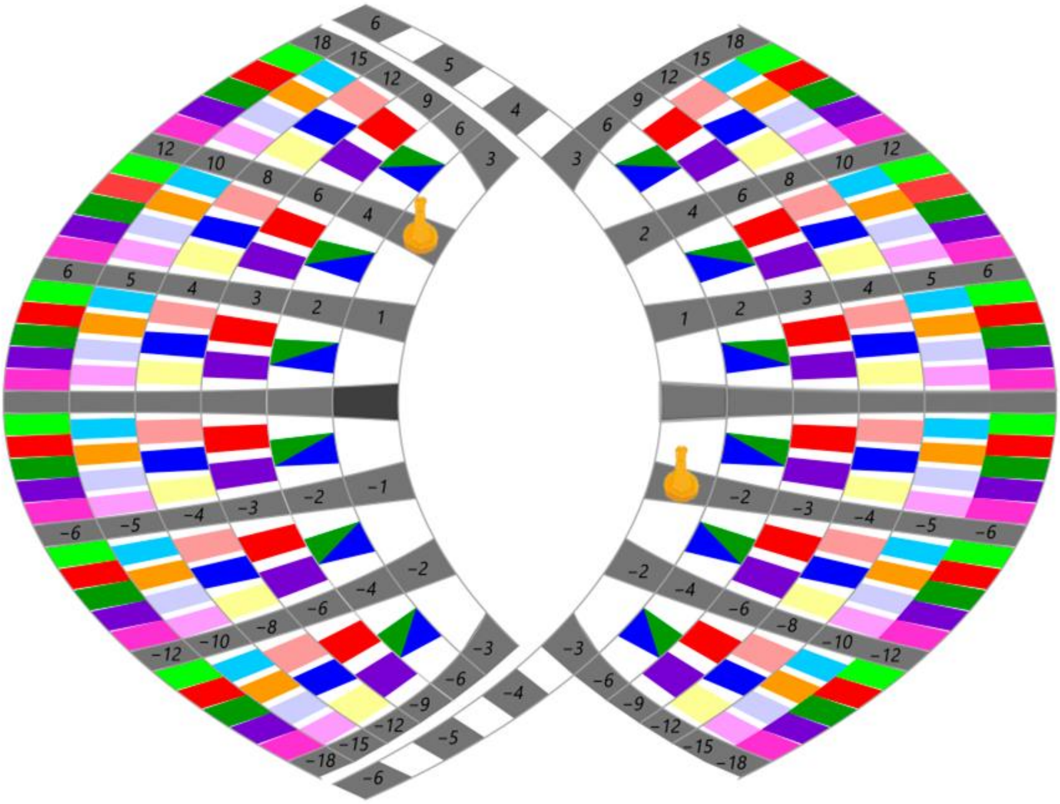


Figura 3-46. Ecuación $x + 2 = -1$

3.2.2. Dados y fichas.

El juego cuenta con dos dados, uno verde y otro rojo; el número obtenido tras lanzar los dados indicará la cantidad de casillas que las fichas serán desplazadas sobre el mismo nivel, este movimiento será hacia arriba o hacia abajo; cada jugador cuenta con dos fichas del mismo color.

El dado rojo arrojará números negativos e indicará desplazarse hacia abajo y el dado verde números positivos e indicará desplazarse hacia arriba.

3.2.3. Tabla de registro

Para el desarrollo del juego es necesario hacer uso de una tabla de registro, en la que el participante consignará los movimientos que realiza usando expresiones algebraicas

(

Posición inical		
Nivel	Casilla sector izquierdo	Casilla sector derecho

$\_\_\_\_ \boxed{} + \_\_\_\_ = \_\_\_\_$

Nivel | C.S. Izquierdo | C. S. Derecho

Dado	Nueva Posición					
	Movimiento	Nivel	Casilla Sector Izquierdo	Casilla Sector Derecho	Casilla Ecuación	Expresión: Nivel $\boxed{}$ + C.S. Izquierdo = C.S. Derecho

Figura 3-47), en la parte superior de esta, se registra la posición inicial de cada jugador, es decir donde están ubicadas las fichas en el tablero, para lo cual se debe escribir el nivel, las casillas de los sectores izquierdo y derecho y la ecuación que representan. Seguido a se encuentran siete columnas en donde cada participante registrará los movimientos que realice con fichas, para ello, en la columna 1, escribirá el valor del dado que escogió; en la columna 2, el movimiento que desea realizar (subir, bajar, saltar o deslizarse); en la columna 3, el nivel donde se encuentran las fichas; en las columnas 4 y 5, las nuevas casillas en donde quedaron ubicadas las fichas tras realizar el movimiento, en la columna 6, el participante debe registrar por medio de una expresión algebraica el movimiento realizado y en la columna 7 debe escribir la ecuación que representa su nueva posición.

Posición inical		
Nivel	Casilla sector izquierdo	Casilla sector derecho

$\_\_\_\_ \boxed{} + \_\_\_\_ = \_\_\_\_$

Nivel | C.S. Izquierdo | C. S. Derecho

Dado	Nueva Posición					
	Movimiento	Nivel	Casilla Sector Izquierdo	Casilla Sector Derecho	Casilla Ecuación	Expresión: Nivel $\boxed{}$ + C.S. Izquierdo = C.S. Derecho

Figura 3-47. Tabla de registro

Ejemplo 1:

La posición inicial de las fichas representa a la ecuación $5h + 8 = -7$ y el lanzamiento de los dados arroja, en verde el 2 y en rojo el 4.

Tras el lanzamiento, se toma la decisión de jugar con el dado verde, es decir mover dos casillas hacia arriba, por lo que se registra, en la casilla *dados*, el número 2 (**Figura 3-48**), en la casilla *movimiento*, subir; en la casilla nivel, el número 5; en la casilla sector izquierdo, el numero 10; en la casilla sector derecho, el número -5, en la casilla movimiento algebraico $5h + 8 + 2 = -7 + 2$ y en la casilla posición, $5h + 10 = -5$.

Posición inical

Nivel	Casilla sector izquierdo	Casilla sector derecho
5	8	-7

5	h	+	8	=	-7
Nivel			C.S. Izquierdo		C. S. Derecho

Dado	Nueva Posición					Expresión					
	Movimiento	Nivel	Casilla Sector Izquierdo	Casilla Sector Derecho	Casilla Ecuación	Nivel	$\square$	+	C.S. Izquierdo	=	C.S. Derecho
2	subir	5	10	-5	5h + 8 + 2 = -7 + 2	5	h	+	10	=	-5

Figura 3-48. Tabla de registro

3.2.4. Objetivo del juego

Solucionar la ecuación, llevando la ficha del sector de izquierdo, desde su posición inicial hasta la casilla 0 del nivel 1, la posición final de la ficha del sector derecho representará el valor de la incógnita.

3.2.5. Reglas

Al plantear la ecuación

Para platear la ecuación inicial y garantizar que esta se pueda solucionar con el tablero y tenga solución en el conjunto de los números enteros, se debe tener en cuenta:

- Una de las fichas estará en el sector izquierdo, la otra en el sector derecho.
- Las dos fichas deben estar ubicadas en el mismo nivel.
- Las dos casillas en las que se encuentren las fichas, deben ser del mimo color.

Movimiento de las fichas

Para mover las fichas se debe tener en cuenta que estas, ubicadas cada una en su sector, realizaran los mismos movimientos, esto quiere decir que, ambas fichas suben o bajan la misma cantidad de casillas, o saltan la misma cantidad de niveles. Esta regla se relaciona con la idea de sumar o multiplicar el mismo número a cada miembro de la ecuación, llamada en este trabajo, como propiedad uniforme de la igualdad con respecto a la suma y a la multiplicación entre números enteros.

Subir o bajar

Este desplazamiento será únicamente de arriba a abajo sobre cada el nivel, es decir, si las fichas están ubicadas en el nivel 3 se desplazaran hacia arriba o hacia abajo en el mismo nivel 3. Es claro que este movimiento no permite cambios de nivel.

El lanzamiento del dado verde y dado rojo indicará la cantidad de casillas que el jugador puede subir o bajar respectivamente.

Esta regla permitirá obtener tras casa lanzamiento, ecuaciones equivalentes, pues subir se relaciona con sumar un número entero positivo a cada miembro de la ecuación y bajar con sumar un número entero negativo a cada miembro de la ecuación, operación que permite, generar ecuaciones equivalentes.

Saltar o deslizarse

Cuando las fichas están ubicadas en un trampolín, es posible saltar a la casilla del nivel inferior que coincida en color, para esto se debe tener en cuenta que:

- Las dos fichas saltarán al tiempo, al mismo nivel en el sector correspondiente.
- Las casillas a las que se va a saltar, deberán estar en la misma sección en la que se encuentran los trampolines de partida.

Si el desplazamiento de las fichas permite ubicarlas en un deslizador (casillas de color gris), el jugador puede saltar únicamente al nivel 1 de cada sector directamente (Ver Figura 3-45 y Figura 3-46, páginas 56 - 57).

Esta regla garantizará que al saltar o deslizar las fichas, se mantenga la equivalencia de las ecuaciones, pues saltar y deslizar se relaciona con cancelar factores comunes en cada miembro de la ecuación, acción que permite, generar ecuaciones equivalentes.

3.3. Orientaciones para el uso del Ecua-parqués como modelo para la enseñanza de las ecuaciones lineales

En este apartado se proponen algunas orientaciones para la gestión de clases haciendo uso de la segunda versión del Ecua-parqués, ofreciendo al profesor una guía que pueda facilitar la experiencia, esperando que aporte a la innovación de las clases de matemáticas, cuando se abordan las ecuaciones lineales, fomentando además del desarrollo de actividades matemáticas, la posición activa y positiva de los estudiantes.

Las orientaciones dispuestas en este apartado no son una camisa de fuerza para el docente que gestione la clase, pues la naturaleza del material permite que mientras que se mantengan las reglas de los movimientos y el uso de la tabla de registro, la actividad se puede desarrollar de acuerdo a las necesidades del aula, las características de los estudiantes y el tiempo con el que se cuenta para desarrollar la actividad; por ejemplo en el grado sexto el Ecua-parqués se puede usar para hacer un primer acercamiento a este tipo de ecuaciones reconociendo las propiedades inmersas en el proceso de solución, y en grado séptimo u octavo para reforzar en los estudiantes sus conocimientos sobre las propiedades que satisface el conjunto de los enteros con la suma y la multiplicación, ejercitando la resolución de ecuaciones; sin embargo, lo anterior no quiere decir que el Ecua-parqués no se pueda incorporar en primaria, pues quitando la tabla de registro sin involucrar diletante el objeto matemático, permite favorecer el desarrollo intelectual, emocional y social de los niños, permitiéndoles explorar, hacer preguntas y predicciones sobre cuántos movimientos son necesarios para ganar, cuántos para llevar la ficha a la casilla cero, generando estrategias ganadoras.

Esta propuesta da inicio con una fase de exploración por parte de los estudiantes acompañada del docente, denominada *conoce el juego*, en la que se busca que los estudiantes conozcan el tablero, la dinámica del juego y las reglas básicas, para que jueguen sin introducir aun el objeto matemático, siguiendo la idea de Chamoso et al. (2004) de que los juego en su fase inicial deben estar desprovistos de alguna intención didáctica, Para luego incorporar el uso de la tabla de registro y abordar el objeto matemático y su representación física en el tablero y la representación algebraica en la tabla; y finalizar con una discusión orientada a la institucionalización de las propiedades que se relacionan con las reglas del juego.

En esta primera fase cada pareja de estudiantes explora el material usando el instructivo, (para esto cada pareja contará con un Ecua-parqués) permitiendo que en este primer acercamiento al material ellos lean, conversen sobre lo que entienden y no entienden, y se apropien de la dinámica y reglas del juego, siendo necesaria la supervisión del docente el cual intervendrá cuando considere que los estudiantes necesitan ayuda o ellos la soliciten.
En el instructivo (Ver Anexo 2) se presenta la descripción del material, las indicaciones para establecer la posición inicial de las fichas, las reglas del juego, el objetivo del juego (sin hacer mención al objeto matemático) y un breve ejemplo de cómo jugar y ganar.

En la segunda fase, se incorporará la tabla de registro en el instructivo y el objeto matemático y su representación física (en el tablero) y la algebraica (en la tabla) a partir de algunas preguntas apoyadas en un ejemplo, que permitirán al igual que en la primera fase, que los estudiantes discutan y descubran el objeto matemático y el objetivo del juego; sin embargo, se considera importante el acompañamiento e intervención del docente, en especial en aquellos momentos del instructivo en el que se plantean preguntas o discusiones (con los iconos ¿? y), esta fase puede desarrollarse semejante a la anterior en la que los estudiantes por sí mismos intentan desarrollar la actividad, interviniendo el docente localmente cuando considere necesario o cuando los estudiantes lo soliciten; para luego socializar el uso de la tabla de registro; o, se puede desarrollar de forma general, dirigiendo el docente las preguntas y las respectivas orientaciones involucrando a todo el grupo de estudiantes.

A continuación se presentan los momentos de discusión que se proponen en el instructivo y lo que se espera que se desarrolle en cada uno de ellos, en algunos de estos momentos se presenta la pregunta junto a la invitación a discutir sobre esta.

Habla con tus compañeros ...

Sobre las igualdades en las que uno de sus términos es desconocido.

Se espera que esta primera discusión se desarrolle en torno a las igualdades con uno o varios términos desconocidos, introduciendo de esta manera el concepto de ecuación y ecuación lineal. Es posible que en este momento los estudiantes logren intuir que el objetivo de la actividad es solucionar ecuaciones lineales y se adelanten dando la solución de la ecuación presentada, por lo que el docente deberá estar en condiciones de motivarlos para hacer uso del tablero.

Pregunta...

En la "Casilla Ecuación",
¿Qué registras?

Pregunta...

¿Qué operación efectúas a la expresión de la posición anterior, para llegar a la nueva expresión?

Habla con tus compañeros ...

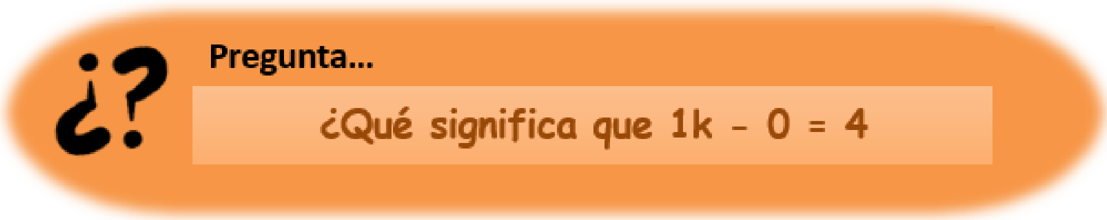
Sobre la operación que efectúas y cómo la registras en la casilla movimiento algebraico.

El segundo momento de discusión entre estudiantes, se presentan dos interrogantes y algunas pistas, que están relacionadas con la operación que se efectúa en cada jugada para ir de la expresión representada por la posición anterior y la nueva posición, y con cómo registrarla en la *casilla ecuación*.

La intención de esta pregunta es que los estudiantes, con el apoyo del docente, logren identificar la operación que efectúa de acuerdo a la jugada realizada, es decir que asocien la adición de un número positivo a ambos lados de la expresión con mover las fichas hacia arriba o la adición de un número negativo a ambos lados de la expresión con mover las fichas hacia abajo, y la cancelación de factores comunes a ambos lados de la expresión con saltar las dos fichas de nivel o deslizarlas.

Para esto, es importante apoyarse en las casillas *nivel, casilla sector izquierdo y casilla del sector derecho* correspondientes a la posición anterior y la nueva, para que los estudiantes puedan percibir con mayor facilidad el cambio en el número de las casillas y niveles (según sea el caso) que se realiza entre cada jugada y logre identificar la operación que se debe efectuar para pasar de una expresión a otra.

Al alcanzar el objetivo del juego (llevar la ficha del sector izquierdo a la casilla 0 del primer nivel), se propone el tercer momento de discusión:



Momento que está relacionado con el hallazgo de la ecuación equivalente a la inicial en donde la solución de k es evidente; se puede sugerir a los estudiantes que remplacen este valor en la expresión inicial o en alguna de las expresiones que hallaron en el desarrollo del juego, para observar que al realizar las operaciones la igualdad prevalece, es posible también, decir que esta expresión también es una ecuación, la cual es equivalente a todas las anteriores, teniendo en cuenta que la solución es la misma para todas.

Tras estas dos primeras fases, se espera que los estudiantes jueguen, interioricen las reglas y solucionen algunas ecuaciones lineales de la forma $ax + b = c$ en los números enteros.

La tercera fase que se propone, busca identificar algunas propiedades que se relacionan con las reglas del juego, y plantea algunas preguntas que pueden ser orientadas por el docente de forma general en el aula intentando que los estudiantes participen y contesten de acuerdo a su experiencia con el Ecua-parqués.

Algunas de las preguntas propuestas son:

- ¿Por qué una de las reglas principales del juego es, que las dos fichas, siempre se deben mover al tiempo?
- Tras esta pregunta será posible mostrar las propiedades uniforme de la adición de los números enteros, distributiva de la multiplicación con respecto a la adición y cancelativa de la multiplicación, y su relación con la regla 8 del juego.
- Las fichas realizan los movimientos simultáneamente, esto quiere decir que, ambas fichas de cada jugador suben o bajan la misma cantidad de casillas, o saltan la misma cantidad de niveles.
- Además de esto, puede ser la oportunidad para hacer alusión a la propiedad asociativa de la adición, mostrando que, la cantidad a sumar cada lado de la expresión se asocia con los términos independientes, relacionando esta propiedad con la regla 9 del juego.
- El desplazamiento subir o bajar será únicamente sobre cada nivel.

En este momento sería conveniente tomar una de las jugadas realizadas y registradas por algún estudiante en la que haya movido las fichas hacia arriba o abajo, para ilustrar las propiedades mencionadas.

- ¿Por qué es posible usar trampolines y deslizadores?
- ¿Por qué los trampolines llevan las fichas únicamente a niveles intermedios?
- ¿Por qué los deslizadores las llevan las fichas directamente al nivel 1?

Estas preguntas permitirán mostrar a los estudiantes que las ecuaciones representadas por fichas ubicadas en trampolines, tienen la particularidad de que todos sus términos son divisibles por algún número natural, y que en aquellas representadas por fichas ubicadas en los deslizadores sus términos son divisibles por el número que acompaña al valor desconocido (coeficiente de la incógnita), razón por la cual el deslizador lleva la ficha directamente al nivel 1.

Esta será la oportunidad para aludir a la propiedad cancelativa de la multiplicación y la distributiva de la multiplicación con respecto a la adición relacionada con las reglas 11, 12 y 13 del juego.

- Las dos fichas de cada jugador saltan al tiempo desde el trampolín hasta la casilla del mismo color que se encuentra en un nivel inferior.
- Las casillas a las que saltan las fichas, deberán estar en la misma sección en la que se encuentran los trampolines de partida.
- Los deslizadores llevan las fichas únicamente hasta el primer nivel.

En este momento sería conveniente tomar una de las jugadas realizadas y registradas por algún estudiante en la que haya saltado o deslizado las fichas para ilustrar las propiedades mencionadas, pues tal vez requieran un poco más de desarrollo pues no son tan evidentes en el uso del material.

- ¿Qué pasaría si para la posición inicial las fichas no se encuentran en casillas del mismo color?
- ¿Qué pasaría si la posición de las fichas está en diferentes niveles?

Para esta discusión, es importante mostrar a los estudiantes que todas las ecuaciones que se pueden representar con el tablero (teniendo en cuenta las reglas de la ubicación de fichas) tienen solución en los enteros, para que de esta manera logren (por ensayo y error o usando métodos informales para solucionar ecuaciones lineales) ver que no es posible dar solución entera a este tipo de ecuaciones y que con el tablero al aplicar las reglas del Ecua-parqués la ubicación de la ficha del sector derecho no va a representar la solución de la ecuación inicial.

Si no se usaran los dados y fuera posible elegir la cantidad de casillas a desplazar las fichas ¿Cómo cree que se puede ganar el juego (resolver una ecuación) en dos pasos?

Con esta pregunta se espera que el estudiante, primero usando el material note que puede llevar la ficha del sector izquierdo (siguiendo las reglas de los movimientos) a la casilla 0 del nivel en el que se encuentre para luego llevar las fichas directamente al nivel 1.

Y luego usando la tabla de registro, logre identificar bajo las orientaciones del docente y comunicar con lenguaje natural, la existencia y uso del inverso aditivo, la existencia del elemento idéntico para la adición y el uso de la propiedad cancelativa de la adición y de la multiplicación, solucionando entonces, “en dos pasos” la ecuación dada.

Este ejercicio, permitirá que los estudiantes se acerquen a la solución general de algunas ecuaciones lineales de la forma $ax + b = c$ con solución en el conjunto de los enteros.

¿Puede existir un movimiento algebraico que permita llevar las fichas a un nivel intermedio utilizando un deslizador?

Esta pregunta, puede ser una oportunidad para involucrar a los números racionales en la actividad, pues todas las ecuaciones representadas por fichas ubicadas en los deslizadores (manteniendo la regla 3 “Las dos fichas de un jugador deben estar ubicadas siempre en el mismo nivel”) son equivalentes, pero los números involucrados para realizar las operaciones son racionales.

Para finalizar la actividad, el docente puede listar las propiedades que satisface el conjunto de los números enteros con la adición y la multiplicación que se emplean a la hora de dar solución este tipo de ecuaciones, proporcionando algunas ecuaciones para que los estudiantes las solucionen teniendo en cuenta las propiedades antes estudiadas, y de ser posible construir la ecuación $x = \frac{c-b}{a}$, solución general de las ecuaciones de la forma $ax + b = c$.

Capítulo 4

Conclusiones generales, reflexiones y recomendaciones

A continuación se presentan algunas conclusiones generales relacionadas con los objetivos y preguntas planteadas al inicio de este trabajo, reflexiones y suposiciones que surgen durante el diseño del Ecua-parqués, las pruebas piloto (no sistematizadas) y la construcción de este documento, y recomendaciones con el fin de sugerir ideas a aquellas personas que se interesen en dar desarrollo a la propuesta del Ecua-parqués.

4.1. Conclusiones generales

Teniendo en cuenta los objetivos planteados al inicio de este documento, se puede concluir que:

Es posible desarrollar herramientas para la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones lineales de la forma $ax + b = c$ en $\mathbb{Z}$, en este caso, el Ecua-parqués fue construido como un modelo para la enseñanza de las ecuaciones lineales, que respetara las propiedades que satisface la estructura de anillo conmutativo de los números enteros, pensando en contribuir positivamente en el ambiente escolar de las Matemáticas, promoviendo el estudio de este contenido de manera lúdica, considerando al juego como una vía importante para la construcción de conocimiento.

En relación al primer objetivo específico, se considera que a pesar de la complejidad de la tarea, se construyó no solo una herramienta, sino un juego que es familiar a la cotidianidad de los estudiantes, llamativo, fácil de llevar al aula, accesible y asequible; que permite representar y solucionar ecuaciones de la forma $ax + b = c$ en los números enteros, identificando las propiedades inmersas en dicho proceso, ya que las reglas asociadas al movimiento de las fichas están relacionadas directamente con dichas propiedades; por ejemplo entre otras, la regla 8 que está asociada al movimiento de las fichas “Las fichas realizan los movimientos simultáneamente, esto quiere decir que, ambas fichas de cada jugador suben o bajan la misma cantidad de casillas, o saltan la misma cantidad de niveles” se relaciona con la propiedad uniforme de la igualdad con respecto a la adición y la multiplicación; la regla 13 “los deslizadores llevan las fichas únicamente hasta el primer nivel” con la propiedad cancelativa de la multiplicación o la regla 9 “El desplazamiento subir o bajar será únicamente sobre cada nivel” se relaciona con la propiedad asociativa de la adición; además el juego permite que el estudiante valide las operaciones realizadas en el papel con la ubicación de las fichas en el tablero.

En cuanto al segundo objetivo específico, el diseño del juego Ecua-parqués como modelo para la enseñanza de las ecuaciones lineales y construcción de este documento, fue una oportunidad maravillosa para ser conscientes del reto al que los maestros de Matemáticas se enfrentan cuando deciden llevar materiales al aula, escogerlos de tal forma que se adapten a sus necesidades, a las características de los estudiantes y al objetivo que se pretende alcanzar, es una labor muy difícil; aún más, diseñarlos, pues además de buscar que favorezca los procesos de enseñanza y el aprendizaje (ajustándose a todo lo que esto implica) de un objeto matemático, se busca que sea llamativo, fácil de manipular y genere gusto en los estudiantes, dándoles la oportunidad de disfrutar la satisfacción del conocimiento, que sea manejable para el docente, fácil de explicar, fácil de disponer en el aula, hecho en un material económico pero duradero, pensando en la institución o ente que si es el caso lo decida producir.

Tomar la idea de usar un parqués tradicional para la enseñanza de ecuaciones lineales, creer en ella a pesar de que inicialmente parecía no tener mucho potencial y desarrollarla, de tal manera que abriera las puertas a la creación de un material innovador mucho más potente, fue una experiencia que puso a prueba a los autores en diversos aspectos, pues fue un verdadero reto asumir la responsabilidad y el riesgo que implica innovar; para lograrlo fue necesario ser visionarios, reflexivos, intuitivos y analíticos, curiosos, recursivos, dotados de creatividad, paciencia, perseverancia y optimismo, viviendo cada momento del diseño como una oportunidad de aprendizaje y de mejora, siempre en pro de los estudiantes y profesores que en un futuro hagan uso del Ecua-parqués.

La experiencia, en el marco de este trabajo, dejó en los autores un sentimiento de satisfacción con el producto final e inquietud por las posibilidades que se abren tras el desarrollo del Ecua-parqués, así como la certeza de que es posible tras la formación en la Universidad Pedagógica Nacional, generar propuestas educativas innovadoras, sustentadas en referentes teóricos matemáticos y de la educación matemática.

4.2. Reflexiones

Durante el diseño del Ecua-parqués y la construcción de este documento, fue posible vivir una experiencia de estudio y reflexión en torno a las ecuaciones lineales y su enseñanza en la escuela, teniendo en cuenta esto y que durante el diseño de la propuesta, se realizaron múltiples pruebas informales con individuos de diferentes niveles escolares, que no fueron sistematizadas, se plantean algunas suposiciones y afirmaciones (cuyos argumentos son puramente anecdóticos) para dar respuesta a las siguientes preguntas:

- ¿Será el Ecua- parqués un material que permite dar significado a los procedimientos empleados en la resolución de ecuaciones?
- ¿Será el Ecua- parqués un material que posibilita la disminución de errores y dificultades que comenten los estudiantes cuando resuelven ecuaciones lineales?
- ¿El Ecua-parqués se puede constituir como un modelo para la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones lineales?
- ¿El Ecua-parqués promueve en los estudiantes una actitud positiva hacia las matemáticas, así como favorece y promueve el desarrollo de competencias matemáticas?

Tras el desarrollo de este trabajo, se considera que el uso del Ecua- parqués permite dar significado a los procedimientos y disminuir algunos errores y dificultades en la resolución de ecuaciones; pues al interiorizar las reglas del juego, el estudiante desarrolla una idea de equilibrio y simetría entre el lado izquierdo y derecho, pues debe ejecutar la misma acción a ambos lados del tablero y posteriormente efectuar la misma operación a ambos lados de la ecuación, disminuyendo el sentido operacional del signo igual, y dejando de lado la idea (en aquellos individuos que ya conocían el método de transposición) de transponer términos; además de esto, el juego permite que el estudiante logre reconocer el inverso aditivo de un número negativo, pues cuando la ficha del sector izquierdo está ubicada en casillas negativas, el jugador la debe subir, por lo que empieza antes de lanzar los dados a desear que el lanzamiento arroje en el dado verde el número que él necesita para llegar a la casilla neutra, observando en la tabla de registro que si tiene la ecuación $6x - 5 = 13$ basta con sumar 5 a ambos lados de la expresión, para llevar la ficha a la casilla neutra; por otro lado, el uso de una letra diferente a la usual que representa al término desconocido de la ecuación, pretende que el estudiante y el docente usen un signo diferente a la letra x, intentado disminuir las dificultades que surgen cuando se dan este tipo de cambios en la representación de la incógnita.

Teniendo en cuenta lo anterior, es posible considerar al Ecua-parqués como un modelo para la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones lineales, pues es un material que, puede posibilitar la disminución de errores y dificultades relacionados con el proceso de enseñanza y aprendizaje de la ecuaciones lineales, representado en un tablero las expresiones algebraicas usando un par de fichas, relacionando algunos procedimientos que se realizan en el terreno simbólico usando expresiones algebraicas al resolver ecuaciones lineales con el desplazamiento de las fichas sobre el tablero, usando además la tabla de registro, en la que el estudiante tras cada jugada debe pasar de la representación física de la expresión en el tablero a la algebraica, intentado de esta manera seguir la idea de Duval (1998) quien afirma que, un concepto determinado se adquiere cuando se es capaz de transitar entre por lo menos dos representaciones diferentes del mismo concepto. Además de esto, la tabla de registro permite al jugador visualizar los procedimientos efectuados y construir sus propias ideas matemáticas; todo en un ambiente de aprendizaje en torno al juego, agradable y diferente, promoviendo en los estudiantes una posición activa y positiva hacia las matemáticas, favoreciendo y promoviendo el desarrollo de competencias matemáticas.

4.3. Recomendaciones

Para futuros trabajos basados en el Ecua-parqués, se proponen algunas ideas que no fueron desarrolladas en este trabajo, pero que se consideran valiosas para enriquecer la propuesta; por ejemplo, gestionar el uso del material en un aula de clase sistematizando la experiencia, realizando pruebas pre y post aplicación, con el fin de estudiar el desarrollo de la actividad, detectando aquellos errores que pueden ser generados por el uso del Ecua-parqués y aquellos cuya probabilidad de ocurrencia disminuye, para de esta manera llegar a conclusiones más precisas y poder evaluar la pertinencia del uso de este juego en el aula.

Otra idea que surgió tras la construcción de este documento, fue modificar el formato y las instrucciones del juego para que sea posible representar las ecuaciones bidireccionalmente, es decir de la forma $ax + b = c$ o $c = ax + b$ para así romper la idea de la ecuación convencional con la variable al lado izquierdo y la solución al lado derecho.

Por otro lado, nació la idea de complementar las orientaciones e instructivo del Ecua-parqués para representar y dar solución a ecuaciones lineales de la forma $ax + b = c$ en los enteros cuando $-6 \leq a \leq -1$, usando simetrías con la ubicación de las fichas en el tablero; dando un ejemplo, si la ubicación de las fichas representa a la ecuación $-6x + 11 = -13$, dando "salto de simetría" sobre el mismo nivel y sector, con respecto a las casillas neutras, como se observa en la Figura 4-1, será posible llegar a la ubicación de las fichas (Figura 4-2) que representa a la ecuación $6x - 11 = 13$, para luego solucionarla, siguiendo las reglas básicas del Ecua-parqués.

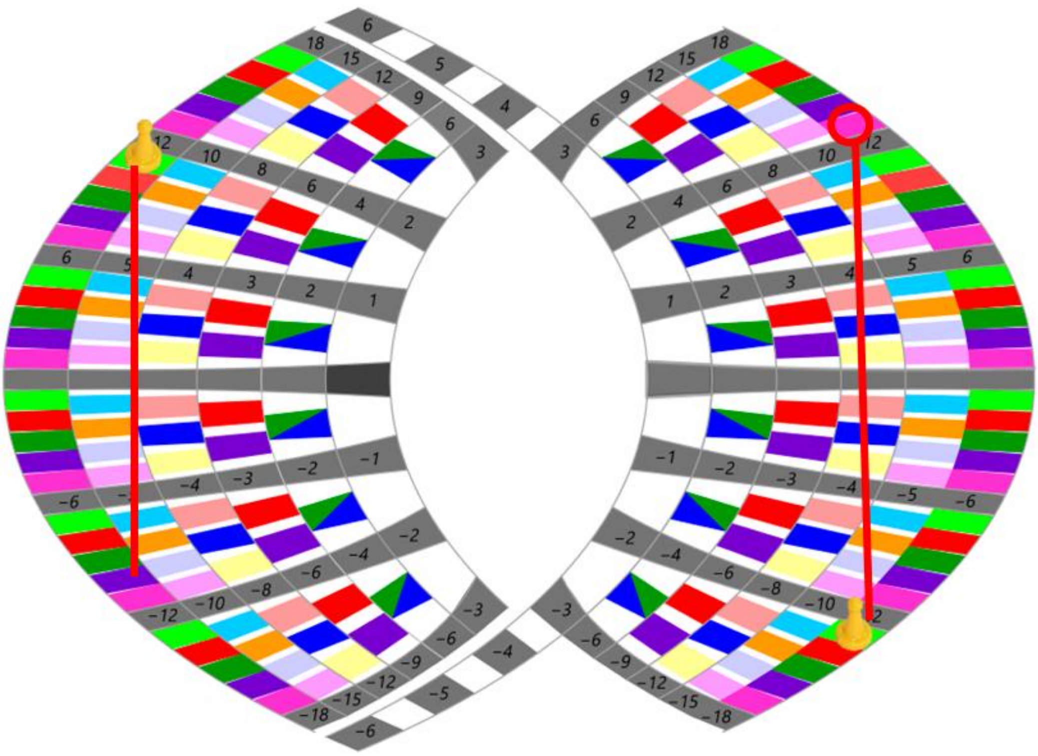


Figura 4-1. Salto de simetría para dar solución a la de la ecuación $-6x + 11 = -13$

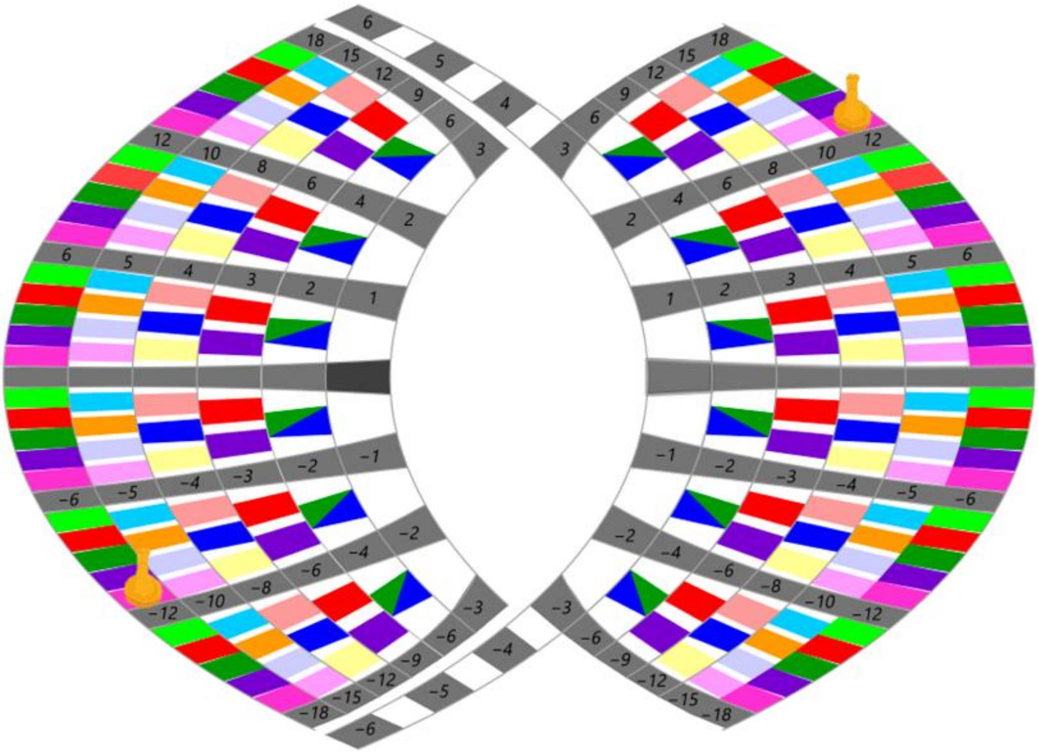


Figura 4-2. Representación de la ecuación $6x - 11 = 13$

Otra idea que surgió en el desarrollo del trabajo fue diseñar una versión del Ecua-parqués que permita abordar la aritmética modular solucionando ecuaciones de la forma $x + a \equiv b \ \ mod\, p$.

Bibliografía

Alonso, F., Barrero, C., Fuentes, I., Azcárate, A., Dozagarat, J.M., Gutiérrez, S., Ortiz, M.A., Rivière, V & Veiga da, C. (1993). Ideas y Actividades para Enseñar Álgebra. Madrid: Síntesis.

Caballero, M. A. (2010). Concepciones y enseñanza del concepto Ecuación Lineal. Un estudio con profesores de bachillerato. Yucatán: Universidad Autónoma de Yucatán. Recuperado de http://bit.do/3LDW

Chamoso, J. M., Durán J., García, J.F., Lalanda, J. & Rodríguez, M. (2004). Análisis y experimentación de juegos como instrumentos para enseñar matemáticas. Revista Suma, 47 (1), 47-58. Disponible en: http://bit.ly/1maJhC0

Crespillo, E. (2010). El juego como actividad de enseñanza y aprendizaje. Disponible en http://www.gibralfaro.uma.es/educacion/pag_1663.htm

6 Duarte, D. & Fernández, J. (2012). Ecuaciones lineales de primer grado con una incógnita: Un enfoque a la Resolución de Problemas. Unidad Didáctica no publicada. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Duval R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. F. Hitt (Ed.), Investigaciones en Matemática Educativa II. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Escobar, A. & Urrea, A. (2010). Diferentes Modelos en la Enseñanza de ecuaciones de primer grado (Trabajo de grado de especialización). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Godino, J., Batanero, C. & Font, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para maestros. Granada: Universidad de Granada. Recuperado de http://bit.do/3LFJ.

Gómez, A. (2013). ¿Por qué somos tan malos en matemáticas? El Tiempo [en línea]. Septiembre 28 del 2013. [Fecha de consulta: Marzo 03 del 2015]. Recuperado de http://bit.do/3LEz.

Gómez, S. V & Cárdenas W. A. (2014). Ecua-parqués: una alternativa para la enseñanza de las ecuaciones lineales (Anteproyecto). Documento no publicado. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Luque, C., Soler, N. & Avila, J, C. (2013) *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: Razonar*. Colección Memorias y entramados educativos y culturales. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Bogotá.

Moreno. I, Castellanos. L. (1997). Secuencia de enseñanza para solucionar ecuaciones de primer grado con una incógnita. Barcelona: Revista Ema, vol. 2 n°3 (p, 249 - 250).

Mora, L. C & Soler, N. (2010). Estudiar Álgebra desde la Generalización: ejemplos para la formación de profesores. Memorias del XI encuentro de Matemática Educativa. Bogotá: Asocolme.

Rubiano, G. N. (2004). Teoría de números para principiantes. Segunda edición. Facultad de Ciencias. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Sánchez, Y. A. (2014). Reflexiones sobre las Ecuaciones. Artículo no publicado. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional

Sánchez, C. & Casas, L.M. (1989). Juegos y materiales manipulativos como dinamizadores del aprendizaje en Matemáticas. Madrid: Centro de publicaciones MEC.

Sessa, C. (2005). Iniciación al estudio didáctico del algebra. Orígenes y perspectivas. Buenos Aires: Zorzal.

Socas, M., Camacho, M., Palarea, M. & Hernández, J. (1989). Iniciación al álgebra. Madrid: Síntesis.

Stewart, J., Redlin, L., & Watson S. (2007). Precálculo. Quinta edición. Cengage Learning.

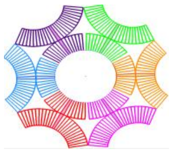
Uicab, G. R. (2011). Materiales tangibles y su influencia en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Yucatán: Universidad Autónoma de Yucatán. Recuperado de http://bit.do/3LCW.

Vergel, R. (2014). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años). Doctorado Interinstitucional en Educación. Facultad de Ciencias y Educación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Recuperado de http://bit.do/3LE5

Zuluaga, C. (2010). Proyecto Matemática Recreativa Colombia aprendiendo. Bogotá. Disponible en: http://bit.do/3LCr

Anexos

Anexo 1: Instructivo Ecua-parqués primera versión.



E C U A - P A R Q U É S

1. Descripción del material:

Tablero con 6 estaciones diferentes, en cada una de estas se sitúan un grupo de jugadores (Figura 1).

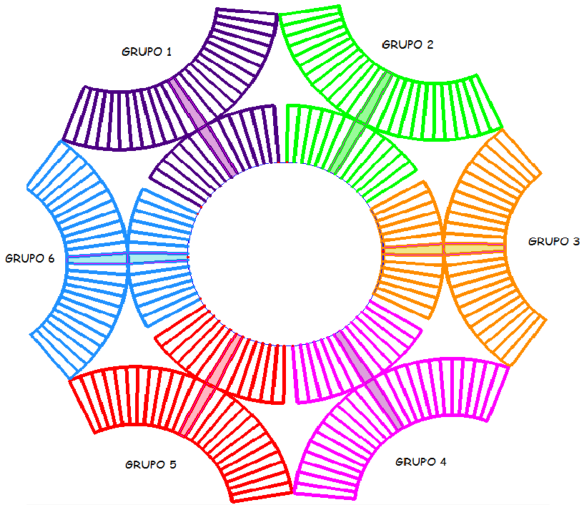


Figura 1

Cada estación tiene dos sectores:

Izquierdo y derecho (Figura 2).

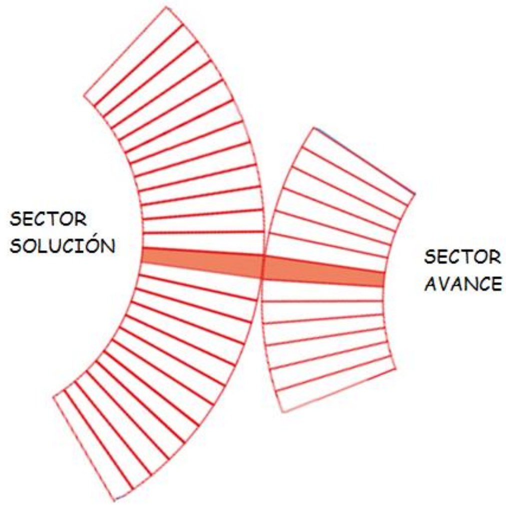


Figura 2

S e c t o r   i z q u i e r d o :

Tiene 13 casillas, la casilla sombreada de la mitad se llama neutra y representa el 0, a la izquierda de esta, se encuentra la casilla -1, luego sigue la -2 hasta la casilla -6. A la derecha de la casilla neutra se encuentra la casilla 1, luego sigue la casilla 2 hasta la 6 (Figura 3).

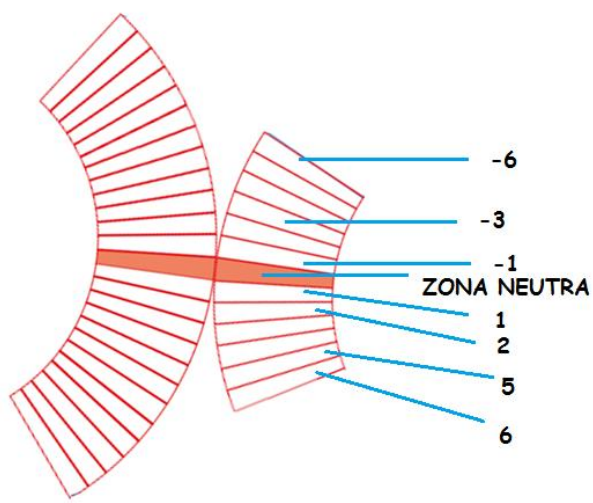


Figura 3

S e c t o r   d e r e c h o :

Tiene 25 casillas, la casilla sombreada de la mitad se llama neutra y representa el 0, a la izquierda de esta, se encuentra la casilla -1, luego sigue la -2 hasta la casilla -12. A la derecha de la casilla neutra se encuentra la casilla 1, luego sigue la casilla 2 hasta la casilla 12 (Figura 4).

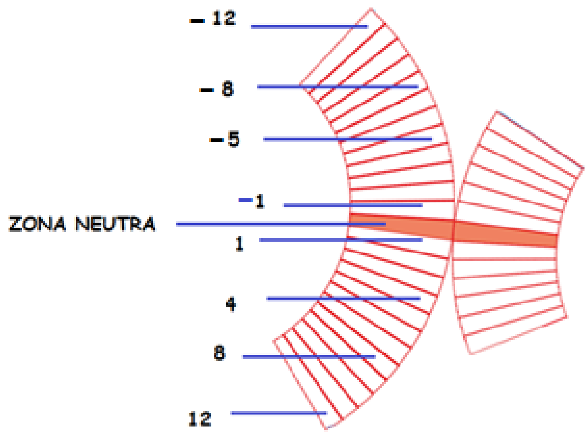


Figura 4

F i c h a s :

En cada estación se localizaran tres fichas de parqués, una verde que simbolizará la incógnita de la ecuación y dos amarillas las cuales una representa un sumando y la otra representa la solución de la igualdad (Figura 5). La ficha verde nunca se mueve, ya que esta representa la incógnita. Para mover las fichas amarillas ubicadas en cada sector, se moverán a la par, esto quiere decir que ambas fichas avanzan o retroceden dependiendo el valor que tomen los dados.

Figura 5

D a d o s :

Dado verde: valores positivos

Dado rojo: valores negativos

(Figura 6)

Figura 6

T a b l a d e r e g i s t r o :

En esta tabla de registro el equipo deberá registrar los movimientos que realizó (figura 7). Esta consta de una fila en la parte superior donde se registra la ecuación y cuatro columnas:

Columna 1 (Dado rojo): Registrar el valor que obtuvo con el dado rojo.

Columna 2 (Dado verde): Registrar el valor que obtuvo con el dado verde.

Columna 3 (Tus jugadas): Por medio de la ecuación planteada, el equipo escoge el valor del dado con el que quiere jugar y lo deja indicado en la igualdad.

Columna 4 (Lo que obtienes): Después de registrada la jugada, se dispone el jugador a operar y como resultado obtendrá una nueva ecuación, la cual hay que resolver cuando vuelva ser el turno del equipo.

______+_______=			
Dado Rojo	Dado Verde	Tus jugadas	Lo que obtienes

Figura 7

2. Reglas de juego:

i) Cada equipo escoge una letra para la incógnita de la ecuación, por ejemplo *g*.

ii) Lanzar los dados para plantear una ecuación, la cual cada equipo resolverá. Por ejemplo: se lanzaron los dados dos veces y sus valores fueron (figura 8):

lanzamiento	Dado verde	Dado Rojo
1	3	5
2	6	1

Figura 8

Se llegó a un consenso entre todo el grupo (cada equipo de las seis estaciones) y se decidió tomar los valores, 5 del dado rojo para el sumando y 6 del dado verde para la solución de la igualdad. La ecuación planteada quedó de la siguiente forma:

$$\_ + (-5) = 6$$

Nota 1: se puede escoger cualquier valor que tomen los dados sin importar su color.

Nota 2: la expresión __ de la ecuación planteada se refiere a la incógnita de la igualdad, la cual previamente en el paso i se escogió una letra para esta.

iii) Registrar la ecuación planteada en la tabla de registro. Siguiendo el ejemplo anterior, quedaría as í(Figura 9):

_____+(-5) = 6			
Dado Rojo	Dado Verde	Tus jugadas	Lo que obtienes

Figura 9

iv) Cada equipo localiza las fichas verdes y amarillas en los sectores de su estación. Siguiendo el ejemplo del paso ii, cada equipo ubicaría las fichas así (Figura 10):

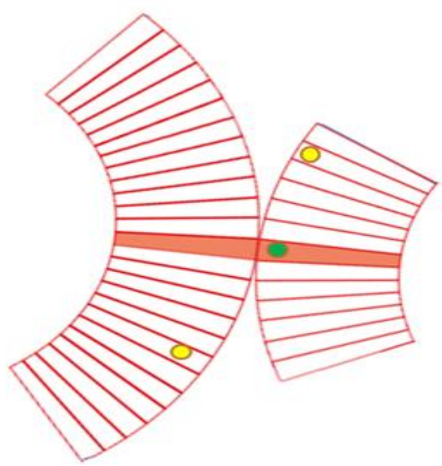


Figura 10

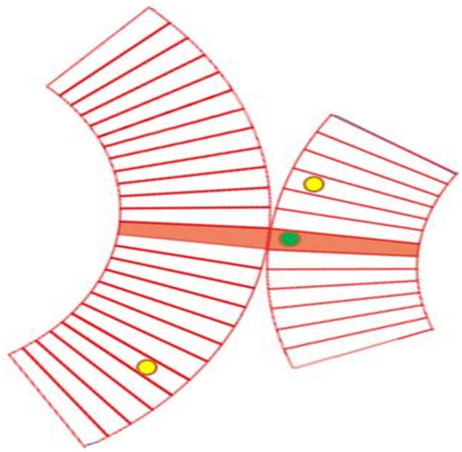
v) cada equipo lanza los dados según sea su orden (equipo 1 lanza los dados, luego sigue el equipo 2 así sucesivamente hasta el equipo 6, luego vuelven a empezar). Cada equipo escoge un solo valor que arrojen los dados, ya sea al verde o el rojo y así mismo corre las fichas amarillas y anotan el valor de los dados, las jugadas que realizaron y lo que obtienen en la tabla de registro. Por ejemplo:

Equipo 5 lanza los dados, cuyos resultados fueron:

Dado verde: 2

Dado rojo: 4

Ellos deciden tomar el valor del dado verde ya que el valor que toma el dado rojo no es posible ubicarlo en el sector izquierdo. Su ubicación y tabla de registro se muestra en la figura 11.



______+(-5) = 6			
Dado Rojo	Dado Verde	Tus jugadas	Lo que obtienes
4	2	__+(-5)+2 = 6+2	__+(-3) = 8

Figura 11

Así la nueva ecuación a solucionar es:

$$\_ + (-3) = 8$$

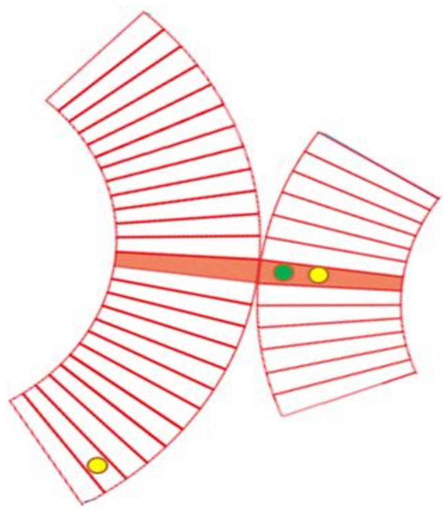
Nota: Como se mostró en este ejemplo algunos valores que toman los dados no son posibles, por esta razón el equipo decide si quiere jugar con el valor del otro lado o ceder su turno.

vi) Gana el equipo que resuelva la ecuación utilizando el Ecua-parqués (cuando la ficha amarilla del sector izquierdo llegue a la casilla neutra). Por ejemplo, el equipo 6 en su ronda 3, tenían planteada la ecuación:

$$\_ + (-1) = 10$$

Lanzaron los dados, el rojo salió 5 y el verde 1.

Ellos por estrategia escogieron el valor 1 del dado verde y así solucionar la ecuación inicial (Figura 12).



_____+(-5) = 6			
Dado Rojo	Dado Verde	Tus jugadas	Lo que obtienes
2	3	__+(-5)+3 = 6+3	_+(-2) = 9
4	1	__+(-2)+1 = 9+1	__+(-1) = 10
5	1	__+(-1)+1 = 10+1	__ = 11

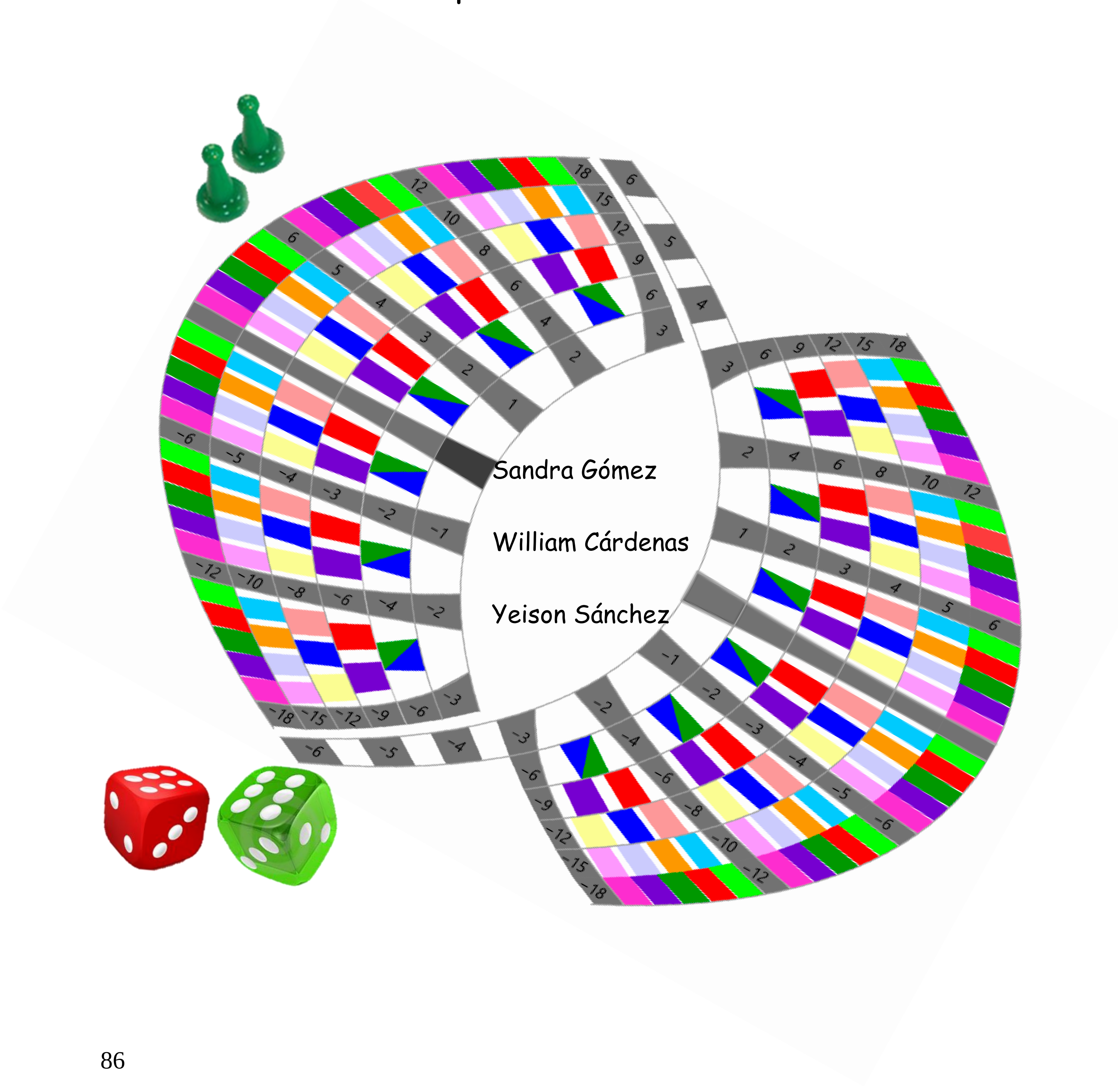
Figura 12

Ahora…¡Juega tu!

Anexo 2: Instructivo Ecua-parqués segunda versión

Ecua-parqués

Una alternativa innovadora para la enseñanza de las ecuaciones lineales



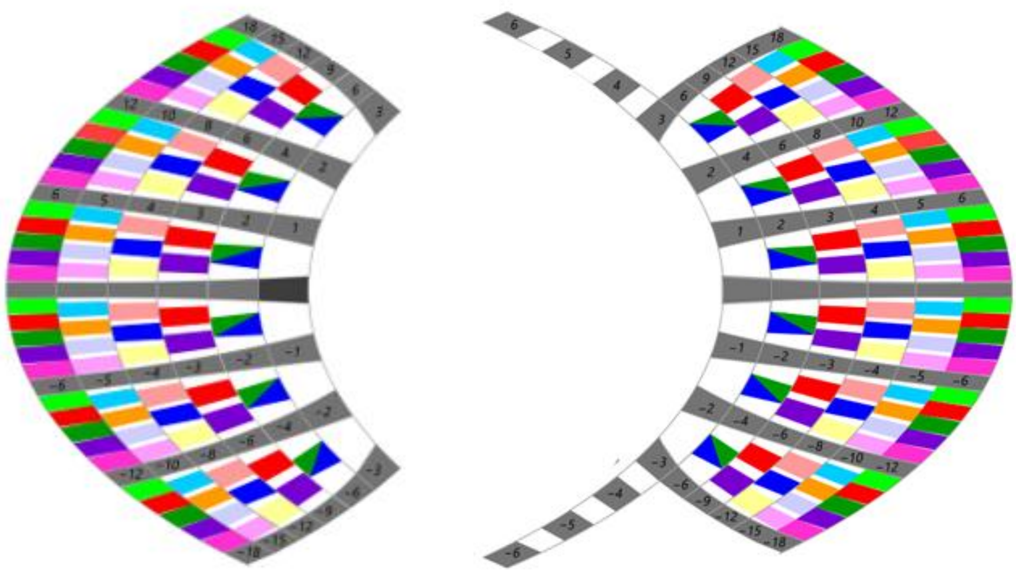
Contenido

Conoce el juego

El Ecua-parqués es un juego de mesa para dos jugadores, inspirado en el parqués tradicional colombiano, este, consta de un tablero, un par de dados y dos fichas para cada jugador; el tablero tiene dos sectores, seis niveles y muchas casillas de colores, algunas de estas casillas son especiales, pues permiten realizar saltos.

El tablero

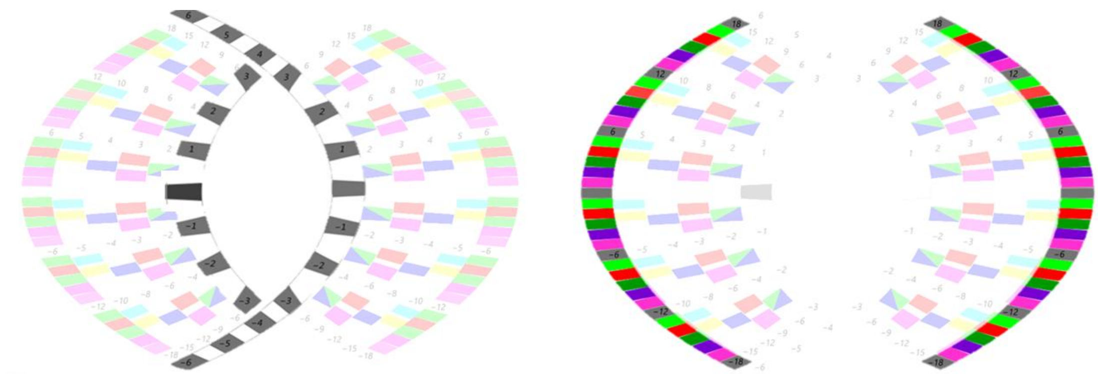
Cuenta con dos sectores, el *sector izquierdo* y *sector derecho*. (Figura 1).



Sector izquierdo   Sector derecho

Figura 1.Sectores

Ambos sectores tienen 6 niveles, estos se cuentan del 1 al 6 del centro hacia afuera, es decir, el nivel interno (de casillas de color gris), es el nivel uno, y el externo es el nivel 6 (de casillas de color gris, rosa, morado, verde, rojo y azul).



Nivel 1 Nivel 6

Figura 2

Entonces, contando del centro hacia afuera, el nivel 3 será el formado por casillas de color gris, rojo y morado, obsérvalo con más detalle en la figura 3.

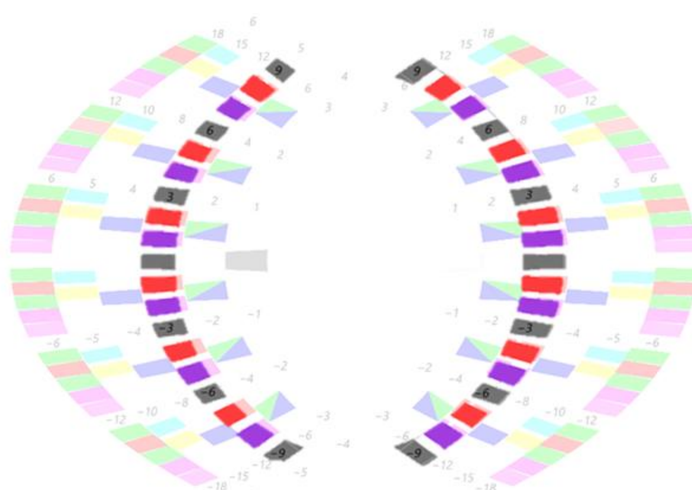


Figura 3. Nivel 3 del Ecua-parqués

Secciones y casillas

Además de niveles, el tablero tiene franjas formadas por casillas de color gris que se llaman deslizadores (Figura 4); el deslizador central de cada sector, está formado por las "casillas neutras" de cada nivel (estas casillas representan al 0).

Observa que las casillas que están arriba de las neutras de cada nivel, representan números positivos y las que están bajo la neutra representan negativos, por ejemplo, para el nivel 3, arriba de la casilla neutra (que representa al 0) están las casillas desde la 1 hasta la 9 y bajo esta desde la -1 hasta -9; o para el nivel 6, arriba de la casilla neutra, están las casillas que van de la 1 a la 18, mientras que hacia abajo de la -1 a la -18.

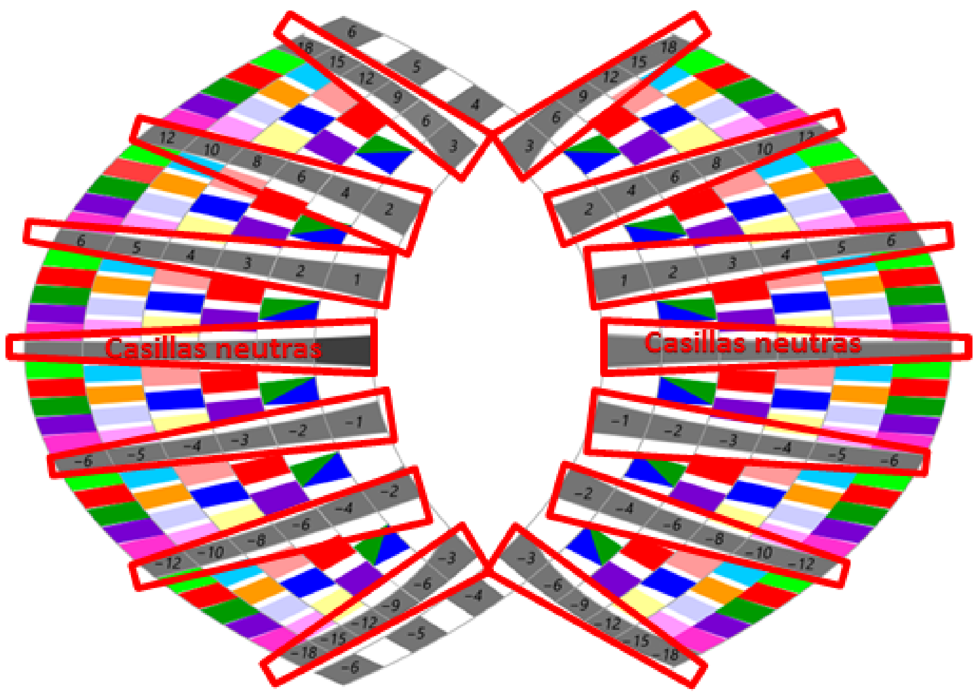


Figura 4. Deslizadores

Además de lo anterior, Los deslizadores determinan 6 secciones en cada sector, en la Figura 5 es posible observar las 6 secciones del sector izquierdo y las 6 del sector derecho; las secciones están numeradas de abajo hacia arriba y cada una de ellas tiene la misma cantidad de casillas.

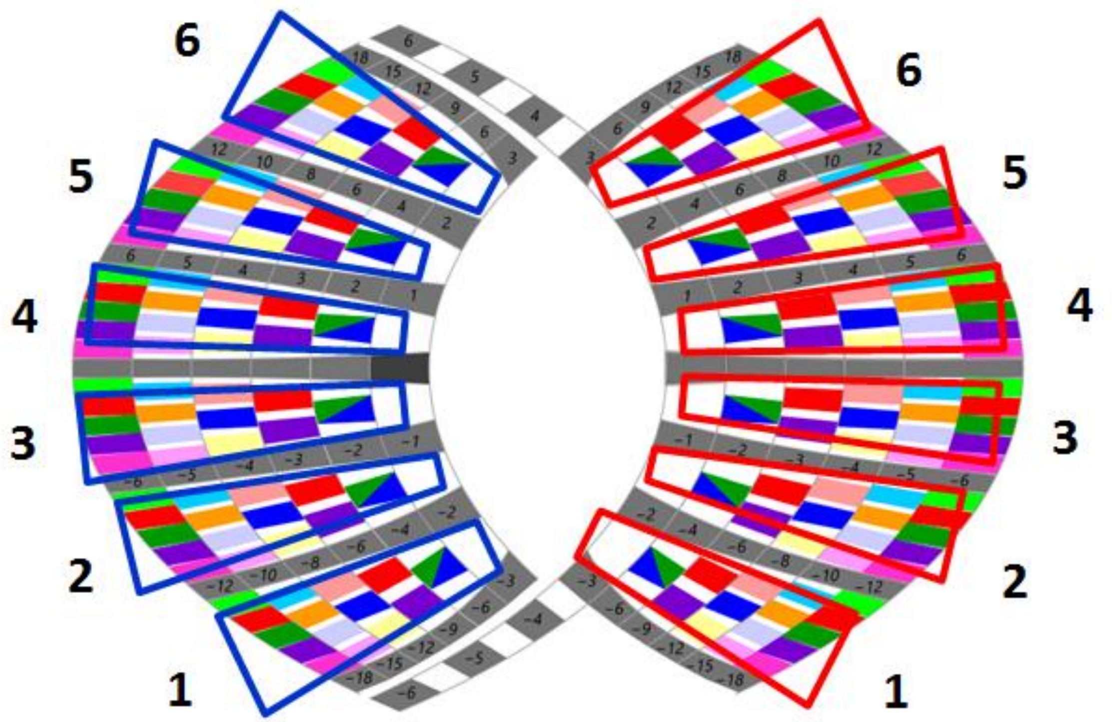


Figura 5. Secciones

En la Figura 6 se muestra la sexta sección del sector derecho, en esta, es posible observar con más detalle a las casillas llamadas “trampolines” las cuales van a permitir saltar de un nivel superior a otro inferior dependiendo el color de las casillas, por ejemplo, la casilla morada del nivel 6 es un trampolín, porque en el nivel 3 hay una casilla del mismo color; ahora, observa la casilla combinada del nivel dos, esta casilla permite que la casilla verde oscuro del nivel seis y la verde claro del nivel 4 sean trampolines. Recuerda que los trampolines los encontrarás en cada una de las secciones.

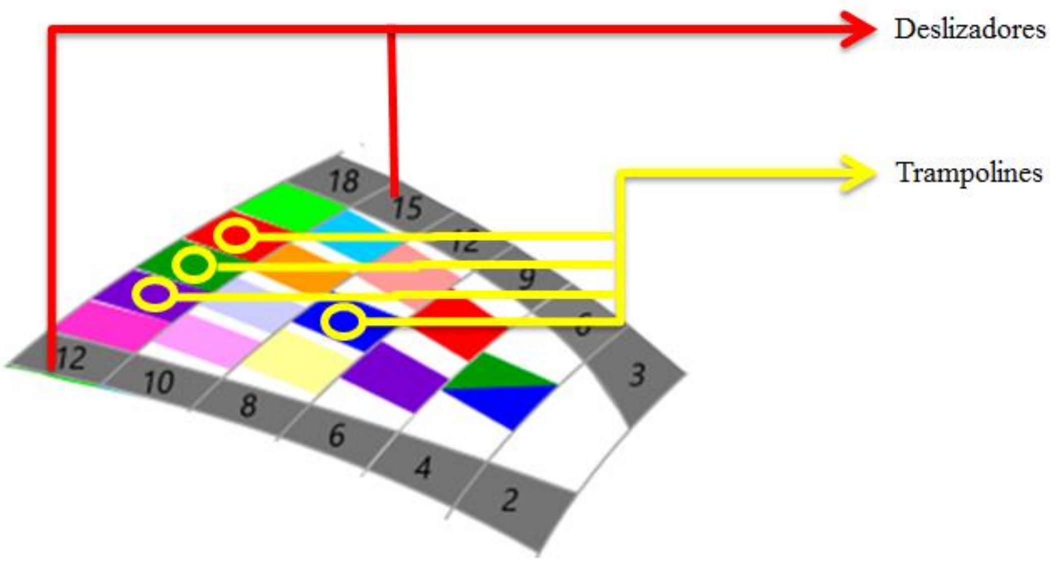


Figura 6. Sección 6 del sector izquierdo

Posición inicial de las fichas

Uno de los jugadores lanza uno de los dados para escoger el nivel y ubica las fichas. Una de las dos fichas de cada jugador estará ubicada en el sector izquierdo y la otra en el sector derecho.

¡La posición inicial será la misma para los dos jugadores!

Supongamos que tras el lanzamiento obtienes el número 4, entonces una de las fichas de cada jugador deberá ubicarse en el sector izquierdo, nivel 4, casilla neutra y la otra en el sector derecho, nivel 4 en la casilla neutra.

Observa en la figura 7 esta posición, ¡es muy sencillo!

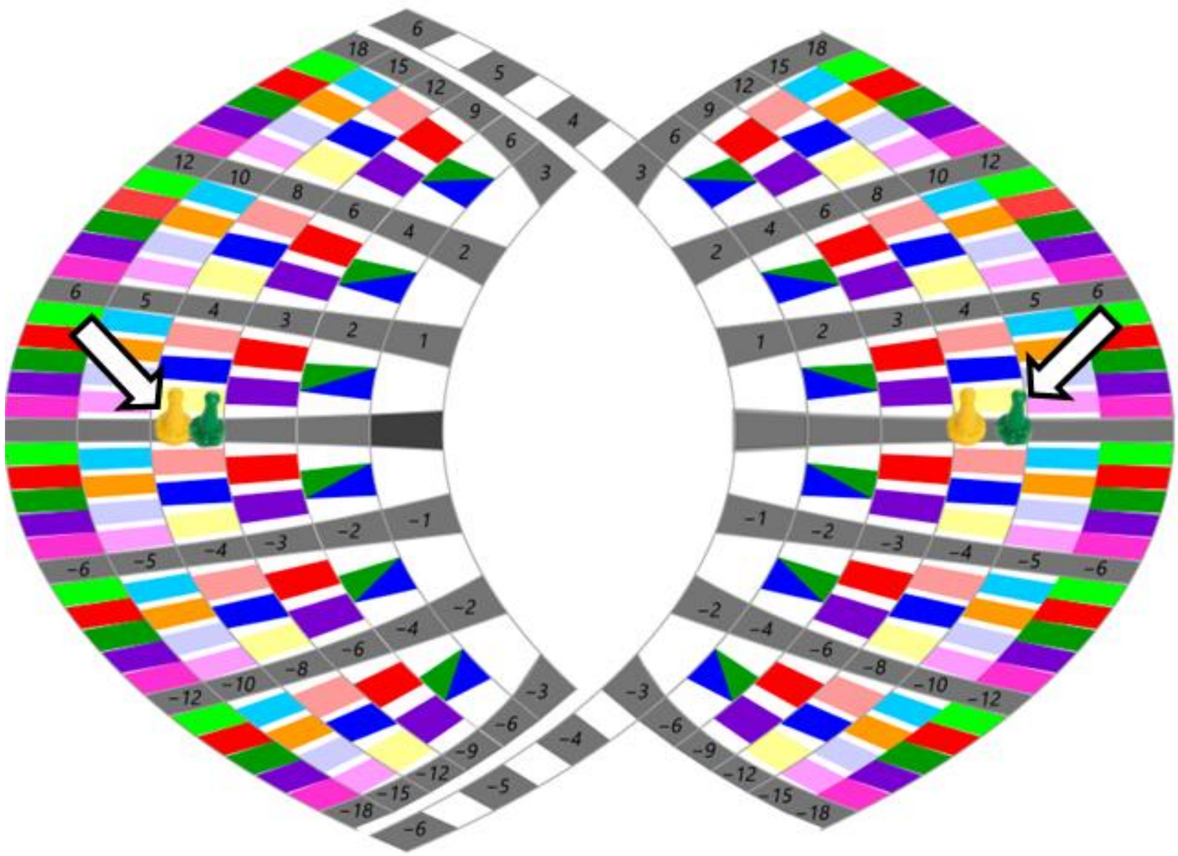


Figura 7

Ahora uno de los jugadores lanza los dos dados, los números que obtienes servirán para determinar la sección en la que ubicarás las fichas, **el dado rojo determina la sección del sector izquierdo y el verde la sección del sector derecho**, ubica las fichas en una de las casillas del nivel 4 de dichas secciones cuidando que las dos (cada una en su sector y sección) se encuentren en casillas del mismo color.

Supongamos que los dados arrojaron los números 1 y 5, (y que el jugador A tiene fichas amarillas, mientras que el jugador B tiene fichas verdes) entonces, la ficha del sector izquierdo será ubicada en una de las casillas del nivel 4 en la

sección 1 (observa el color de la casilla en la que decidiste ubicar la ficha) y la otra ficha en el sector derecho, nivel 4, sección 5 **en la casilla del mismo color que elijas para la ficha del sector izquierdo.**

Observa en la figura 8, que las fichas del sector izquierdo están ubicadas en el nivel 4, sección 1, casilla amarilla (casilla -11) y las del sector derecho en el nivel 4, sección 5, casilla amarilla (casilla 5).

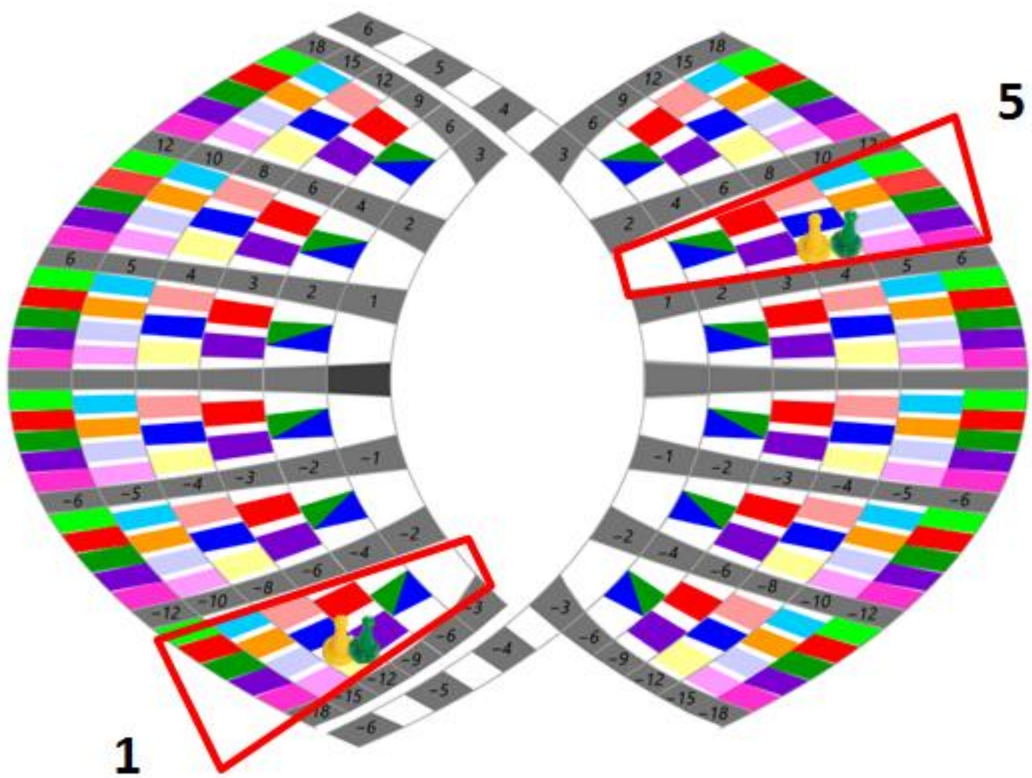
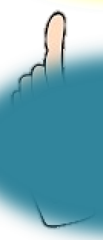


Figura 8

¿Cómo ganar?

Gana aquel jugador que, siguiendo las reglas, lleve la ficha del sector izquierdo, desde su posición inicial hasta la casilla neutra del nivel 1.

Reglas del juego e infracciones



1. La posición inicial de las fichas de ambos jugadores será la misma.
2. Una de las fichas de cada jugador estará en el sector izquierdo, la otra en el sector derecho.
3. Las dos fichas de un jugador deben estar ubicadas siempre en el mismo nivel en el sector correspondiente.
4. Las casillas en las que se encuentren las dos fichas de un jugador, siempre deben ser del mismo color.

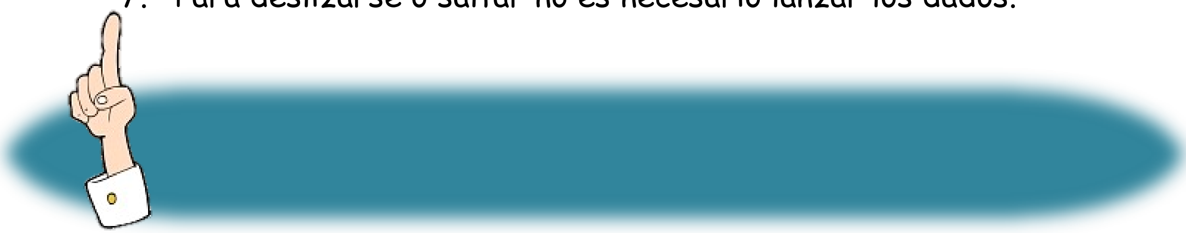
5. El dado verde indica la cantidad de casillas que el jugador puede subir con ambas fichas en un mismo nivel.
6. El dado rojo indica la cantidad de casillas que el jugador puede bajar con las dos fichas en un mismo nivel.
7. Tras cada lanzamiento, el jugador debe elegir jugar con el dado verde (subir) o con el dado rojo (bajar).

1. Las fichas realizan los movimientos simultáneamente, esto quiere decir que ambas fichas del jugador que realizó el lanzamiento suben o bajan la misma cantidad de casillas, o saltan la misma cantidad de niveles.
2. El desplazamiento "subir" o "bajar" será únicamente sobre cada nivel.
3. Subir o bajar no permite cambios de nivel.
4. Las dos fichas de cada jugador saltan al tiempo desde el trampolín hasta la casilla del mismo color que se encuentra en un nivel inferior.

5. Las casillas a las que saltan las fichas, deberán estar en la misma sección en la que se encuentran los trampolines de partida.

6. Los deslizadores llevan las fichas únicamente hasta el primer nivel.

7. Para deslizarse o saltar no es necesario lanzar los dados.



1. Tras cada lanzamiento de dados y posterior movimiento, se cede el turno.
2. Si el movimiento realizado lleva a un deslizador o trampolín, se debe esperar al siguiente turno para efectuar el salto.
3. Es posible "pasar" tras un lanzamiento de dados, cediendo el turno al otro jugador sin realizar movimientos.

1. Devuelve las fichas de tu compañero a la posición anterior si:

a. Mueve una de las fichas y la otra no.

b. Realiza movimientos diferentes con las dos fichas.

c. Ubica las fichas en un nivel diferente al 1 cuando usa deslizadores.

d. Mueva las fichas en dirección contraria las del dado escogido.

e. Salta, cuando su ficha no está ubicada en un trampolín.

2. Lanza los dados por él y mueve sus fichas según tu elección si:

a. Mueve más o menos casillas de las que indica el dado escogido.

b. Salta o se desliza sin esperar su turno.

No olvides...

El objetivo del juego es llevar la ficha del sector izquierdo, desde su posición inicial hasta la casilla 0 del nivel 1.

Siguiendo con nuestro ejemplo, la posición inicial de las fichas es: nivel 4, casilla -11 del sector izquierdo y casilla 5 del sector derecho.

Estrategia 1 (Deslizando las fichas):

Desde la ubicación inicial desplaza las fichas hasta un deslizador, llévalas al nivel 1 y mueve las fichas hasta que la del sector izquierdo llegue a la casilla 0.

No olvides...

Jugar de acuerdo a las reglas

En la figura 9 puedes observar algunas alternativas si quieres usar deslizadores, no necesariamente debes usar el deslizador más cercano.

Ten en cuenta que los movimientos son de acuerdo a los números que arrojen los dados y que es posible que la ficha suba o baje varias veces antes de llegar a la posición deseada.

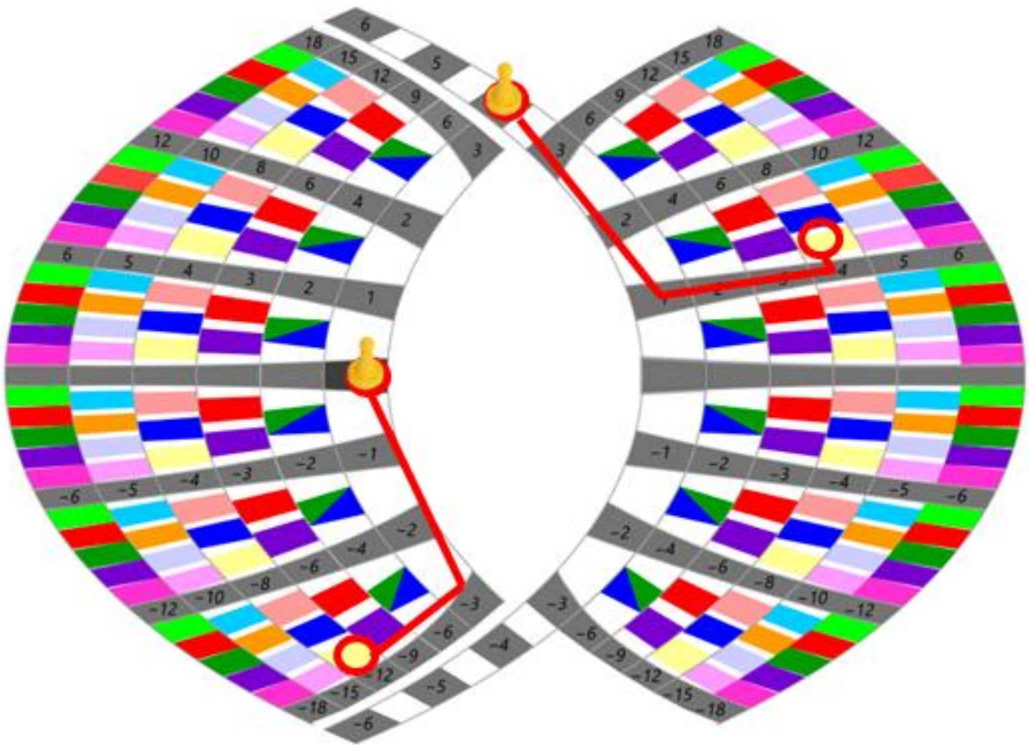


Figura 9

En la opción 1 (figura 9) las jugadas fueron:

- Mover una casilla hacia abajo (dado rojo, número 1) para llegar al deslizador.
- Nueva posición: Nivel 4, casilla del sector izquierdo -12 y casilla del sector derecho 4.

- Deslizarse al nivel 1 (sin lanzar dados)
- Nueva posición: nivel 1, casilla del sector izquierdo -3 y casilla del sector derecho 1.
- Mover tres casillas hacia arriba (dado verde, número 3) para que la ficha del sector izquierdo llegue a la casilla neutra del nivel 1.
- Nueva posición: Nivel 1, casilla neutra del sector izquierdo o casilla 0 y casilla del sector derecho 4.

No olvides…

Tras cada lanzamiento debes ceder el turno a tu compañero

Estrategia 2 (Saltando y deslizando):

Desde la ubicación inicial (Nivel 4, casilla -11 del sector izquierdo y casilla 5 del sector derecho) desplaza las fichas hasta un trampolín y salta a la casilla del mismo color en un nivel inferior (no olvides que las dos fichas deben realizar los mismos movimientos); luego, desplaza las fichas a un deslizador, llévalas al nivel 1 y muévelas hasta que la del sector izquierdo llegue a la casilla 0.

En la figura 10 es posible observar algunos movimientos realizados en el tablero al usar un trampolín, nota que luego de saltar usando el trampolín fue necesario desplazar las fichas a un deslizador para llevarlas al nivel 1.

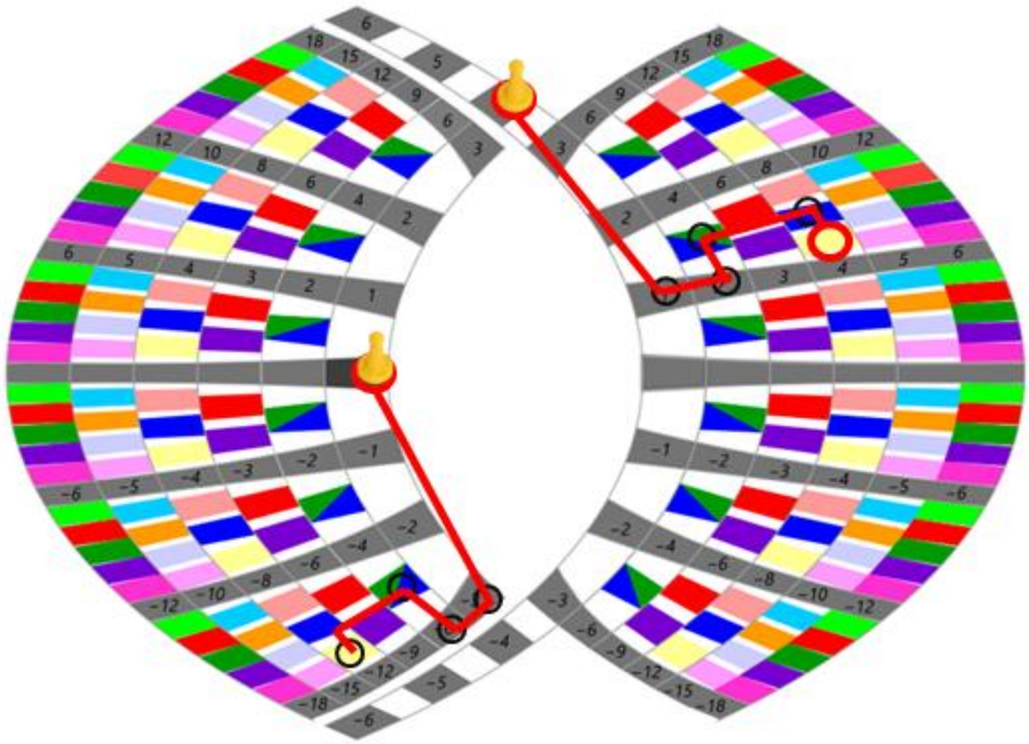


Figura 10.

En la opción 1 (figura 10) las jugadas fueron:

- Mover una casilla hacia arriba (dado verde, número 1) para llegar al trampolín.
- Nueva posición: Nivel 4, casilla del sector izquierdo -10 y casilla del sector derecho 6.
- Sata al nivel 2 (sin lanzar dados)
- Nueva posición: nivel 2, casilla del sector izquierdo -5 y casilla del sector derecho 3.
- Mover una casilla hacia arriba (dado verde, número 1) para llegar al deslizador.

- Nueva posición: Nivel 2, casilla del sector izquierdo -4 y casilla del sector derecho 4.
- Deslizarse al nivel 1 (sin lanzar dados)
- Nueva posición: nivel 1, casilla del sector izquierdo -2 y casilla del sector derecho 2.
- Mover dos casillas hacia arriba (dado verde, número 2) para llevar la ficha del sector izquierdo a la casilla neutra o 0 del nivel 1.
- Nueva posición: Nivel 1, casilla del sector izquierdo 0 y casilla del sector derecho 4.

Ya que conoces las reglas…

¡¡incluyamos un nuevo elemento!

Para esto, incluiremos un nuevo elemento: la tabla de registro; en esta, como su nombre lo indica, se deben registrar todos los movimientos, la posición con la que inicia el juego, el dado y número que se elige en cada jugada, la posición tras cada movimiento y otros elementos que descubrirás más adelante.

No olvides…

Todos los movimientos deben ser registrados

Observa la tabla de registro (figura 11), en la parte superior están los espacios para registrar la posición inicial de las fichas (Nivel, casilla del sector izquierdo y casilla del sector derecho). Nota que en la parte superior derecha se encuentra un cuadrado, allí escribirás cualquier letra del abecedario.

En la parte inferior, registrarás todos los movimientos que realices tras cada jugada.

Posición inical								
Nivel	Casilla sector izquierdo	Casilla sector derecho			$\square$	+		=
				Nivel			C.S. Izquierdo	C. S. Derecho

Dado	Nueva Posición										
	Movimiento	Nivel	Casilla Sector Izquierdo	Casilla Sector Derecho	Casilla Ecuación	Expresión					
						Nivel	$\square$	+	C.S. Izquierdo	=	C.S. Derecho

Figura 11

En la casilla "*Dado*" registrarás el número y color de dado con el que decides jugar; luego, el movimiento que hiciste (subir casillas, bajar casillas, saltar, deslizar o ceder el turno), el nivel en que quedaron las fichas después del movimiento, la casilla del sector izquierdo y la casilla del sector derecho.

Con el ejemplo anterior…

La posición inicial de las fichas es: nivel 4, casilla -11 del sector izquierdo y casilla 5 del sector derecho, supongamos que escoges la letra k para escribirla en el cuadrado (figuras 12 y 13).

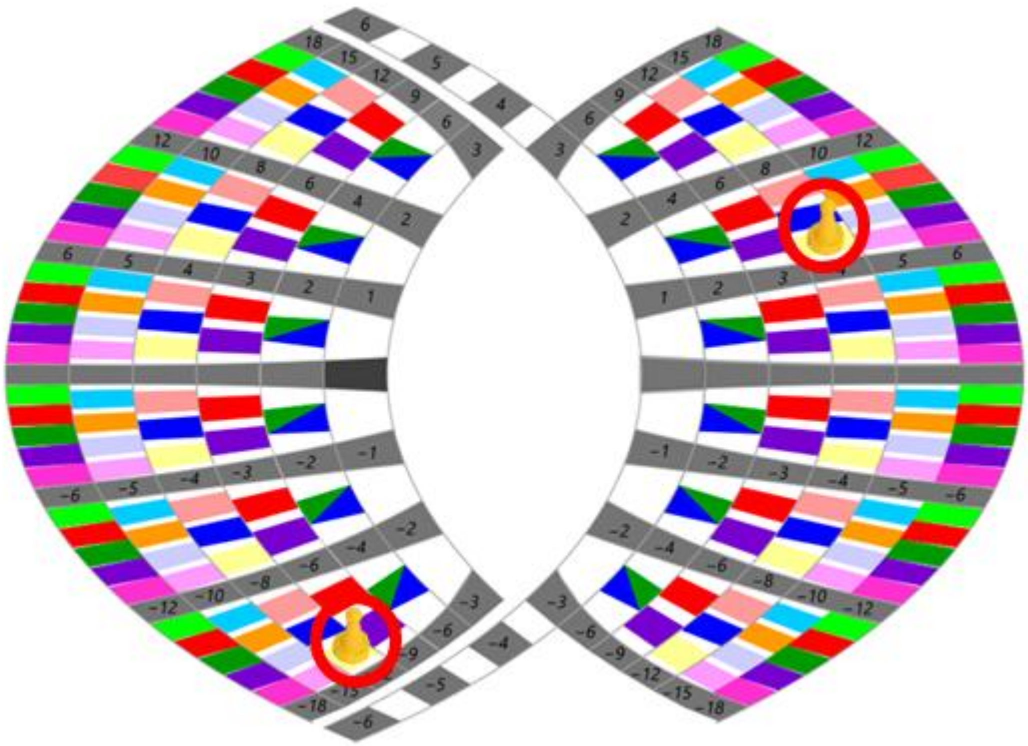


Figura 12

Entonces en la tabla de registro:

Posición inical								
Nivel	Casilla sector izquierdo	Casilla sector derecho						
4	-11	5	4	k	+	-11	=	5
			Nivel			C.S. Izquierdo		C. S. Derecho

Dado	Nueva Posición											
	Movimiento	Nivel	Casilla Sector Izquierdo	Casilla Sector Derecho	Movimiento algebraico	Expresión						
						Nivel	x	?	+	C.S. Izquierdo	=	C.S. Derecho

Figura 13

Pregunta…

Reconoces la expresión $4k + (-11) = 5$

Habla con tus compañeros …

Sobre las igualdades en las que uno de sus términos es desconocido.

Continuemos…

1° Jugada. Mover una casilla hacia arriba (dado verde, número 1) para llegar al trampolín (Figura 14).

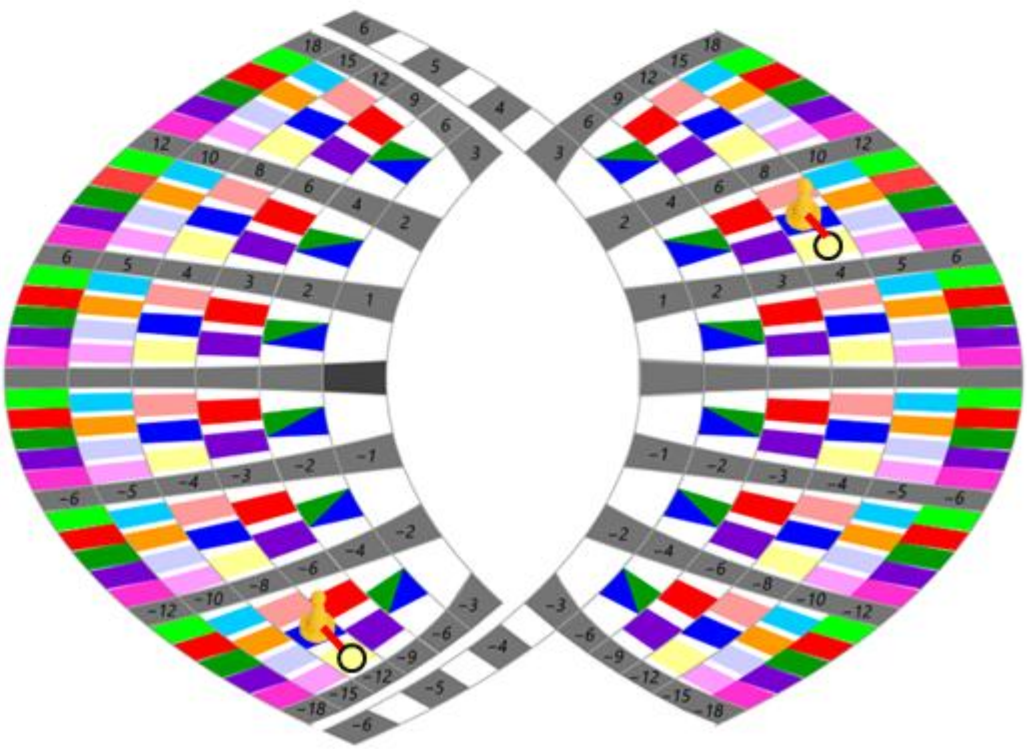


Figura 14

○ Nueva posición: Nivel 4, casilla del sector izquierdo -10 y casilla del sector derecho 6.

En la tabla de registro…

Posición inical							
Nivel	Casilla sector izquierdo	Casilla sector derecho					
4	-11	5	4	k	+ -11	=	5
			Nivel		C.S. Izquierdo		C. S. Derecho

Dado	Nueva Posición										
	Movimiento	Nivel	Casilla Sector Izquierdo	Casilla Sector Derecho	Casilla Ecuación	Expresión					
						Nivel	$\square$	+	C.S. Izquierdo	=	C.S. Derecho
1 verde	Subir 1	4	-10	6		4	k	+	(-10)	=	6

Figura 15

Pregunta…

En la "Casilla Ecuación", ¿Qué registras?

Posición inical					
Casilla sector derecho					
5	4	k	+ -11	=	5
	Nivel		C.S. Izquierdo		C. S. Derecho

Nueva Posición									
Nivel	Casilla Sector Izquierdo	Casilla Sector Derecho	Casilla Ecuación	Expresión					
				Nivel	$\square$	+	C.S. Izquierdo	=	C.S. Derecho
4	-10	6	¿?	4	k	+	(-10)	=	6

Figura 16

Observa...

La expresión que representa a la posición anterior y la que representa la nueva posición.

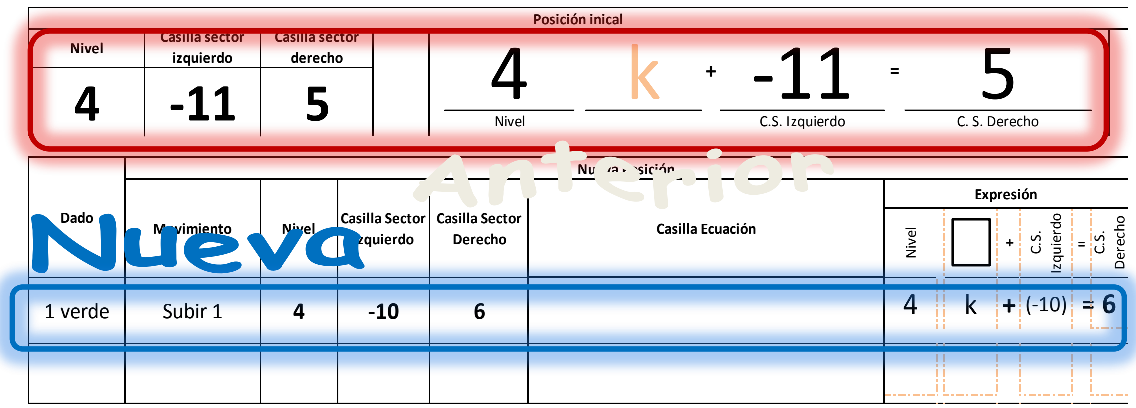


Figura 17

Pregunta...

¿Qué operación efectúas a la expresión de la posición anterior, para llegar a la nueva expresión?

Pista...

Ten en cuenta el movimiento que realizaste en esta jugada.

No olvides...

Las dos fichas realizaron el mismo movimiento

Habla con tus compañeros ...

Sobre la operación que efectúas y cómo la registras en la casilla ecuación.

2° Jugada. Sata al nivel 2 (sin lanzar dados) como se muestra en la figura 18.

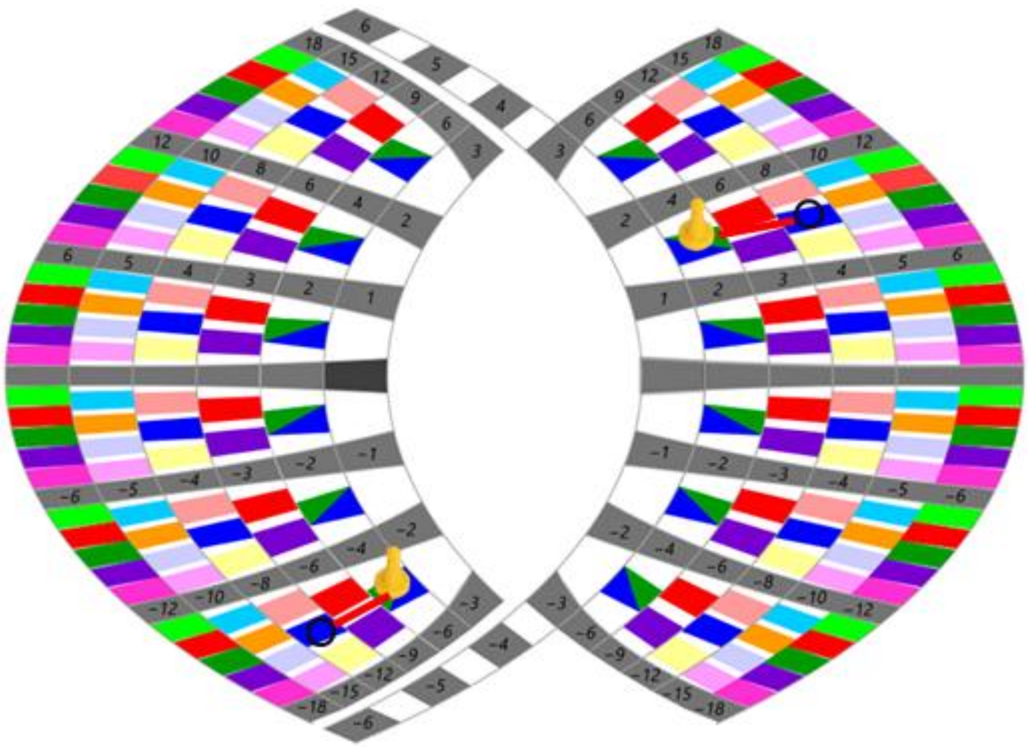


Figura 18

- Nueva posición: nivel 2, casilla del sector izquierdo -5 y casilla del sector derecho 3.

En la tabla de registro…

Nivel	Casilla sector izquierdo	Casilla sector derecho	Posición inical				
			Nivel		+ C.S. Izquierdo	=	C. S. Derecho
4	**-11**	**5**	4	k	+ -11	=	5

Dado	Nueva Posición					Expresión					
	Movimiento	Nivel	Casilla Sector Izquierdo	Casilla Sector Derecho	Casilla Ecuación	Nivel	$\square$	+	C.S. Izquierdo	=	C.S. Derecho
1 verde	Subir 1	**4**	**-10**	**6**		4	k	**+**	(-10)	=	**6**
	salto	**2**	**-5**	**3**		**2**	k	**-**	**5**	=	**3**

Figura 19

No olvides…

Tras cada lanzamiento debes ceder el turno a tu compañero

Pregunta…

En la "Casilla Ecuación", ¿Qué registras?

Observa…

La expresión que representa a la posición anterior y la que representa la nueva posición.

Posición inical									
Nivel	Casilla sector izquierdo	Casilla sector derecho		Nivel			C.S. Izquierdo		C. S. Derecho
4	-11	5		4	k	+	-11	=	5

Dado	Nueva Posición					Expresión					
	Movimiento	Nivel	Casilla sector Izquierdo	Casilla sector Derecho	Casilla ecuación	Nivel	□	+	C.S. Izquierdo	=	C.S. Derecho
1 verde	Subir 1	4	-10	6		4	k	+	(-10)	=	6
	salto	2	-5	3		2	k	-	5	=	3

Anterior

Nueva

Figura 20

Pregunta...

¿Qué operación efectúas a la expresión de la posición anterior, para llegar a la nueva expresión?

Pista...

Ten en cuenta el movimiento que realizaste en esta jugada.

No olvides...

Las dos fichas realizaron el mismo movimiento

Habla con tus compañeros ...

Sobre la operación que efectúas y cómo la registras en la casilla ecuación.

3° Jugada. Mover una casilla hacia arriba (dado verde, número 1) para llegar al deslizador (Figura 21).

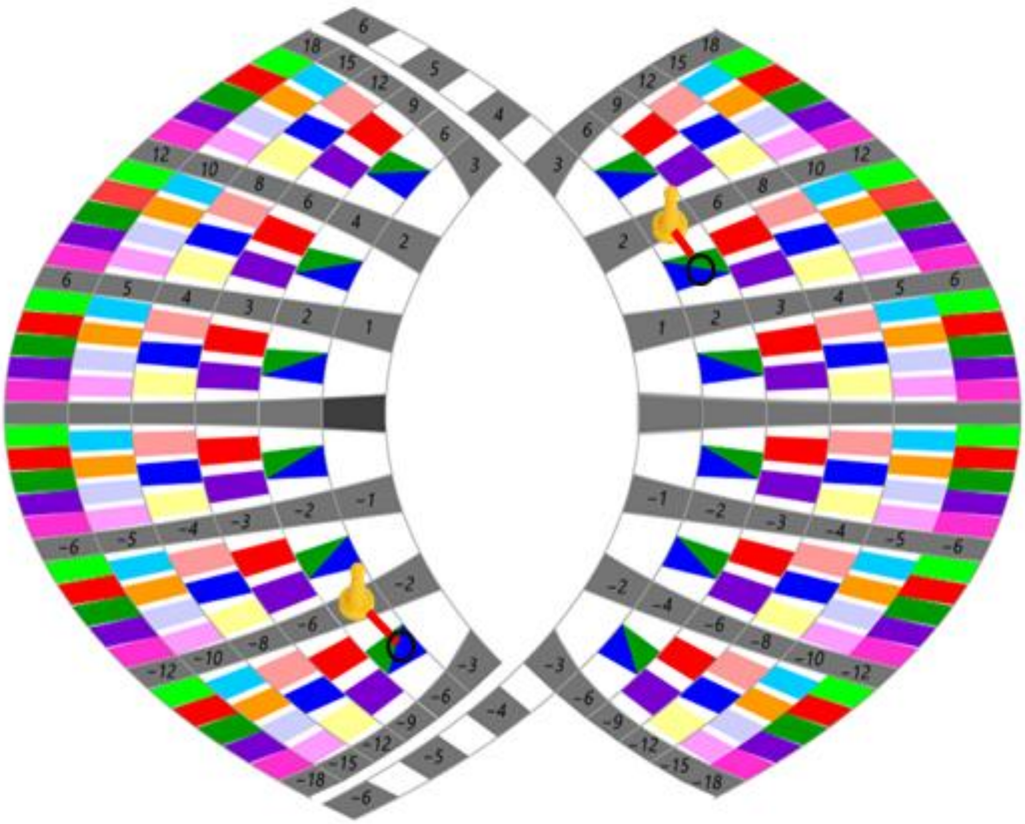


Figura 21

- Nueva posición: Nivel 2, casilla del sector izquierdo -4 y casilla del sector derecho 4.

En la tabla de registro…

Posición inical						
Nivel	Casilla sector izquierdo	Casilla sector derecho				
4	-11	5				
			4	k	+ -11	= 5
			Nivel		C.S. Izquierdo	C. S. Derecho

Dado	Nueva Posición					Expresión					
	Movimiento	Nivel	Casilla Sector Izquierdo	Casilla Sector Derecho	Casilla Ecuación	Nivel	$\square$	+	C.S. Izquierdo	=	C.S. Derecho
1 verde	Subir 1	4	-10	6		4	?	+	(-10)	=	6
	salto	2	-5	3		2	k	-	5	=	3
1 verde	Subir 1	2	-4	4		2	k	-	4	=	4

Anterior

Nueva

Figura 22

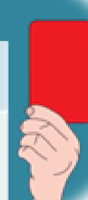
No olvides…

Registrar la operación que te permite ir de la expresión de la posición anterior a la nueva.

Nueva regla e infracción.

Todos los movimientos deben ser registrados.

Devuelve las fichas de tu compañero a la posición anterior si no registra tras la jugada.



4°

Jugada. Deslizarse al nivel 1 (sin lanzar dados) como se muestra en la figura 23.

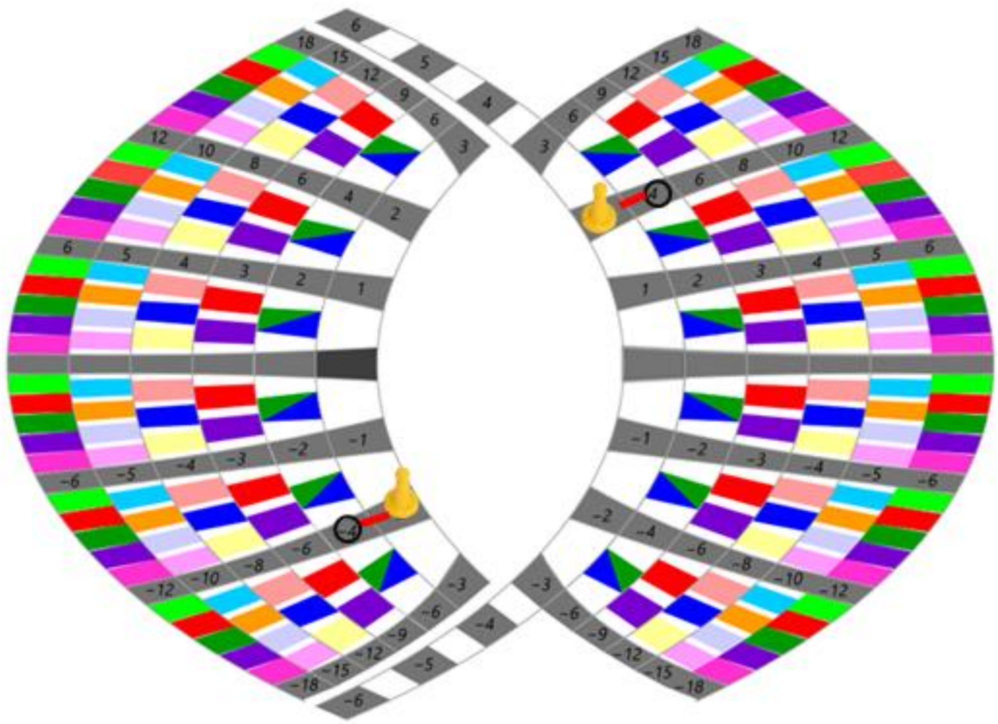


Figura 23

- Nueva posición: nivel 1, casilla del sector izquierdo -2 y casilla del sector derecho 2.

En la tabla de registro…

Posición inical								
Nivel	Casilla sector izquierdo	Casilla sector derecho						
4	**-11**	**5**		4	k	+ -11	=	5
				Nivel		C.S. Izquierdo		C. S. Derecho

Dado	Nueva Posición					Expresión					
	Movimiento	Nivel	Casilla Sector Izquierdo	Casilla Sector Derecho	Casilla Ecuación	Nivel	$\square$	+	C.S. Izquierdo	=	C.S. Derecho
1 verde	Subir 1	**4**	**-10**	**6**		4	k	**+**	(-10)	**=**	**6**
	salto	**2**	**-5**	**3**		**2**	**k**	**-**	**5**	**=**	**3**
1 verde	Subir 1	**2**	**-4**	**4**		**2**	**k**	**-**	**4**	**=**	**4**
	Deslizarse	**1**	**-2**	**2**		**1**	**k**	**-**	**2**	**=**	**2**

Figura 24

No olvides…

Registrar la operación que te permite ir de la expresión de la posición anterior a la nueva.

5° Jugada. Mover dos casillas hacia arriba (dado verde, número 2) para llevar la ficha del sector izquierdo a la casilla neutra o 0 del nivel 1 (Figura 25).

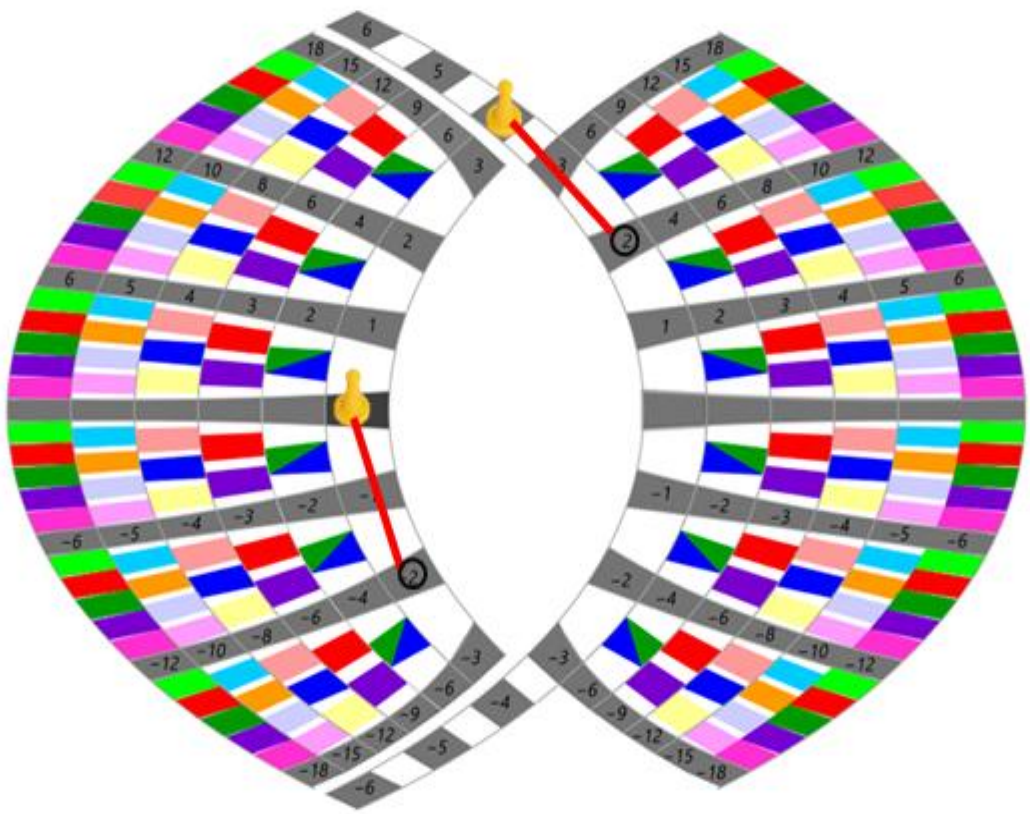


Figura 25

- Nueva posición: Nivel 1, casilla del sector izquierdo 0 y casilla del sector derecho 4.

En la tabla de registro…

Posición inical									
Nivel	Casilla sector izquierdo	Casilla sector derecho							
4	**-11**	**5**		4	k	+	-11	=	5
				Nivel			C.S. Izquierdo		C. S. Derecho

Dado	Nueva Posición										
	Movimiento	Nivel	Casilla Sector Izquierdo	Casilla Sector Derecho	Casilla Ecuación	Expresión					
						Nivel	$\square$	+	C.S. Izquierdo	=	C.S. Derecho
1 verde	Subir 1	4	-10	6		4	k	+	(-10)	=	6
	salto	2	-5	3		2	k	-	5	=	3
1 verde	Subir 1	2	-4	4		2	k	-	4	=	4
	salto	1	-2	2		1	k	-	2	=	2
2 verde	Subir 2	1	0	4		1	k	-	0	=	4

Figura 26

No olvides…

Registrar la operación que te permite ir de la expresión de la posición anterior a la nueva.

¡Muy bien, llevaste la ficha del sector izquierdo a la casilla 0!

Pregunta…

¿Qué significa que $1k - 0 = 4$

Pista…

- ✓ Todo número sumado o restado con 0 es el mismo.
- ✓ Todo número multiplicado por uno es el mismo.

Habla con tus compañeros …

Sobre el significado de la expresión $k = 4$.

Ya que conoces el juego y sus reglas

¡A jugar!

Recuerda que el objetivo del juego es solucionar la ecuación inicial, llevando la ficha del sector izquierdo, desde su posición inicial hasta la casilla 0 del nivel 1, registrando todos sus movimientos, y que la posición final de la ficha del sector derecho representará el valor desconocido.

Habla con tus compañeros ...

Discute con tus compañeros y profesor...

¿ Por qué una regla delas reglas principales del juego es que las dos fichas, siempre se deben mover al tiempo. ?

¿ Por qué es posible usar trampolines y deslizadores ?

¿ Por qué los trampolines llevan las fichas únicamente a niveles intermedios ?

¿ Por qué los deslizadores las llevan las fichas directamente al nivel 1 ?

Qué pasaría si para la posición inicial las fichas no se encuentran en casillas del mismo color. ?

¿ Que ocurriría si al usar un deslizador detenemos las fichas en un nivel diferente al 1, ?

¿ Existirá una operación que nos permita llevar las fichas a un nivel diferente al 1, usando deslizadores. ?