APROXIMACIÓN GEOMÉTRICA A LA DERIVADA Y OTRAS FUNCIONES.
ANÁLISIS DE UNA EXPERIENCIA DE FORMACIÓN

TRABAJO DE GRADO ASOCIADO AL GRUPO DE INVESTIGACIÓN RE-MATE

JOHANA ELIZABETH CARVAJAL MILLÁN

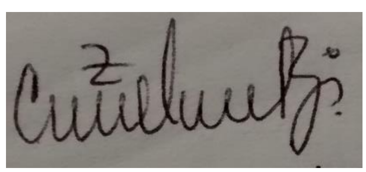
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
2-2015

APROXIMACIÓN GEOMÉTRICA A LA DERIVADA Y OTRAS FUNCIONES. ANÁLISIS DE UNA EXPERIENCIA DE FORMACIÓN

JOHANA ELIZABETH CARVAJAL MILLÁN
CÓDIGO: 2010240014
CC. 1013628413

ASESORA:
CAROLINA ROJAS CELIS

FIRMA ASESORA



Trabajo de grado para obtener el título de Licenciada en Matemáticas

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
2-2015

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL	**FORMATO**
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE
Código: FOR020GIB	**Versión: 01**
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	**Página 1 de 4**

1.Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Aproximación Geométrica a la derivada y otras funciones. Análisis de una experiencia de formación
Autor(es)	Carvajal Millán, Johana Elizabeth
Director	Carolina Rojas Celis
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2015, 110 páginas
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	DERIVADA, COVARIACIÓN, PENSAMIENTO MATEMÁTICO, ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS.

2. Descripción

El presente trabajo de grado es producto de la sistematización y análisis de la propuesta de aproximación geométrica al concepto de derivada y otras funciones ligadas al estudio de fenómenos de covariación, implementada en el curso de Didáctica Específica II de la Especialización en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional a partir de los resultados de investigaciones en Educación Matemática y particularmente en Didáctica de la derivada. Para esto se procuró dar respuesta a las siguientes cuestiones: ¿la propuesta implementada atiende a los aportes que hace la comunidad académica de investigación en Didáctica sobre la derivada?, ¿resulta estimulante y significativo para los Profesores en ejercicio abordar el estudio de la derivada desde esta perspectiva de aproximación geométrica, mediante el trabajo con curvas?, a través de los siguientes objetivos específicos:

- Describir la propuesta de estudio de la covariación en/a través de curvas en el plano, llevada a cabo en el curso "Didáctica específica II".
- Analizar las producciones de los estudiantes al abordar las tareas propuestas.
- Analizar la propuesta a la luz de investigaciones en el campo de la Educación Matemática.

- Organizar un documento que reporte el trabajo realizado y sirva de fuente de información para educadores matemáticos.

3. Fuentes

Para el presente trabajo de grado se consultaron variadas investigaciones inscritas en el campo de la Educación Matemática; a continuación algunas de ellas:

Cantoral, R. (2013). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*. México D.F: Subsecretaría de Educación Media Superior, Secretaría de Educación Pública. ISBN: 978-607-9362-03-4.

Cardeñoso, J., Flores, P., & Azcárate, P. (2011). El desarrollo profesional de los profesores de matemáticas como campo de investigación en educación matemática. En Gómez, P., y Rico, L. (Eds.). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática* (pp. 233-244). Granada: Universidad de Granada.

García, M. (1997). *Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: el concepto de función como objeto de enseñanza*. España: GIEM. Universidad de Sevilla.

García, M. (2005). La formación de profesores de matemáticas. Un campo de estudio y preocupación. *Educación Matemática*, *17*(2), 153–166.

Godino, J. D. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20*, 13–31.

Llinares, S. (1998). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación. *UNO. Revista de Didáctica de la Matemática*, *17*, 51–64.

Rico, L. (1996). Didáctica de la Matemática como campo de Problemas. *En E. Repetto y G. Marrero (Eds.). Estrategias de intervención en el aula desde la LOGSE.* Las Palmas: ICEPSS.

Rojas, C. (2013). *¿ Enseñamos a los profesores de Matemáticas aquello que nos enseña la investigación en Didáctica sobre la derivada ?* Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Salazar, C., Díaz, H., & Bautista, M. (2009). Descripción de niveles de comprensión del concepto derivada. *Tecné, epistemis y Didaxis*, (26), 62–81.

Sánchez-Matamoros, G. (2014). Adoptando diferentes perspectivas de investigación sobre el concepto de derivada. In *En M. T. Gonzales, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds). Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 41–53). Salamanca: SEIEM.

4. Contenidos
El documento se compone de cuatro capítulos, descritos a continuación: *Capítulo 1:* El problema de investigación. En este se presenta una introducción referente a la propuesta que fue objeto de análisis, la cual fue implementada en un curso de formación de Profesores de Matemáticas y que se presenta como herramienta desarrollable en la Educación Media e inicios de la Educación Superior; también enunciamos los objetivos, las preguntas de investigación y la metodología que se siguió para la realización del trabajo de grado. *Capítulo 2:* Marco de referencia. Para este capítulo se comentan algunas investigaciones enmarcadas en el campo de la Educación del Profesor de Matemáticas, se presentan trabajos referentes a la didáctica de la derivada a nivel de Educación Media y de carreras no matemáticas, y al concepto de derivada en la enseñanza a profesores; además, se rescatan aportes de investigaciones que postulan la variación como medio para potenciar el desarrollo del pensamiento matemático. *Capítulo 3:* La propuesta de enseñanza. En este capítulo se describe la propuesta de aproximación geométrica a la derivada y otras funciones, su origen, objetivos, los estudiantes del curso y el contexto del aula. Además, se presenta la sistematización de las clases y las actividades que los estudiantes realizaron, acompañadas del correspondiente análisis. *Capítulo 4:* Análisis de la propuesta. Se realiza el análisis de la propuesta en relación con lo que investigaciones en el campo de la Educación Matemática, particularmente en el de la Educación del Profesor de Matemáticas y la didáctica de la derivada, postulan.
5. Metodología
Para empezar, realizamos un trabajo de consulta y estudio general de documentos de Educación Matemática que abordaran aspectos relacionados con la formación de profesores y en particular algunos que centraran su atención en el concepto de derivada tanto en la Educación Media como en la enseñanza a profesores; como segunda etapa, se describió y analizó la propuesta de estudio de la covariación en/a través de curvas en el plano, diseñada e implementada por el doctor Edgar Alberto Guacaneme Suárez en el curso "Didáctica específica II" de la Especialización en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional; tercero, se sistematizaron las producciones de los estudiantes al abordar las tareas propuestas, para finalmente analizar y organizar el presente documento que reporta el trabajo realizado.
6. Conclusiones
Las investigaciones en el campo de la Educación del profesor de Matemáticas, postulan la necesidad de proponer tareas o situaciones que dinamicen la actividad matemática de los estudiantes para profesor, para así propiciar el desarrollo de su competencia profesional. Se dice también, que es menester que tales actividades permitan la ejercitación de procesos matemáticos y el desarrollo del

pensamiento matemático, los cuales enmarcados en el contexto del aula de matemáticas y junto con la consideración de aspectos personales del profesor, contribuirán a que este se acerque a una formación integral. Respecto a los anteriores aspectos, el trabajo con curvas que los profesores Guacaneme, Ángel y Bello propusieron en cursos de formación de profesores, los traen a consideración y, como en el caso específico de las actividades que el profesor Guacaneme propuso para las curvas generada y degenerada, logra integrar varios de ellos. Así, vemos cómo en tal trabajo se permite a los estudiantes realizar actividades propias del quehacer matemático, sin desligarlas de la reflexión y análisis que a partir de la experiencia con las mismas, guiarán a los estudiantes hacia la consideración de aspectos pedagógicos, que les permitan pensar en propuestas similares para el aula de matemáticas.

A nivel matemático la propuesta logra conectar diversos registros semióticos de los objetos matemáticos abordados, lo que particularmente para la curva degenerada, corresponde con lo que autores como Vrancken et al. (2009) postulan como elemento necesario para lograr un pleno desarrollo del concepto de derivada. Este hecho, sumado a la gran dificultad que según las investigaciones se presenta en la comprensión de la derivada desde su representación geométrica, sin el uso de la idea de límite, hace de esta propuesta un acercamiento valioso e interesante para el estudio de tal tópico, en la cual a partir de la covariación se establecen propiedades de la función derivada a la vez que se propicia el desarrollo del pensamiento matemático.

El uso del software en la propuesta es sin duda alguna un elemento a resaltar; investigaciones como las de Montiel (2005) y Robles, Del Castillo y Font (2012) señalan que las TIC's en la enseñanza pueden ser herramientas potencialmente constructivas y significantes para abordar tópicos matemáticos, por lo que la propuesta responde efectivamente a tal aporte que desde el campo de la Educación Matemática se realiza, incluyendo software especializados como Derive, Geogebra y Mathematical entre otros , no usuales en el ambiente de aprendizaje.

Consideramos que dentro de la formación de profesores de matemáticas, es necesario promover una actividad reflexiva que, a partir de la experiencia con este tipo de trabajos, permita al estudiante repensar su actuar en el aula; razón por la cual resaltamos el trabajo que desde la especialización en Educación Matemática de la Universidad se realiza y particularmente el que el profesor Guacaneme propone, ya que son estos, muestras claras de la innovación que los formadores de profesores se arriesgan a hacer, en pro de la formación de los futuros profesores de matemáticas.

Elaborado por:	Johana Elizabeth Carvajal Millán
Revisado por:	Carolina Rojas Celis

Fecha de elaboración del Resumen:	03	11	2015

CONTENIDO

LISTA DE IMÁGENES

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de grado es producto de la sistematización y organización de la propuesta de aproximación geométrica al concepto de derivada y otras funciones ligadas al estudio de fenómenos de covariación, implementada en el curso de Didáctica Específica II de la Especialización en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional a partir de los resultados de investigaciones en Educación Matemática y particularmente en Didáctica de la derivada. Para esto se procuró dar respuesta a las siguientes cuestiones: ¿la propuesta implementada atiende a los aportes que hace la comunidad académica de investigación en Didáctica sobre la derivada?, ¿resulta estimulante y significativo para los Profesores en ejercicio abordar el estudio de la derivada desde esta perspectiva de aproximación geométrica, mediante el trabajo con curvas?, a través de los siguientes objetivos específicos:

Objetivos específicos

- Describir la propuesta de estudio de la covariación en/a través de curvas en el plano, llevada a cabo en el curso "Didáctica específica II".
- Analizar las producciones de los estudiantes al abordar las tareas propuestas.
- Analizar la propuesta a la luz de investigaciones en el campo de la Educación Matemática.
- Organizar un documento que reporte el trabajo realizado y sirva de fuente de información para educadores matemáticos.

Como parte de la metodología de investigación, realizamos un trabajo de consulta y estudio general de documentos de Educación Matemática que abordaran aspectos relacionados con la formación de profesores, algunos relacionados con la didáctica de la derivada y en particular algunos que centraran su atención en el concepto de derivada en la enseñanza a profesores; como segunda etapa, se describió la propuesta de estudio de la covariación en/a través de curvas en el plano, llevada a cabo en el curso "Didáctica específica II", organizando las tareas entregadas por los estudiantes y sistematizando los videos de las clases en los que tal propuesta fue implementada, para finalmente analizar cada tarea, determinar la correspondencia de la propuesta con los aportes que desde la didáctica de la derivada y desde el campo de la Educación Matemática se realizan y organizar el presente documento que reporta dicho trabajo.

Este documento se organiza en cuatro capítulos, encontrando en primer lugar aspectos relativos al problema de investigación; en este se presenta una introducción referente a la propuesta que fue objeto de análisis, la cual fue implementada en un curso de formación de Profesores de Matemáticas y que se presenta como herramienta desarrollable en la Educación Media e inicios de la Educación Superior; también enunciamos los objetivos, las preguntas de investigación y la metodología que se siguió para la realización del trabajo de grado. En el capítulo 2, titulado Marco de referencia, se comentan algunas investigaciones enmarcadas en el campo de la Educación del Profesor de Matemáticas, se presentan trabajos referentes a la didáctica de la derivada a nivel de Educación Media y de carreras no matemáticas, y al concepto de derivada en la enseñanza a profesores; además, se rescatan aportes de investigaciones que postulan la variación como medio para potenciar el desarrollo del pensamiento matemático. El tercer capítulo se refiere a la propuesta de enseñanza, en este se describe la propuesta de aproximación geométrica a la derivada y otras funciones, su origen, objetivo, los estudiantes del curso y el contexto del aula. Además, se presenta la sistematización de las clases y las actividades que los estudiantes realizaron, acompañadas, en cada caso, del correspondiente análisis. Se finaliza el cuerpo del documento con el capítulo 4 que corresponde al análisis de la propuesta en relación con lo que investigaciones en el campo de la Educación del profesor de matemáticas y de la didáctica de la derivada postulan, rescatando aspectos positivos de la propuesta y proponiendo algunos otros para su mejora.

CAPÍTULO 1: EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo presentamos la justificación del estudio de la propuesta, en el marco de la investigación en Didáctica de las Matemáticas; también enunciamos los objetivos del trabajo y la metodología utilizada para las etapas de desarrollo del mismo.

1.2 SOBRE EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

La formación de profesores de Matemáticas se ha convertido en uno de los intereses del campo de la Educación Matemática, donde uno de sus objetivos ha sido que el profesor de matemáticas de hoy se cuestione sobre el qué enseñar, cómo enseñarlo y se dote de herramientas tanto matemáticas como didácticas que le permitan hacer innovación, proponiendo nuevas estrategias de enseñanza que contribuyan a un aprendizaje significativo, que atienda a los intereses y necesidades de los estudiantes.

> Cada niño tiene características, intereses, capacidades y necesidades que les son propias; si el derecho a la educación significa algo, se deben diseñar los sistemas educativos y desarrollar los programas de modo que tengan en cuenta toda la gama de esas diferentes características y necesidades. (UNESCO, 1994, p.8)

Por lo tanto, el profesor de matemáticas como actor fundamental del proceso educativo debe estar en continua formación, preparándose para los cambios que la educación actual plantea generando herramientas que den respuesta a las exigencias de la sociedad, considerando la diversidad en el aula y reconociendo las características, capacidades y necesidades de los alumnos. Dicha necesidad de cambio, debe ser un componente a considerar en la formación de futuros profesores de matemáticas, o bien, en la de aquellos profesores interesados en apostarle a una propuesta de enseñanza distinta, con elementos inusuales que permitan seguir cambiando el rumbo de la enseñanza actual de las matemáticas.

A través de la historia, es posible ver cómo durante las primeras décadas del siglo XX, ya había un interés por realizar cambios en la enseñanza de las matemáticas, a través de las investigaciones que se realizaban en el campo de la Educación Matemática; un ejemplo de ello lo es la creación del ICMI[1], en la que desde el año 1908 se realizan contribuciones en pro de la calidad de la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, algunos autores afirman que la investigación que hasta los años noventa se realizaba en el campo, al menos en Estados Unidos, carecían de fundamentos teóricos que la sustentaran y en contraste, en los últimos treinta años se han consolidado grupos de investigación, que han desarrollado la "Teoría" de la Educación Matemática. Uno de ellos, con inicios en el año 1984, es el Grupo de Trabajo TME (Theory of Mathematics Education) desde el cual, a la cabeza del profesor Steiner, se inició la fundamentación de la Didáctica de las Matemáticas, y con el que en el año 1988, en la tercera Conferencia de dicho grupo, se planteó el estudio de aspectos relacionados con la investigación en Educación Matemática para la formación de profesores (Godino, 2010), trabajos con los que se ha intentado encaminar dicha formación, por senderos ligados a la didáctica de las matemáticas o enseñanza de las mismas.

El interés por atender asuntos que refieren a la formación de los profesores de matemáticas, se sigue manteniendo, y hoy en día se ve reflejado a través de investigaciones que reconocemos en el campo, en revistas especializadas como *The International Hnadbokk Of Mathematics Teacher Education*, así como también en congresos como el ICME que discuten asuntos de la formación de profesores de matemáticas, y en los que se resalta, la necesidad de modificar aspectos del proceso de formación de los profesores, para contribuir a una transformación educativa en la enseñanza de la ciencia (Rojas, 2013).

Es en este sentido, que durante las últimas décadas, en lo que refiere a la investigación, se encuentran propuestas sobre cómo y qué enseñar en los cursos de didáctica específica en los programas de formación de profesores de matemáticas. Dicho interés se ha venido desarrollando a través de las investigaciones en temas relacionados con el Cálculo, la Estadística, la Geometría, la Aritmética y el Álgebra, donde se evidencian propuestas de enseñanza para cada uno de los cursos.

Fue el interés del presente trabajo, realizar un estudio sobre una propuesta realizada durante el año 2013, en el curso Didáctica Específica II de la Especialización en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional[1]. De esta propuesta nos interesó conocer los procesos matemáticos que se propiciaron en los estudiantes al abordar el concepto de derivada, desde una perspectiva diferente a la usual, en la cual los profesores Edgar Alberto Guacaneme, José Leonardo Ángel y Jhon Helver Bello, quienes orientaron tal enfoque, utilizaron la idea de curva matemática como un organizador curricular y en la que estudiaron desde perspectivas matemáticas, didácticas y de mediación tecnológica, el objeto matemático[2].

En esta experiencia, se abordó el estudio de algunos asuntos matemáticos relacionados con la idea de curva y su papel en la solución de situaciones que involucran acción y construcción de conocimiento matemático. Así pues, teniendo en cuenta que el Departamento de Matemáticas de la UPN plantea en sus intenciones formativas para el programa de postgrado, el procurar por la innovación educativa como reto y fuente de conocimiento, desde el espacio académico de Didáctica Especifica, se propiciaron este tipo de actividades con el fin de presentar nuevas herramientas que guiaran al profesor en ejercicio a mejorar y sobre todo a proponer nuevos caminos de enseñanza y aprendizaje de los objetos matemáticos.

En el marco de dicho curso, ofrecido en el segundo semestre del año 2013, el profesor Edgar Guacaneme a cargo del mismo, propuso una secuencia de tareas, que implicaban establecer las expresiones simbólicas, de los lugares geométricos que surgían de unas construcciones realizadas en el software de geometría cinemática: Geogebra, las cuales capturaban la covariación de magnitudes relacionadas con el movimiento de la recta tangente a una función; uno de los lugares geométricos correspondió precisamente a la función derivada,

[1] UPN

[2] Para una descripción general de la propuesta y de algunas actividades desarrolladas en el primer semestre de 2013 ver Guacaneme, Ángel y Bello (2013).

pero esta apareció como uno de los miembros de una familia de funciones, bautizadas localmente como “funciones degeneradas”. De manera análoga se abordó el estudio de funciones que el profesor denominó “funciones generadas” y se postularon otras a las que llamó “funciones perversas”. Dicha propuesta, estuvo orientada a que los estudiantes se hicieran conscientes de la actividad matemática que se propicia con este tipo de aproximación al concepto de derivada y en general, con trabajos alternos a los que se desarrollan usualmente en el estudio de objetos matemáticos del Cálculo. El desarrollo de las sesiones en donde esta propuesta se llevó a cabo, se registró en video y se conservaron algunas de las tareas que realizaron los estudiantes, los cuales son registros que constituyen las evidencias de la propuesta.

Teniendo en cuenta que las investigaciones en didáctica de la derivada señalan la importancia de propiciar un aprendizaje significativo y completo del concepto y aunado al hecho de que esta propuesta pareció innovadora y aún no había sido sistematizada, se hizo interesante el reportar de manera organizada y completa, tanto el planteamiento de la propuesta desarrollada en un programa de formación avanzada de profesores de Matemáticas, así como el desarrollo y análisis de la misma. Además, el hecho de proponer acercamientos de tipo geométrico al concepto de derivada haciendo uso del software, contemplando aspectos específicos de covariación entre dos magnitudes, hizo motivante estudiar la propuesta, pues consideramos que son los diferentes registros semióticos y la conexión entre estos, los que permiten establecer un puente entre el significante y el significado, un camino de conexión entre lo sensorial y lo racional y, abren lugar a la intuición y a la simbolización dentro de las prácticas matemáticas.

1.3 OBJETIVOS

Consideramos importante realizar un estudio de la propuesta, realizando un análisis crítico, que contribuya a la reflexión sobre la necesidad del profesor de matemáticas de reorientar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la derivada, por lo que para la realización del presente trabajo de grado, se plantearon los siguientes objetivos:

Objetivo general

Sistematizar y analizar la propuesta de aproximación geométrica al concepto de derivada y otras funciones ligadas al estudio de fenómenos de covariación, implementada en el curso de Didáctica Específica II de la Especialización en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional a partir de los resultados de investigaciones en Educación Matemática y particularmente en Didáctica de la derivada.

Objetivos específicos

- Describir la propuesta de estudio de la covariación en/a través de curvas en el plano, llevada a cabo en el curso "Didáctica específica II".
- Analizar las producciones de los estudiantes al abordar las tareas propuestas.
- Analizar la propuesta a la luz de investigaciones en el campo de la Educación Matemática.
- Organizar un documento que reporte el trabajo realizado y sirva de fuente de información para educadores matemáticos.

Así, este trabajo de grado tuvo por objetivo organizar y analizar los resultados de la implementación de la propuesta anteriormente descrita, en el marco del estudio en Didáctica de la derivada, para lo cual se procuró dar respuesta a las siguientes cuestiones: ¿la propuesta implementada atiende a los aportes que hace la comunidad académica de investigación en Didáctica sobre la derivada?, ¿resulta estimulante y significativo para los Profesores en ejercicio abordar el estudio de la derivada desde esta perspectiva de aproximación geométrica, mediante el trabajo con curvas?. Para responder las anteriores preguntas, se estableció la siguiente metodología de trabajo:

1.4 METODOLOGÍA

Para empezar, realizamos un trabajo de consulta y estudio general de documentos de Educación Matemática que abordaran aspectos relacionados con la formación de profesores y en particular algunos que centraran su atención en el concepto de derivada en la Educación Media y en la enseñanza a profesores; como segunda etapa, se describió la propuesta de estudio de la covariación en/a través de curvas en el plano, llevada a cabo en el curso "Didáctica específica II"; tercero, se sistematizaron las producciones de los estudiantes al abordar las tareas propuestas, para finalmente analizar y organizar el presente documento que reporta el trabajo realizado y que consideramos sirve de fuente de información para educadores matemáticos.

CAPÍTULO 2: MARCO DE REFERENCIA

En el campo de la Educación Matemática, es posible encontrar investigadores que se han encargado de formular teorías y realizar trabajos de investigación referentes a los procesos de enseñanza y aprendizaje que hoy en día posicionan al campo y lo dotan de credibilidad; tal es el caso del enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática de los profesores Godino, Batanero y Font, la Socioepistemología del Doctor Ricardo Cantoral, la Teoría Antropológica de lo Didáctico del Doctor Chevallard y la Teoría de la Objetivación del Doctor Luis Radford, entre otras. Estas teorías, formuladas por investigadores de gran reconocimiento, han ubicado al campo de manera consistente dentro de la investigación en Didáctica de las Matemáticas, potenciando el estudio de los factores que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje y proponiendo actuaciones para su mejora. Así, con el objetivo de optimizar el proceso de enseñanza, desde hace varias décadas se han venido realizando investigaciones referentes a la formación tanto didáctica como matemática que el profesor debe poseer para poder enseñar, las cuales se enmarcan hoy en día en lo que se ha denominado el campo de investigación de la Educación del Profesor de Matemáticas[3].

A continuación, centraremos nuestra atención en dicho campo y comentamos algunas investigaciones que consideramos importantes para el presente trabajo.

2.1 EL CAMPO DE LA EDUCACIÓN DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Dentro del campo de la Educación Matemática, encontramos líneas y grupos de investigación bien constituidos, que constantemente producen información acerca de aspectos relacionados

[3] Aunque actualmente investigadores como Pablo Florez, Pilar Azcárate, José María Cardeñoso y María Mercedes García Blanco han considerado la Educación del Profesor de Matemáticas como un campo de estudio, a nivel general este sigue presentándose como una línea de investigación del campo de la Educación Matemática; sin embargo y atendiendo a la propuesta realizada desde el grupo de Investigación RE-MATE (Research of mathematics teacher education) de la Universidad Pedagógica Nacional, que también lo establece como campo de investigación, en el presente trabajo de grado adoptamos tal perspectiva.

con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las mismas. Dentro de dicho campo, el estudio de la Educación de Profesores de Matemáticas, ha sido fuertemente considerado, generando que la investigación en la formación de los mismos, sea hoy en día considerada como un propio campo de estudio. Como ejemplo de esto tenemos la SEIEM (Sociedad española de investigación en Educación Matemática), que integrada por más de sesenta investigadores de diferentes universidades españolas, realizan importantes contribuciones respecto al conocimiento y desarrollo profesional del profesor de matemáticas; al igual que congresos como el ICME (internacional Congress on Mathematical Education) y revistas como el *Journal for research in mathematics education.*, entre otras, en las cuales también se generan diferentes aportes referentes a este campo.

Dichos estudios e investigaciones han permitido evidenciar la necesidad que el profesor cuente con herramientas, que desde cursos de didáctica o enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, le permitan propiciar nuevas experiencias en el aula, a la luz del estudio de un objeto matemático determinado; en relación con esto, encontramos autores que ponen de manifiesto su postura y por ejemplo resaltan que:

> Es evidente que una de las tareas más importantes que debe asumir la Educación Matemática es el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas y, en consecuencia, impulsar procesos formativos que lo potencien. Para llevar a cabo esta tarea formativa se necesita una investigación que suministre la información necesaria que nos permita diseñar estrategias de formación y contemplar las dimensiones y aspectos que las caracterizan. (Cardeñoso, Flores & Azcárate, 2011, p.233)

Los profesores José María Cardeñoso, Pablo Flores y Pilar Azcárate, forman parte de una línea de investigación denominada *“Formación y Desarrollo de los Profesores de Matemáticas”* en la que diferentes profesionales han presentado reflexiones y propuestas sobre el tema, y en la que se ha prestado atención al desarrollo profesional del profesor, su proceso de formación, las condiciones, experiencias y percepciones que apoyan tal proceso. Dichas contribuciones de la mano con otra gran cantidad de investigaciones en el campo, han ayudado a concebir a la docencia como una profesión práctica, en la que se ha dejado de reducir la competencia profesional del profesor a un proceso de mera transmisión de conocimientos, para pensarla como un proceso continuo, en el que el profesor atraviesa por diversos momentos y facetas, y a través del cual sus ideas evolucionan permitiéndole concebir de manera diferente los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Cardeñoso et al., 2011).

Aunque en las últimas décadas el número de investigaciones en el campo ha aumentado, el porcentaje de estudios que abordan problemas relacionados con la formación del profesor de matemáticas sigue siendo bajo, en comparación con aquellas relacionadas con los procesos de enseñanza, aprendizaje o problemas relativos al currículo. En Rico (1996) se realizó un recuento de investigaciones en el campo de la Educación Matemática y una distribución de frecuencias por categorías de estudio, del que se concluyó que solamente el 10% de dichas investigaciones abordaban aspectos relacionados con el profesor y su formación, en contraste con un 50% correspondiente al proceso de enseñanza-aprendizaje, un 25% relativo a cuestiones curriculares y un 15% para cuestiones teóricas y/o epistemológicas. Estimamos que la investigación en el campo ha aumentado en los últimos años, sin embargo, el foco de atención de la mayoría de estudios sigue estando en los conocimientos, capacidades, actitudes de los estudiantes o en fenómenos propios del proceso de enseñanza, sin otorgarle suficiente protagonismo a la educación del profesorado, razón por la cual consideramos necesario que en los programas de formación para profesores, se brinde información acerca del tema y se impulse a los futuros profesores a realizar aportes al campo.

A nivel nacional contamos con autores que desde este mismo campo de investigación brindan importantes aportes; por ejemplo desde el grupo RE-MATE de la Universidad Pedagógica Nacional, con el trabajo realizado por los profesores Guacaneme & Mora (2011), se presentan cuatro planos en los que organizan las investigaciones en el campo de la Educación del Profesor de Matemáticas, nombrados[4] como plano $\forall$, plano $\exists$, plano (y plano $*$.
Asociados a estos, establecieron las líneas de investigación: i) *Prácticas profesionales de los profesores de matemáticas,* ii) *Conocimiento profesional del profesor de Matemáticas,* iii) *Formación de los profesores,* y iv) *Conocimiento profesional del formador de profesores de*

[4] Estos nombres son propuestos provisionalmente.

matemáticas. La primera de estas, aborda estudios del accionar del profesor, de su interacción con la comunidad de práctica o con el aprendizaje que adquiere en su práctica docente; en la siguiente se ubican investigaciones acerca de creencias, visiones y concepciones de los profesores además de cuestiones relativas al aprendizaje logrado a través de la práctica reflexiva; en la línea *Formación de los profesores,* investigaciones referentes a prácticas y procesos de aprendizaje de docentes en formación o en ejercicio, incluyendo diseño de tareas a proponer en la enseñanza de un tema específico, con base en los aportes del campo de la Educación Matemática; y en la última se encuentran investigaciones acerca de la relación entre el saber conceptual y el conocimiento práctico o el aprendizaje logrado a través de la práctica reflexiva y la reflexión de educadores de profesores.

La clave para entender la necesidad de hacer investigaciones en el campo de la Formación de Profesores, radica en reconocer que el proceso educativo está orientado a seres humanos y que esta condición nos hace diferentes y cambiantes, por lo que el profesor debe estar en la capacidad de transformar y mejorar sus técnicas de enseñanza, con el propósito que estas sean estimulantes y beneficiosas para el aprendizaje del alumnado. De esta manera, al concebir la docencia como una profesión humanística, el profesor debe adaptarse a las circunstancias del medio y como plantea Flores:

> El docente es un profesional, y ello trae consigo implicaciones y responsabilidades. (…). El profesional que es el docente de matemáticas no puede conformarse con una preparación estática, adquirida en un momento de su desarrollo, sino que debe tener una actitud reflexiva sobre el desempeño de su tarea (Flores, 1997, p.26).

Por lo tanto, y con el objetivo de encontrar mejoras para la profesión, se requiere estudiar el actuar del profesor, considerar sus pensamientos, creencias, percepciones, conocimientos previos y actitudes frente al proceso de enseñanza. Algunos de estos aspectos vienen siendo abordados por importantes investigadores, como por ejemplo García Blanco (1997) quien recopila en su libro, algunos estudios realizados en el marco de un proyecto de investigación en Educación Matemática, en el que se trabajó con profesores en ejercicio y con alumnos en formación para profesor; en este, es posible encontrar variadas investigaciones que abordan aspectos relacionados con el conocimiento profesional del profesor de matemáticas y en las cuales se reconoce la necesidad de comprender los procesos de razonamiento que fundamentan la práctica docente resaltando su carácter contextualizado (García, 1997). Coincidimos en que el contexto y la diversidad cultural influyen en los contenidos y características del conocimiento y, bajo esta perspectiva consideramos importante que en y para la educación de profesores, se conozcan corrientes de investigación como la etnomatemática, la teoría de la Objetivación, la Socioepistemología entre otras, en la cual los aspectos sociales y culturales en los que están inmersos los estudiantes y profesores son considerados como fundamentales para los proceso de enseñanza y aprendizaje.

Otro investigador de gran prestigio que ha postulado teorías interesantes referentes al conocimiento que el profesor de matemáticas necesita es el Doctor Shulman, de quien rescatamos aspectos de su teoría *conocimiento didáctico del contenido*, en la cual plantea la necesidad de establecer conexiones entre la adquisición de conocimiento del profesor y la articulación de este con el conocimiento pedagógico. Compartimos la idea que esta conexión es vital en la formación de profesores y consideramos que cuando estos dos componentes se estudian de forma separada, es decir considerando por un lado el qué se enseña y por otro el cómo hacerlo, pueden convertirse en un obstáculo dentro del proceso educativo, siendo allí donde muchas veces las teorías pedagógicas pierden relevancia al no entrelazarse verdaderamente con el conocimiento del área específica. El enfoque de Shulman (1986) advierte la necesidad del profesor de contar con conocimientos bastos de la materia y la de tener la capacidad de transformar dicho conocimiento en uno que resulte significativo y verdaderamente comprensible para los estudiantes. Es por esto, que el conocimiento didáctico del contenido en la formación de profesores de matemáticas es un componente que concebimos como esencial y que lo caracteriza como educador matemático diferenciándolo de un mero conocedor de la disciplina.

El Doctor Salvador Llinares también ha abordado el tema en varias de sus investigaciones y afirma que el conocimiento y los procesos de pensamiento de los profesores, son variables potencialmente explicativas para comprender el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el aula y del desarrollo profesional de los profesores (Llinares, 1998); por esta razón realiza un estudio del tema con base en la noción de función, no sin antes reconocer que al estudiar el conocimiento profesional del profesor, es necesario aceptar la complejidad del término y crear métodos que permitan un mejor acercamiento a tal concepto; resalta el papel que la metodología de investigación tiene en el marco de estudios en el campo, plantea la necesidad de llevar acabo los análisis de los estudios con base en tópicos matemáticos concretos e insiste en la necesidad de obtener características de dicho conocimiento, con el objetivo de fundamentar los programas de formación de profesores; finalidad que consideramos esencial para el desarrollo profesional de los futuros docentes, y que suponemos puede ser determinante para el avance en el campo de la Educación Matemática. En relación con el estudio del conocimiento del profesor, Llinares describe dos perspectivas desde las que ha sido abordado: la *perspectiva cognitiva*, en la cual el estudio se ha centrado en el pensamiento del profesor, en los sucesos (conocimiento, creencias, etc.) y procesos mentales, y, la *epistemológica*, desde la cual se ha intentado establecer la relación entre conocimiento y creencias o entre el conocimiento científico y práctico. El autor además, lista algunos temas desde una perspectiva *curricular* sobre los que considera, deberían realizarse investigaciones, siendo estos:

> "a) cual es el significado dado a los "entes" estudiados,
> b) cual es la relación entre lo anterior y las estrategias metodológicas adoptadas en las investigaciones, y
> c) cual es la naturaleza de la información obtenida" (Llinares, 1998, p. 3)

Como hemos venido comentando, el creciente interés por la Educación del profesor de Matemáticas y en consecuencia las investigaciones que desde el campo se realizan, han arrojado resultados interesantes que se constituyen en propuestas de reformas para el sistema educativo. Desde tal enfoque, Investigadores como María Mercedes García Blanco han generado propuestas concretas que incluyen tanto aspectos teóricos como operativos para el proceso de formación de profesores; esta autora, en García (2005), expone su modelo teórico-práctico en el que la idea de "contextos significativos" es clave para aprender el conocimiento necesario para enseñar, el cual surge de estar inmersos en la sociedad y emerge como práctica sociocultural en una comunidad determinada. Esta práctica puede ser mediada a partir instrumentos como estudios de casos, entrevistas clínicas, problemas matemáticos, situaciones de micro enseñanza, "teaching portfolio" (materiales de enseñanza como copias de lecciones, videos de clase, unidades, exámenes, cuadernos de notas) entre otros, a partir de los cuales se posibilita la participación de los estudiantes en la comunidad de práctica, y mediante los que los profesores en formación podrán mejorar y ampliar las nociones y representaciones de objetos matemáticos, además de desarrollar capacidades específicas y necesarias para la labor del docente.

Otra propuesta de enseñanza referida a la formación de profesores fue planteada por Goffree y Oonk (1999), para la cual los autores plantean que en el aprendizaje de los estudiantes para profesor de matemáticas de primaria intervienen los procesos de *matematización* y *didactización,* en los que se hace necesario que el estudiante para profesor realice actividades matemáticas con niños o pensadas para sus potenciales alumnos, y que reflexione sobre ellas, pensando en el proceso de aprendizaje de los educandos en el marco de su propio proceso de aprendizaje. Los autores de la propuesta, consideran que dentro del proceso son inherentes las actividades de analizar, reflexionar, leer y escribir, enfocadas en situaciones formativas las cuales estarán basadas en tópicos psicológicos y pedagógicos. Desde este modelo, se plantea que las observaciones de clase que el estudiante para profesor realiza, son base para sus propios conocimientos sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y que esta experiencia, fundamentada con teorías pedagógicas y matemáticas constituyen una manera de generar el conocimiento que lo formará como un profesional competente.

Los profesores Godino & Batanero (2008), describen también un modelo formativo para profesores de matemáticas basado en la reflexión guiada sobre la práctica. Así, plantean su intención de integrar la formación matemática de los futuros profesores, con la formación didáctica bajo la luz del enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, del cual ellos mismos son autores. De esta manera, y considerando el concepto de reflexión desde la perspectiva de Rogers (2001), como “el proceso que permite al aprendiz integrar la comprensión lograda en la propia experiencia con el fin de capacitarle para realizar mejores elecciones o acciones en el futuro así como estimular la propia efectividad global” y ampliándolo al de reflexión guiada en la cual se considera necesaria la orientación de un mentor durante el proceso, se postula tal reflexión como un medio para estimular el aprendizaje de los estudiantes para profesor de matemáticas (Godino & Batanero, 2008).

Como se puede apreciar, el binomio teoría-práctica es una constante en las propuestas de aprendizaje para profesores de matemáticas, en las que la conexión entre las herramientas conceptuales, y la reflexión y análisis de las experiencias, parece establecerse como una manera de alcanzar la apropiación del conocimiento que hará al futuro profesional un buen educador.

Tanto en las propuestas anteriormente descritas como en trabajos recientes del campo de la Educación Matemática, la creación de situaciones-problema como táctica para conceptualizar y contextualizar los contenidos, es considerada una tarea clave y de suma importancia en el estudio de las matemáticas, y por lo tanto en la formación de Educadores Matemáticos. Los problemas propuestos, deben propiciar el desarrollo de diversas competencias de tipo matemático y didáctico en el estudiante para profesor, "con el fin de enriquecer su desempeño y contribuir al desarrollo de sus competencias profesionales" (Godino & Batanero, 2008, p.6). Por esto, deben ser problemas que dinamicen la actividad matemática, permitiendo la ejercitación de procesos matemáticos, entre los que rescatamos algunos de los establecidos en Los Principios y Estándares 2000 del NCTM tales como: resolución de problemas (exploración, modelización, desarrollo de estrategias y aplicación de técnicas), comunicación, justificación, conexión (como la relación entre los diversos objetos matemáticos) e institucionalización, los cuales se deben articular a lo largo del proceso de enseñanza en el estudio de tópicos matemáticos específicos, con el objetivo de permitir un proceso más constructivo y significativo del conocimiento, enmarcado en un contexto social.

La variedad de características y competencias que se espera, el profesional de la educación posea, han sido abordadas por diferentes autores y en Llinares (1998) se caracterizan algunos de dichos componentes:

- “Conocimiento de matemáticas (conceptos, procesos, etc.) y sobre las matemáticas (concepciones sobre la naturaleza de las matemáticas escolares)
- Conocimiento del curriculum matemático
- Conocimiento sobre las cogniciones de los aprendices
- Conocimiento pedagógico especifico de la matemática
- Conocimiento sobre la enseñanza (planificación, interacción, organización de la enseñanza, evaluación.”. (p. 57)

Al conocer un poco de estos trabajos investigativos, podemos darnos cuenta de que la tarea del docente no radica solamente en conocer y transmitir conocimientos, y que no solo su conocimiento disciplinar influye en su actuar en el aula. Los estudios nos muestran que además de aspectos personales del docente (creencias, percepciones, actitudes, etc.), el proceso de enseñanza involucra un sin número de actividades pre y post acción de clase que debe llevar a cabo; se necesita que el profesor comprenda en todas sus dimensiones el objeto matemático y que esté en plena capacidad de realizar la trasposición didáctica de un contenido a enseñar a un contenido enseñable. Es evidente entonces, que la formación de profesores debe contemplar aspectos didácticos, matemáticos, sociales, culturales y demás que intervengan en el proceso posibilitando una formación completa para los futuros profesionales de la enseñanza. Sin duda alguna, las investigaciones en Educación Matemática y particularmente en el campo de la Educación del Profesor de Matemáticas, nos brindan importantes herramientas teóricas que consideramos podrían ser implementadas en los programas de formación para profesores y estudiadas por los mismos desde su formación inicial, para así contribuir al desarrollo de su conocimiento profesional.

2.2 ACERCAMIENTO A LA DIDÁCTICA DE LA DERIVADA

Reconocemos la importancia que los cursos de enseñanza o didáctica de disciplinas específicas tienen en la formación de profesores y particularmente centraremos nuestra atención en el aprendizaje y enseñanza del cálculo, y en el cómo las investigaciones relacionadas en lo que refiere a la didáctica de la derivada contribuyen en el proceso de formación del profesor de matemáticas. A continuación resumimos y comentamos algunos documentos de didáctica sobre la derivada:

Para empezar, mencionaremos algunos aspectos del trabajo de Badillo (2003) que aborda la derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje de profesores de matemáticas en Colombia. En este trabajo, se describió el concepto de derivada de cinco profesores de Cálculo de secundaria desde la perspectiva netamente matemática como desde la de enseñanza y aprendizaje de la misma, además de caracterizar las tareas que dichos profesores proponían al abordar el concepto. Dentro de la metodología de investigación, se plantearon algunos instrumentos como entrevistas acompañadas de cuestionarios y la realización de un análisis *macro (de restricciones institucionales),* un análisis *micro (del conocimiento profesional del profesor)* y un tercer análisis de integración entre los dos anteriores, para estudiar los esquemas de los profesores, en relación al concepto de derivada (entiéndase esquema según lo postula la teoría APOE, la cual fue utilizada para dicho estudio). Dentro de los resultados del primer análisis, se determinó que el diseño curricular del objeto derivada en Colombia, plantea la enseñanza de física mecánica para grado décimo y de cálculo diferencial para grado once, lo que implica que el estudiante tiene un acercamiento a la derivada a través de velocidades instantáneas y razones de cambio, antes de poseer los conceptos del cálculo diferencial, hecho que puede causar desconexión entre diferentes formas de definir el concepto, y que es considerado como "un obstáculo en la comprensión fenomenológica de los conceptos matemáticos" (Badillo, 2003, p.431). Además, Badillo señala que en los programas de formación inicial de los profesores no se programan asignaturas como: historia, epistemología y didáctica de la matemática, entre otras, por las que el profesor puede presentar dificultades de aprendizaje de los conceptos matemáticos. Para el análisis *micro,* se estudiaron los resultados con respecto a los niveles inter, intra y trans que propone la teoría APOE, relacionados con los esquemas gráfico y algebraico concluyendo que pese a poseer conocimientos respecto al tema, se evidencian dificultades para pasar de la función a la función derivada en el sistema de representación gráfico y resalta la no diferenciación entre la función derivada y la derivada en un punto, fenómeno al que señala como problema de enseñanza-aprendizaje, en el que se reproducen confusiones y errores a los alumnos.

En Contreras (2000), también se encuentran resultados relacionados con el tránsito entre la función y la función derivada en el entorno gráfico. El estudio se fundamentó con elementos de la Teoría de Situaciones Didácticas del francés Guy Brousseau, pero siguió la metodología de investigación propuesta desde la Ingeniería Didáctica, razón por la cual se diseñó e implemento una situación didáctica que permitiera abordar la interpretación geométrica de las derivadas sucesivas de una función, con estudiantes de secundaria que no habían tenido ningún tipo de acercamiento previo al concepto. En cuanto a la relación de la función con la función primera derivada, los estudiantes lograron asociar diversos elementos; sin embargo, el predominio de la expresión algebraica sobre la representación geométrica fue muy marcado. Para el caso de la segunda y tercera derivada, las dificultades para analizar las gráficas y relacionarlas se hicieron aún más notorias.

Obstáculos como los mencionados anteriormente determinados a partir de investigaciones en el campo, nos permiten inferir que aunque los estudiantes aprendan a realizar cálculos o a resolver algunos problemas, se siguen presentando notables dificultades que impiden alcanzar una comprensión adecuada del concepto. Afortunadamente, desde la Educación Matemática existen variadas propuestas para abordar la enseñanza de tópicos específicos, entre los cuales la derivada ha sido objeto concreto de estudio en repetidas oportunidades; por ejemplo, Vrancken, Engler & Müller (2009) presentan una secuencia de actividades para abordar la derivada, en la cual se involucran diferentes sistemas de representación; además, se presenta el análisis de resultados de la implementación de dicha propuesta, con el que determina que el entendimiento de procesos de cambio es fundamental para el desarrollo del concepto y resalta la importancia de presentar problemas en los que diferentes registros (numérico, coloquial, geométrico, algebraico y desarrollo de ideas variacionales) se conecten, para contribuir en el desarrollo del concepto de este objeto matemático.

Otra propuesta de enseñanza para el concepto de derivada es la presentada por Vargas, Torres & Quintero (2009), publicada en las memorias del 10° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Dicha propuesta retoma los resultados de un trabajo realizado en la Universidad de Cundinamarca en el año 2007, el cual consistió en un estudio de la derivada a la Caratheodory, planteado como una nueva concepción en el aprendizaje y la enseñanza del Cálculo. Así, haciendo uso de lo siguiente: " $sea\ f: U \to \mathbb{R}$ y U abierto, si existe una función $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ talque $f(x) - f(a) = \phi, (x)\ (x - a): \forall x\ \in \phi,$ entonces f es diferenciable", que corresponde con la definición de derivabilidad, establecida por Constantin Caratheodory en el año 1954, lograron obtener de sus estudiantes, demostraciones de teoremas del álgebra de derivadas del cálculo diferencial y dar una interpretación geométrica de la derivada. Las autoras concluyen que la definición dada por Caratheodory puede ser base para la creación de distintas herramientas metodológicas y utilizadas como forma alternativa de abordar la enseñanza de la derivada en el aula.

Como vemos, algunas investigaciones muestran dificultades relacionadas con la determinación de la función derivada mediante la función original y viceversa, al igual que problemas de arraigo a la representación algebraica y al proceso algorítmico que generalmente se propicia en su estudio, lo que nos lleva a destacar una vez más la necesidad de abordar los conceptos matemáticos desde variadas representaciones y de esta manera acercarse a la comprensión del objeto. Consideramos que tanto el sistema de representación geométrico como el algebraico, resultan fundamentales para la comprensión de la derivada, al ofrecer cada uno una caracterización diferente del objeto, es por esto que mientras más registros semióticos conozca el estudiante, mejor será la conceptualización que este alcance; pero, para ello es necesario que el profesor diseñe actividades que inviten al alumnado a movilizarse entre los sistemas de representación y que posibiliten la comprensión de las relaciones que entre estos existen.

Por lo tanto, la tarea está en manos del profesor quien deberá estar en la capacidad de transformar su proceso de enseñanza, utilizando herramientas innovadoras y eficaces que propicien el desarrollo de diversos procesos matemáticos que contribuyan a una conceptualización suficiente del concepto y al entendimiento del mismo por parte de los alumnos. En afinidad con esto, se presentan variadas investigaciones que como la de Sánchez y Molina (2006), pretenden mostrar maneras de afrontar el estudio de tópicos matemáticos mediante registros semióticos diferentes a los comúnmente usados; en dicho trabajo se presenta la descripción de un taller que fue implementado durante la Decimonovena Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, la cual tuvo lugar en la ciudad de Montevideo (Uruguay), y en la que se planteó un estudio de la derivada desde la variación del movimiento; para esto, se propusieron actividades en las que a partir de cálculos numéricos se favoreciera la emergencia del concepto de diferencia. Para justificar su propuesta, los autores aluden frecuentemente a las ideas que históricamente dieron origen al concepto de derivada.

Otro estudio en el que se plantea abordar la derivada desde la variación es el realizado por Carlson, Jacobs, Coe, Larsen & Hsu (2003) el cual se centra en la descripción de las acciones mentales que el razonamiento covariacional propicia al estudiar situaciones dinámicas. Para la metodología de análisis los autores consideraron cinco niveles distintos de desarrollo de la dinámica de las operaciones mentales, que permiten clasificar comportamientos que el estudiante tiene al abordar tareas de covariación; estos son: Nivel 1: Coordinación, Nivel 2: Dirección, Nivel 3: Coordinación cuantitativa, Nivel 4: Razón promedio y, Nivel 5: Razón instantánea; a cada uno de los cuales se le asoció un conjunto de acciones mentales. Los resultados sugieren que los estudiantes muestran dificultades para construir imágenes de una razón que cambia de manera continua y de imágenes de razones decrecientes o crecientes en situaciones físicas, razones por la cuales sugieren que:

> El currículo y la instrucción deberían aumentar el énfasis en el cambio que debe darse en los alumnos de una imagen coordinada de dos variables que cambian simultáneamente a una imagen coordinada de razón de cambio instantánea con cambios continuos en la variable independiente para funciones asociadas a situaciones dinámicas. (Carlson et al., 2003, p.121)

De manera similar, encontramos el trabajo de investigación de Villa, Jaramillo & Esteban, (2011) en la que se aborda el estudio de la derivada a través de la noción de tasa de variación; los autores resaltan la débil comprensión de los procesos de variación que subyacen en el estudio del objeto matemático derivada, algunas veces debido a que no se da cabida a la

interpretación de esta como tasa de variación, sino que se enfatiza solamente en el manejo de la expresión algebraica. La investigación tiene como fuente de análisis el modelo de Pirie y Kieren, en el que la comprensión se considera un todo dinámico, estratificado, recursivo, no lineal y jerarquizado de estructuras del conocimiento. Dicho modelo de análisis, permitió vislumbrar que la visualización proporcionada por los softwares educativos contribuye considerablemente a la evolución de la comprensión de la derivada.
Investigaciones como esta nos plantean la importancia de proponer tareas que salgan de la forma habitual de enseñanza de la derivada y abre campo para considerar la covariación como una opción para construir el concepto.

En la actualidad, la universalidad del uso de la computadora en la sociedad, ha llevado a que se considere su uso en el salón de clase, como medio para potenciar el conocimiento; este hecho integrado con la efectividad de los softwars en la enseñanza de las matemáticas ha llevado a pensarlos, como herramientas de aprendizaje que promueve la actividad matemática y contribuyen en la asimilación de los conceptos. Dicha incorporación en cuanto al uso de las TICs en la enseñanza, ha abierto camino a la investigación, con propuestas que trabajan bajo entornos virtuales; al respecto, se encuentran estudios como el de Montiel (2005), que presenta los resultados de una propuesta fundamentada en la teoría de situaciones didácticas que fue implementada por la misma autora en el año 2002, la cual giró en torno a las interacciones del sistema didáctico en un escenario en línea. Para esta, se creó una plataforma virtual en la que los estudiantes (profesores en ejercicio que cursaban maestría en Ciencias en Matemática Educativa en el Instituto Politécnico Nacional) tuvieron acceso al programa del seminario, a una biblioteca que contenía material de apoyo (investigaciones en formato digital, videos, hipervínculos a sitios web, entre otros) y a la dinámica propuesta para cada sesión (exposiciones teóricas, listas de ejercicios); como medio de interacción entre alumnos, y entre alumnos y profesor; se contó con foros de discusión que permitieron a los estudiantes dotar de nuevos significados al concepto de derivada. Este trabajo muestra una ruptura del contrato didáctico en algunas de las actividades planteadas, dado que los estudiantes respondieron de manera analítica a preguntas cuyo fin fue la construcción de argumentos desde la covariación, como forma alterna de acercamiento al concepto; además, el estudio de la función, y sus funciones derivadas sucesivas (f, f' y f'') evidencia complejas dificultades de articulación.

En este mismo sentido, Robles, Del Castillo & Font (2012) presentan la descripción de la implementación de una secuencia de actividades asistidas por computador, propuestas con la intención de promover la construcción de significado de la derivada; la misma, fue implementada con estudiantes de primer curso de cálculo diferencial e integral de la División de Ingeniería de la Universidad de Sonora para cuyo diseño fueron utilizadas algunas nociones del Enfoque Ontosemiótico. De esta manera y partiendo de los resultados que investigaciones en didáctica de la derivada han arrojado en cuanto a las dificultades que presentan los alumnos en la compresión de la función derivada y la derivada en un punto, los autores diseñaron una secuencia didáctica que contaba con applets, hojas de cálculo con guía de trabajo y cuestionarios, para superarlas. Esta propuesta fue analizada a través de los criterios de idoneidad propuestos desde el EOS y permitió determinar que las actividades asistidas por computador contribuyen en la creación de procesos de instrucción que resultan más significativos para los alumnos a la hora de abordar este tópico matemático.

Trabajos como los anteriormente mencionados, dejan ver el interés de investigadores en el campo de la Educación Matemática, por proponer formas diferentes de estudiar la derivada; ya sea mediante propuestas basadas en la articulación de algunos sistemas de representación, trabajando de manera escrita; o bien, con la inclusión de nuevas tecnologías informáticas en el aula. Lo anterior, con el objetivo de propiciar una comprensión significativa del concepto y contribuir al desarrollo de procesos diferentes a los comúnmente trabajados dentro de la actividad matemática que tiene lugar al estudiar este objeto matemático. Es fácil encontrar que tanto en los libros de texto, como en los currículos escolares que dirigen el estudio de la derivada, se enfatiza en procesos algorítmicos y pese a que algunas veces se plantea el estudio de su representación gráfica o de otro tipo de representación, estas no son analizadas con la profundidad que se debería si se quiere alcanzar una mayor comprensión del concepto. Se hace entonces necesario que el docente cuente con elementos que les permitan reformar esta situación en el aula, para lo cual debe tener una comprensión plena del concepto y estar en capacidad de articular tanto el conocimiento matemático como el didáctico; es decir, comprender de manera adecuada los significados de la derivada y realizar la transposición didáctica del contenido que propicie una comprensión significativa de este tópico matemático en sus alumnos. Es en este sentido, que trabajos de investigación como el del Doctor José María Gavilán (2006) permiten caracterizar la manera en que el profesor concibe las matemáticas (particularmente a la derivada) a partir del conocimiento matemático que potencia en sus alumnos (estudiantes entre 16 y 18 años) como producto de su accionar en el aula. Para dicho trabajo el autor recoge los datos a partir de entrevistas realizadas a los profesores pre y pos aplicación de una unidad didáctica, grabaciones de clase y material usado por los decentes para la misma. Con base en los resultados empíricos obtenidos, se caracterizaron dos perspectivas que surgen de la práctica de los profesores; la primera de estas, denominada holística hace referencia a la manera en que el docente concibe el aprendizaje, apoyado en la conexión entre significados, conceptos y sistemas de representación; y la perspectiva tradicional en la cual las matemáticas escolares son concebidas como un conjuntos de procedimientos carentes de significado. De manera similar, se presenta el trabajo de Potari, Zachariades, Christou, Kyriazis & Pantazi (2007) en el que mediante un estudio de observación sobre la enseñanza de la derivada, se establecen algunos factores que caracterizan el conocimiento que el docente enseña. Entre dichos factores, se resalta la necesidad de una adecuada comprensión teórica del objeto matemático, la fluidez en los procedimientos, la interpretación del simbolismo matemático y la capacidad de relacionar diversas representaciones de un mismo concepto. Así pues, se propone la integración entre el conocimiento de tipo matemático y didáctico como una estrategia eficaz para el desarrollo del conocimiento (Potari et al., 2007).

Las investigaciones relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de la derivada nos han permitido determinar que el proceso de estudio de tal tópico matemático presenta notables dificultades, y, teniendo en cuenta que los profesores son agentes activos en este, se hace necesario pensar en la formación didáctica que los mismos tuvieron en su formación, por lo que resulta indispensable que las universidades que se encargan de formar educadores para el área, oferten cursos de didáctica del Cálculo que aborde objetos específicos como la derivada y en general se brinde a los futuros profesores cursos de didáctica desde las diferentes ramas de las matemáticas.

Al respecto la Profesora Carolina Rojas (2013), realiza una investigación acerca de los tópicos que en cursos de enseñanza del Cálculo de tres universidades colombianas son abordados. Uno de ellos fue el curso de Enseñanza y Aprendizaje del Cálculo de la Universidad Pedagógica Nacional, en el que se establecen contenidos que involucran objetos matemáticos específicos, aspectos históricos, pensamiento variacional y modelación, tecnologías para la enseñanza y aprendizaje, y errores y dificultades en el estudio del Cálculo. Se resalta que el estudio de aspectos relacionados con la enseñanza y aprendizaje de la derivada no se encuentra propuesto en los contenidos del curso, pero fue posible encontrar documentos sobre investigación en didáctica de la derivada, propuestos dentro de la bibliografía. Se describe también el curso Didáctica del Cálculo de la Universidad Industrial de Santander en el que se tiene por objetivo ofrecer fundamentos para el desarrollo de metodologías para la enseñanza del Cálculo; desde este seminario, se trabajan sobre objetos matemáticos como la función, limite, derivada e integral y aspectos propios de la didáctica e historia de los mismos. El profesor a cargo del curso declaró que aunque el estudio de investigaciones sobre didáctica de la derivada no está formalizado en los objetivos, en ciertos momentos del curso se discute sobre algunos de esos trabajos, es decir se reconoce la derivada como parte de los contenidos del curso. El último curso descrito por Rojas, corresponde al propuesto en la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia titulado Didáctica del Cálculo y la Estadística, curso que está direccionado hacia el estudio de: pensamiento variacional y sistemas analíticos, estrategias para pensar mediante construcción de pensamiento matemático, pensamiento aleatorio y sistemas de datos y teoría se situaciones didácticas de Brousseau.

En este, tampoco se encontró establecido el estudio sobre didáctica de la derivada y la profesora a cargo del mismo manifestó falta de tiempo debido a que en este curso se intenta estudiar tanto la didáctica del Cálculo como la de la Estadística.

Del anterior trabajo, es evidente que ninguno de los programas de Licenciatura indagados centra su atención en la enseñanza de la derivada, por lo que consideramos necesario que la comunidad en Educación matemática reconozca la importancia de inclusión de elementos claves en el estudio de la enseñanza y aprendizaje del cálculo (como por ejemplo la derivada) y que además de aspectos tan importantes como los concernientes a la didáctica general del cálculo, se dé espacio a objetos matemáticos particulares que sigan dotando al profesor de Matemáticas de resultados obtenidos de investigaciones especializadas sobre didáctica que contribuyan a su actuar docente.

Aunque desde el campo de la Educación Matemática se han realizado importantes aportes en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de la derivada, aún hay factores que no han sido considerados. En Sánchez, García & Llinares (2007) se reporta que dentro del campo, aspectos relacionados con la comprensión de la derivada en un punto, con los sistemas de representación y con la determinación de características en el esquema de desarrollo de la derivada, han sido abordados en varias investigaciones, arrojando resultados interesantes; allí, también se propone que el foco de atención de investigaciones futuras se dirija hacia cómo los estudiantes dan significado y uso al concepto de derivada.

Dado que la propuesta con curvas que fue estudiada en el presente trabajo, fue implementada en un grupo de profesores en ejercicio y formación, nos interesamos en conocer aspectos de la formación del profesor en torno al concepto de derivada, para lo cual recopilamos algunas investigaciones que han abordado aspectos del cómo medir el nivel de comprensión del concepto de derivada en tal población; a continuación algunas trabajos al respecto.

2.3 EL CONCEPTO DE DERIVADA EN LA ENSEÑANZA A PROFESORES

En las últimas décadas, el campo de la Educación Matemática ha avanzado significativamente, y dentro de este, el de la Formación de Profesores ha cobrado gran importancia entre los investigadores. Sin lugar a dudas, las investigaciones realizadas han contribuido eficientemente, bien sea en el análisis de fenómenos de enseñanza/aprendizaje, a partir reflexiones en torno a la tarea del profesor en el aula, con el estudio de sus creencias, concepciones y en general con lo relacionado con el conocimiento profesional, o bien con propuestas para abordar tópicos específicos del área. Entre estos objetos matemáticos, la derivada y lo relativo a su enseñanza ha sido foco de diversos estudios, en los cuales se han obtenido resultados interesantes respecto a dificultades de aprendizaje; si el conocimiento matemático del profesor presenta inconsistencias, es natural que hayan dificultades en la enseñanza del concepto; por tanto, es necesario que este objeto matemático sea abordado de manera especial en la enseñanza a profesores, y se consiga desde su formación inicial que tanto el conocimiento teórico como el didáctico sea el apropiado. Para ello, el profesor necesita dotarse de herramientas que desde la didáctica de las matemáticas le permita diseñar actividades concretas, plantear problemas más significativos y orientar de mejor manera el proceso de enseñanza de la derivada en el aula.

Es así, como consideramos primordial indagar acerca de lo que desde la didáctica del cálculo y específicamente desde la didáctica de la derivada plantean las investigaciones del campo. A continuación, mostraremos algunas investigaciones relacionadas con la enseñanza de la derivada en profesores de matemáticas y realizamos algunos comentarios y reflexiones sobre ellas.

2.3.1 Key epistemic features of mathematical knowledge for teaching the derivate (Pino-fan, Godino, & Castro, 2012)

En este trabajo, los autores presentan los resultados obtenidos al aplicar un cuestionario acerca de la derivada, a un grupo de alumnos que cursaban sexto semestre de Licenciatura en Matemáticas en la Universidad de Yucatán. En dicho cuestionario, se propusieron tareas diversas en torno al concepto, con el objetivo de explorar aspectos del conocimiento didáctico que los profesores utilizaban al emprender el estudio de la derivada. El trabajo de análisis se basó en el modelo propuesto por Godino (2009) para evaluar el conocimiento didáctico-matemático del profesor. Para ello, se propusieron tareas que reflejaran el tipo de conocimiento del contenido, puesto en juego para la solución de las mismas. Así, dentro del cuestionario hubo tareas que implicaban resolver problemas comunes de la educación secundaria *(Conocimiento común del contenido);* problemas que incluían el uso de diferentes representaciones y significados de la derivada, de diversos procedimientos y demostraciones *(conocimiento en el horizonte matemático o avanzado)* y algunas otras referentes al conocimiento matemático de profesor *(conocimiento especializado del contenido).* El análisis de los resultados, refleja que los estudiantes para profesor presentaron problemas en la mayoría de tareas propuestas, y aunque en las tareas en las que la derivada era entendida como pendiente de la recta se obtuvieron mejores resultados, en aquellas donde se proponían actividades demostrativas, de articulación entre los sistemas de representación y de diferentes significados de la derivada, los conocimientos de los futuros profesores no fueron suficientes. Se concluye que el conocimiento común del contenido no basta para hacer frente a las tareas necesarias en el proceso de enseñanza, por lo que se requiere que los profesores posean tanto conocimiento especializado como extendido en relación con la derivada.

2.3.2 Adoptando diferentes perspectivas de investigación sobre el concepto de derivada (Sánchez-Matamoros, 2014)

En este trabajo Sánchez- Matamoros presenta investigaciones en las que algunas secuencia de tareas, resueltas por estudiantes de bachillerato son propuestas como herramientas para el aprendizaje de estudiantes para profesor. Para las investigaciones, a los profesores en formación se les suministró un conjunto de respuestas que distintos estudiantes proporcionaron a tareas relacionadas con el concepto de derivada, en las cuales se abordó dicho objeto matemático desde variadas perspectivas; las tareas fueron seleccionadas teniendo en cuenta los niveles de comprensión del concepto (intra, inter y trans). Con base en ellas, se propuso que los futuros profesores desarrollaran la competencia docente de *mirar profesionalmente* el pensamiento matemático de sus estudiantes, mediante la identificación de los niveles de comprensión en las respuestas de estos. Se concluye que la propuesta realmente contribuye al desarrollo de dicha competencia en los estudiantes, al permitirles “identificar e interpretar la comprensión puesta de manifiesto por los estudiantes” (Sánchez-matamoros, 2014, p.50).

2.3.3 Descripción de niveles de comprensión del concepto de derivada (Salazar, Díaz, & Bautista, 2009)

Dentro del trabajo de Investigación que se realiza en la Universidad Pedagógica Nacional con respecto a la didáctica de la derivada, rescatamos el realizado por dichos autores en el marco del proyecto de investigación "Análisis de obstáculos y descripción de niveles de comprensión del concepto de derivada en los estudiantes de la Universidad Pedagógica Nacional" en el segundo semestre del año 2007. En este, describen los niveles de comprensión (intra, inter y trans) que seis alumnos que cursaban el espacio de Cálculo Diferencial, alcanzaron. Como herramienta de recolección de datos, se aplicaron tres cuestionarios con los que se pretendió identificar conocimientos previos relacionados con la variación, uso de sistemas de representación de funciones, noción de variación en situaciones específicas y registros semióticos asociados al concepto. El análisis de los resultados responde a las categorías de análisis formuladas por Badillo (2003), en los que se consideran esquemas algebraico y gráfico para los niveles inter, intra y trans de comprensión de la derivada. En los resultados, se evidencia dependencia de la expresión algebraica para describir la razón de cambio, noción que fue comúnmente dejada de lado por los alumnos. Además, se presentan dificultades para transitar de la función a la función derivada en el sistema gráfico.

2.3.4 Un indicador de la comprensión del esquema de derivada: el uso de las relaciones lógicas (Sánchez-matamoros et al., 2007)

Con el objetivo de contribuir al desarrollo de indicadores que permitan describir la comprensión del concepto de derivada en los estudiantes, los autores presentan una caracterización que pretende explicar el paso de un nivel de comprensión a otro a partir del uso que se hace de las relaciones lógicas entre elementos matemáticos relacionados con la derivada. El análisis se fundamenta en la teoría piagetiana del desarrollo de un esquema, es decir considerando los niveles intra, inter y trans de comprensión. Para este estudio, se contó con 150 estudiantes, 50 de 1° de bachillerato, 50 de 2° y 50 estudiantes de primer semestre de licenciatura en matemáticas, los cuales respondieron a tres cuestionarios y a una entrevista. Como resultado de esta investigación, se plantea que el uso de la relación de equivalencia lógica presenta dificultades en algunos niveles de desarrollo y con base en los datos recolectados lograron inferir que existen maneras diferentes en las que los estudiantes comprenden el esquema de derivada.

2.3.5 Análisis de los niveles de comprensión de los objetos $f'(a)$ y $f'(x)$ en profesores de matemáticas (Badillo, Azcárate, & Font, 2011)

En la investigación se analizan los niveles de comprensión de la relación entre $f'(a)$ y $f'(x)$ de cinco profesores de matemáticas de bachillerato. Los autores plantean una caracterización de los niveles de comprensión del esquema de derivada considerando elementos de la teoría APOE, niveles de desarrollo de esquema (inter, intra trans) y aportes de la perspectiva semiótica, que unifican en enfoques que relacionan esquemas de Piaget y esquema gráfico y algebraico (ejemplo: nivel inter algebraico-inter gráfico, Nivel inter algebraico- trans gráfico). Dentro de los resultados del estudio se señalan las características más relevantes por las que se realizó la asignación de niveles: para el nivel intra algebraico-intra gráfico, se determina que los macroobjetos $f(x), f'(a)$ y $f'(x)$ no son coordinados en la resolución de problemas y que para poder establecer relaciones entre los sistemas de representación, los futuros profesores tienden a recurrir a la expresión simbólica de la función; en el caso del nivel inter algebraico-intra gráfico, se encuentra que los estudiantes coordinan los macroobjetos $f'(a)$ y $f'(x)$ en ciertos problema dependiendo del contexto; para el nivel trans algebraico-inter gráfico, se subrayan problemas de comprensión en la representación gráfica de funciones acumulativas y contradicciones entre razonamientos de tipo algebraico y gráfico en el objeto tasa media de variación; y para el nivel intra algebraico- intra gráfico se plantea que los estudiantes no diferencian entre $f'(a)$ y $f'(x)$, debido posiblemente a la reducción de la expresión simbólica de la función derivada a la ecuación de la recta tangente o a la no justificación de las técnicas e derivación.

2.4 LA VARIACIÓN: MEDIO PARA POTENCIAR EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

La derivada es un ejemplo de objeto de estudio matemático en el cual esta intrínseco el concepto de variación y para el que se hace necesaria una construcción verdaderamente significativa del cambio, que propicie una comprensión efectiva y suficiente del objeto. De esta manera, para que el estudio de la derivada como el de los demás conceptos propios del Cálculo sea exitoso, es necesario procurar que aparte de acercamientos de tipo algebraico y numérico, se dé cabida a una formación relacionada con ideas variacionales; además, se precisa un desapego de la representación algebraica que dé lugar al cambio y en el que la representación gráfica pase de utilizarse como una herramienta de ayuda visual a pensarse como un medio poderoso para el desarrollo del pensamiento matemático.

Las investigaciones recientes señalan que las situaciones variacionales además de ser menester para el aprendizaje de conceptos matemáticos, generan en sí mismas ámbitos propicios para aprender legítimamente las matemáticas. Es en este sentido, que nos interesamos en conocer qué tipo de conocimiento se potencia con el trabajo relacionado con la variación y por lo cual retomaremos los planteamientos de algunos investigadores que, pensando en esta situación han generado aportes al respecto.

Uno de dichos investigadores es el profesor Ricardo Cantoral, investigador y jefe del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav), quien afirma que producto de los estudios realizados desde este centro, se han podido describir algunos asuntos que resultan fundamentales para el aprendizaje de las matemáticas; entre estos, el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional y la constitución de un lenguaje gráfico para las funciones son dos importantes aspectos a considerar. Para su enseñanza, se plantea una concepción de la actividad matemática en un sentido más amplio del usual, en la que se consideren restricciones de naturaleza cultural, histórica e institucional y para la cual el maestro diseñe métodos que permitan al estudiante explorar y usar sus formas naturales de razonamiento sobre las matemáticas, puesto que “esto es darle al alumno un papel más activo en su propio proceso de apropiación de un concepto, confiriéndole una mayor responsabilidad” (Cantoral, 2013, p.16). Como objeto de estudio particular asociado a la variación, el investigador aborda el concepto de derivada y en el libro Pensamiento y lenguaje variacional, muestra algunos diseños experimentales para la enseñanza de dicho objeto con los que se propone afianzar su significado, visiblemente teniendo como eje el pensamiento y lenguaje variacional. A partir de las respuestas a las actividades que en dichos diseños se plantearon, y específicamente en algunas tareas propuesta para afianzar el significado gráfico asociado al valor numérico de la segunda derivada, concluye que es posible desarrollar el pensamiento y lenguaje variacional de los alumnos, mejorando por lo tanto su capacidad de visualización, conjeturación, argumentación y refutación, y generando de esta manera una evolución en las ideas matemáticas de los mismos.

A nivel nacional se encuentran publicaciones como la de Bonilla, Romero, Narváez & Bohórquez (2015) quienes han realizado aportes respecto a las características del proceso de construcción del concepto de variación en el aprendizaje de estudiantes para profesor. Estos autores consideran necesario, que desde los programas de formación docente se brinden oportunidades de abordar los conceptos desde entornos de aprendizaje que permitan a los estudiantes construir el conocimiento matemático y reflexionar sobre su proceso formativo.

Otros investigadores como González, Cantoral y Molina (2005) han identificado estrategias utilizadas por los profesores de matemáticas al abordar tareas enmarcadas en situaciones variacionales, señalando la importancia que estas tienen en la formación de educadores del área, puesto que se ha logrado evidenciar que en algunas ocasiones los profesores presentan dificultades similares a las de sus alumnos.

Así pues, vemos cómo la investigación en educación matemática ya plantea acercamientos diferentes a la derivada, los cuales a partir del estudio del cambio y del desarrollo del pensamiento variacional permiten al estudiante generar su propio conocimiento, y en su camino toparse con procesos propios de la actividad matemática, que le permitirán un aprendizaje más significativo de los conceptos estudiados.

CAPÍTULO 3: LA PROPUESTA DE ENSEÑANZA

3.1 SOBRE LA PROPUESTA DE ENSEÑANZA

A continuación presentamos el origen de la propuesta de aproximación geométrica a la derivada y otras funciones, aspectos relacionados con el planteamiento de la misma, objetivos e intenciones en torno a esta.

3.1.1 Origen de la propuesta

Con la idea de contribuir en el desarrollo del conocimiento del profesor de matemáticas, durante el año 2013 la Especialización en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional, ofreció un plan de formación que abordó el estudio de aspectos del conocimiento histórico del profesor de matemáticas desde tres perspectivas; la primera de estas contempló el estudio de algunas teorías matemáticas consideradas hitos de la Historia de las matemáticas; la siguiente, hizo referencia a las implicaciones de la Historia de las Matemáticas en la educación; y la tercera perspectiva incluyó el estudio del papel de la mediación tecnológica para abordar objetos matemáticos. Sin embargo, debido a que esta propuesta tan solo sería implementada durante dos semestres, se decidió asumir las curvas matemáticas como objeto específico de estudio. Es así, como en la articulación de estas perspectivas se propuso un trabajo con curvas a través de mediación instrumental; para esto, el profesor Edgar Alberto Guacaneme, profesor de la Universidad, generó a través del software de geometría cinemática: Geogebra, tres curvas sobre las cuales los estudiantes del curso Didáctica específica II realizarían ciertas exploraciones a fin de desarrollar el pensamiento covariacional en los alumnos. Dentro de las tareas asignadas con tales curvas, el profesor propuso una secuencia de tareas que implicaban establecer las expresiones simbólicas que expresaban los lugares geométricos que surgían de las construcciones, las cuales capturaban la covariación de magnitudes relacionadas con el movimiento de la recta tangente a una función.

Uno de estos lugares geométricos correspondió precisamente a la función derivada, pero esta apareció como uno de los miembros de una familia de funciones, bautizadas localmente como "funciones degeneradas". De manera análoga se abordó el estudio de funciones que el profesor denominó "funciones generadas" y otras a las que llamó "funciones perversas" (de estas últimas no se tienen evidencias de aplicación en el curso Didáctica Especifica II).

3.1.2 Justificación de la propuesta de enseñanza

El estudio de las curvas generada y degenerada, es propuesto con el objetivo de desarrollar el pensamiento covariacional y el pensamiento cuantitativo no numérico a través de construcciones con el software Geogebra. Se establece como una propuesta innovadora para la enseñanza de las matemáticas que contribuye al desarrollo del pensamiento matemático a través de los tópicos específicos, procurando que estos sean el medio y no el fin. Para esto, el profesor propuso a sus estudiantes algunas actividades cuya intención formativa se presenta a continuación:

3.1.2 Intenciones

Producto de la experiencia con la propuesta implementada, se espera que los estudiantes:

- Reconozcan la propuesta como un elemento para llevar al aula

- Tomen conciencia de la necesidad de propiciar el desarrollo de actividad matemática legítima en el estudio de la derivada

- Reconozcan el poder de la mediación instrumental al introducir un elemento tecnológico en la resolución de situaciones problema en el aula.

3.1.3 Estudiantes del curso Didáctica específica II

Para efectos del presente trabajo, hablaremos de 7 grupos: grupo A, B, C, D, E, F y G constituidos por los estudiantes del curso Didáctica especifica II de la Especialización en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional y organizados de acuerdo con la manera en que los mismos presentaron sus aportes, comentarios y tareas en torno a la propuesta de trabajo con curvas. A continuación, una descripción de estos:

GRUPO A:

Conformado por dos alumnas del pregrado de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad, quienes toman tres seminarios de la Especialización como opción de trabajo de grado.

GRUPO B:

Conformado por tres estudiantes: dos Licenciados en Matemáticas de 24 y 31 años, lo cual evidencia una experiencia no mayor a 8 años; y un Administrador de Empresas de 49.

GRUPO C:

Conformado por cuatro estudiantes: tres Licenciados en Matemáticas (dos hombres de 22 y 23 años y una mujer de 23 años) y una estudiante Licenciada en Educación Básica con énfasis en Matemáticas, de 26 años de edad.

GRUPO D:

Con un estudiante con Especialización en Educación Matemática (23 años), dos estudiantes de Licenciatura en Matemáticas (23 y 25 años)

GRUPO E:

Un Licenciado en Matemáticas de 32 años y dos Licenciados en Matemáticas y física de 31 y 28 años.

GRUPO F:

Estudiante de 45 años Licenciada en Lenguas Modernas

GRUPO G:

Estudiante que realiza trabajo de grado de la maestría y desarrolla trabajo de grado bajo la asesoría del Profesor Guacaneme, trabajará como estudiante regular del curso y además, ayudará con la grabación de las clases.

3.1.5 Contexto del aula

La propuesta de aproximación geométrica a la derivada y otras funciones fue implementada en la Especialización en Educación Matemática de la UPN en el curso Didáctica específica II, a un total de 16 estudiantes en su mayoría Licenciados en Matemáticas. Para la realización de las actividades de dicha propuesta, el profesor Edgar Guacaneme a cargo del curso suministró las construcciones de las funciones (generada y degenerada) a los estudiantes a través de Dropbox.

En total, fueron tres sesiones de clase aproximadamente siete horas de clase dedicadas al estudio de las funciones; una sesión para la degenerada, la segunda para la generada y una tercera destinada a la reflexión final de las actividades. En cada sesión, los estudiantes tuvieron acceso a las construcciones en sus computadores personales y al final de cada una se realizó la correspondiente socialización haciendo uso del video-Bean.

3.2 SECUENCIA DE ACTIVIDADES

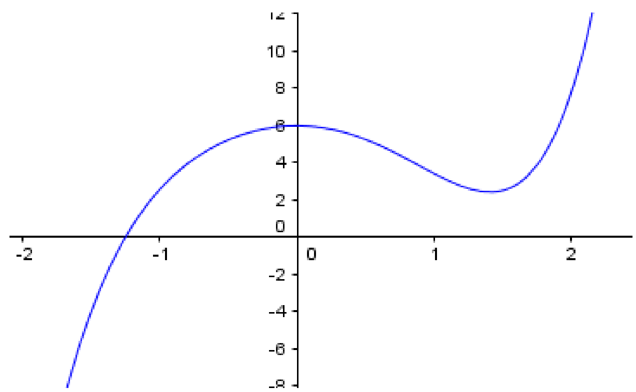
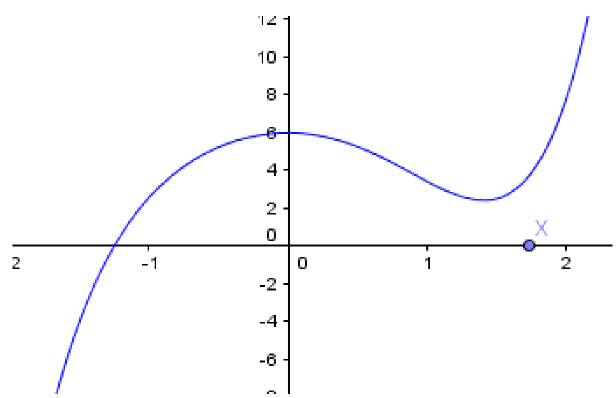
Debido a que uno de los objetivos del trabajo con las curvas gira en torno a la actividad matemática que se puede propiciar a partir del trabajo con situaciones de covariación, abordando la derivada desde su representación geométrica, y destacando que el trabajo con la curva generada contribuyó en tal objetivo, describimos a continuación las actividades realizadas con estas dos funciones (generadas y degeneradas).

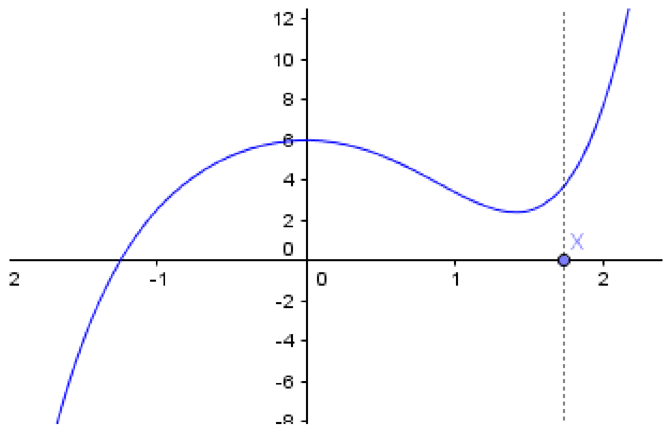
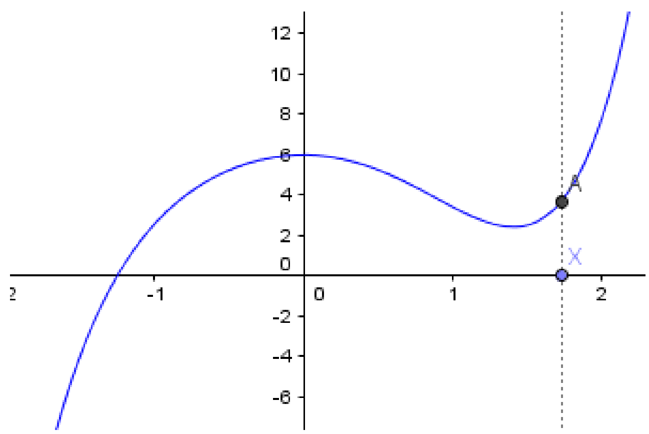
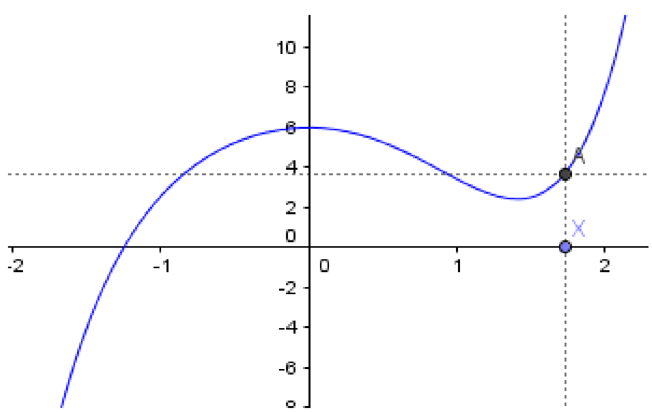
3.2.2 Socialización de resultados

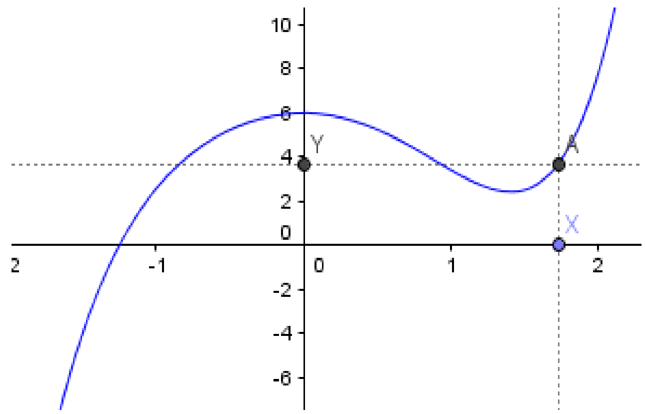
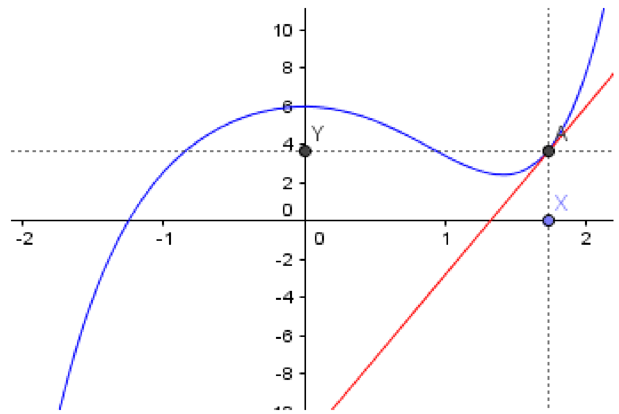
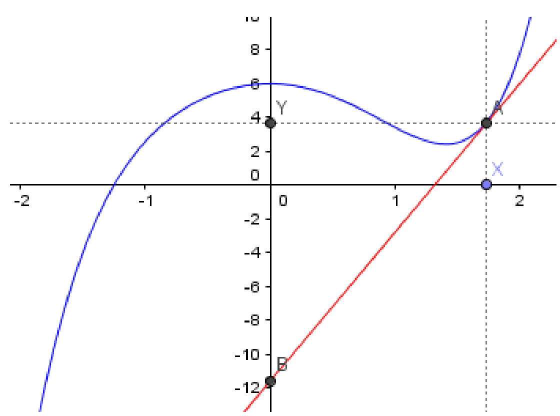
CONSTRUCCIÓN N°1: "DEGENERADA"

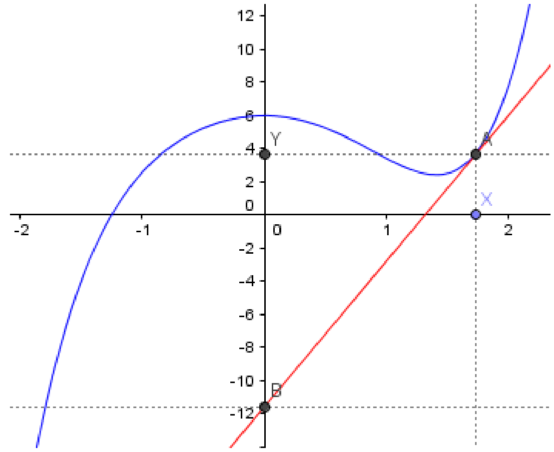
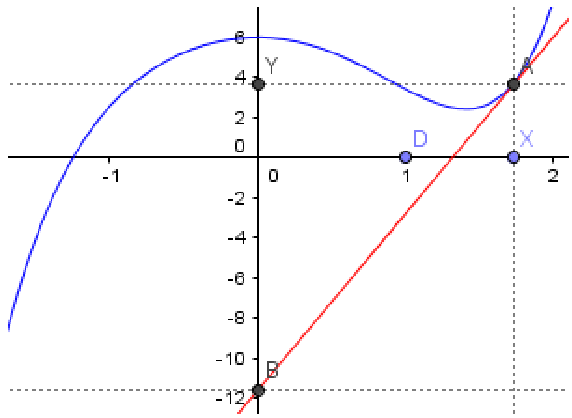
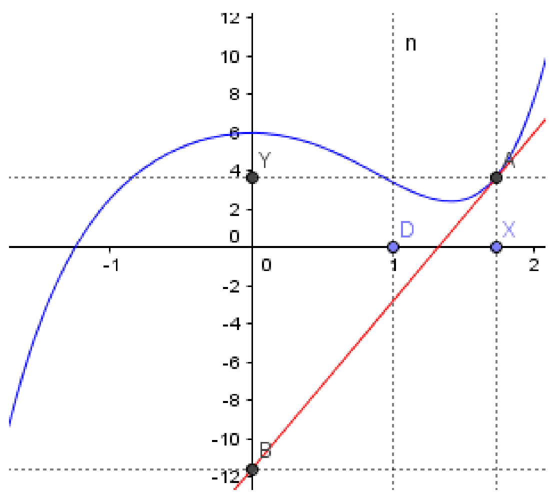
A continuación presentamos la sistematización de los videos de clase en los que la curva degenerada fue estudiada.

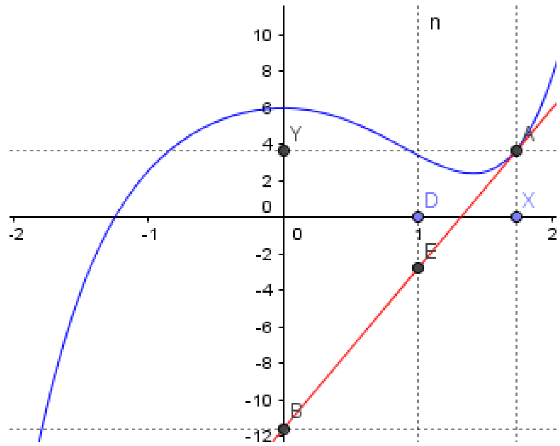
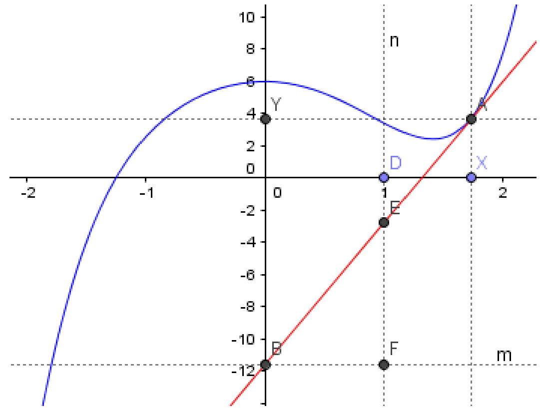
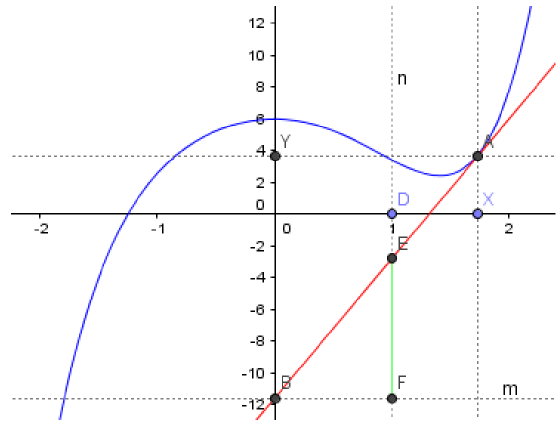
Para empezar con el trabajo sobre la curva denominada "degenerada", el profesor expone a sus alumnos el paso a paso en la construcción de la misma, sin decirles que la degenerada obtenida coincide con la función derivada cuando esta cumple cierta condición; la construcción fue la siguiente:

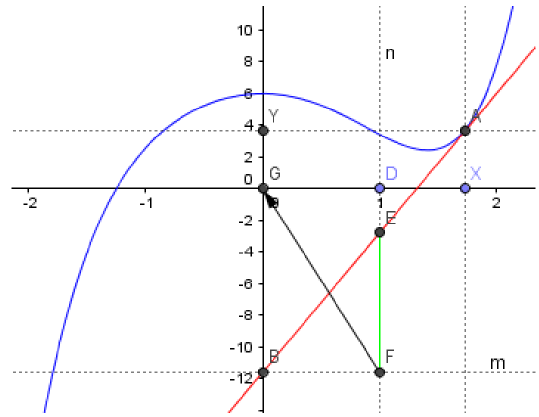
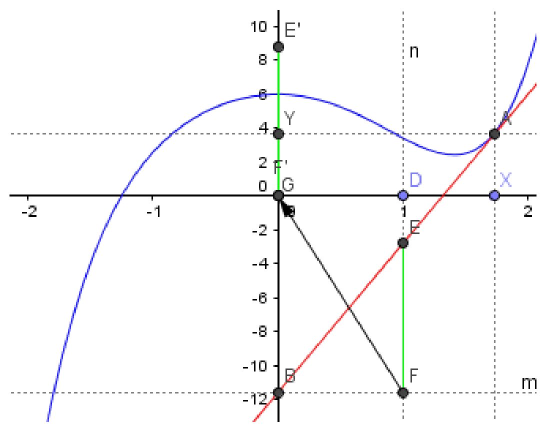
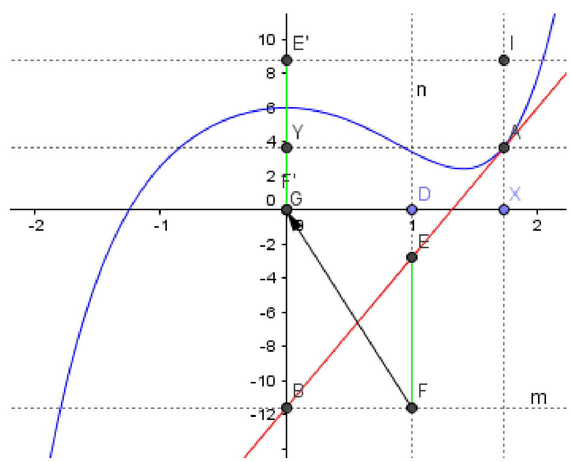
Función $y = \frac{3}{7}x^5 - 3x^2 + 6$	
punto X sobre el eje de las abscisas	

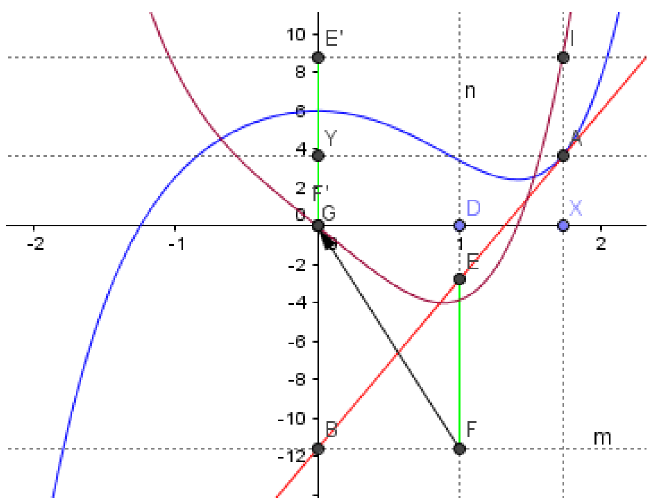
Recta perpendicular al eje x por el punto *X*	
Punto *A* de intersección entre la curva y la recta anterior	
Recta perpendicular al eje y por el punto *A*	

Punto Y de intersección entre el eje de ordenadas y la recta perpendicular a este	
Recta tangente a la curva por el punto A	
Punto B de intersección entre la tangente y el eje y	

Recta m perpendicular al eje y por *B*	
punto *D* en (1,0)	
Recta *n* perpendicular al eje de abscisas por el punto *D*	

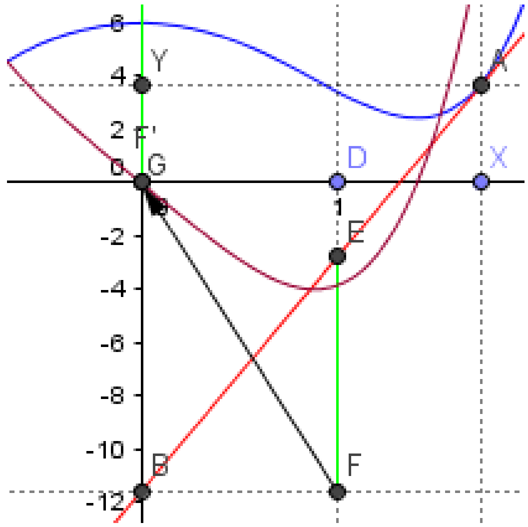
punto E de intersección entre la recta anterior y la recta tangente	
punto F de intersección entre m y $\boldsymbol{n}$	
$\overline{EF}$	

punto G en el origen y vector FG	
punto E' sobre el eje y talque $EF = E'$	
Recta perpendicular al eje y por el punto E' y punto I de intersección entre dicha recta y m	

Lugar geométrico de I respecto a X	

¿Por qué el punto D debe tener como coordenada $(\mathbf{1},\mathbf{0})$***?***

El trabajo propuesto con esta construcción consistió en que los estudiantes del curso determinaran la expresión algebraica del lugar geométrico generado a partir de la variación de la pendiente de la recta tangente a la curva dada. Dicho lugar geométrico corresponde con la función derivada cuando el punto D tiene como coordenada $(1,0)$; esto, debido a que se plantea el estudio de la pendiente de la recta tangente en los puntos B y E, siendo el punto B el de intersección entre la recta tangente y el eje y, y E un punto perteneciente a la recta perpendicular al eje x por el punto D, lo cual garantiza que el Δx resultante sea igual a 1, es decir el estudio de la pendiente en tal construcción está dado por el valor del Δy:



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\Delta x = 1, \textit{entonces:}$$

$$m = \Delta y$$

Ahora, se traslada al origen del plano el $\overline{FE}$ *que corresponde con el* Δy, *y como punto de intersección entre la recta perpendicular al eje y por el punto* E', *y la recta perpendicular al eje x por el punto X se determina el punto I que modela la función derivada a través del movimiento del punto X sobre el eje de ordenadas.*

Después de esto, el profesor plantea las siguientes preguntas a sus estudiantes:
¿Qué pasa si la función es polinómica?
¿Qué pasa si la función es logarítmica?
¿Qué pasa si la función es exponencial?
¿Qué pasa si la función es radical?
¿Cuál sería la degenerada en cada caso?

El profesor presenta un ejemplo generando una función polinómica, determinando con ayuda del software la respectiva degenerada y cuestiona a sus alumnos acerca de la expresión algebraica de la misma.

Dicha tarea es asignada para la siguiente sesión de clase, por lo que se pide a los alumnos explorar la construcción e intentar dar respuesta a las preguntas propuestas.

Al empezar la siguiente sesión el profesor se percata de que los estudiantes no exploraron a fondo la construcción, por lo que destina aproximadamente cincuenta minutos de la clase para tal actividad. Así, se propone a los alumnos que por grupos (dos o tres estudiantes) trabajen con la construcción e intenten dar respuesta a las preguntas.
Durante este espacio de la clase, el profesor Guacaneme realiza un recorrido por el aula, abordando por grupos de trabajo a los estudiantes mientras ellos le comentan sus primeros resultados, encontrando que en varias ocasiones se postula a la derivada como posible degenerada. (Sin embargo la calidad del sonido impide describir claramente las afirmaciones de los estudiantes); posteriormente se realiza la socialización de los resultados.

Para contestar las preguntas anteriormente planteadas, los estudiantes relatan las actividades que realizaron y los resultados que obtuvieron:

GRUPO A:
Reportan que miraron paso a paso la construcción y que observaron que el punto I es el que determina el lugar geométrico que da como resultado la degenerada. Como primera opción para intentar determinar a qué expresión algebraica correspondía el lugar geométrico resultante, realizaron la anti derivada de la función original, obteniendo que no coincidía con la degenerada. Su segunda opción fue realizar la derivada de la función, con la cual se dieron cuenta que correspondía con la degenerada, siempre y cuando el punto D esté en $(1,0)$. Para determinar cómo se transformaba la función al mover el punto D a lo largo del eje x, los estudiantes decidieron realizar la construcción tomando como función inicial $f(x) = senx$ y variar la posición al punto D para mirar qué ocurría con la degenerada. Ellos reportan que la distancia del origen al punto D determina una constante por la que se multiplica la función derivada cuando esta se traslada a lo largo del eje de las abscisas, y dicen entonces que se determina una familia de derivadas sujetas a dicho valor.

ANÁLISIS DE LA SOCIALIZACIÓN DEL GRUPO A:

Los estudiantes del grupo plantean que por ser la integral uno de los elementos fuertes del cálculo, su primera idea fue pensar en que la degenerada fuese la integral de la función inicial y al descartarla ingresando en el software la respectiva expresión algebraica, pasan a considerar la derivada. Para esta opción y pese a que los estudiantes del grupo han tomado un conjunto de cursos de cálculo (precálculo, cálculo diferencial, cálculo integral, cálculo multivariado) dentro de su formación académica, se evidencia que su manera de determinar la correspondencia o no de la degenerada con la derivada, no hace uso de teoremas ni proposiciones acerca de tal objeto matemático, sino que al tener acceso a la expresión algebraica de la función original, realizan el cálculo de la derivada e ingresan tal expresión para verificar con el software la supuesta relación. Los estudiantes logran establecer la condición que debe cumplir el punto D para que la degenerada corresponda con la derivada ($D = (1,0)$ *); sin embargo, se evidencia una confusión al intentar describir a las demás funciones que se determinan al cambiar la coordenada de este punto. Así, el grupo expositor dice que se genera una "familia de funciones derivadas sujetas a dicho valor", lo que parece indicar que conciben a los demás lugares geométricos como derivadas pasando por alto la unicidad de la misma. También, se evidencia que para la actividad, los estudiantes no dan muestras de interpretar la degenerada a partir de la pendiente de la recta tangente, ni como límite de las razones de cambio sino que limitan su actividad matemática a obtener la expresión algebraica de la curva a partir de las reglas de derivación, para posteriormente graficarla y comprobar la correspondencia entre esta y la degenerada.*

GRUPO B:

Un estudiante del grupo relata que su primera idea fue creer que la degenerada correspondía a la función derivada pero que con la exploración descubrió que no era así, sino que para tener dicha relación debía darse la condición que ya se mencionó sobre el punto D.

Un estudiante del grupo dice que la construcción les permitió determinar que la función derivada y la familia de degeneradas que la construcción permite crear, coinciden en los puntos en los que están las raíces de las mismas, con las cuales se pueden determinar los puntos máximos y mínimos de la función original; es decir, la construcción le permitió encontrar una familia de funciones (entre ellas la derivada) para hallar máximos y mínimos.

ANÁLISIS DE LA SOCIALIZACIÓN DEL GRUPO B

Al igual que el grupo anterior, el grupo B establece la degenerada como posible derivada y la comprobación de tal hipótesis se realiza mediante ensayo y error, escribiendo la ecuación de la función derivada y anti derivada de la función $f(x)$ dada, haciendo uso del software. De la anterior intervención rescatamos que los estudiantes del grupo reconocieron el criterio de la primera derivada para determinar puntos críticos y de esta manera además de reforzar el estudio de la derivada plantearon la inclusión de la degenerada para la determinación de máximos y mínimos de diversas funciones; sin embargo tampoco intentaron identificar el por qué la condición sobre el punto D determinaba la correspondencia entre degenerada y derivada sino que se limitaron su actividad al uso del software para comprobar sus hipótesis y no ahondar en el fenómeno de covariación que lleva a determinar la derivada en la construcción.

GRUPO C*:*

Un estudiante del grupo narra el proceso de exploración, y comenta que centraron su atención en los fenómenos de variación que se dan al mover ya no el punto D sino el punto X, que en la construcción determina el comportamiento de la pendiente de la recta tangente, es decir, los estudiantes realizan una exploración con la función inicial para buscar una relación entre la pendiente y la degenerada; determinando que cuando la pendiente de la función es positiva entonces la función degenerada es positiva. El estudiante continúa con su intervención diciendo que cuando la pendiente de la función se hace cero debido al cambio de concavidad de la función original entonces la degenerada en dicho punto también es igual a cero.

ANÁLISIS DE LA SOCIALIZACIÓN DEL GRUPO C:

Desafortunadamente al momento de describir los resultados el estudiante presentó algunas confusiones y pese a que el análisis que realizaba resultaba adecuado al relacionar aspectos *del comportamiento de la recta tangente a la curva con el de la degenerada, el estudiante insistía en afirmar que su análisis mostraba el comportamiento de la función inicial a partir del comportamiento de las rectas pendientes a ella. Sin embargo y, aunque nombrando de manera incorrecta las funciones a las que hizo referencia durante su intervención, se puede inferir a partir del video que el alumno logró identificar la degenerada como una función que capturaba aspectos del comportamiento de las rectas tangentes a la función original, así, vemos en su descripción afirmaciones que aluden a que cuando las pendientes son positivas entonces la degenerada toma valores positivos en el eje de ordenadas y a su vez si dichas pendientes pasan de ser positivas a hacerse cero entonces la función degenerada presenta un corte con el eje de las abscisas.*

Se evidencia que si bien analizan el signo de la derivada e intentan aplicar el criterio de la primera derivada, presentan fuertes confusiones al intentar analizar globalmente la gráfica de la función derivada. Durante la exposición del grupo, el profesor señala que la degenerada logra capturar características de la pendiente de la recta tangente por lo que la correspondencia entre la derivada y la degenerada efectivamente existiría.

GRUPO D:

Los estudiantes de este grupo intentaron mostrar un contraejemplo a la hipótesis que señalaba a la derivada como posible degenerada; para esto, tomaron la función exponencial he intentaron mostrar que la degenerada de esta no coincidía con la derivada, sino que podía ser la reflexión de la misma

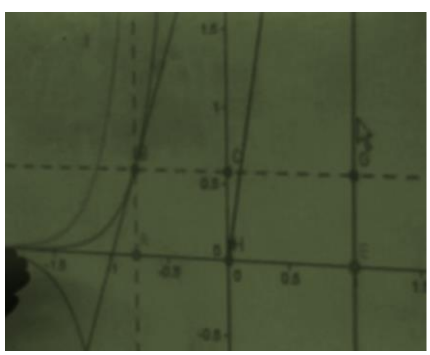


Imagen 1Captura de pantalla, 2013, video de la sesión N°1

Con dicho ejemplo, la conjetura de los estudiantes pareció acertada pero por orientación del profesor Guacaneme, se construyó la degenerada de la función $y = x^2$, encontrando nuevamente que para dicha función la construcción sobre la que el grupo trabajó arroja la reflexión de la función inicial; se construyó también para $sen(x)$ pero en tal caso la "degenerada" del grupo ya no hizo referencia ni a la reflexión ni a la derivada.

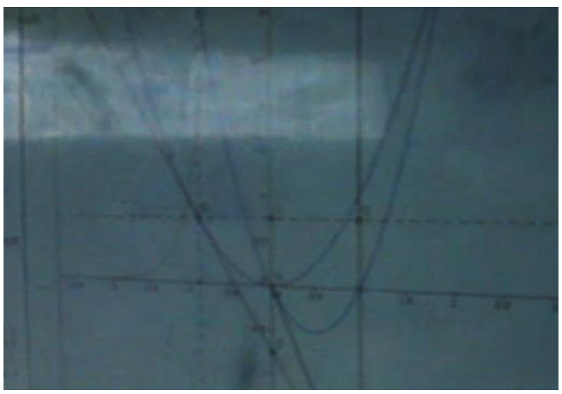


Imagen 2.Degenerada de y=x2, 2013, Captura de pantalla.

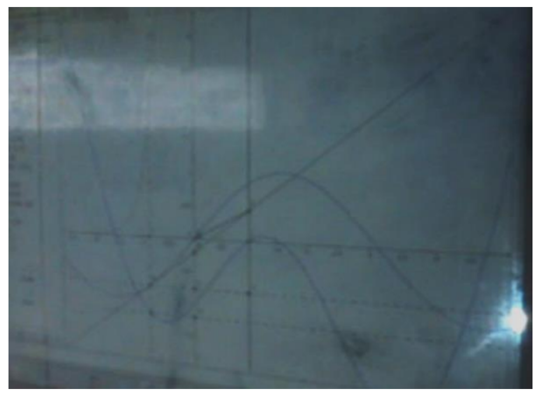


Imagen 3. Degenerada de y=sen (x), 2013, Captura de pantalla.

Así, se concluyó que la construcción no correspondía con la asignada por el profesor y por lo tanto los hallazgos del grupo no respondieron a las preguntas planteadas para la clase.

ANÁLISIS DE LA SOCIALIZACIÓN DEL GRUPO D:

Pese a que la construcción que realizaron los estudiantes no correspondió con la entregada por el profesor, se resalta el esfuerzo que hicieron al tratar de reconstruir la misma y comprobar en esta su hipótesis con varias funciones.

El profesor rescata que sobre la nueva construcción del grupo o sobre otra cualquiera también sería interesante realizar un ejercicio similar al planteado en clase, en el que se logre determinar a qué expresión algebraica corresponde el lugar geométrico resultante.

GRUPO E

Para empezar el estudiante representante de este grupo señala que comparten los hallazgos que los grupos anteriores han mostrado acerca de la correspondencia entre la degenerada y la derivada cuando el punto D cumple la tan nombrada condición.

Comenta que con el objetivo de comprobar tal hipótesis decidió calcular la derivada de la función e ingresando su representación algebraica en el software observaron que la representación gráfica de esta y de la degenerada era muy similar, pero que tenían una pequeña diferencia. Realizaron varios intentos con diferentes tipos de funciones $y = 3x$, $y = x^2$ y $y = x^3$ de este modo, variando la posición del punto D, identificaron que el valor de la distancia OD actuaba como un factor que multiplica la función derivada, pero al igual que los grupos anteriores no explican las razones matemáticas que generan estas relaciones, es decir la actividad de estudio a través de la covariación no fue abordada sino que se limitó a calcular a derivada a través de las reglas de derivación para posteriormente verificar con el software.

(La calidad del video no permitió visualizar los ejemplos que el grupo realizó)

ANÁLISIS DE LA SOCIALIZACIÓN DEL GRUPO E:

Este grupo también encuentra a la derivada como posible degenerada y su verificación la realizan haciendo uso del software. En un principio ingresan la expresión algebraica de la derivada y no encuentran una correspondencia exacta con la derivada, debido a que en tal momento el punto D no se encontraba en la coordenada correspondiente, posiblemente porque los mismos estudiantes del grupo habrían modificado su posición dentro de su proceso de exploración. Para comprobar la relación derivada-degenerada no se evidencia el uso de características de la función derivada que permitieran determinar la representación gráfica de la función o viceversa ni se desarrollan en tal grupo hipótesis al respecto. En relación con la condición sobre el punto D, coinciden con lo planteado por los grupos anteriores y también establecen que la familia de funciones que se generan al variar dicho punto se determina a partir de la multiplicación entre el valor de la coordenada en x del punto D y la función derivada.

Vemos que los estudiantes de este grupo al igual que los del grupo A hacen uso de las reglas de derivación para calcular la derivada, luego graficarla con el software y ver si coincide con la degenerada, estableciendo la condición sobre el punto D a partir de la exploración con el programa pero no dan muestras de comprender el por qué tal condición es necesaria para que derivada y degenerada correspondan.

GRUPO F:

Los estudiantes deciden tomar como función inicial $y = \tan(x)$, con base en esta se determina la degenerada y se ingresa en el programa la derivada de la función para comprobar la coincidencia o no entre estas. Dicen que cuando el punto *D* tiene coordenada $(1,0)$ se verifica que la degenerada y la derivada son las mismas, pero cuando se ubica al punto *D* en $(0,0)$ la degenerada aparece indeterminada:

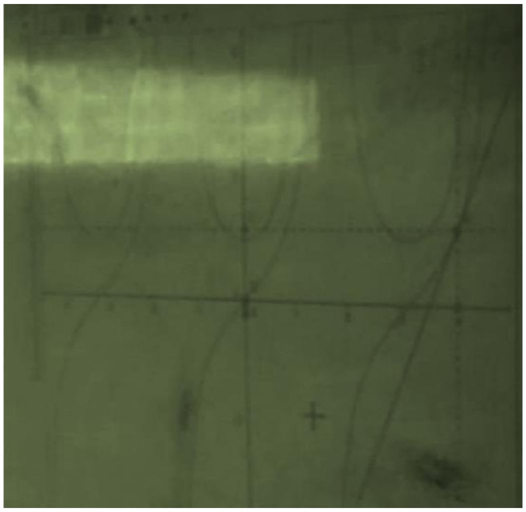
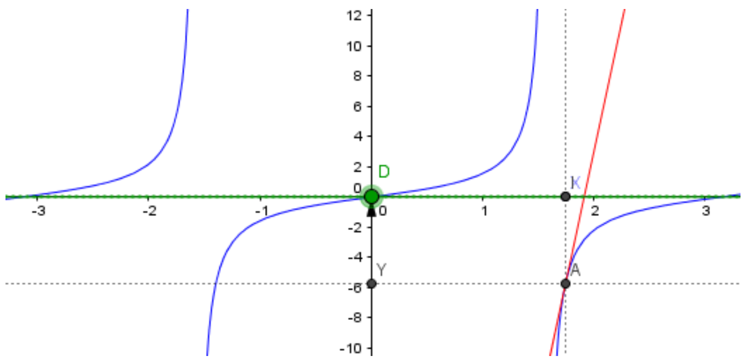


Imagen 4.Degenerada de y = tan(x). Captura de pantalla

De igual manera lo comprobaron para las funciones $y = sen(x)$ y $y = \cos(x)$ encontrando el mismo resultado.

ANÁLISIS DE LA SOCIALIZACIÓN DEL GRUPO F:

El profesor dice no haber considerado antes este resultado dentro de la actividad, por lo que el mismo se dejó abierto como ejercicio para exploración pero no se profundizó en aspectos referentes a dicho hallazgo. Sin embargo al realizar lo establecido por el grupo sobre la construcción suministrada por el profesor Guacaneme, pudimos confirmar que lo que postulan resulta errado, pues con dichas funciones se sigue observando que el valor de la coordenada en x del punto D continúa actuando como un operador y que en el caso particular en que la coordenada en x *del mismo es cero, no indetermina la función degenerada sino que la anula haciéndola corresponder con la recta* $y = 0$.



INTERVENCIÓN DEL PROFESOR:

Después de la explicación de cada grupo de trabajo, el profesor Guacaneme intervino realizando la siguiente afirmación:

Ninguno de ustedes dijo por qué es la derivada cuando D está en $(1,0)$

Y realiza a sus estudiantes las siguientes preguntas:

¿Por qué D determina que la degenerada sea o no la derivada?

¿Qué es lo que en la construcción determina que el lugar geométrico corresponda con la derivada?

Se recrea nuevamente el paso a paso de la construcción con el objetivo que los estudiantes establezcan cómo se genera la tan nombrada condición sobre D y posteriormente el profesor plantea a sus estudiantes la siguiente pregunta: ¿será que esta opción de trabajar las derivadas es una opción alterna que no incorpora la idea de límite?

La anterior cuestión fue planteada como un comentario o pregunta de reflexión para los estudiantes más que para tema discusión de la clase y por tal motivo no se realizaron actividades al respecto.

Invita a sus estudiantes a recordar que la noción de límite (el infinito, lo infinitamente grande o infinitamente pequeño) ha sido uno de los grandes problemas en el estudio de la derivada y con tal comentario se cierra el proceso de estudio sobre la curva degenerada.

Nota: Las cuestiones anteriormente planteadas no son abordadas en esta sesión de clase, sino que se dejan como preguntas de reflexión para los estudiantes del curso.

3.3 ANÁLISIS DE LAS TAREAS ENTREGADAS SOBRE LA CURVA DEGENERADA

La actividad de socialización propuesta para la curva degenerada permitió caracterizar algunos aspectos del conocimiento que los estudiantes poseen sobre la derivada y, aunque en esta actividad no fueron muchos los grupos que lograron establecer características que giraran en torno a tal objeto matemático, se reconoce el potencial que dicha construcción tiene para su estudio.

Así, aunque algunos estudiantes interpretan la derivada como la pendiente de la recta tangente a la curva, se sigue evidenciando un apego a estudiar el objeto matemático a través del cálculo de la misma usando las técnicas de derivación; también, y pese a que algunos de los estudiantes dan indicios de identificar el criterio de la primera derivada en las construcciones, continúan presentando confusiones notables al tener que describir la gráfica de la degenerada a nivel global. Solo uno de los grupos intentó describir el comportamiento de la degenerada sin acudir a la representación algebraica obtenida al derivar la de la función primitiva, lo que reafirma una de las principales dificultades que investigadores como Contreras (2000), Badillo (2003) y Salazar et al. (2009) postulan, relacionada con la dependencia de la representación algebraica para el tránsito entre la función y la función derivada, resultados que reafirma la tendencia a asociar la representación gráfica de la función con una expresión algebraica que posteriormente les permita calcular algorítmicamente la derivada. En relación con esto, coincidimos con lo que Pino-fan et al. (2012) plantean en relación con el conocimiento común del contenido, al afirmar que este no es suficiente para la enseñanza del concepto, por lo que es necesario que los profesores posean tanto conocimiento especializado como extendido en relación con la derivada para abordar la enseñanza del concepto en el aula de clase.

Ahora, con respecto al establecimiento del porqué la condición sobre D determina la correspondencia de la degenerada con la derivada, creemos que dentro de la propuesta pudo establecerse una actividad que guiara al estudiante a determinar dicha condición y de esta manera evitar que la mayoría de ellos centraran su atención en la verificación de la correspondencia entre degenerada y derivada, y en la caracterización de la familia de funciones resultante, para evitar que pasaran por alto el fenómeno de covariación presente en la construcción y el cual es fundamental en el estudio de la propuesta.

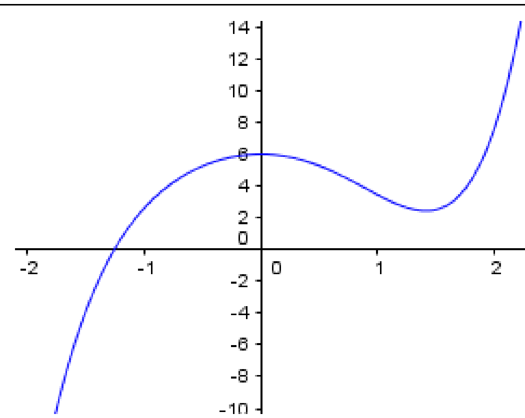
Aunque la socialización de los últimos grupos se hacía más corta y resumida para no repetir resultados ya mencionados por sus compañeros, la mayoría de grupos que participaron intentaron incluir algún aspecto diferente en su intervención, actividad que enriqueció el análisis de la curva para todos los estudiantes del curso.

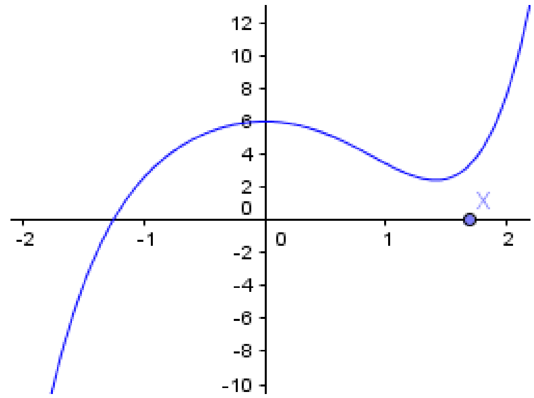
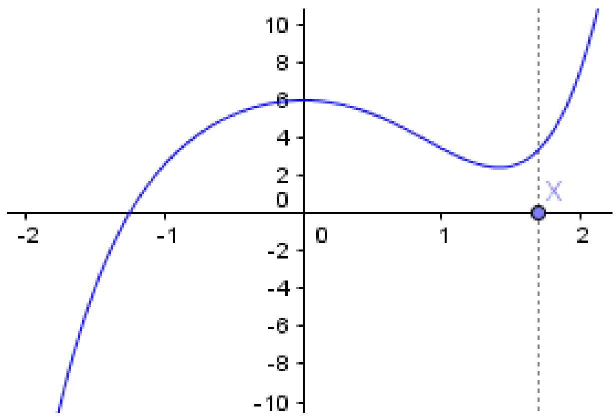
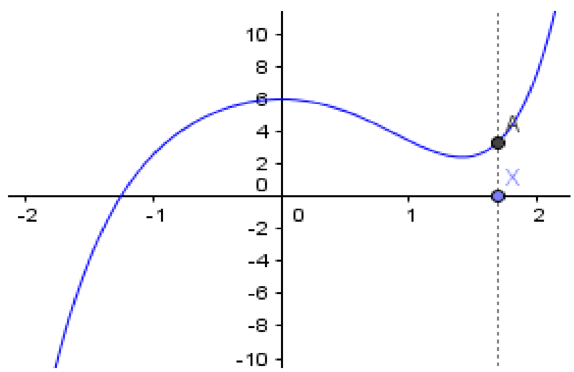
En cuanto al escrito que los estudiantes debían generar relatando su proceso y enfatizado en la actividad matemática que consideraban se había logrado potenciar con la curva degenerada, se obtuvieron descripciones muy cortas y que en varios casos no fueron reflejo de las intervenciones realizadas en la socialización en clase. Pese a ser entregado en grupo, en algunos casos el escrito no guardó relación con la intervención oral sino que recopilaron las conclusiones obtenidas, por lo que consideramos el documento se vio permeado por las intervenciones de los compañeros de clase y del profesor. Probablemente en dichos casos el estudiante del grupo que presentó los resultados en la socialización no fue el mismo que redactó el documento, por lo que pensamos necesario reforzar el trabajo colaborativo en el aula de matemáticas.

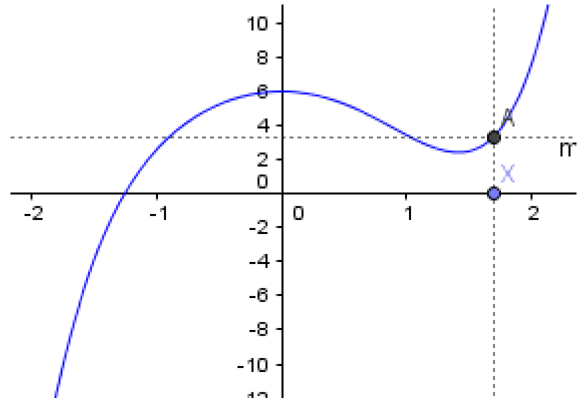
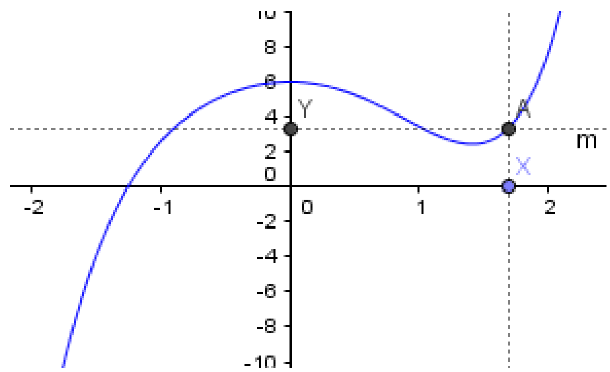
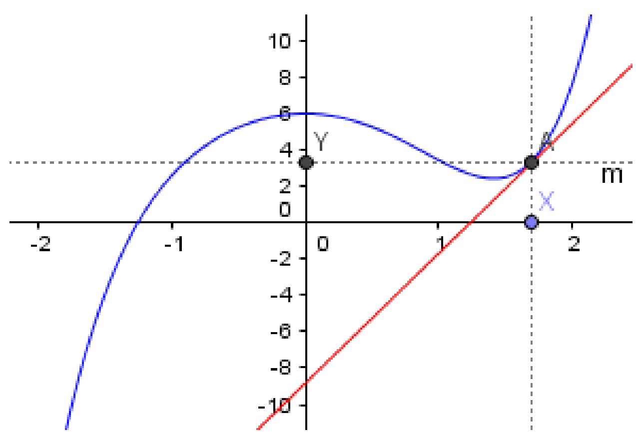
Pese a no ser un curso de Cálculo Diferencial esperábamos que los estudiantes recordaran algunos aspectos del objeto matemático y con base en estos hubiesen realizado la correspondiente verificación, que posteriormente les permitiría determinar la expresión algebraica de la misma; por lo que consideramos indispensable que dentro de la formación de profesores de matemáticas se profundice en el estudio de tópicos específicos tanto a nivel matemático como didáctico para que como plantea Shulman (1986) el profesor de matemáticas esté en la capacidad de transformar su conocimiento en uno comprensible para sus alumnos.

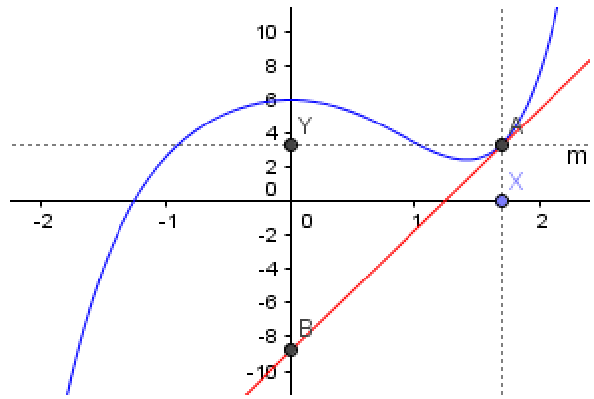
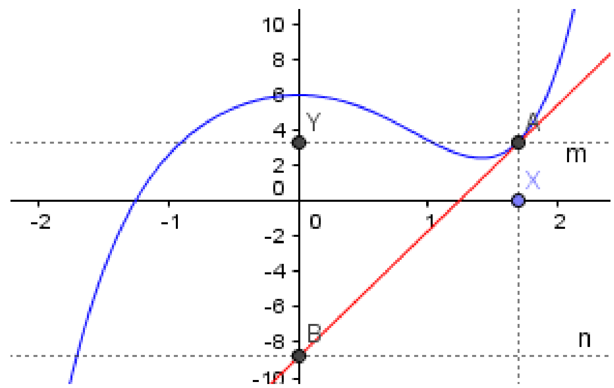
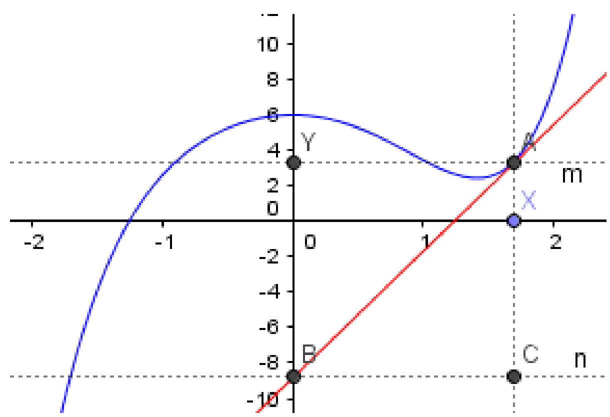
CONSTRUCCIÓN N°2: “GENERADA”

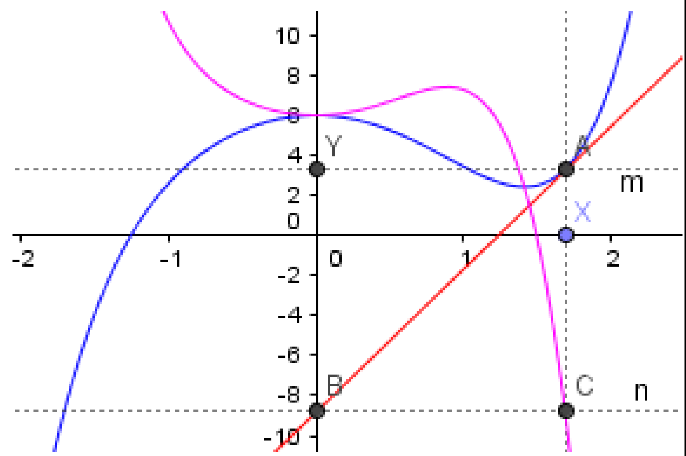
Con el objetivo de potenciar el pensamiento variacional y con él la actividad matemática que en ejercicios de variación se desarrolla, el profesor propone un segundo ejercicio con Geogebra para desarrollar en grupo, utilizando la siguiente construcción:

Función $y = \frac{3}{7}x^5 - 3x^2 + 6$	

Punto *X* sobre el eje x	
Recta perpendicular al eje x por el punto *X*	
Punto *A* de intersección entre la curva y la recta perpendicular	

Recta m perpendicular al eje y por el punto A	
Punto Y de intersección entre el eje y y la recta perpendicular a este	
Recta tangente a la curva por el punto A	

Punto B de intersección entre la recta tangente y el eje de ordenadas	
Recta n perpendicular al eje y por el punto B	
Punto C de intersección entre las rectas m y n	

Lugar geométrico de C con respecto a X	

El trabajo sobre la curva generada consistió en determinar la expresión algebraica que modelaba el lugar geométrico resultante en la construcción. En este caso, se estudia la recta tangente a una curva y de dicha tangente se considera el parámetro b en la representación algebraica de la misma. (Esta no guarda relación alguna con la deriva, sino que es propuesta para propiciar actividad matemática legítima en el quehacer de los alumnos)

El lugar geométrico generado en la construcción será la denominada la función generada. Terminada la construcción se plantea la pregunta:

¿Qué función es la generada respecto a la función original?
¿Qué resulta para funciones polinómicas, logarítmicas, exponenciales y trigonométricas?

Se realiza una primera socialización de los resultados previos, no a manera de exposición con el software como en la curva degenerada sino simplemente comentando desde sus puestos los hallazgos hasta el momento:

GRUPO A:

Comentan que su primera opción a descartar fue una posible relación entre la generada y la integral o la generada y la segunda derivada de la función. Después de esto observaron que la generada parecía ser la misma función original multiplicada por -1 pero realizando una verificación con funciones cuadráticas, cúbicas y cuarticas en las que se variaba el parámetro a de las mismas $(ax^2, ax^3\ y\ ax^4)$ determinaron que dicha conjetura no se mantenía debido a que en varios casos la generada se hacía más ancha o más angosta por lo que la generada debía ser el producto de una constante por la función original.

ANALISIS DE LA SOCIALIZACION DEL GRUPO A:

Puesto que al ingresar la función $y = x^2$ *la generada parecía corresponder con* $y = -x^2$*, la primera idea del grupo fue creer que la expresión algebraica de la generada correspondía con la de la función original multiplicada por* -1. *Para verificar su conjetura decidieron explorar con otros tipos de funciones y además variar los parámetros de las mismas, ejercicio con el cual pudieron comprobar que* -1 *como factor no podía ser el que determinaba la generada; esto, debido a que el lugar geométrico determinado con la construcción se comprimía o expandía en algunos casos. Lo anterior les permitió establecer que existe un parámetro que produce tal comportamiento pero no han logrado identificar aún cual es.*

Vemos que la actividad de exploración a través del software llevó a los alumnos al establecimiento de hipótesis y posterior verificación de conjeturas, todas estas, actividades mediadas por el uso de la tecnología en el aula.

GRUPO B:

Un estudiante del grupo menciona que en su proceso de exploración observaron que la generada parecía ser un reflejo de la función original y piensan analizar si dicho reflejo se da a partir de la recta tangente.

Relatan también que encontraron que las curvas tienen en común el punto de corte con el eje de las ordenadas y que los máximos y mínimos de la función original parecen determinar los puntos en los que la generada corta al eje de las abscisas.

ANALISIS DE SOCIALIZACION DEL GRUPO B:

Mediante la visualización, los estudiantes lograron hipotetizar acerca de una posible relación entre la generada y la reflexión de la función inicial; sin embargo dicha relación no coincidió exactamente por lo que decidieron buscar algún otro aspecto que pueda afectar dicha relación.

Así vemos que actividades como la exploración, conjeturación y verificación son fuertemente potenciadas en el estudio de la curvas, además de permitirles la consideración de otros elementos matemáticos como los máximos y mínimos en el estudio de funciones.

GRUPO D:

Dicen que empezaron descartando la derivada como posible generada debido a que el grado de esta no disminuía. Posteriormente, comentan que observaron características de la reflexión en la generada e intentando encontrar una expresión algebraica general para esta, encontraron que parecía corresponder con la representación gráfica producida al tomar la expresión algebraica de la función original y multiplicarla por una constante $-k$.

Un estudiante del grupo cuenta que dentro de su proceso de exploración trabajaron con funciones cuadráticas y lograron determinar que los parámetros a y c de la función son los que determinan la representación algebraica que correspondería con el lugar geométrico descrito por la generada.

ANALISIS DE SOCIALIZACION DEL GRUPO D:

Aunque fue una intervención corta en la que no se muestran resultados mediante el software, el grupo parece haber realizado una adecuada exploración que les permitió encontrar la *expresión algebraica general que tendrá la generada para el caso de funciones cuadráticas, dando muestras de desarrollar una actividad previa de exploración, conjeturación y verificación que abrió camino a la generalización dentro del proceso de estudio de la función.*

GRUPO E:

Al observar el lugar geométrico que a partir de la construcción se determinaba para $f(x) = x^2$, su primera idea fue creer que la generada era la reflexión de la función original, pero al hacerlo con una función cuadrática con parámetros b y c distintos de cero descartan su conjetura.

Después de algunos intentos fallidos, deciden explorar con las funciones trigonométricas y creen que puede haber relación entre la envolvente y la generada, y como la envolvente de $f(x) = senx$ es $f(x) = xcos\, x$ decidieron comprobar si la generada podría resultar del producto entre una función y la derivada, sin embargo dicen que aún no es exacta la relación planteada.

ANALISIS DE LA SOCIALIZACION DEL GRUPO E:

Como primera opción el grupo contempla la reflexión como posible generada, pero al encontrar una función cuadrática en la que la relación entre estas no se daba de forma directa, los estudiantes deciden pasar a contemplar otros elementos matemáticos como la envolvente de la familia de funciones y la derivada de la función. Sin embargo, por tratarse de una socialización en la que mostraban los resultados obtenidos en cincuenta minutos de exploración, los estudiantes del grupo no alcanzaron a verificar con el software sus hipótesis al respecto.

GRUPO F:

Atendiendo a los resultados de los grupos anteriores, los alumnos deciden retomar las ideas planteadas y empiezan a explorar sobre funciones de grado 3 encontrando que el parámetro de la generada puede ser el recíproco del parámetro de la función original.

ANALISIS DE LA SOCIALIZACION DEL GRUPO F:

Fue una intervención muy corta en la que los estudiantes del grupo relataron sus resultados para funciones cúbicas ingresando la función y= $\frac{3}{7}x^3$ *e hipotetizando acerca de que el parámetro **a** de la generada debía ser el inverso de este, es decir* $\frac{7}{3}$ *en su caso particular. Dicen que al ingresar la representación algebraica de la función inicial teniendo en cuenta este cambio en dicho parámetro, la función ingresada y la generada se asemejan mucho, pero que aún no son exactamente iguales.*

Es decir, la actividad matemática de los alumnos se centró en el establecimiento de hipótesis y verificación de las mismas por medio del elemento tecnológico que mediaba la propuesta.

Nota: para la curva generada el grupo C no realizó socialización de resultados.

INTERVENCIÓN DEL PROFESOR

Plantea la función $f(x) = ax + b$ y pide que determinen la función generada ($\dot{f}(x)$) de esta. Un grupo afirma que la generada de una función afín es una función constante determinada por el punto de intersección de la función con el eje de ordenadas

$$f(x) = ax + b$$
$$\dot{f}(x) = b$$

Ahora, pide la generada de una función $f(x) = ax^2$ para lo cual todos los estudiantes estuvieron de acuerdo en que la generada correspondía con la reflexión respecto al eje x de la función:

$$f(x) = ax^2$$

$$\dot{f}(x) = -ax^2$$

Se pregunta también por la expresión correspondiente para $f(x) = ax^2 + bx + c$ para la cual el grupo B dice que la degenerada tendría como expresión algebraica:

$$\dot{f}(x) = -ax^2 + c$$

Un estudiante de dicho grupo muestra una construcción en la que han generado con el software algunos deslizadores que controlan los parámetros de la función inicial, los cuales les permitirán verificar dicho resultado en varias funciones.

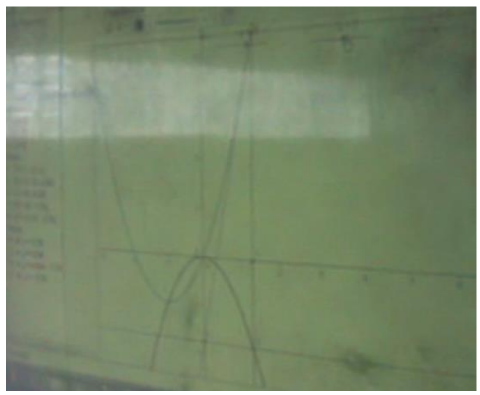


Imagen 5. Deslizadores en función generada, 2013, captura de pantalla

Para observar que sucede con funciones polinómicas, los estudiantes decidieron ingresar funciones de la forma $y = ax^2 + bx + c$ e ir cambiando los parámetros para ver en qué casos se mantiene la relación entre la generada y la reflexión. Empiezan determinando la generada de la función $y = x^2$ y a partir de ella modifican el parámetro a evidenciando que para cualquier valor de este, se conserva la relación:

Imagen 6. Captura de pantalla, 2013, video sesión generada

Imagen 7. Captura de pantalla, 2013, video sesión generada

Es decir al variar el parametro b la degenerada se mantiene como la generada de la función $y = ax^2$:

Imagen 8. Parámetro b, 2013, captura de pantalla-video sesión generada.

Y al variar c que determina el punto de corte de la función original con el eje de las abscisas la función generada sufre una traslación a lo largo del eje de las ordenadas:

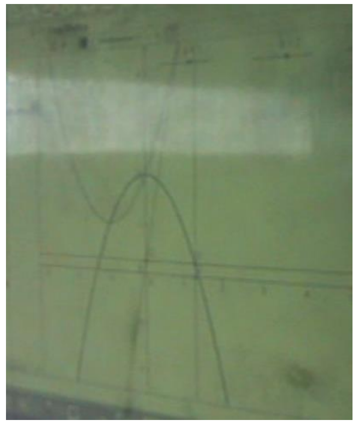


Imagen 9. Parámetro c, 2013, captura de pantalla-video sesión generada.

De la exploración anterior, los estudiantes observan que los parámetros que determinan la generada para el caso de funciones cuadráticas son a y c .

El trabajo realizado por este grupo resulta muy interesante debido a la construcción de los deslizadores para modificar los parámetros de la función; con estos, los estudiantes lograron realizar una verificación para funciones cuadráticas y, aunque no es una demostración de su conjetura, si es una verificación general que evidencia un pensamiento matemático vinculado a la generalización. Como resultado de tal trabajo concluyeron que si la función $f(x)$ *dada era de la forma* $y = ax^2 + bx + c$*, la representación algebraica de la generada estaría dada por la función* $\dot{y} = -ax^2 + c$.

Ahora el profesor pregunta por la expresión algebraica de la generada para una función cúbica y tras aproximadamente 15 minutos de exploración un grupo plantea:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Entonces la generada será:

$$\dot{f}(x) = -2ax^3 - bx^2 + d$$

Y para finalizar el profesor pide la expresión algebraica que tendrá la generada de una función polinómica general:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$$

Se deja planteada la pregunta y el docente continúa su intervención diciendo que usualmente en el cálculo se considera la idea de recta tangente a una curva y de dicha tangente se considera la pendiente de la recta, pregunta: ¿por qué? ¿Por qué no considerar el parámetro *b* en la representación algebraica de dicha recta tangente? Plantea que cuando consideramos la pendiente tenemos las derivadas, cuando consideramos el b tenemos las generadas, entonces ¿por qué no se estudia *b* en el cálculo usual?, ¿Qué tiene m que no tiene b?, ¿Por qué en la historia de las matemáticas se considera la pendiente y no otro parámetro?

Comenta que la derivada nos describe aspectos relacionados con fenómenos físicos (aplicabilidad) pero ¿por qué no explorar en el aula a la generada si describen cosas matemáticamente tan bellas?

Dichas preguntas se dejan para reflexión y el profesor continúa nombrando tres niveles en los que se abordó el problema; el primero haciendo referencia al estudio de casos particulares, un segundo nivel caracterizado por el uso de deslizadores para generar la familia de funciones, y un tercero referente a la generalización.

Se resalta que algunos estudiantes abordaron solamente la representación geométrica para ensayos y validez de conjeturas y otros basados en la representación algebraica logran resultados significativos.

Dice el docente que este ejercicio es importante en la medida en que lo pensemos para la escuela, señala que usualmente la derivada se enseña a través del límite y pese a que las investigaciones reportan que el estudio desde esta perspectiva genera dificultades de aprendizaje, en la actualidad se sigue enseñando de la misma manera logrando que los estudiantes aprendan a calcular derivadas pero no a derivar.

3.3.2 Las tareas

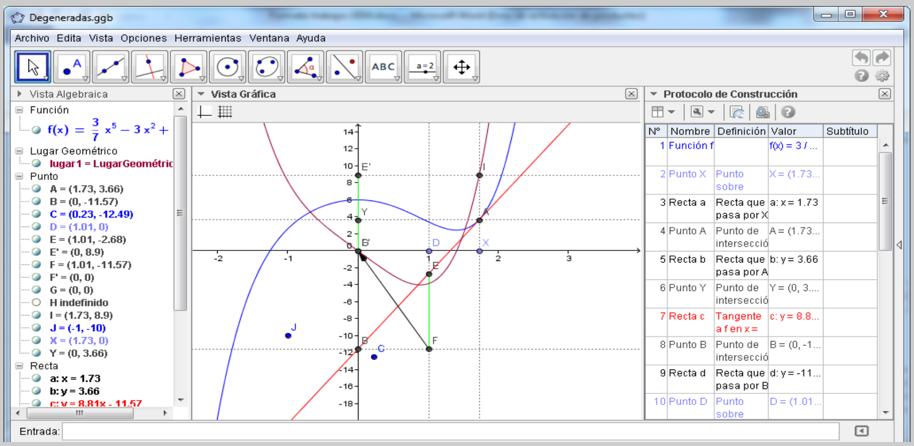
Después del trabajo realizado en las dos primeras sesiones con las curvas generada y degenerada, el profesor pide a sus estudiantes redactar un documento en el que plasmen las actividades que realizaron; a continuación presentamos los archivos que cada grupo generó para ello, retomándolos textualmente:

Tarea curva degenerada:

El grupo B realiza el siguiente escrito con respecto a la degenerada:

GRUPO B

Inicialmente se tiene como herramienta de trabajo una construcción especial que hemos denominado curvas degeneradas, en el programa Geogebra:



Se tiene la función $\boldsymbol{f(x)=\frac{3}{7}x^5-3x^2+6}$ cuya representación gráfica está en la construcción de color azul, a partir de esta y a la construcción atribuida sobre la misma se realizaron los siguientes acercamientos.

El primer acercamiento que se realiza con respecto a la construcción, está permeado, en el momento, que se lleva a cabo la translación del punto $\boldsymbol{D}$sobre el eje $\boldsymbol{x}$; se observa que tal movimiento genera una familia de curvas donde la magnitud del $\overrightarrow{\boldsymbol{FB}}$, está dependiendo de la ubicación del punto $\boldsymbol{D}$ y solamente cuando este tenga coordenadas (1,0), se considera que la gráfica obtenida corresponde a la función derivada, en este caso en la gráfica es la curva color vino tinto.

Por otra parte se observa que a partir del movimiento del punto $\boldsymbol{D}$, genera una familia de curvas, donde está cambiando la curva que desde ahora se llamará degenerada, esta curva se transforma, a partir de la magnitud del vector, es decir la curva se contrae, amplia, o

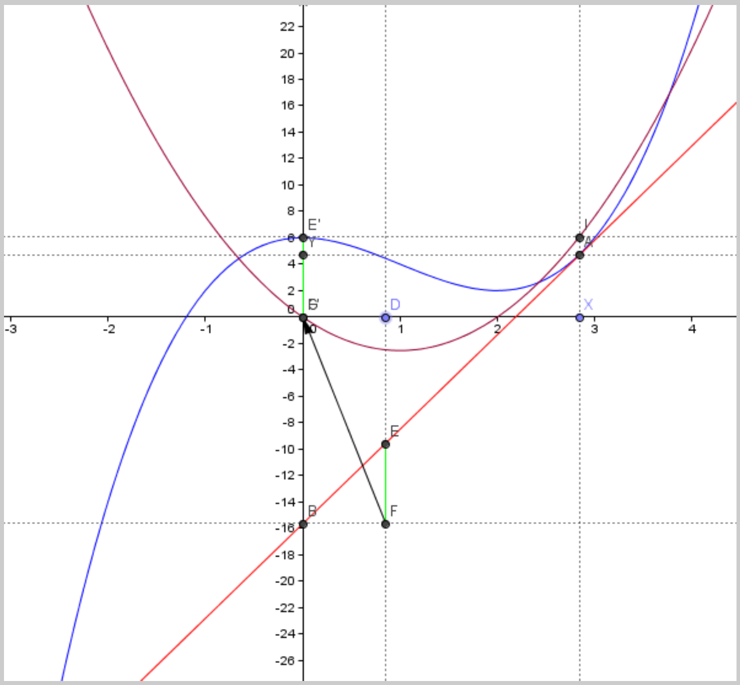
cambia de sentido, si es mayor que 1 la distancia del punto $\boldsymbol{D}$, al origen; si esta entre 0 y 1, y finalmente si el punto $\boldsymbol{D}$, está en el eje x negativo, respectivamente.
Asi mismo, se reconoce que otro punto que se puede desplazar en el eje x es el punto $\boldsymbol{X}$ este punto me determina el comportamiento de la recta tangente sobre la función dada, que a partir de ese momento se llamó primitiva, a este comportamiento se vió que para el caso de mantener el punto $\boldsymbol{D}$ fijo con coordenadas $(\mathbf{1}, \mathbf{0})$, el valor de la pendiente de la recta tangente, me determina la ordenada de cada una de las coordenadas de la curva color vino tinto, mientras la abscisa está determinada, por las abscisas, del punto en movimiento.

Debido a que esta es una tarea asignada posteriormente a la aplicación de la propuesta en el aula, los resultados de los estudiantes se ven un poco influenciados por los hallazgos de sus compañeros y por las explicaciones del profesor.
Para tal grupo y a partir del escrito anterior, determinamos que su actividad en entorno a la propuesta se centró en la exploración de la condición que el punto D debía cumplir para corresponder con la derivada, pero aparte de la descripción de tal característica no se realizó ninguna actividad demostrativa que permitiera justificarla.

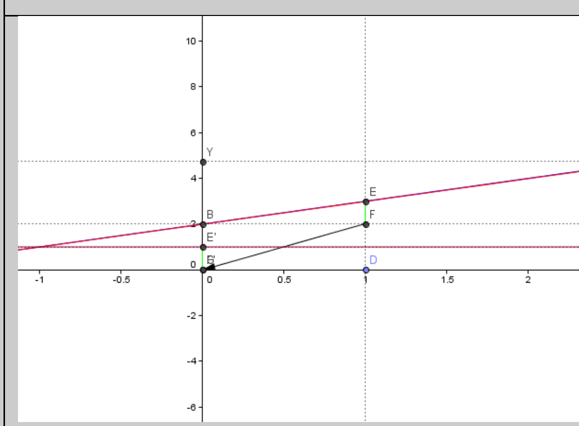
A continuación el trabajo del grupo C:

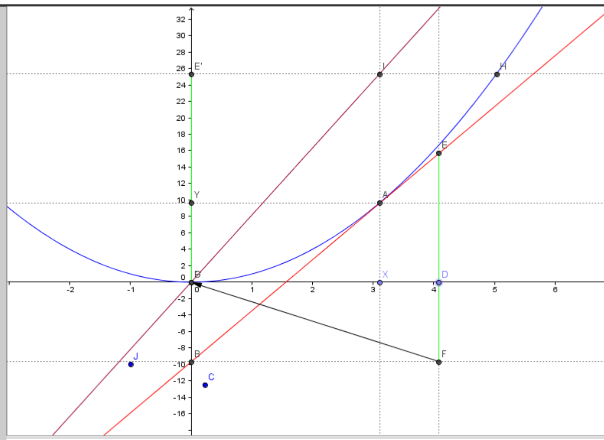
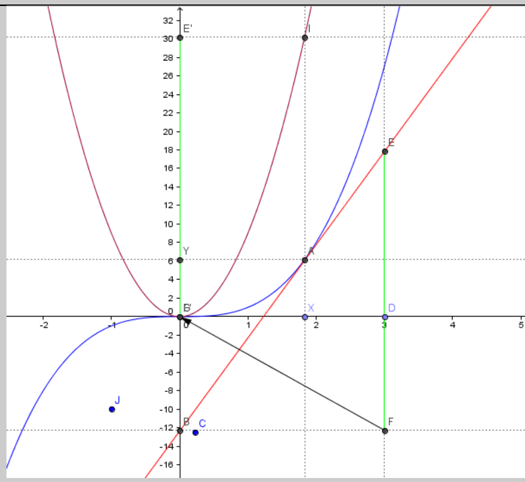
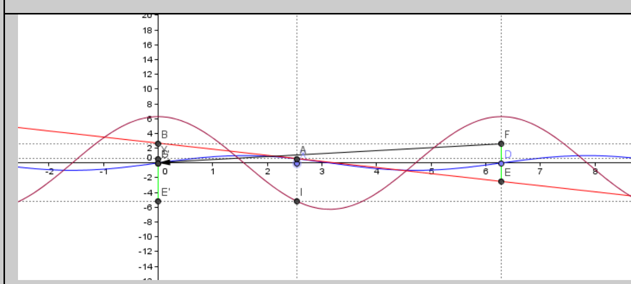
GRUPO C
De acuerdo a la construcción guía se inició el trabajo probando con diferentes funciones polinómicas desde grado uno, grado dos, grado tres y trigonométricas, con el objetivo de encontrar características que definan lo que es una curva degenerada. Inicialmente se observó que el grado de la función degenerada era menor a la función inicial, donde para cualquier función la curva degenerada en la coordenada (1,0) coincidía con la derivada, esto nos lleva a pensar que en diferentes funciones al multiplicar la derivada por uno es la misma, de tal forma que al cambiar los valores la degenerada cambia notablemente. Entonces si inicialmente hay una coincidencia con la derivada, se intuye que la modificación en la curva de la degenerada está relacionada con la derivada.

Así mismo, se hizo un ejercicio de observación estableciendo las funciones de los puntos que están en movimiento y los puntos fijos, encontrando que si se mueve el punto D podemos determinar no una única curva degenerada, sino una familia de curvas degeneradas a una misma función.



A continuación se muestra parte del trabajo realizado:

Gráfica	Generalidad
	La degenerada es el punto de corte con el eje b. $f(x) = mx + b$ $\dot{f} = b$

	$f(x) = ax^2 + bx + c$ Se evidencia que la degenerada es la derivada multiplicada por una constante k que se determina de la distancia del punto (0,0) al punto D, la cual varía según los movimientos del punto D. por lo tanto: $\dot{f} = k(2ax + b)$
	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $\dot{f} = k(3ax^2 + 2bx + c)$ Donde k es la distancia del punto (0,0) al punto D.
	$f(x) = senx$ $\dot{f} = k(senx)$ Donde k es la distancia del punto (0,0) al punto D.

En conclusión las curvas degeneradas a una función se pueden determinar al multiplicar una constante k a la derivada de la función inicial. Y esto se cumple para cualquier función.

Después de ensayar con funciones polinómicas los estudiantes reportan que observaron cómo el grado de la función degenerada era siempre menor al de la función original por lo que su actividad de exploración, los condujo a hipotetizar acerca del posible camino para *encontrar la expresión algebraica de la degenerada. Posteriormente el grupo piensa en que cuando el punto D se sitúa en (1,0) lo que se hace es multiplicar la deriva por 1, razón por la cual la derivada y la degenerada son las mismas, y por lo tanto las demás funciones miembros de las familias de degeneradas determinadas por D, serán la derivada de la función multiplicada por un factor que corresponde con el valor de la coordenada en x del punto D. De manera similar al grupo anterior, vemos como la actividad matemática que mayor fuerza tomó en la realización de esta tarea fue la exploración y, a partir de ella el planteamiento de hipótesis y la verificación de conjeturas mediante el software.*

El documento del grupo E es el siguiente:

GRUPO E
Inicialmente recurrimos a los elementos conocidos que del Cálculo podrían retomarse (integral y derivada). Con esto lo que queremos decir es que la construcción de Degeneradas nos acercaba a la búsqueda de la derivada de manera geométrica, cuando el valor de la ordenada coincidía con uno y de familia de curvas a esta al variar dicho parámetro. La actividad nos permite reconocer los elementos valiosos que se encuentran en la derivada de una función, y de la familia de curvas que se pueden originar al construir puntos, segmentos y rectas que sugieren alguna dependencia a un punto dado, y que no son por alguna razón, motivo de estudio en las matemáticas actuales impartidas en la escuela.

Con base en los anteriores resultados nos permitimos declarar que el relacionar los conceptos de integral o derivada con alguna otra función fue una constante en el proceso de estudio que los estudiantes llevaron a cabo para la propuesta de trabajo con la curva degenerada. Aunque el grupo relata un acercamiento de tipo geométrico a la derivada, los resultados de su exposición y el contenido de su escrito no posibilitaron la identificación de *características propias del estudio de la representación geométrica de la derivada que estos hayan podido fortalecer o descubrir con su actividad.*

Documento del grupo G

GRUPO G
Para la realización de esta actividad se proporcionó la construcción de la curva degenerada de una función $\boldsymbol{f(x)}$ usando geogebra. Se propuso la exploración de la construcción y la revisión de todos sus pasos con el fin de llegar a deducir la expresión algebraica de la curva. Para afrontar esta tarea, luego de reproducir la construcción proporcionada en Geogebra se conjeturó acerca de la posible función que podría ser, teniendo en cuenta conocimientos adquiridos en otros cursos por la forma de la curva la primera conjetura que surgió fue que era la representación gráfica de la función $\boldsymbol{f(x)}$; con base en esto se graficó en la función derivada esperando que coincidiera con la función generada, el resultado fue que no eran la misma pero resultaban ser muy parecidas. Se decidió explorar con otras funciones polinómicas y comparar su curva degenerada con la gráfica de la derivada para confirmar esta conjetura. La conjetura se verificó con funciones de grados 3, de grado 2 y funciones lineales. Se realizó una exploración más profunda con funciones lineales con el fin de encontrar la diferencia entre recta que representaba la función generada con la recta de la derivad; de esta exploración surgió la conjetura de que la función generada resultaba de la razón entre la función derivada y un número real. Se propuso la verificación de esta conjetura y la búsqueda del número desconocido. Durante la sesión del seminario se comentó esta conjetura y por sugerencia de otros compañeros se exploró la construcción cuando el número era 1, lo cual resultó en que la gráfica de la función generada coincidía con la función generada. Otra sugerencia fue explorar moviendo el punto D de la gráfica con esto se pudo que había una relación directa entre la posición del punto D y la diferencia entre la gráfica de la función generada y la

gráfica de la derivada, con base en esta conjetura se comprobó que la expresión algebraica de la función generada no resultaba del cociente entre la derivada y la distancia del punto D al origen sino del producto.

El estudiante de este grupo señala que fueron los conocimientos matemáticos adquiridos en otros cursos (inferimos que en un curso de cálculo diferencial) los que le permitieron encontrar relaciones entre la degenerada y la derivada puesto que la representación gráfica que determinaba el lugar geométrico de la construcción guardaba correspondencia con ciertas características encontradas también en la representación geométrica de la derivada de una función. Lastimosamente el estudiante no reporta cuáles de ellas contribuyeron a su solución y, debido a que no se cuenta con socialización de resultados de este grupo, no tenemos las evidencias necesarias para verificar la veracidad o no de su afirmación. Al igual que los grupos anteriores, señalan que en primera medida se estableció la hipótesis de solución y posteriormente se realizan actividades de exploración y verificación con el software.

Los grupo A y D no realizaron escrito para la curva degenerada.

Tarea curva generada:

El grupo A realiza el siguiente escrito con respecto a la curva "generada":

GRUPO A
Dado que en el escuela el tratamiento que se realiza al estudio del cálculo es el estudio de la derivada y posteriormente, a la integral; se asoció esta secuencia con la actividad. Pensando que el lugar geométrico generado sería la integral de la función dada. *En el proceso de exploración de los pasos de construcción del applet de curvas generadas, se inició con tres hipótesis sobre el lugar geométrico rosado que se muestra*

en la siguiente figura 1.

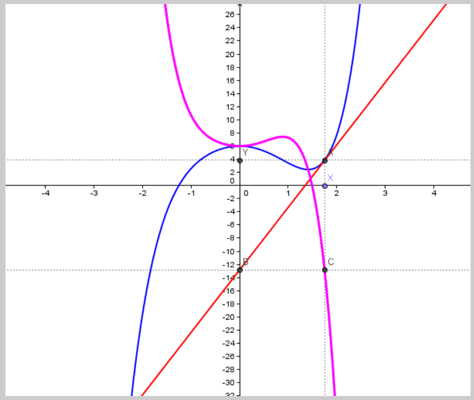
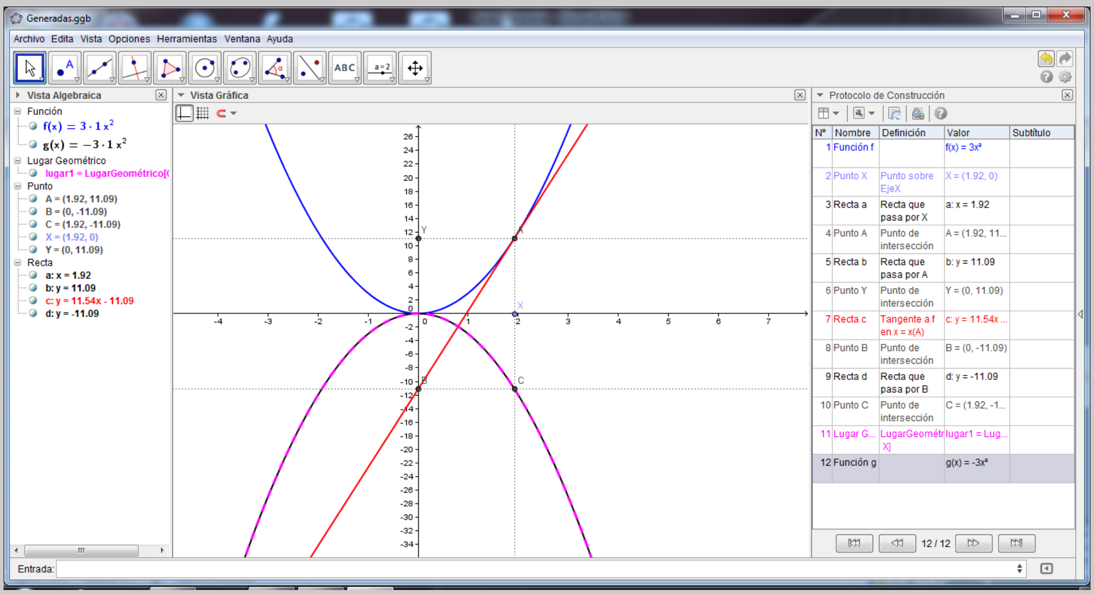


Figura 1.

Hipótesis iniciales
1. El lugar geométrico rosado, podría ser la integral de la función azul.   2. El lugar geométrico generado por el punto $\boldsymbol{C}$, podría ser la segunda derivada de la función $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ azul.   3. El lugar geométrico generado por el punto $\boldsymbol{C}$, podría ser la inversa de la función $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ azul multiplicada por un número.

Con el propósito de comprobar si era cierta o no, es insertada la antiderivada en la barra de herramientas del software geométrico Geogebra y visualmente se detalla que no existe relación alguna; por ende, es descartada. En seguida, una de las integrantes del grupo de trabajo comunica oralmente "Será la segunda derivada", idea que parte y emerge del trabajo realizado previamente con la construcción de curvas degeneradas donde los máximos y mínimos, cobraban un valor y significado importante con relación al lugar determinado de una recta tangente en un punto dado de una función específica. Es por esta razón, que es ingresada de nuevo una expresión que representaba la segunda derivada de la función dada, visualizándose que no tendría relación alguna con el lugar geométrico generado por los pasos de las construcción que se encontraba en el applet. Otro de los miembros del grupo de trabajo, indica que quizás es una la inversa de la función ya que posee la misma forma pero está contraída comparada con la función inicial. Idea que no es tratada de forma inmediata al tener en mente que el lugar geométrico descrito quizás y lo más probable es que debería tener una estrecha relación con la derivada.

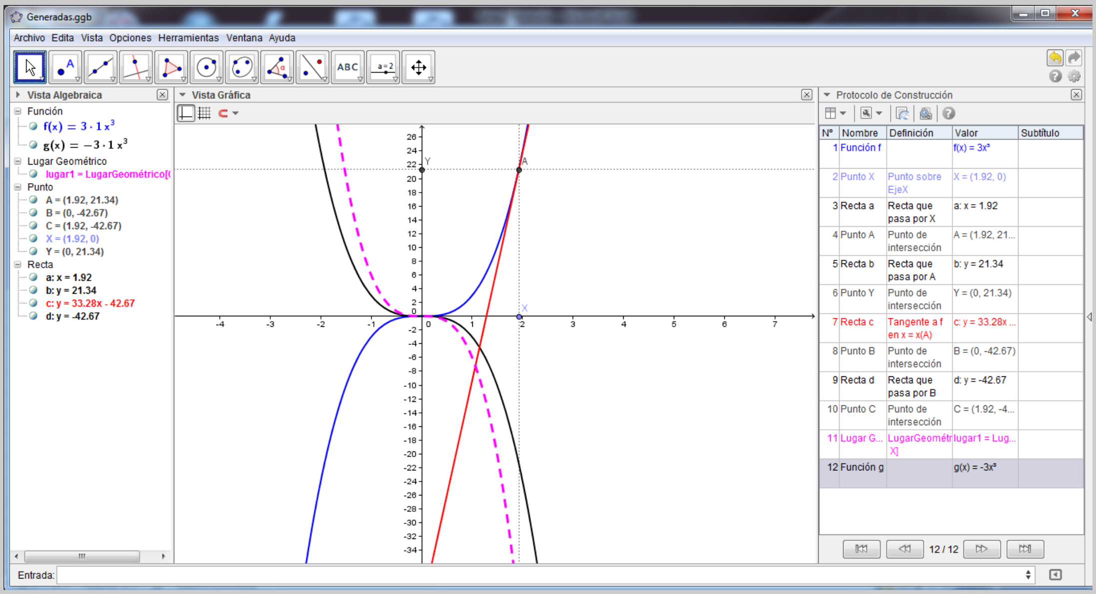
Al estar el arrastre permeado en una búsqueda de una relación de derivada con el lugar geométrico determinado por los pasos de la construcción, se propone por uno de los integrantes partir de una función de grado menor, con el propósito que el grupo pudiese determinar o crear posibles conjeturas al lugar geométrico.



Con la función $\boldsymbol{f(x) = 3x^2}$ se tomo a $\boldsymbol{f^*(x) = -3x^2}$, y resultó ser que $\boldsymbol{f^*(x)}$ coincidió con el lugar geométrico rosado.

Así se inicia el estudio de la construcción partiendo de la parábola, estableciéndose como soporte del programa que la curva generada es la inversa de la función como conjetura preliminar; en seguida interviene un compañero expresando “No es el espejo con respecto al eje x, es decir con respecto al eje de simetría”, “una reflexión con respecto al eje x”.

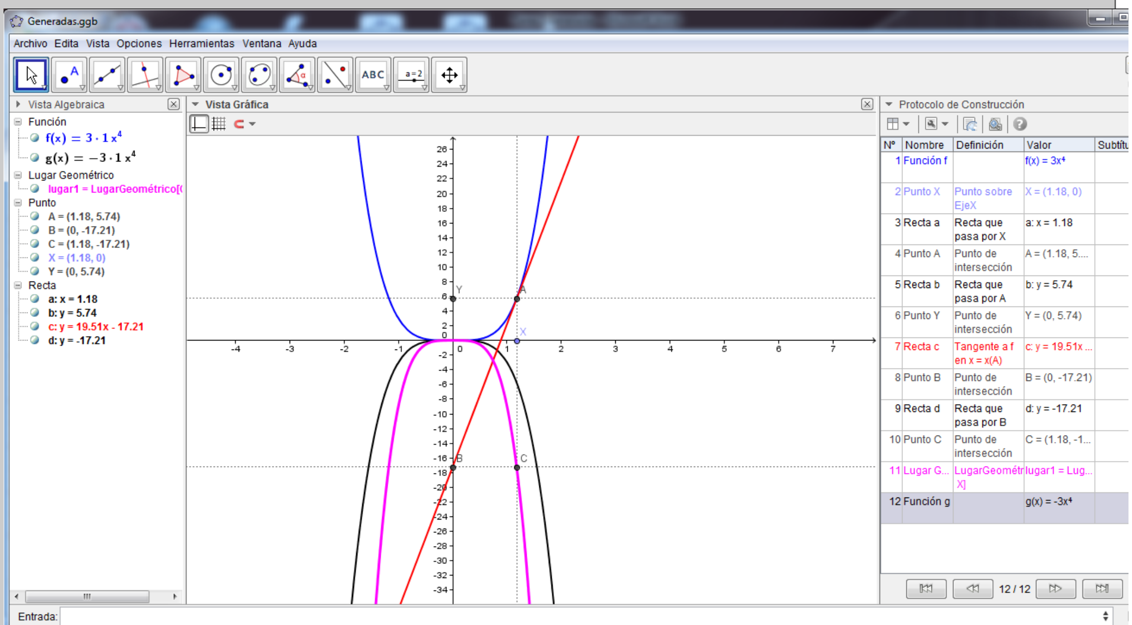
Emerge un hecho que podría ser considerado como casualidad, es que cuando se está estudiando el caso en particular de la parábola la distancia $\boldsymbol{AC = XC}$, lo cual hizo centrar nuestra atención y considerar dicha igualdad como una explicación a la reflexión dada. En seguida, es modificada la función por una de grado tres visualizando que hasta lo que al momento denominábamos como reflexión no era exclusivamente en el eje x como eje de simetría; además de comprobar que la equidistancia dada en la parábola era exclusiva solamente en ella.



Con la función $\boldsymbol{f(x) = 3x^3}$ *se tomó a* $\boldsymbol{f^*(x) = -3x^3}$*, y se obtuvo que* $\boldsymbol{f^*(x)}$ *no coincide exactamente con el lugar geométrico rosado, y además se identificó que la función que describe ducho lugar geométrico es* $\boldsymbol{f^*(x) = -3x^3}$ *multiplicado por algún número pero aún se sabe con exactitud dicho número.*

Es a partir de la comparación de la función de grado dos y grado tres, quienes permitieron al grupo determinar "es la función primitiva multiplicada por el negativo de un número que no sabemos con exactitud cuál es, porque ya nos da más angosta o más ancha". En búsqueda de alguna relación de los puntos A y C como en el parábola con su equidistancia, se tomo la medida de $\boldsymbol{AX, XC, BC}$ mirando si existe alguna relación; hecho que no tuvo éxito. Uno de los integrantes, interviene tratando de visualizar la situación desde un referente algebraico partiendo de la ecuación de la recta tangente de la forma $\boldsymbol{y = mx + b}$ siendo $\boldsymbol{m}$ la derivada de la función. Se propone realizar un tratamiento algebraico a la función en relación al intercepto de $\boldsymbol{b}$ en el eje $\boldsymbol{Y}$ junto con las distancias.

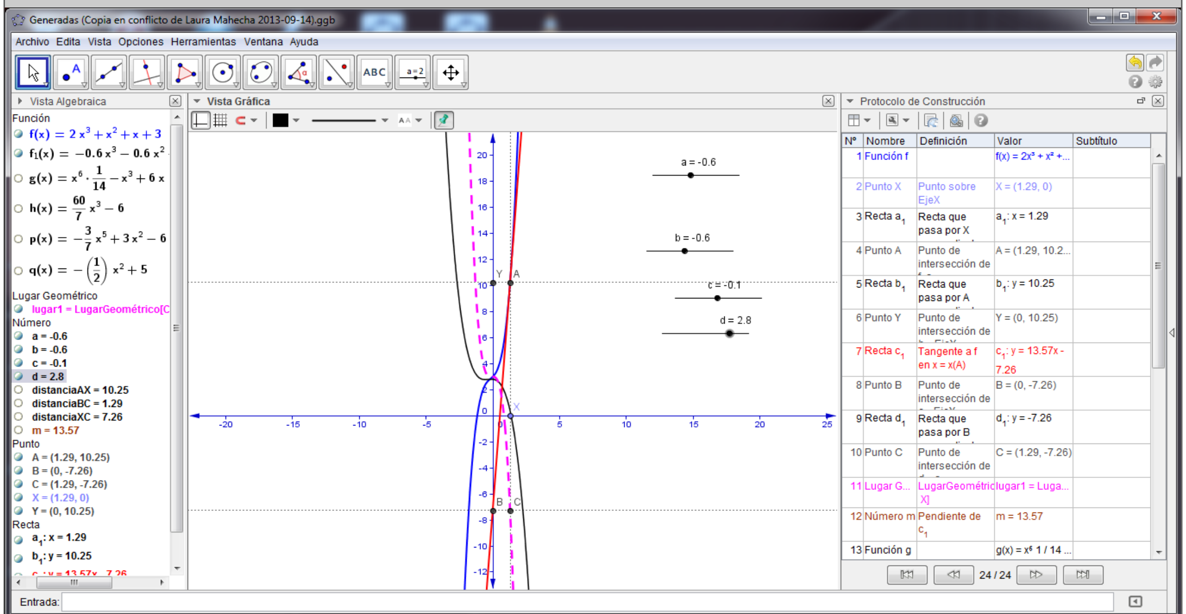
Durante este momento, se percibe en el ambiente de trabajo dos miradas una geométrica y una algebraica; con el objetivo de no acudir a procedimientos algebraicos y al percibir que obstruía de un modo u otro la visualización junto con un proceso de exploración, dejando de lado la perspectiva algebraica y enfocándose en una búsqueda geométrica. De tal manera, que para ello se parte retomando los pasos de la construcción en búsqueda de alguna relación e identificación del paso de la construcción clave, quien sería el que determinaría el lugar geométrico. Retomando y recordando la búsqueda de la actividad a realizar; siendo el objetivo principal la búsqueda de relación de una función dada con el lugar geométrico generado. Hecho por el cual se continuo con el estudio de funciones de grado diferente a la función dada y se logro percibir que en funciones como $\boldsymbol{f(x) = 3x^2 + 5}$, $\boldsymbol{g(x) = 3x^3 + 5}$, $\boldsymbol{h(x) = 3x^2 + 5}$ el eje de reflexión es la constante.



Con la función $\boldsymbol{f(x) = 3x^4}$ se tomó a $\boldsymbol{f^*(x) = -3x^4}$, y también se identificó que el lugar geométrico rosado no es únicamente la reflexión con respecto al eje x de la función $\boldsymbol{f(x)}$ porque se hace evidente que $\boldsymbol{f^*(x)}$es multiplicado por un número.

Es a partir de ello que se trabajara con tres funciones, estas fueron: primero la función inicialmente dada, el lugar geométrico generado por los pasos de la construcción y por último, una función que tenía como expresión la reflexión de la función dada pero modificada con una constante *a* cuyos valores tomaban números positivos como negativos. Para que los valores de la última función varíen se hizo uso de la opción deslizador ya que nos permitiría visualizar el comportamiento de esta función con respecto a la generada y mirar que generalidad podría llegar a establecerse. El uso del deslizador fue la herramienta esencial y facilitadora para la compresión del lugar geométrico, al permitir de manera simultánea variar y mirar sus similitudes con la inversa de la función.

Cuando el maestro, centra la atención de sus estudiantes por medio de una formalización o comunicación de los resultados hallados; son los comentarios y la comunicación verbal dada por cada uno de los estudiantes quien permite tanto modificar como reafirmar la exploración realizada. Cabe aclarar que es por medio de la intervención de un estudiante de clase, que el grupo hace uso de los deslizadores; al ser quien muestra el uso de esta herramienta como facilitadora en la exploración, permitiendo pasar de una modelación por casos a una más general. Por esa razón que es insertada la función $\boldsymbol{f(x) = 2x^3 + x^2 + x}$ y se tomo a $\boldsymbol{f^*(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d}$, donde $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{d}$ son deslizadores como se muestra en la figura.

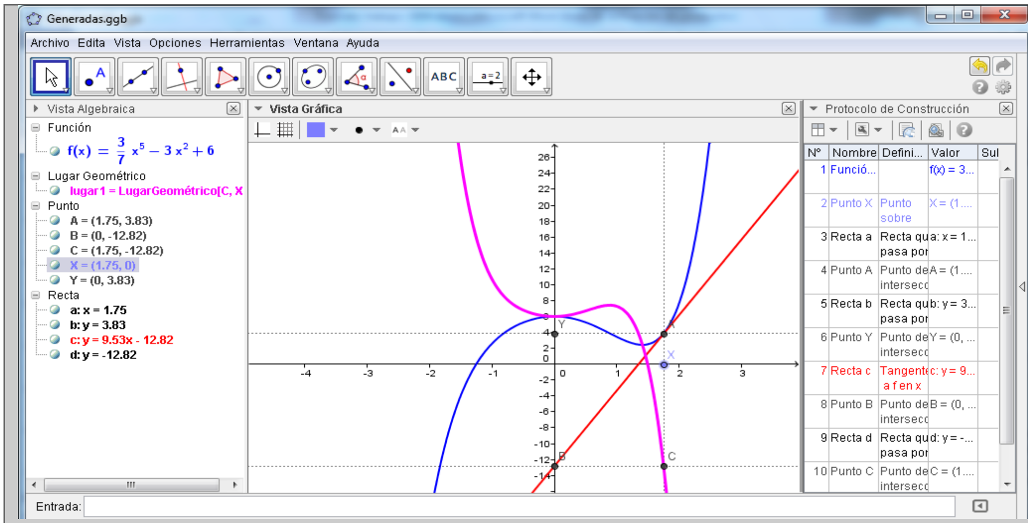


El producto final de nuestra exploración concluyo en *concebir que dada una función polinómica* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, *se cumple que el lugar geométrico determinado por los pasos dados en el aplet, es descrito por una función* $\boldsymbol{f}^{*}(\boldsymbol{x})$, del mismo grado que la función primitiva en la cual cada uno de sus términos es multiplicado por un número sea positivo o negativo; pero no se descubrió con exactitud la regularidad de los números que multiplican cada término de la función que describe el lugar geométrico rosado.

El grupo relata que debido al trabajo realizado en las sesiones anteriores en el cual la derivada tuvo gran importancia, sus exploraciones iniciales intentaron relacionar la generada con la segunda derivada de la función o con la anti derivada de la misma, pero al descartar tales opciones ingresando las correspondientes expresiones algebraicas al software y verificando que estas no coincidían con el lugar geométrico descrito en la construcción, pasan a analizar la posible relación entre la generada y la reflexión. Para ello, ingresan $f(x) = 3x^4$ *y construyen con el software la correspondiente generada*, *posteriormente ingresan y* $g(x) = -3x^4$ *esperando que la representación gráfica de la misma correspondiera con el lugar geométrico de la construcción, pero con este ejemplo verifican que no es así; sin embargo, con tal función les fue posible observar que la generada parecía ser la reflexión de la función original multiplicada por una constante que en el grupo quedó sin identificar.*

Los estudiantes de este grupo centraron su trabajo en la exploración, conjeturación y verificación de hipótesis, y mediante la idea del uso de deslizadores tomada de sus compañeros del grupo B, parecen haber avanzado del estudio de casos particulares a generales a través del software.

GRUPO B
En esta parte se reconoce que dada una construcción en el programa Geogebra, que se ha denominado generadas, se obtienen las siguientes aproximaciones:



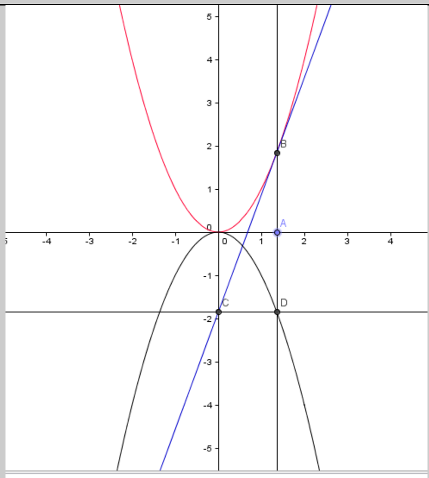
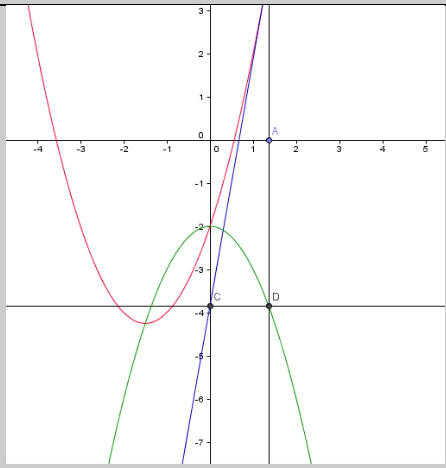
La curva en azul es la construcción primitiva la construcción en color fucsia es la que se obtiene, sin embargo se realizaron los siguientes acercamientos:

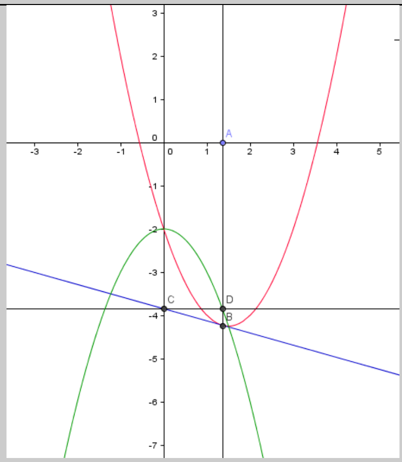
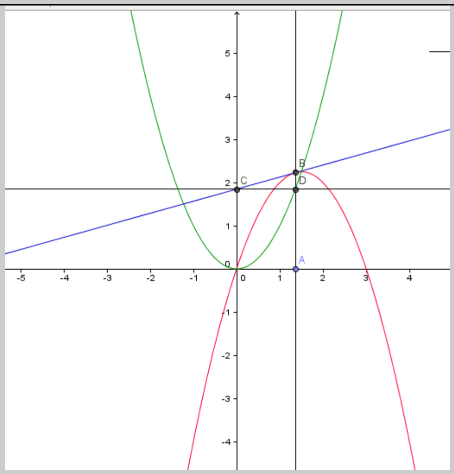
Inicialmente se reconoce que se obtiene la función que se construye corta con la primitiva, en el eje y, y en los puntos máximos y mínimos.

Al modificar cada uno de los valores de los coeficientes y exponentes de la función primitiva usando la herramienta deslizador del programa, se pretende ver cuál es el comportamiento de la curva fucsia, que a partir de ahora se denominará curva generada.

Allí se observó que para los casos de funciones polinómicas se siempre se cortan en los máximos y en los mínimos y finalmente el estudio se preocupa más por analizar el comportamiento de la recta tangente que por el punto de corte en el eje y.

Este grupo realizó su proceso de exploración centrándose en los puntos de corte que se determinaban entre la función inicial y la curva generada. Para ello crearon deslizadores que permitieran modificar los parámetros de la función ingresada, los cuales les permitieron pasar de un estudio de casos particulares a uno más general, no en cuanto a demostración de sus conjeturas sino en cuanto a la cantidad de funciones que con dichos elementos pudieron analizar. Su actividad matemática fue rica en cuanto al establecimiento de la expresión general de la generada para funciones de grado uno y dos, y da muestras de un proceso de generalización muy interesante mediado por el software matemático.

GRUPO C	
Se inicia con una construcción guía a partir de la exploración con funciones polinómicas de grado uno y grado dos. Para ello, se tuvo en cuenta la explicación dada por el profesor a partir de una función a fin, donde se observó que el grado del polinomio no disminuía ni aumentaba, por lo que se descartó que fuera derivada o integral de la función inicial. Después, empezó un ejercicio de validación realizando la construcción sobre una función cuadrática, variando valores de los diferentes coeficientes (utilizando parámetros), esto con el objetivo de evidenciar relaciones entre la curva inicial y la generada.	
Tomamos la curva de la función $f(x) = x^2$ y al construir la curva degenerada se evidencia que esta se relaciona con la función reflexión $f(x) = -x^2$. Al variar los coeficientes de x^2 de la función con valores negativos y positivos, se evidencia que siempre la relación de reflexión se mantiene.	
Sin embargo, al tomar valores para bx se evidencia que la reflexión no se mantiene, por lo tanto no podemos decir que la curva generada es la reflexión de la función. Luego, se asignan valores para el valor c constante de la función cuadrática, y se observa que este valor traslada la función sobre el eje y simultáneamente con la función generada.	

Por lo tanto se pensó, en mantener constante el coeficiente de x^2 y variar el coeficiente de bx, dado que se observó que al tomar distintos valores la curva generaba no se modificaba. Esto nos llevó a concluir que el valor bx no influí en la curva degenerada.	
Después de muchos ensayos, se dio una idea de generalización de las curvas generadas utilizando principalmente el criterio de la reflexión, teniendo en cuenta que el valor de bx no influye en este tipo de curvas. $f(x) = ax^2 + bx + c$ $f(x) = \ddot{-}ax^2 + c$	

El grupo C no presentó socialización en clase para la curva generada, por lo que el único instrumento para analizar lo constituye el anterior escrito, en el cual parecen relatar la primera parte de la sesión de clase, en la que por medio de los deslizadores que uno de los grupos construyó, se pudo establecer la expresión algebraica de la generada para el caso de funciones cuadráticas, es decir el escrito de este grupo parece ser un resumen de dicha experiencia de socialización en el que reconstruyen los pasos y retoman los resultados obtenidos por algunos de sus compañeros.

GRUPO D

Para afrontar esta tarea, luego de reproducir la construcción proporcionada en Geogebra, se procedió a realizar la misma construcción pero con otras funciones. Específicamente la exploración inicial que se realizó se hizo con funciones polinómicas de diferentes grados tratando de analizar que curva se generaba dando como primera hipótesis que parecía ser una reflexión de la curva dada.

Con el fin de comprobar la hipótesis inicial se realizó una nueva exploración con la construcción pero con una función que no es polinómica, puntualmente, con la función $\boldsymbol{f(x) = senx}$ se concluyo que la conjetura no era cierta. Con el análisis de grafica de la función $\boldsymbol{sen\,(x)}$ y la función generada por esta, además de concluir la falsedad de la hipótesis inicial surgió una nueva hipótesis; esta fue que la función generada es la función envolvente de la función inicial, esta hipótesis se estudió también con la función $\boldsymbol{cos\,(x)}$ y a partir de la exploración con las dos funciones se concluyó que la hipótesis se debía cambiar pues la función generada parecía no ser la envolvente de la función inicial sino una transformación de la envolvente de la derivada de la función inicial.
Continuando con la exploración se buscó confirmar la conjetura planteada y además encontrar la forma general de la transformación que se hace a la envolvente a la función, también se cuestionó sobre las características que tenían las envolventes de las funciones $\boldsymbol{sen\,(x)}$ y $\boldsymbol{cos\,(x)}$ las cuales se debían mantener para las funciones generadas de otras funciones. En esta exploración se determinó mediante el ensayo con otras funciones que una característica que se debía mantener era el producto por el término $\boldsymbol{x}$ con la derivada. Posterior a esta exploración surgió una nueva hipótesis la cual sugería que la función generada es el producto de la función derivada con $\boldsymbol{-x}$ pues la representación grafica de esta se acercaba bastante a la función generada.

Con las conclusiones y la búsqueda de la transformación que se debía hacer a $\boldsymbol{xf'(x)}$, para que fuese la función generada de $\boldsymbol{f(x)}$, se analizó detenidamente cada paso de la construcción: del lugar geométrico pedido. En este proceso se tuvo en cuenta que cada punto del lugar geométrico tenía como ordenada un punto que dependía de la intersección de la recta tangente con la curva con el eje $\boldsymbol{y}$, conociendo lo anterior se buscó dicho punto de intersección mediante la expresión general de la recta tangente

$$\boldsymbol{y = mx + b}$$

Y de esta se conoce por ser recta tangente a $\boldsymbol{f(x)}$ se debía tener que $\boldsymbol{m = f'(x)}$

$$\boldsymbol{y = f'(x)x + b}$$

Ahora el siguiente paso era buscar la intersección de esta recta con el eje $\boldsymbol{y}$ en este caso $\boldsymbol{b}$; despejando la ecuación anterior se obtiene

$$\boldsymbol{b = y - xf'(x)}$$

Por la construcción $\boldsymbol{y}$ se pueden expresar cono $\boldsymbol{y = f(x)}$, pues se toma un punto $(\boldsymbol{x, f(x)})$ para encontrar la recta tangente, por tanto pertenece a la recta tangente y a la curva, siendo así como resultado que

$$\boldsymbol{b(x) = f(x) - xf'(x)}$$

Donde $\boldsymbol{b(x)}$ es la curva generada.

Luego de encontrar su expresión, se analizan diferentes casos para determinar la validez del proceso, con funciones propuestas por el grupo de trabajo y posteriormente con algunas curvas que el docente plantea. Llegando a la conclusión que $\boldsymbol{b(x)}$ era la curva generada, finalmente se plantea la pregunta de ¿Cómo determinar la curva inicial dada la expresión de la curva generada?

Aunque durante la socialización que se aprecia en el video el grupo solamente alcanzó a plantear la posible hipótesis que relacionaba a la generada con la envolvente de la función, su escrito reporta hallazgos interesantes al respecto. Así, trabajando sobre funciones trigonométricas dicen lograr determinar la expresión algebraica de la generada realizando cálculos algebraicos sobre la expresión de la función inicial y comprobando mediante el software si dichos cálculos influían o no en la representación gráfica de la generada. El grupo reporta momentos de trabajo con el profesor, sin embrago en los videos con los que contamos no se evidencia tal trabajo.

GRUPO E
Planteamos que la construcción de generadas nos llevaría a la representación de la integral de dicha función, lo que no percatamos fue tener en cuenta que esta aumentaría el grado; cosa que en el video no se hace evidente tan solo después de un rato y que por supuesto no correspondería con este primer supuesto. El trabajo que sigue descartada esta primera opción, consiste en cambiar los coeficientes de la función dada por ensayo y error, analizando que cambios producía en la gráfica la modificación de alguno de ellos. Esta forma de proceder tenía como intención encontrar la forma de la función generada por aproximación. Esta experimentación aunque no nos llevo a determinar la expresión, deja como ganancia la posibilidad de explorar y de comparar de manera "sistemática" los supuestos o las ideas que en su momento pensamos solucionarían el problema. Es importante reconocer la abundante riqueza matemática que se puede encontrar, hallar y extraer en el análisis geométrico. Al iniciar el análisis de la curva generada, en primera estancia descartamos que fue la derivada o la integral de la función inicial, pero como hipótesis identificamos alguna relación con la reflexión de la curva dada, para esto último, comenzamos a variar los

parámetros de la función reflejada y observamos que había en algunos parámetros más parecido a la función reflejada, pero aun no era esta. Entonces decidimos a partir de la construcción geométrica en Geogebra, analizar los pasos para identificar los elementos piezas claves en la construcción…

Este procedimiento ya mencionado, lo exploramos con diferentes funciones, polinómicas, trigonométricas, exponenciales, etc. Encontrando que la conjetura inicial era verdadera, pero teníamos que tener en cuenta la relación de b (b corte con el eje y), ya que esta, nos transportaría la función reflejada a través de la función inicial, al mover un punto de dependencia.

Al igual que varios grupos anteriores, descartan la posibilidad de que la curva corresponda con la integral o la derivada y plantean como hipótesis una posible correspondencia entre la generada y la reflexión de la función inicial. El grupo centra su proceso de análisis para la curva generada en la exploración sobre funciones polinómicas y en la modificación que sobre parámetros de dichas funciones realizaron, para gráficamente determinar si estos incidían o no en la representación gráfica de la generada y aunque comentan haber realizado trabajo sobre funciones trigonométricas y exponenciales no reportan mayores hallazgos para dichos casos.

Nota: Las escritos realizados por los grupos E es y F no incluyeron aspectos relacionados con la curva generada

En lo correspondiente al estudio de la curva generada, fue posible determinar que al abordar actividades en contextos tecnológicos, los estudiantes parecen enriquecer su actividad matemática al hacer uso de recursos, como los deslizadores, que con lápiz y papel no serían posibles de crear, y los cuales movilizan su actividad haciéndolos pensar en la generalización dentro de su actividad matemática; razón por la cual consideramos valioso propiciar este tipo de tareas, en las que la actividad propia del alumno es un elemento de gran significativo para el desarrollo del pensamiento matemático del mismo.

3.4 REFLEXIONES DE LOS ESTUDIANTES

Algunos de los grupos muestran reflexiones relacionadas con la actividad matemática que se potenció en la actividad:

GRUPO A
Mientras se consolida las conjeturas o hechos geométricos elaborados por los equipos al lugar geométrico, se percibe en el ambiente del aula la coincidencia en los resultados hallados; produciéndose la sensación de haber solucionado el problema. A partir de ello, el docente pide a sus estudiantes comunicar sus hallazgos. De tal forma que se consolidan y recolectan las ideas, de las cuales el maestro toma como insumos para reorientar la actividad, permitiéndose lograr cumplir con el objetivo. Es partir de la intervención y direccionamiento del docente, quien permite crear un espacio de reflexión y retroalimentación de lo elaborado en la clase con el proceso que como maestros realizamos en la escuela y con el cual fue impartido el conocimiento hacia nosotros una vez en el papel de estudiante por nuestros docentes. De manera general, puede concluirse que la actividad elaborada en esta sesión de clase giro entorno a un interrogante que permitió abordar un contenido matemático de forma experimental. Dándose lugar a la realización de una serie de procesos que son inherentes en el quehacer matemático como formular conjeturas, presentar argumentos y comunicar resultados en comunidad, dando lugar a la reconstrucción de dichos resultados, los cuales se tendrán más convergentes a la solución general del problema. Permitiéndose destacar

en la actividad el uso de diversas representaciones y recursos matemáticos que favorecieron identificar el comportamiento de parámetros relevantes de la situación.

Por tanto, se considera que fue el compartir de ideas, diseño de estrategias, modificaciones, uso de herramientas, trabajo en equipo y trabajo en comunidad junto con la reorientación docente, quienes fueron los responsables de cumplir con el objetivo de la clase.

Durante la exploración hecha al lugar geométrico, se identificó en cada estudiante diferentes maneras de visualización, de formulación de hipótesis, de conjeturar y argumentar sus ideas acerca de lo explorado en el aplet. Pues cada estudiante buscaba utilizar sus conocimientos previos para validar sus mismas hipótesis y las de sus compañeros y de esa manera descartar y evitar formular hipótesis que tuviesen relación con las hipótesis anteriormente rechazadas, creando de manera grupal e individual estrategias de formulación de hipótesis, las cuales debían ser capaz cada estudiante de comunicar con un lenguaje en lo posible netamente matemático, debido a que facilita la comunicación entre los mismos, este lenguaje es adquirido a lo largo de su recorrido con las matemáticas, pues en el ambiente de trabajo se identificó el uso de los conocimientos algebraicos para la validación de hipótesis o reconstrucción de conjeturas, pero a su vez el uso de la visualización en el caso de los deslizadores permitió establecer de manera más acertada y un poco más general las relaciones entre los términos de la función primitiva $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ y los términos de la función que describe el lugar geométrico rosado $\boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{x})$. El trabajo en grupo junto con las intervenciones del docente y su rol de orientador de la exploración, permitió a cada estudiante abarcar de muchas maneras las posibles y futuras conjeturas al problema, enriqueciendo y afianzando los conocimientos previos y utilizados al enfrentar el problema, de tal manera que la clase se finaliza con un producto final más general construido entre todos los estudiantes y el profesor, pero queda abierta la pregunta para funciones no polinómicas, en donde cada estudiante explora por su cuenta teniendo presente la manera y la actividad matemática adecuada para utilizar como estrategia para aproximarse y hallar la forma general de la función $\boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{x})$ dada la primitiva $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

El grupo enfatiza sobre la importancia que el proceso de socialización y comunicación de resultados tiene sobre el éxito de la actividad matemática propuesta, esto debido a que en este espacio se permite descartar hipótesis y tomar ideas de los demás participantes del seminario, lo cual orientado por las intervenciones del profesor permite avanzar en la búsqueda de la solución del ejercicio propuesto. Señalan también que actividades matemáticas como hipotetizar, conjeturar y explorar fueron fuertemente abordadas y coincidimos en que estas pueden ser algunas de las que más se potenciaron con la actividad. Con respecto a los sistemas de representación, el cambio de representación algebraica a gráfica y viceversa es tenido en cuenta y los estudiantes del grupo consideran que este fue fundamental para lograr el objetivo de la actividad, la cual mediada por el software matemático les permitió potenciar ciertas actividades propias del quehacer matemático.

GRUPO B
Al abordar este tipo de curvas, se pone en juego el conocimiento del profesor en la caracterización de las diferentes curvas, lo que hace que el trabajo matemático no sea el de determinar una gráfica a partir de una expresión algebraica, sino el de utilizar los elementos que definen las curvas de las diferentes funciones para establecer relaciones. Las herramientas como Geogebra nos permiten ensayar, validar hipótesis, buscar relaciones y poner en movimiento diferentes variables en una función, que muy difícilmente en un medio físico se podrían llegar a identificar. Por eso se reconoce el valor didáctico de este tipo de herramientas para posibilitar la actividad matemática. Esta actividad permitió identificar que existen relaciones que nunca se han abordado dentro de las características de las funciones, ya que posiblemente al no encontrar aplicaciones es posible que las dejaron de lado.

El grupo exalta el papel que las herramientas computacionales como el software Geogebra tienen a la hora de abordar ejercicios de variación, debido a que como afirma el grupo dichas herramientas posibilitan o agilizan los procesos que se deben realizar en actividades semejantes. También les resultó interesante el análisis que sobre relaciones entre parámetros o elementos de las curvas se puede realizar y de esta manera el ejercicio en el que la variación tiene cabida logró llamar la atención de los estudiantes.

GRUPO E
Es importante reconocer la abundante riqueza matemática que se puede encontrar, hallar y extraer en el análisis geométrico. A partir del trabajo en clase observamos una estrategia muy valiosa para incorporar la HM en la EM, y es como desde la parte geométrica, con algunos elementos se puede explorar contenidos algebraicos y de cálculo, sin evidenciar un proceder del cálculo actual. Lo anterior muy relacionado con el desarrollo matemático de la época griega, donde con algunos elementos se aprecian aportes del algebra, calculo, geometría analítica, etc.

Los estudiantes del grupo se refieren al estudio de tópicos matemáticos a partir del sistema de representación gráfico como una valiosa herramienta para la enseñanza de las matemáticas debido a que desde este, es posible explorar características de los objetos sin abordarlos de la forma habitual.

GRUPO F
La construcción fue siempre mediada por el programa de Geogebra, el cual permite modificar elementos. En este caso en particular, la mediación instrumental fue clave al abordar el problema. A medida que se fueron modificando elementos, los grupos fueron explorando y hallando resultados que los llevaron a conjeturar la posible o posibles soluciones: a partir de o conocido, se dio paso a explorar un terreno desconocido. Mientras tal vez algunos se fueron en busca de la simbolización y formalización, otros en su exploración y conjeturación, lo que buscaban. A medida que unos exploraban diferentes rutas para encontrar la solución, aquellos que ya tenían una "pista" empezaron a aproximarse por diferentes vías. A medida que se iban modificando parámetros, iban de caso específicos, a caso generales, se conjeturaba, se generalizaba. En general, luego de verificar las conjeturas se hizo indudable que cada grupo consciente de estar en terreno desconocido, creaba a partir de lo conocido. Lo que originalmente parecía una actividad para resolver un problema quizás trivial sobre derivadas e integrales, se transformó en una excelente oportunidad para vivir la actividad matemática. Resulta interesante escuchar las conjeturas como: "si en el primer caso la solución es la derivada, quizás en el segundo es la integral". Así pues con la excusa de resolver estos problemas se vivió un ambiente muy académico, en donde la actividad matemática en el cual se vivieron acciones que resultan de un trabajo arduo y repito académico. En esta sesiones los estudiantes tuvieron la oportunidad de: Conjeturar, Hipotetizar, Simbolizar, Teorizar, Argumentar, Modificar parámetros, Verificar, Probar, Validar ¿Acaso no son todas estas acciones llevadas a cabo cuando se está viviendo la actividad matemática? ¿Por qué no llevar a cabo en nuestras aulas de clase una actividad similar, modificada pero en la que los estudiantes vivan la actividad matemática?

A manera de conclusión quisiera señalar que más allá de una reflexión, esta sesión es una invitación para que nosotros vivamos la actividad matemática al aula y así nuestros puedan desarrollar el pensamiento matemático y no solo desarrollar una serie de ejercicios.

El grupo concibe la propuesta de trabajo con curvas como una oportunidad para construir actividad matemática; así, establecen que a partir de la mediación instrumental que en este caso específico se realizó mediante el software Geogebra, se potenciaron actividades matemáticas como hipotetizar, simbolizar, argumentar, explorar y verificar, las cuales aunadas a la interacción y socialización en el aula, contribuyen al desarrollo del pensamiento matemático.

El grupo considera que es necesario llevar a las aulas propuestas semejantes, que contribuyan al desarrollo del pensamiento matemático de los alumnos y permitan potenciar otro tipo de actividad matemática aparte de la ejercitación de procedimientos.

CAPÍTULO 4: ANÁLISIS DE LA PROPUESTA Y CONCLUSIONES

Como ya se ha mencionado en el marco de referencia del presente trabajo, las investigaciones en el campo de la Educación del profesor de Matemáticas, postulan la necesidad de propiciar tareas o situaciones que dinamicen la actividad matemática de los estudiantes para profesor, para así propiciar el desarrollo de su competencia profesional. Se dice también, que es menester que tales actividades permitan la ejercitación de procesos matemáticos y el desarrollo del pensamiento matemático, los cuales enmarcados en el contexto del aula de matemáticas y junto con la consideración de aspectos personales del profesor, contribuirán a que este se acerque a una formación integral. Respecto a los anteriores aspectos, el trabajo con curvas que los profesores Guacaneme, Ángel y Bello propusieron en cursos de formación de profesores, los traen a consideración y, como en el caso específico de las actividades que el profesor Guacaneme propuso para las curvas generada y degenerada, logra integrar varios de ellos. Así, vemos cómo en tal trabajo se permite a los estudiantes realizar actividades propias del quehacer matemático, sin desligarlas de la reflexión y análisis que a partir de la experiencia con las mismas, guiarán a los estudiantes hacia la consideración de aspectos pedagógicos, que les permitan pensar en propuestas similares para el aula de matemáticas y que según investigaciones como las de Godino y Batanero (2008) resultan ser un elemento fundamental para el desarrollo profesional del profesor de matemáticas.

A nivel matemático la propuesta logra conectar diversos registros semióticos de los objetos matemáticos abordados, lo que particularmente para la curva degenerada, corresponde con lo que autores como Sánchez & Molina (2006), Villa-ochoa et al. (2011), y Carlson et al. (2003) postulan como elemento necesario para lograr un pleno desarrollo del concepto. Este hecho, sumado a la gran dificultad que según las investigaciones se presenta en la comprensión de la derivada desde su representación geométrica, sin el uso de la idea de límite, hace de esta propuesta un acercamiento valioso e interesante para el estudio de tal tópico, en la cual a partir de la covariación se establecen propiedades de la función derivada a la vez que se propicia el desarrollo del pensamiento matemático.

Dentro del conocimiento matemático para la enseñanza entorno al concepto de derivada, la propuesta permite abordar aspectos relativos al conocimiento común del contenido planteado por Shulman (1986) y, por otro lado, la invitación que el profesor hace a sus estudiantes para reportar su reflexión de la experiencia con la propuesta, puede abrir camino a la identificación de otros aspectos referentes al conocimiento en el horizonte matemático, es decir el conocimiento que en el estudio de las matemáticas permite al docente reflexionar sobre el objeto matemático para el aula; para este último aspecto, encontramos que la reflexión de los estudiantes de la especialización, fue desarrollada de manera muy superficial, lo cual no posibilitó la realización de un análisis muy detallado al respecto. Pensamos que para que dichos resultados cambien, en futuras ocasiones puede resultar interesante redactar cuestionarios o talleres con preguntas específicas que condicionen a los estudiantes a llevar a cabo una actividad más reflexiva sobre la experiencia, en pro de su práctica profesional, puesto que, como postulan autores como Goffree & Oonk (1999), Godino & Batanero (2008) y García (2005) puede ser la reflexión desde el aprendizaje del futuro profesor, una herramienta valiosa para el desarrollo del mismo.

Investigaciones en el campo como las de Pino-fan et al. (2012), Sánchez-Matamoros et al. (2007), Salazar et al. (2009) y Badillo et al. (2011) revelan un fuerte arraigo a la presentación algebraica en el estudio de la derivada, por lo que consideramos que si de utilizar la degenerada como aproximación a tal objeto se trata, podría resultar más interesante ocultar a los estudiantes la expresión algebraica de la función original y condicionarles así al uso de criterios del Cálculo diferencial que refuercen las características de la función derivada, esto, debido a que el acceso inmediato a tal expresión en el software matemático generó que algunos de los estudiantes tomaran el método de ensayo y error como único medio de solución, lo que limitó el estudio formal de proposiciones entorno al concepto.

Dado que la intención de la propuesta se centra en el desarrollo de pensamiento matemático a través del estudio de tópicos específicos, se plantea que las temáticas se conviertan en el medio y no en el fin en el estudio de las matemáticas, por lo que después de revisar y analizar la propuesta nos permitimos declarar que tal fin se cumplió en gran medida; a través de las evidencias analizadas pudimos observar variados procesos matemáticos (exploración, conjeturación, verificación, simbolización, comunicación, etc…) que, en el estudio de la propuesta se potenciaron en los estudiantes. Como sugerencia para la propuesta pensamos que sería valioso considerar tareas que contribuyan al desarrollo de la actividad demostrativa en los alumnos puesto que es esta, una en las que mayores dificultades se presentan.

Por otro lado, el uso del software en la propuesta es sin duda alguna un elemento a resaltar; las investigaciones señalan que las TIC's en la enseñanza pueden ser herramientas potencialmente constructivas y significantes para abordar tópicos matemáticos, por lo que la propuesta responde efectivamente a tal aporte que desde el campo de la Educación Matemática realizan investigadores como Robles et al. (2012) y Montiel (2005), incluyendo software especializados, no usuales en el ambiente de aprendizaje.

El trabajo con curvas que en el presente documento fue sistematizado, es una propuesta trasformadora para abordar conceptos matemáticos; no obstante y con base en las tareas entregadas por los estudiantes del curso, pensamos que podría ser mejorada incluyendo actividades como talleres, entrevistas, guías de reflexión, etc… que orienten a los estudiantes a la consecución de objetivos específicos que impliquen tanto aspectos matemáticos como pedagógicos dentro del proceso de aprendizaje y para el proceso de enseñanza.

De manera general, es una propuesta muy interesante que logra sacar a los estudiantes de la forma habitual en que se aborda el estudio de ciertos tópicos matemáticos, movilizando el quehacer del alumno en el aula, promoviendo un aprendizaje constructivo, en el que es la actividad matemática del mismo la que le permite desarrollar el pensamiento matemático a través del estudio de conceptos propios del área.

Consideramos que dentro de la formación de profesores de matemáticas, es necesario promover una actividad reflexiva que, a partir de la experiencia con este tipo de trabajos, permita al estudiante repensar su actuar en el aula; razón por la cual resaltamos el trabajo que desde la especialización en Educación Matemática de la Universidad se realiza y particularmente el que el profesor Guacaneme propone, ya que son estos, muestras claras de la innovación que los formadores de profesores se arriesgan a hacer, en pro de la formación de los futuros profesores de matemáticas.

Con el objetivo de contar con más evidencias y datos que permitieran extraer mayor información para el análisis de la propuesta, se planteó tener un acercamiento a los estudiantes que formaron parte del curso en el que dicho trabajo fue implementado, para a través de una entrevista obtener respuestas específicas que permitieran medir el impacto que este tuvo en los alumnos; sin embargo, y pese a numerosos esfuerzos por hacerlo, no logramos establecer comunicación con ninguno de ellos, dado que desde el momento de implementación de la propuesta hasta el de culminación del presente trabajo, transcurrieron aproximadamente dos años, por lo que estas personas ya no forman parte de los estudiantes activos en la UPN. También intentamos establecer acercamiento a través de correo electrónico pero no contamos con la suerte de recibir ninguna respuesta. El cuestionario diseñado para este fin es anexado al documento, pensando en una futura implementación del mismo, que contribuya a la reflexión sobre la formación de profesores de matemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Badillo, R. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas*. Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, España.

Badillo, R., Azcárate, C., & Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos f'(a) y f'(x) en profesores de matemáticas. *Enseñanza de las ciencias*, *29*(2), 191–206.

Bonilla, M., Romero, J., Ortiz, D., & Bohorquez, A. (2015). Características del proceso de construcción del significado del concepto de variación matemática en estudiantes para profesor de matemáticas. *AIEM*, 73–93.

Cantoral, R. (2013). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*. México D.F: Subsecretaría de Educación Media Superior, Secretaría de Educación Pública. ISBN: 978-607-9362-03-4.

Cardeñoso, J., Flores, P., & Azcárate, P. (2011). El desarrollo profesional de los profesores de matemáticas como campo de investigación en educación matemática. In *Gómez, P., y Rico, L. (Eds.). Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática*. Granada: Universidad de Granada.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio. *EMA*, *8*(2), 121–156.

Contreras, L. (2000). Interpretación geométrica de las derivadas sucesivas de una función: Un estudio realizado con estudiantes de bachillerato. *Universidad autónoma del estado de Hidalgo*.

Flores, P. (1997). El profesor de matemáticas, un profesional reflexivo. *Departamento de Didáctica de la Matemática y SAEM THALES*, 13–27.

García, M. (1997). *Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: el concepto de función como objeto de enseñanza*. *GIEM* (pp. 1–2). España.

García, M. (2005). La formación de profesores de matemáticas. Un campo de estudio y preocupación. *Educación Matemática*, *17*(2), 153–166.

Gavilán, J. M. (2006). El papel del profesor en la enseñanza de la derivada . Análisis desde una perspectiva cognitiva. *Educación Matemática*, *18*(2), 167–170.

Godino, J. D. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20*, 13–31.

Godino, J. D., & Batanero, C. (2008). Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica. In *Conferencia Invitada al VI CIBEM* (pp. 4–9). Puerto Montt, Chile.

Goffree, F., & Oonk, W. (1999). Educating Primary School Mathematics Teachers in the Netherlands: Back to the Classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *2*, 207–214.

Guacaneme, E., & Mora, L. (2011). La educación del profesor de matemáticas como de investigación. Universidad Pedagógica Nacional.

Llinares, S. (1998). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación. *UNO. Revista de Didáctica de la Matemática*, *17*, 51–64.

Montiel, G. (2005). Interacciones en un escenario en línea . El papel de la socioepistemología en la resignificacion del concepto de derivada. *Relime*, *8*, 219–235.

Pino-fan, L. R., Godino, J. D., & Castro, W. F. (2012). Key epistemic features of mathematical knowledge for teaching the derivate. In *In T. Y. Tso (Ed.), Proceedings of the 36 Conference of the international Group for the Psycology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 297–304). Taiwan: PME.

Potari, D., Zachariades, T., Christou, C., Kyriazis, G., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. In *Paper presenttes at the Teachers' mathematical knowledge and pedagogical practices in the teaching of derivative* (Vol. 5, pp. 1955–1964). Larnaca.

Rico, L. (1996). Didáctica de la Matemática como campo de Problemas. *En E. Repetto y G. Marrero (Eds) Estrategias de intervención en el aula desde la LOGSE. PP551579*, p. 24. Las Palmas.

Robles, M., Del Castillo, A., & Font, V. (2012). Análisis y valoración de un proceso de instrucción sobre la derivada. *Educación Matemática*, *24*(1), 35–67.

Rojas, C. (2013). *¿ Enseñamos a los profesores de Matemáticas aquello que nos enseña la investigación en Didáctica sobre la derivada ?* Universidad Pedagógica Nacional.

Salazar, C., Díaz, H., & Bautista, M. (2009). Descripción de niveles de comprensión del concepto derivada. *Tecné, epistemis y Didaxis*, (26), 62–81.

Sánchez, M., & Molina, J. (2006). Pensamiento y lenguaje variacional: una aplicación al estudio de la derivada. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *19*, 739–744.

Sánchez-matamoros, G. (2014). Adoptando diferentes perspectivas de investigación sobre el concepto de derivada. In *En M. T. Gonzales, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds). Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 41–53). Salamanca: SEIEM.

Sánchez-matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2007). Un indicador en la comprensión del esquema de derivada: uso de las relaciones lógicas. *En M. F. Camacho, Pablo; Bolea, María Pilar (Ed.)*, (2007), 229–238.

Shulman, L. E. E. S. (1986). Understand : Knowledge. *Educational Research*, *15*(2), 4–14.

UNESCO. (1994). Declaracion de salamanca. Salamanca.

Vargas, A., Torres, M., & Quintero, N. (2009). La derivada a la Caratheodory, una nueva concepción en el aprendizaje y la enseñanza del cálculo. In *Memoria del 10° congreso de matemática educativa*. Narino, Colombia.

Villa-ochoa, J. A., Jaramillo, C. M., & Esteban, P. V. (2011). Aspectos emergentes en la comprensión de la tasa de variación. In *XIII CIAEM-IACME*. Brasil.

Vrancken, S., Engler, A., & Müller, D. (2009). Una propuesta para la introducción del concepto de derivada desde la variación. Análisis de resultados. In *Actas de la VII Conferencia Argentina de Educación Matemática* (pp. 129–138). Buenos Aires: Sociedad Argentina de Educación Matemática.

ANEXO

Cuestionario

En el marco de la realización del trabajo de grado *"Aproximación geométrica a la derivada y otras funciones: Análisis de una experiencia de formación"*, el cual se basa en la propuesta de trabajo con curvas generadas y degeneradas implementada en el curso didáctica especifica II de la especialización en Educación Matemática de la UPN, orientado por el profesor Edgar Guacaneme y del cual usted formó parte en el segundo semestre del año 2013, nos permitimos remitirle el siguiente cuestionario que tiene por objetivo medir el impacto de dicha propuesta en su quehacer docente.

Le informamos que sus datos personales no serán revelados y nuestra atención estará centrada solamente en el contenido de sus respuestas, las cuales son un elemento de vital importancia para el análisis que se pretende realizar.

Ocupación: __________________

Años de experiencia: _______________

- ¿Considera que una actividad mediada por el uso de software matemático resulta provechosa en el estudio de tópicos propios del área? Justifique su respuesta

- A la hora de enseñar tópicos matemáticos usted ¿brinda mayor importancia al desarrollo de la actividad matemática (exploración, conjeturación, verificación, etc…) o a la enseñanza formal del concepto? Justifique su respuesta

- ¿El trabajo con la curva degenerada (cuyo lugar geométrico correspondió con la derivada) le permitió reforzar sus conocimientos de este objeto matemático? Justifique su respuesta

- En su opinión ¿el estudio de la derivada a través de propuestas como la de la curva degenerada propicia la construcción del conocimiento matemático? Justifique su respuesta

- ¿Usted permite en el aula el desarrollo de actividades matemáticas al abordar el concepto de derivada? si es así, ¿Cuáles actividades cree que más se potencian en su clase?

- Si es el caso, ¿Cómo enseña usted la derivada en la escuela? Justifique su respuesta

- ¿Ha considerado llevar o ha llevado al aula, propuestas como la de curvas degeneradas, generadas u otras similares? Justifique su respuesta

- ¿Cómo considera la propuesta de trabajo con las curvas degenerada y generada?

Muchas gracias por su colaboración.