PROBLEMAS EN TEMPLOS DEL ORIENTE: LOS SANGAKU

SERGIO RICARDO GARCÍA PERILLA

DEISY JOHANA NARANJO GONZÁLEZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, COLOMBIA

2015

PROBLEMAS EN TEMPLOS DEL ORIENTE: LOS SANGAKU

SERGIO RICARDO GARCÍA PERILLA

Código: 2008240076

DEISY JOHANA NARANJO GONZÁLEZ

Código: 2008140045

Monografía presentada como requisito parcial para optar el título de

Licenciado en Matemáticas

Director:

Benjamín Sarmiento Lugo

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, COLOMBIA

2015

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado de Pregrado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Problemas en Templos del Oriente: Los Sangaku
Autor(es)	GARCÍA PERILLA, Sergio Ricardo. NARANJO GONZÁLEZ, Deisy Johana.
Director	SARMIENTO LUGO, Benjamín.
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2015, 126 pág.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional.
Palabras Claves	Sangaku, Tangencia, Congruencia, Semejanza, Problemas geométricos.

2. Descripción

Los Sangaku son problemas de origen japonés, escritos en tablillas de madera colgadas en santuarios y templos, como una forma de agradecer a los dioses. Problema, figura geométrica y respuesta conforman cada tablilla, retando a transeúntes a buscar solución a los problemas. El objetivo principal del presente trabajo consiste en realizar soluciones modernas, construcciones y clasificaciones de algunos de los problemas Sangaku, haciendo uso del software GeoGebra, proporcionando así a los estudiantes de Licenciatura de Matemáticas y docentes en ejercicio, material de apoyo y consulta que podría ser utilizado en cursos de matemáticas escolares centrados en la resolución de problemas.

3. Fuentes

Para la realización del presente trabajo se hizo consulta de libros y artículos encontrados en medios electrónicos. Los más relevantes son:

Fukagawa, H. Rothman, T. (2008). *Sacred Mathematics. Japanese Temple Geometry*. Princeton University Press.
Smith, E. Mikami, Y. (2007). *A History of Japanese Mathematics.*
Vincent, J. Vincent, C. (2004). *Japanese Temple Geometry*. Australian Senior Mathematics Journal.
Fouz, F. (2003). Sangaku: *Geometría en los Templos Japoneses.*

4. Contenidos

Este trabajo ha sido organizado en cinco capítulos:
En el primero de los capítulos se presenta la Introducción, describiendo las principales razones por

las cuales se propuso el trabajo; también se mencionan los objetivos generales y específicos.
En el segundo capítulo se presenta la noción de Sangaku encontrada en Fukagawa (2008) y documentos virtuales. Se evidencia el marco conceptual, presentando contribuciones que algunos autores realizaron durante el periodo Edo a estos problemas.
En el tercer capítulo se presentan los enunciados, soluciones y protocolos de construcción con GeoGebra de cada una de los problemas.
En el cuarto capítulo se hace una clasificación basada en la construcción de cada uno de los 35 problemas que fueron desarrollados en este trabajo.Finalmente se exponen algunas conclusiones articuladas con los objetivos propuestos.
Como documento anexo, se tienen las construcciones de los 35 problemas, todos realizados en el software GeoGebra.

5. Metodología

La estructura del trabajo se planteó a partir de dar una solución moderna, construcción con su respectivo protocolo y clasificación de 35 problemas Sangaku, tomando como referente principal el texto de Fukagawa (2008). Para la realización del marco conceptual se hizo uso de documentos relacionados con el Periodo Edo y el estudio de las matemáticas japonesas. Enseguida se presentan enunciado, solución, construcción y clasificación de cada problema seleccionado. Finalmente se plantean algunas conclusiones y bibliografía del trabajo.

6. Conclusiones

Al finalizar este trabajo nos permitimos expresar las siguientes conclusiones:

- Escudriñar la Historia de las Matemáticas en otras civilizaciones, nos permiten apreciar cómo aprovechaban al máximo conceptos básicos de la Geometría, la Aritmética o el Álgebra elemental.
- Intentar resolver problemas Sangaku nos obliga a revisar propiedades de figuras planas sencillas y complejas que por lo general no se alcanzan a desarrollar y explotar en un curso de Geometría de la Universidad.
- La revisión y solución de estos problemas nos motiva a utilizarlos con mayor frecuencia en el desarrollo de nuestras clases como docentes en ejercicio y en formación, teniendo en cuenta que los retos de lógica y pensamiento parecen ser ya no tan prioritarios como antes, mostrando aquí varios problemas y/o ejercicios complejos para nuestros estudiantes por la riqueza de procedimientos que contienen.
- Durante el desarrollo del trabajo nos surgieron preguntas como el por qué en un curso de geometría analítica, espacial o historia no acercan a los estudiantes a este tipo de problemas, los cuales consideramos deben hacer parte de la cultura general de un docente de matemáticas.
- Consideramos que proponer este tipo de problemas en un curso de álgebra o geometría analítica, no sólo permite conocer problemas históricos y aplicar los conceptos del álgebra, sino que además nos obliga a involucrar el uso de la tecnología en la clase, ya que en muchos problemas se hace necesario realizar la construcción geométrica.
- El uso del software GeoGebra nos permite manipular y modificar las figuras,

permitiéndonos ver ciertas características del objeto construido, que a la vez nos evita sacar conclusiones erróneas.

- La noción de problema o ejercicio
- Por último, la realización de este nos dejó la inquietud de seguir indagando por problemas antiguos propuestos y desarrollados en otras culturas, que por lo general no son abordados en los libros de texto para cursos de matemáticas.

Elaborado por:	GARCÍA PERILLA, Sergio Ricardo. NARANJO GONZÁLEZ, Deisy Johana.
Revisado por:	SARMIENTO LUGO, Benjamín.

Fecha de elaboración del Resumen:	03	03	2015

CONTENIDO

1 INTRODUCCIÓN

La realización de este trabajo de grado fue motivada por nuestra simpatía hacia la cultura oriental, debido a que practicamos un deporte en el cual son potencia mundial (Tenis de Mesa). Esto nos llevó a indagar sobre aspectos geométricos y algebraicos muy manejados en dicha cultura, notando en este tipo de Matemáticas características para el aprendizaje de esta ciencia. Es así como se llega a los problemas Sangaku, que literalmente traduce "tablillas de madera".

Los problemas seleccionados y desarrollados en este trabajo, hacen parte de los famosos problemas denominados Sangaku, los cuales se enuncian en tablillas de madera y cuelgan en templos y santuarios japoneses[1], ofreciendo a visitantes de templos y santuarios la oportunidad de brindar solución, puesto que en las tablillas sólo se encuentran los enunciados de los problemas.

Fue nuestra tarea dar solución moderna a ciertos problemas Sangaku, con herramientas matemáticas y el uso del software GeoGebra haciendo posibles las construcciones con protocolos de las mismas y la caracterización o clasificación de acuerdo al tipo de construcción y método de solución.

La organización de los problemas aquí desarrollados tendrán como elementos: Enunciado del problema, nota al pie de página, reseñando la ubicación de la tablilla en templos o santuarios (no todos la tienen), gráfica (pantallazo de la construcción), construida con el software GeoGebra, protocolo de construcción y solución moderna. El orden de estos elementos para cada uno de los problemas, varía según lo que se necesite

[1] Los Sangaku surgieron durante la época de aislamiento que Japón tuvo de Occidente (Periodo Edo).

procedimentalmente. Es decir solución – construcción o por el contrario construcción-solución.

Es primordial establecer la diferencia entre ejercicio y problema, los Sangaku apuntan más hacia ejercicios procedimentales, pero serán llamados problemas Sangaku debido a que así, son reconocidos en la cultura oriental y por ende en la literatura consultada.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo General

Analizar y clasificar algunos de los problemas Sangaku de acuerdo a la solución y construcción de cada uno de estos.

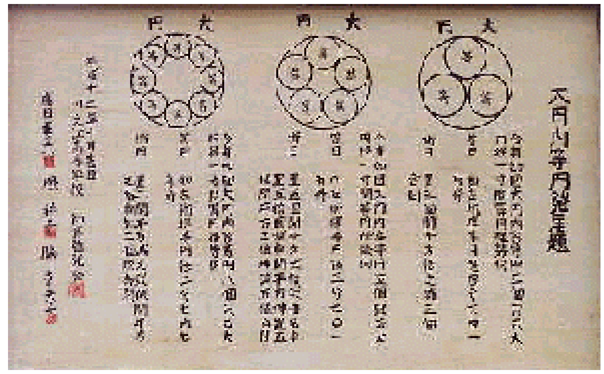
1.1.2 Objetivos Específicos

- ✓ Realizar una consulta detallada sobre documentos y archivos de Internet que contengan problemas Sangaku.
- ✓ Seleccionar los problemas Sangaku más representativos contenidos en los archivos consultados, resolverlos y hacer las construcciones con el software GeoGebra.
- ✓ Realizar un documento escrito con la recopilación de enunciados, soluciones y construcciones de los problemas seleccionados.

2. MARCO HISTÓRICO

Durante el Periodo EDO (1603-1867) Japón se encontraba aislado del mundo occidental; en este periodo el acceso a todas las formas de cultura occidental y afluencia de ideas científicas occidentales fue suprimido con eficacia, para dicho periodo de la historia japonesa, gente docta de todas las clases, desde comerciantes y granjeros hasta samuráis, descubrían y solucionaban una amplia variedad de problemas geométricos, luego inscribían sus trabajos en tablillas de madera, (usando en muchos casos vivos colores) que después eran colgadas en las azoteas de santuarios shintoistas y templos budistas como una forma de agradecer a sus dioses.


Llama la atención, en esta costumbre, el hecho de que los problemas tienen inscrita la respuesta mas no así la solución del mismo. Esto puede interpretarse como un desafío a otros geómetras. La tablilla de madera es llamada "SANGAKU". Muchas tablillas son excepcionalmente hermosas como estas:



Aunque la mayoría de problemas serían clasificados como matemáticas recreacionales o educativas, algunos problemas reproducen los equivalentes japoneses de teoremas como el teorema de los círculos tangentes de Descartes (llamado también "fórmula de Descartes"). Sin embargo no todos los problemas se ocupan sólo de la geometría, sino también de problemas aritméticos y algebraicos.

El *Sangaku* más antiguo que sobrevive hasta hoy fue encontrado en la prefectura de Tochigi y es del año 1683. Aunque muchos *sangaku* se han perdido o quemado todavía existen alrededor de 820 de estas tablillas. Un notable investigador de los sangakus fue el matemático japonés Yoshio Mikami (1875-1950) quien en sus trabajos: "A history of Japanese mathematics" (Historia de las matematicas japonesas) de 1914 y "The Development of mathematics in China y Japon" (El Desarrollo de las Matemáticas en China y Japón) de 1974 realizó importantísimos estudios sobre estas tablillas matemáticas. Hidetoshi Fukagawa es un matemático contemporáneo que ha viajado extensamente por todo el Japón para estudiar estas tablillas y tiene una prolífica colección de libros que se ocupan únicamente de los *sangaku* sino también de otros aspectos de las matemáticas japonesas. Otros matemáticos japoneses como Tatsuhiko Kobayashi y Shigeyuki Takagi también han hecho contribuciones importantes a los problemas *sangaku*.

2.1 DEFINICIÓN DE SANGAKU

En los templos sintoístas y budistas del Japón medieval podían observarse suspendidas en los aleros de los tejados multitud de ofrendas que los fieles hacían en papel o en tablillas de madera, con exquisitos dibujos que hacían gala del refinamiento artístico que había alcanzado por entonces el arte japonés. Entre estas tablillas había algunas con figuras geométricas dibujadas en vivos colores en las que triángulos, circunferencias, elipses y esferas aparecían unas en el interior de las otras y que planteaban fascinantes problemas. Eran Sangaku, que literalmente quería decir “tablilla matemática” (Gracian, E).

2.2 DESARROLLO HISTÓRICO DE LOS SANGAKU

En este aparte, se describen algunas nociones que se presentaron a lo largo de la evolución histórica de los Sangaku, en particular aquellas contribuciones realizadas por algunos matemáticos japoneses durante el periodo Edo.

2.3 DESARROLLO DE LOS PROBLEMAS SANGAKU

Actualmente se han llegado a recuperar y clasificar 825 sangaku que estaban repartidos por entre casi todas las prefecturas de Japón. La mayoría de ellos se pueden resolver utilizando los conocimientos de la Geometría Euclidiana que se imparten en los primeros cursos de enseñanza media. Pero algunos de ellos son complejos y requieren técnicas matemáticas modernas, como el Cálculo o el empleo de transformaciones afines. A pesar de que la finalidad de los sangaku parece ser, y de hecho lo es, meramente recreativa, en ellos aparecen algunos teoremas importantes de la Matemática occidental.

2.4 PERIODO EDO

A principios del siglo XVII aparecen en Japón las primeras publicaciones importantes de matemáticos, coincidiendo con un período de paz que duraría cerca de dos siglos y medio. Hasta entonces el país había sido devastado por guerras internas entre clanes rivales que competían por hacerse con el poder. El orden fue restablecido por el Shogun (máxima autoridad después del emperador) Tokugawa Ieyasu (1542-1616), quien llevó a cabo una reunificación política y económica del país amparado en la legitimidad que le otorgaba el emperador. La capital se trasladó entonces de Kioto a Edo, ciudad emplaza en el mismo sito que se encuentra actualmente Tokio. Desde 1639 hasta 1854, Japón, todavía bajo el domino del clan Tokugawa, llevó a cabo un aislamiento voluntario del resto del mundo. Cualquier tipo de contacto o acceso al conocimiento que procedieran fuera de sus fronteras era eliminado. El aislamiento de Japón durante este período fue tan estricto que alguien que emprendiera un viaje al exterior, fuera de la duración que fuera y por el motivo que fuera, era condenado a muerte. En 1854, por mediación de una fuerza naval norteamericana, el gobierno fue derrocado y terminó el período de aislamiento, aunque oficialmente se considera que el período Edo finalizó en 1867.

En cualquier caso, fue una época que marcó el desarrollo de una cultura a la que se puede considerar de identidad netamente japonesa, en la que alcanzaron su apogeo artes como el teatro, la pintura Sumi-ye y la decoración floral. Pero también las Matemáticas tuvieron un desarrollo importante y puramente genuino en un período de tiempo durante el cual se las llamó Wasan.

2.5 WASAN

La palabra wasan se empleaba en Japón para referirse a las Matemáticas japonesas en oposición a las Matemáticas occidentales (yosan). Quizá la época más importante de este desarrollo está marcada por la presencia de un matemático Seki (1642-1718), al que se considera como el Leibniz japonés. A él se debe la implantación de una poderosa teoría de determinantes de la que surgieron muchas aplicaciones prácticas. Su desarrollo algebraico permitía a los matemáticos japoneses resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas utilizando un método muy similar al que 200 años después se utilizaría en Occidente (método de Cramer). Uno de sus hallazgos más sorprendentes es el del método *enri*, de características muy similares al que en occidente se conocía como método de exhaución y que se utilizaba para el cálculo de superficies delimitadas por líneas curvas. Concretamente para calcular el área del círculo a base de aproximaciones con polígonos regulares inscritos y circunscritos. El método *enri* se diferenciaba básicamente en que se aproximaba al círculo mediante rectángulos. Este método, que tenía la ventaja de que se podía extender a todo tipo de curvas, se acercaba mucho al concepto de integral que más tarde se desarrollaría en la Matemática occidental. Se supone que algunos de los problemas difíciles que planteaban los sangaku fueron resueltos empleando la técnica *enri*.

3. PROBLEMAS SANGAKU

3.1 Problema 1[2]

Hay 50 *gallinas y conejos. El número total de patas es* 122*. ¿Cuántas gallinas y cuántos conejos hay?*

3.1.1 Solución

Para obtener la respuesta se procede a realizar un sistema de ecuaciones 2×2

Gallinas: x

Conejos: y

$$x + y = 50$$

$$2x + 4y = 122$$

Simplificando la segunda ecuación por 2, se obtiene:

$$x + 2y = 61$$

Despejando y de las dos ecuaciones por el método de eliminación, se tiene:

$$x + y = 50$$

$$x + 2y = 61$$

$$y = 11$$

Reemplazando el valor de y en la primera de las ecuaciones:

---

[2] La tablilla en la que se escribió este problema fue colgada por Ufu Cho Saburo en 1743 en el templo Kurasako Kannon. Su tamaño es de $76\ cm$ por $33\ cm$.

$$x + y = 50$$

$$x = 50 - y$$

$$x = 50 - 11$$

$$x = 39$$

Respuesta: Hay 39 gallinas y 11 conejos.

3.2 Problema 2[3]

Un camino circular A forma un radio de $48km$, otro camino circular B forma un radio de $32km$, ambos caminos se encuentran en el punto P. Una vaca y un caballo empiezan a caminar desde el punto P a lo largo del camino A y B, respectivamente. La vaca camina 8 kilómetros por día y el caballo camina 12 kilómetros por día. ¿Cuántos días después se vuelven a encontrar la vaca y el caballo en el punto P? (Ver Figura 1).

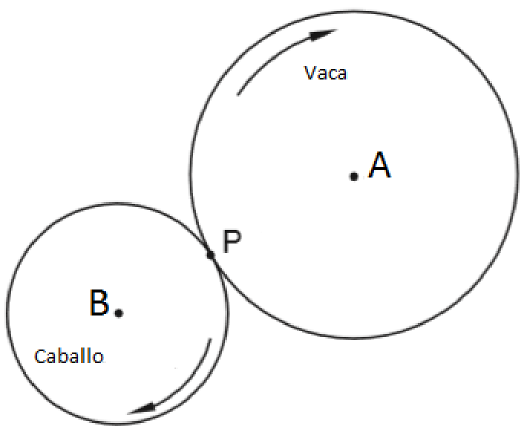


Figura 1

[3] Tanikawa Taizo colgó la tableta que contiene este problema en 1846 en el templo Yuisin de Chita-gun, prefectura de Aichi. Sus dimensiones son 98 cm de ancho y 48 cm de alto. Esta tablilla de madera (sangaku) era desconocida hasta 1979. Se encontró abandonada en el templo.

3.2.1 Solución

Según el problema se tiene que:

Datos de la vaca:

$$8d = 48x$$

Datos del caballo:

$$12d = 32y$$

Despejando d de ambas ecuaciones:

$$d = \frac{48}{8}x = 6x$$

Y

$$d = \frac{32}{12}y = \frac{8}{3}y$$

Igualando ambos resultados:

$$6x = \frac{8}{3}y$$

$$x = \frac{8}{3 \cdot 6}y$$

$$x = \frac{8}{18}y$$

Simplificando:

$$x = \frac{4}{9}y$$

$$\frac{x}{y} = \frac{4n}{9n}$$

Por tanto $x = 4$ y $y = 9$ es la mínima solución que se encuentra.

Reemplazando x en la primera de las ecuaciones de d despejada:

$$d = 6x$$

$$d = 6 \cdot 4$$

$$d = 24$$

Reemplazando y en la segunda de las ecuaciones de d despejada:

$$d = \frac{8}{3}y$$

$$d = \frac{8}{3} \cdot 9$$

$$d = \frac{72}{3}$$

$$d = 24$$

Respuesta: La vaca y el caballo se vuelven a encontrar 24 días después en el punto P.

3.3 Problema 3[4]

Tres circunferencias A, B, y C. de radios $56 + 2 \quad 3$ km, $30 + 5 \quad 7$ km *y* $13 + \quad 3 \quad 4$ km, *respectivamente, todas las circunferencias se tocan en el punto P. Tres caballos a, b, y c empiezan a caminar por A, B, y C desde P simultáneamente. La velocidad del caballo a es* $8 + 41 \quad 1000$ km *por día, la del caballo b es de* $6 + 123 \quad 4000$ km *por día, y la del caballo c es de* $4 + 41 \quad 2000$ km *por día. ¿Cuántos días pasarán antes de que los tres caballos se reúnan de nuevo en* P*? (Ver Figura 2).*

[4] La tablilla en la que se escribió este problema fue colgada por Hara Toyokatsu en 1829 en el santuario Katsurahama en Akigun de la prefectura de Hiroshima. Sus dimensiones son 81 cm por 46 cm. El problema en sí fue citado desde 1797 en el libro Saitei Sanpo (Revisión de Problemas), por Fujita Kagen.

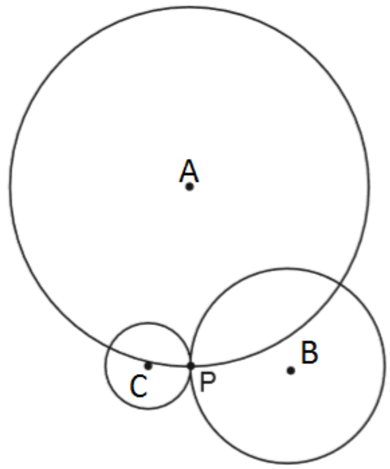


Figura 2.

3.3.1 Solución

De acuerdo a los datos y simplificando se tiene que:

n: Número de días

$x =$ Número de revoluciones del caballo a:

$$8 + \frac{41}{1000} \; n = \; 56 + \frac{2}{3} \; x$$

$$\frac{8041}{1000} n = \frac{170}{3} x$$

$$24123n = 170000x$$

$$1419n = 10000x$$

$y =$ Número de revoluciones del caballo b:

$$6 + \frac{123}{4000} \; n = \; 30 + \frac{5}{7} \; y$$

$$\frac{24123}{4000} n = \frac{215}{7} y$$

$$168861n = 860000y$$

$$3927n = 20000y$$

$z =$ Número de revoluciones del caballo c:

$$4 + \frac{41}{2000} \; n = \; 13 + \frac{3}{4} \; z$$

$$\frac{8041}{2000} n = \frac{55}{4} z$$

$$32164n = 110000z$$

$$731n = 2500z$$

n es el mínimo común múltiplo entre 10000, 20000 y 2500, por tanto $n = 20000$

3.4 Problema 4[5]

Los centros de un bucle de n circunferencias de radio r forman los vértices de un n-gon. S_1 es la suma de los sectores circulares internos, y S_2 la suma de los sectores circulares externos. Demostrar que $S_2 - S_1 = 2\pi r^2$. (Ver Figura 3).

3.4.1 Protocolo de construcción

a) Sea AB, lado del n-gon (dodecágono en este caso particular, es decir $n = 12$).

b) Con centro en A y radio AB trazar la circunferencia correspondiente. Sea C un punto de la circunferencia trazada.

c) Tomando como centro C y el mismo radio se trazan circunferencias tal que formen un polígono con los centros de cada una de ellas.

d) La cantidad de circunferencias que se deben formar será igual a $\frac{n}{2}$ si n es par y a $\frac{n+1}{2}$ si n es impar.

[5] Este problema viene de la colección Suri Shinpen o Matemáticas de Santuarios y Templos por Saito Gigi (1816-1889). En este libro de 1860, Saito registra treinta y cuatro tabletas que se colgaban entre 1843 y 1860. Este problema fue propuesto originalmente por Nakasone Munekuni y colgado en 1856 en el santuario en la ciudad Haruna.

e) Trazar un segmento desde el punto B hasta el último punto (G) encontrado de las circunferencias si n es par, si n es impar los extremos del segmento serán el punto B y el punto medio de los dos últimos puntos encontrados con las circunferencias.

f) Utilizando la herramienta "simetría axial" se encuentran los puntos simétricos de los que ya se tienen con respecto al segmento.

g) Con la herramienta "polígono" se forma el polígono (n-gon) requerido.

h) Se encuentran los puntos medios de cada lado del polígono y se trazan circunferencias cuyos centros sean estos mismos puntos, con diámetro lado del polígono.

i) Por último con la herramienta "sector circular" se construyen los sectores circulares interiores respecto al polígono.

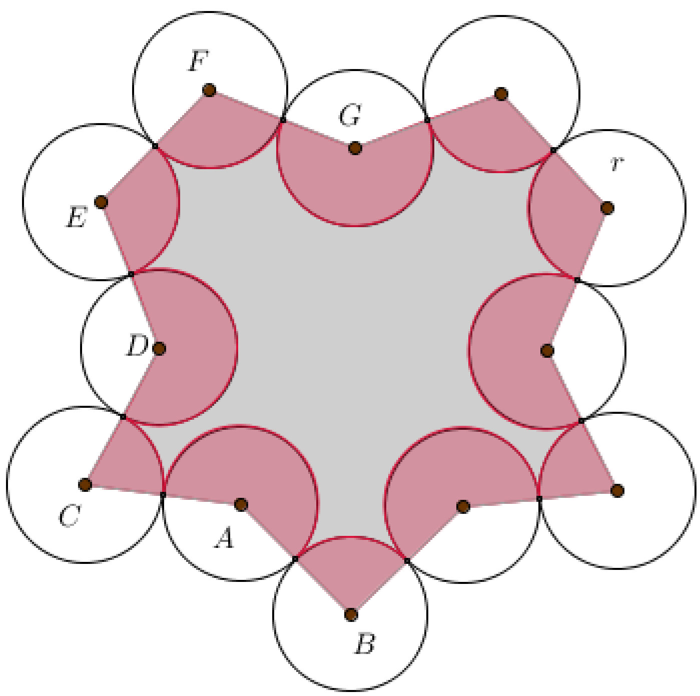


Figura 3. $n = 12$

3.4.2 Solución

Área total de las n circunferencias:

$$S = \pi r^2 n$$

Área de las n circunferencias externas:

$$S_2 = \frac{\pi r^2 \ \ 360 - 180n}{360}$$

El área de las n circunferencias internas:

$$S_1 = \frac{\pi r^2 \ \ 180 \ \ n - 2}{360}$$

Por tanto:

$$S_2 - S_1 = \frac{\pi r^2 \ \ 360 - 180n}{360} - \frac{\pi r^2 \ \ 180 \ \ n - 2}{360}$$

$$S_2 - S_1 = \frac{360\pi r^2 + 180\pi r^2 n - \pi r^2 \ \ 180n - 360}{360}$$

$$S_2 - S_1 = \frac{360\pi r^2 + 180\pi r^2 n - 180\pi r^2 n + 360\pi r^2}{360}$$

$$S_2 - S_1 = \frac{720\pi r^2}{360}$$

$$S_2 - S_1 = 360\pi r^2$$

O

$$S_2 - S_1 = \frac{\pi r^2 \;\; 2\pi - \pi n}{2\pi} - \frac{\pi r^2 \;\; \pi \;\; n-2}{2\pi}$$

$$S_2 - S_1 = \frac{2\pi^2 r^2 + \pi^2 r^2 n - \pi r^2 \;\; \pi n - 2\pi}{2\pi}$$

$$S_2 - S_1 = \frac{2\pi^2 r^2 + \pi^2 r^2 n - \pi^2 r^2 n + 2\pi^2 r^2}{2\pi}$$

$$S_2 - S_1 = \frac{4\pi^2 r^2}{2\pi}$$

$$S_2 - S_1 = 2\pi r^2$$

Que es lo que se quería demostrar.

3.5 Problema 5[6]

Una circunferencia de radio r está inscrita en un triángulo isósceles de lados $a = 12$ y $b = 10$. Encontrar r. (Ver Figura 4).

3.5.1 Protocolo de Construcción

Construir $\blacktriangle ABC$ isósceles con ayuda de la mediatriz DC (D punto medio de AB).

Trazar la bisectriz n del ángulo A. La intersección entre BD y n será el punto O.

Trazar la circunferencia con centro en O que pasa por el punto medio de AB.

---

[6] Este problema es encontrado en una de las tablillas del santuario Katayamahiko.

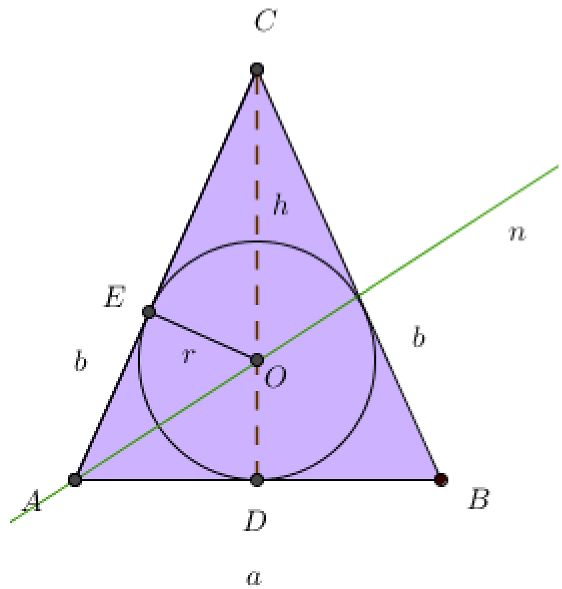


Figura 4.

3.5.2 Solución

Primera Solución.

$$A_T = r \cdot p$$

Donde A_T es el área del triángulo, r es el radio de la circunferencia inscrita y p es el semiperímetro del triángulo.

Despejando r se tiene:

$$r = \frac{A_T}{p}$$

Hallando la altura h del triángulo isósceles, se tiene:

$$h^2 = b^2 - {\frac{a}{2}}^2$$

$$h^2 = 10^2 - 6^2$$

$$h^2 = 100 - 36$$

$$h^2 = 64$$

$$h = 8$$

Por tanto el área del triángulo isósceles sería:

$$A_T = \frac{a \cdot h}{2}$$

$$A_T = \frac{12 \cdot 8}{2}$$

$$A_T = \frac{96}{2}$$

$$A_T = 48$$

Y el semi-perímetro del triángulo sería:

$$p = \frac{a + b + b}{2}$$

$$p = \frac{12 + 10 + 10}{2}$$

$$p = \frac{32}{2}$$

$$p = 16$$

Reemplazamos dichos valores en:

$$r = \frac{A_T}{p}$$

$$r = \frac{48}{16}$$

$$r = 3$$

Obteniendo así el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo isósceles de lados a y b.

Segunda Solución.

Como $\blacktriangle OEB \sim \blacktriangle ADB$ se tiene que:

$$\frac{AD}{OE} = \frac{AC}{OC}$$[7]

Reemplazando se tiene:

$$\frac{6}{r} = \frac{10}{8-r}$$

Despejando r:

$$r = \frac{8-r \;\; 6}{10}$$

$$r = \frac{48-6r}{10}$$

$$10r = 48 - 6r$$

$$10r + 6r = 48$$

$$16r = 48$$

$$r = \frac{48}{16}$$

$$r = 3$$

Radio de la circunferencia inscrita en el triángulo isósceles.

[7] $OB = 8 - r$; debido a que la altura del triángulo isósceles es 8 (solución 1)

3.6 Problema 6[8]

Una circunferencia de diámetro $2R = 100$ *inscribe dos triángulos equiláteros. Encontrar el lado* q *del triángulo* ABC *en términos de* R*, siendo* A *punto medio del triángulo equilátero más grande. (Ver Figura 5).*

3.6.1 Protocolo de Construcción

a) Se construye la circunferencia grande de radio R.

b) Se construye una recta con el centro O y un punto de la circunferencia P, la otra intersección es P'.

c) Se construye una circunferencia de centro P y radio R (la intersección de las circunferencias definen dos puntos Q y S). El triangulo $\blacktriangle QSP'$ es equilátero.

d) La intersección de OP y QS es A.

e) Con la herramienta "paralela" se construyen las paralelas correspondientes a los lados $P'S$ y $P'Q$ por el punto A cortando la circunferencia de centro O y radio R en los puntos C y B formando el triángulo equilátero $\blacktriangle ABC$ (pequeño).

[8] Este problema fue hallado en el manuscrito inédito Jinbyo Bukkaku Sangakushu o Colección de Sangaku de la Escuela Aida, escrito por Aida Yasuaki (1747-1817) en una fecha desconocida. El problema fue propuesto originalmente en 1800 por Kobata Atsukuni, un estudiante de la escuela Aida, presentado en tablilla para el templo Kanzeondo de Toba ciudad del Castillo.

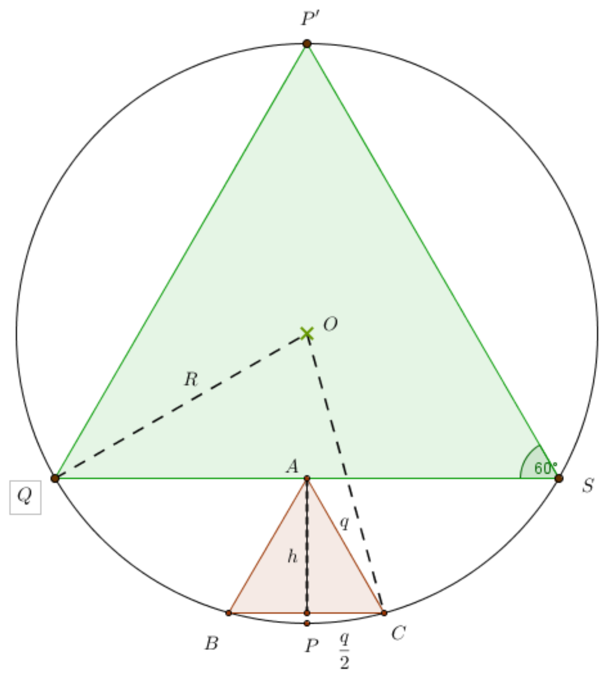


Figura 5.

3.6.2 Solución

Utilizando teorema de Pitágoras para hallar la altura h del triángulo ABC, se tiene:

$$h^2 = q^2 - {\frac{q}{2}}^{2}$$

$$h^2 = q^2 - \frac{q^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{4q^2 - q^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3q^2}{4}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}q$$

Se tiene que $OA = \frac{R}{2}, R = 50 = OB = OC$

Por teorema de Pitágoras se tiene:

$$R^2 = \left(\frac{R}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}q\right)^2 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$$

$$R^2 = \frac{R^2}{4} + 2\left(\frac{R}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}q\right) + \frac{3}{4}q^2 + \frac{q^2}{4}$$

$$R^2 = \frac{R^2}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}qR + \frac{3}{4}q^2 + \frac{q^2}{4}$$

$$R^2 = \frac{R^2}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}qR + q^2$$

$$R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}qR + q^2$$

$$\frac{3R^2}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}qR + q^2$$

$$q^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}qR - \frac{3R^2}{4} = 0$$

Utilizando fórmula cuadrática:

$$q = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}R \pm \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2 - 4(1)\left(-\frac{3R^2}{4}\right)}}{2(1)}$$

$$q = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}R \pm \sqrt{\frac{3}{4}R^2 + \frac{12}{4}R^2}}{2}$$

$$q = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}R \pm \sqrt{\frac{15}{4}R^2}}{2}$$

$$q = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}R \pm \frac{\sqrt{15}}{2}R}{2}$$

$$q = \frac{-\sqrt{3}R \pm \sqrt{15}R}{4}$$

Por tanto se tienen dos soluciones:

$$q_1 = \frac{-\sqrt{3}R + \sqrt{15}R}{4}$$

Y

$$q_2 = \frac{-\sqrt{3}R - \sqrt{15}R}{4}$$ [9]

Reemplazando el valor de R en $q_1$se obtiene:

$$q_1 = \frac{-\sqrt{3}\,50 + \sqrt{15}\,50}{4}$$

$$q_1 = 26{,}76$$

Hallando así el valor de q en términos de R.

[9] Como esta magnitud es negativa y la magnitud a encontrar debe ser positiva, esta solución no se tiene en cuenta.

3.7 Problema 7

Dos circunferencias de radio r, tangentes a una recta l y un cuadrado de lado t intersecando a ambas circunferencias. Hallar t en términos de r. (Ver Figura 7).

3.7.1 Solución

Utilizando teorema de Pitágoras para el triángulo rectángulo que se muestra en la figura:

$$r^2 - (r - t)^2 = \left(r - \frac{t}{2}\right)^2$$

$$r^2 - \left(r^2 - 2rt + t^2\right) = r^2 - 2(r)\left(\frac{t}{2}\right) + \left(\frac{t}{2}\right)^2$$

$$r^2 - r^2 + 2rt - t^2 = r^2 - rt + \frac{t^2}{4}$$

$$2rt - t^2 - r^2 + rt - \frac{t^2}{4} = 0$$

$$-t^2 - \frac{t^2}{4} + 2rt + tr - r^2 = 0$$

$$-\frac{5}{4}t^2 + 3rt - r^2 = 0$$

$$\frac{5}{4}t^2 - 3rt + r^2 = 0$$

Haciendo uso de la ecuación cuadrática se tiene:

$$t = \frac{3r \pm \sqrt{(-3r)^2 - 4\left(\frac{5}{4}\right)(-r^2)}}{2\left(\frac{5}{4}\right)}$$

$$t = \frac{3r \pm \sqrt{9r^2 + 5r^2}}{\frac{10}{4}}$$

$$t = \frac{3r \pm \sqrt{4r^2}}{\frac{5}{2}}$$

Obteniendo así dos soluciones para t:

$$t_1 = \frac{3r - \sqrt{4r^2}}{\frac{5}{2}}$$

Y

$$t_2 = \frac{3r + \sqrt{4r^2}}{\frac{5}{2}}$$

$$t_2 = 2r$$[10]

Solucionando t_1 :

$$t_1 = \frac{3r - \sqrt{4r^2}}{\frac{5}{2}}$$

$$t_1 = \frac{3r - 2r}{\frac{5}{2}}$$

[10] Para esta segunda solución el cuadrado está determinado por el lado DT y se encuentra en el semiplano opuesto con respecto a la recta tangente en el cual está A. Por tanto no se elige esta solución dada la figura que presenta el problema. *(Ver Figura 6).*

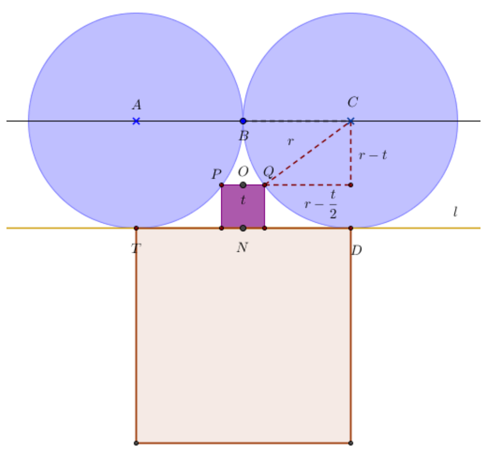


Figura 6.

$$t_1 = \frac{r}{\frac{5}{2}}$$

$$t_1 = \frac{2r}{5}$$

Siendo este el valor de t en términos de r.

3.7.2 Protocolo de Construcción

a) Trazar un segmento AB.

b) Con centro en A y radio AB se construye una circunferencia. Análogamente se traza la circunferencia con centro en B y radio AB

c) Se proyecta AB encontrando el punto C (intersección entre la circunferencia de centro B y AB)

d) Con centro en C y radio $CB = AB$ se construye otra circunferencia que resulta ser tangente a la anterior.

e) Trazar la perpendicular a AB que pasa por C, obteniendo uno de los puntos de intersección de la recta que se acaba de construir y la circunferencia con centro C, llamado D.

f) Trazar una paralela por D a AB, ésta será tangente a las dos circunferencias que se desea construir y los puntos de tangencia son D y T.

g) Sea $r = AB$, se construye el número $\frac{2}{5}$ tomando a r como la unidad, a este se le llamará t.

h) Trazar la perpendicular por B a AB que corta a DT en N.

i) Con centro en N y radio t se traza una circunferencia, cortando a BN en O.

j) Trazar la paralela a AB que pasa por O. Cortando a las circunferencias en los puntos más cercanos P y Q.

k) Por último con la herramienta polígono regular construye un cuadrado de vértices P y Q

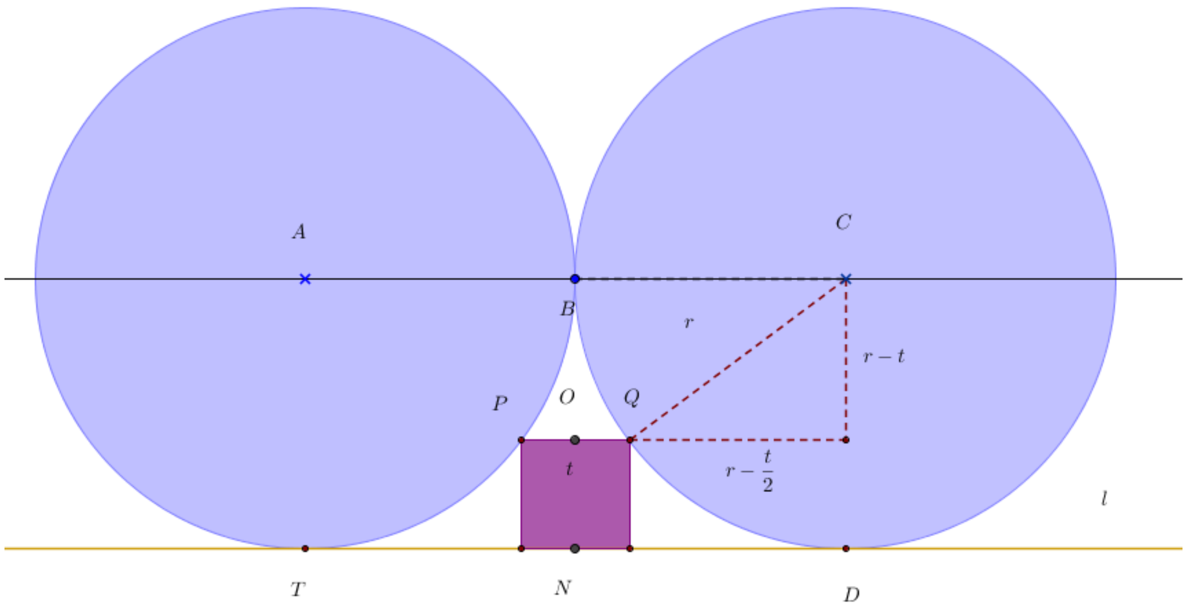


Figura 7.

3.8 Problema 8[11]

Una circunferencia de radio r, inscribe a tres circunferencias de radio t, cuyos centros forman un triángulo equilátero de lado $2t$. Hallar t en términos de r. (Ver Figura 8).

3.8.1 Protocolo de Construcción

a) Construir un triángulo equilátero con la herramienta polígono regular.

b) Trazar las mediatrices de dos de los lados del triángulo. La intersección de estas será el centro de la circunferencia grande.

c) Construir las circunferencias pequeñas que serán tangentes entre sí con centros en los vértices y radio igual a la mitad de un lado del triángulo t.

d) Con el centro encontrado en el paso b y la intersección más lejana de una de las mediatrices con la circunferencia que corta en dos puntos se forma el radio r. Trazar la circunferencia.

[11] Este problema se encuentra en la tablilla del santuario Katayamahiko.

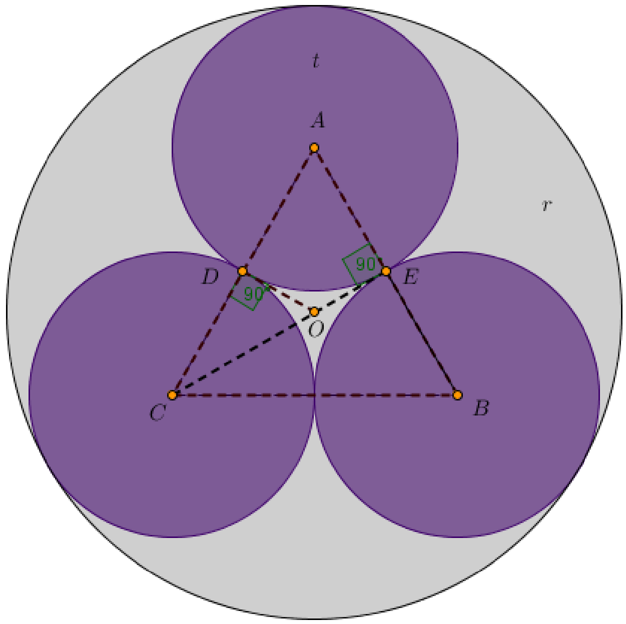


Figura 8.

3.8.2 Solución

Por el teorema de Pitágoras, se tiene que la altura del triángulo equilátero formado por los centros de las circunferencias de radio t es:

$$h^2 = (2t)^2 - \left(\frac{t}{2}\right)^2$$

$$h = \sqrt{3}t$$

Y por el teorema de la mediatriz la distancia desde el lado del triángulo equilátero al centro de la circunferencia de radio r es $\frac{\sqrt{3}}{3}t$

A su vez se tiene que los triángulos AEC y ODC son semejantes por tener un ángulo en común y ser rectángulos.

$$\frac{AE}{OD} = \frac{AC}{OC}$$

Reemplazando

$$\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{3}t} = \frac{2t}{t + (r - 2t)}$$

$$\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{2t}{r - t}$$

$$3(r - t) = 2\sqrt{3}t$$

$$3r = 2\sqrt{3}t + 3t$$

$$3r = t(2\sqrt{3} + 3)$$

$$t = \frac{3r}{2\sqrt{3} + 3}$$

Racionalizando, se obtiene:

$$t = \frac{3r}{2\sqrt{3} + 3} \cdot \frac{2\sqrt{3} - 3}{2\sqrt{3} - 3}$$

$$t = \frac{3r(2\sqrt{3} - 3)}{(2\sqrt{3})^2 - 3^2}$$

$$t = \frac{3r(2\sqrt{3} - 3)}{12 - 9}$$

$$t = \frac{3r(2\sqrt{3} - 3)}{3}$$

$$t = r(2\sqrt{3} - 3)$$

Obteniendo así el valor de t en términos de r.

3.9 Problema 9[12]

En un cuadrado de lado a, están inscritos un cuadrado de lado $2r$ y una circunferencia de radio r, ambos tangentes al cuadrado de lado a. Encontrar r en términos de a. (Ver Figura 9).

3.9.1 Solución

Para encontrar las diagonales de los cuadrados de la figura se hará uso del teorema de Pitágoras:

Diagonal del cuadrado de lado a

$$D_1^{\ 2} = a^2 + a^2$$

$$D_1^{\ 2} = 2a^2$$

$$D_1 = \sqrt{2}a$$

Diagonal del cuadrado de lado $2r$

$$D_2^{\ 2} = (2r)^2 + (2r)^2$$

$$D_2^{\ 2} = 4r^2 + 4r^2$$

$$D_2^{\ 2} = 8r^2$$

$$D_2 = 2\sqrt{2}r$$

Diagonal del cuadrado de lado r

[12] Kobayashi Syouta propuso este problema, grabado en una tablilla ubicada en el santuario Shimizu, prefectura de Nagano, en 1828.

$$(D_3)^2 = r^2 + r^2$$

$$(D_3)^2 = 2r^2$$

$$D_3 = \sqrt{2}r$$

Por tanto se obtiene que:

$$\sqrt{2}a = 2\sqrt{2}r + r + \sqrt{2}r$$

Despejando r:

$$\sqrt{2}a = r\left(2\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2}\right)$$

$$r = \frac{\sqrt{2}a}{3\sqrt{2} + 1}$$

Racionalizando:

$$r = \frac{\sqrt{2}a}{3\sqrt{2} + 1} \cdot \frac{3\sqrt{2} - 1}{3\sqrt{2} - 1}$$

$$r = \frac{\sqrt{2}a\left(3\sqrt{2} - 1\right)}{9 \cdot 2 - 1}$$

$$r = \frac{a\left(6 - \sqrt{2}\right)}{17}$$

3.9.2 Protocolo de Construcción

a) Construir un cuadrado de lado a.

b) Construir el número $\frac{6-\sqrt{2}}{17} = r$ tomando como unidad el lado a.

c) Desde un vértice del cuadrado, construir otro cuadrado de lado $2r$, de tal manera dos lados del cuadrado de lado $2r$ estén sobre dos lados del cuadrado a.

d) Construir la recta que contiene las diagonales de los dos cuadrados (es decir la respectiva al vértice en común).

e) Trazar la perpendicular a la diagonal construida que pase por el vértice opuesto al vértice común del cuadrado de lado $2r$. Esta cortará dos lados del cuadrado determinando dos puntos que serán vértices del triángulo que se desea construir.

f) Construir la circunferencia inscrita al triángulo utilizando bisectrices.

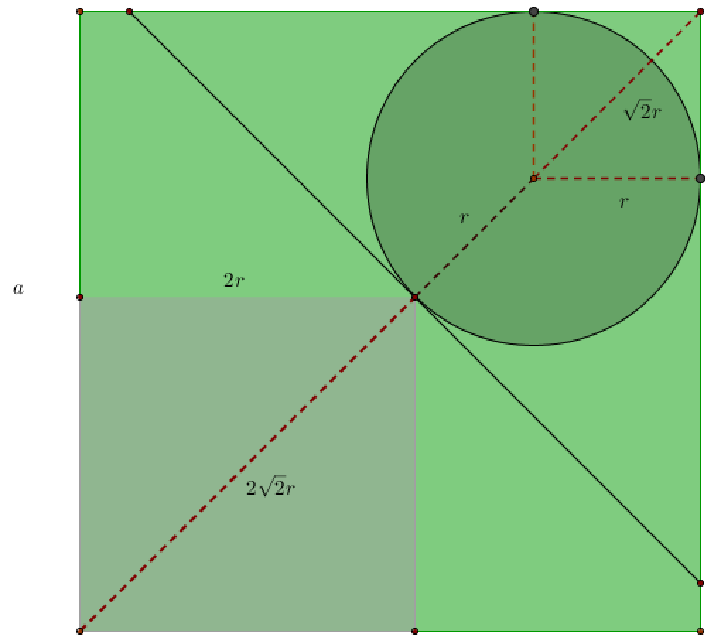


Figura 9.

3.10 Problema 10[13]

En un triángulo equilátero, están inscritas 3 circunferencias de radio a, 4 circunferencias de radio b y 6 circunferencias de radio c, todas tangentes entre sí, (3 circunferencias de radio b son tangentes exteriores al triángulo equilátero) como se muestra en la figura. Si R

[13] Este problema fue propuesto por Tanabe Shigetoshi a sus quince años de edad.

es el radio de la circunferencia exterior, y r es el radio de la circunferencia interlineada, hallar c en términos de r. (Ver Figura 10).

3.10.1 Solución

Se tiene que:

$$r = 3b + 4c$$

$$R = 5b + 4c$$

$$R = b + 2a$$

$$a + b = 2b + 4c$$

Igualando las dos medidas del radio R y despejando a:

$$5b + 4c = b + 2a$$

$$5b + 4c - b = 2a$$

$$4b + 4c = 2a$$

$$4\ \ b + c\ \ = 2a$$

$$\frac{4\ \ b + c}{2} = a$$

$$2\ \ b + c\ \ = a$$

$$2b + 2c = a$$

Despejando a de $a + b = 2b + 4c$ se tiene:

$$a + b = 2b + 4c$$

$$a = 2b + 4c - b$$

$$a = b + 4c$$

Igualando las dos medidas de a y despejando b se obtiene:

$$2b + 2c = b + 4c$$

$$2b - b = 4c - 2c$$

$$b = 2c$$

Reemplazando b en $r = 3b + 4c$ y despejando c se tiene:

$$r = 3b + 4c$$

$$r = 3(2c) + 4c$$

$$r = 6c + 4c$$

$$r = 10c$$

$$c = \frac{r}{10}$$

Obteniendo c en términos de r.

3.10.2 Protocolo de Construcción

a) Construir un triángulo equilátero.

b) Construir la circunferencia inscrita al triángulo. El radio será r

c) Construir el número $\frac{r}{5} = b$ tomando como unidad el radio de la circunferencia inscrita.

d) Trazar las bisectrices del triángulo (encontrar el incentro del triángulo).

e) Trazar con la herramienta "compás" la circunferencia de centro, el incentro y radio b (ya construido en el paso c).

f) Con la ayuda de la herramienta “compas” construir tres circunferencias tangentes a los puntos medios de los lados del triángulo que estén en el interior de este (aprovechando las bisectrices).

g) Se construyen las dos circunferencias pequeñas teniendo en cuenta que los centros de estas están en las bisectrices y que el radio es $\frac{b}{2}$.

h) Se construyen las circunferencias de radio a teniendo en cuenta que $a = \frac{3r}{5}$, que el centro está en la bisectriz y que es tangente a las circunferencias de radio b.

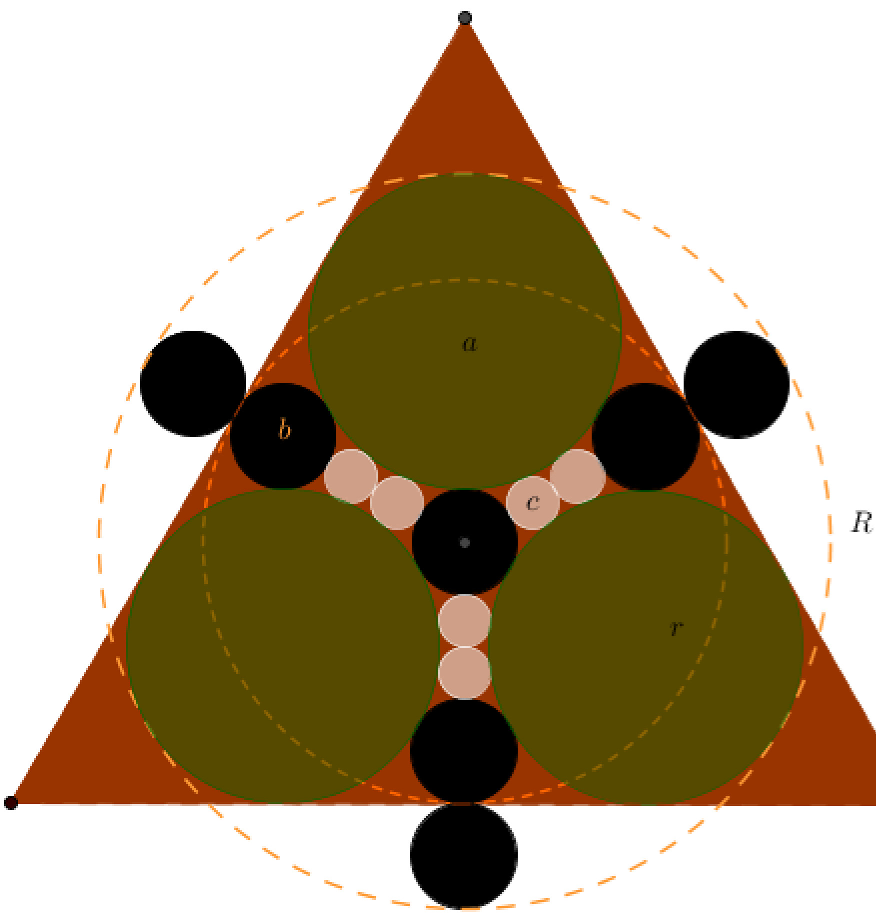


Figura 10.

3.11 Problema 11[14]

Una circunferencia inscrita en un cuadrado. Dos circunferencias de radio R*, dos circunferencias de radio* r*, inscritas en un rombo. El lado del rombo es la misma distancia entre las rectas horizontales trazadas en el cuadrado. Si* $2r = 35{,}5$ *encontrar* a*,* $a\pi$*,* b*,* R *y* d*. (Igual que en las matemáticas tradicionales japoneses tomar* $\pi = 3{,}16$*). (Ver Figura 11).*

3.11.1 Protocolo de Construcción

a) Construir dos triángulos equiláteros con un lado común de tal manera que estén en semiplanos opuestos.

b) Construir las circunferencias inscritas a los triángulos utilizando bisectrices.

c) Usando las bisectrices con las que se construyen las circunferencias inscritas se tiene: la bisectriz de uno de los vértices en común (paso a), contiene un diámetro de la circunferencia, y este se define con dos puntos. El más cercano al vértice mencionado es por donde se debe trazar una perpendicular a la bisectriz, esta corta dos lados del triángulo, formando otro triángulo equilátero.

d) Construir la circunferencia inscrita al triangulo encontrado.

e) Con la herramienta "simetría axial" trazar la circunferencia simétrica a la encontrada con respecto al lado común (paso a).

f) Trazar la circunferencia con centro en el punto medio del lado común (paso a) a los triángulos iniciales y radio igual a la altura de uno de estos triángulos.

g) Construir un cuadrado circunscrito a la circunferencia encontrada en el paso f, de tal manera que sus lados sean paralelos y perpendiculares al lado en común (paso a) de los triángulos iniciales.

h) Prolongar el lado común (paso a) para construir los segmentos de longitud d.

i) Trazar las dos perpendiculares al segmento común (paso a) por sus extremos para completar la figura.

[14] Este problema se encuentra en el sangaku Sugawara.

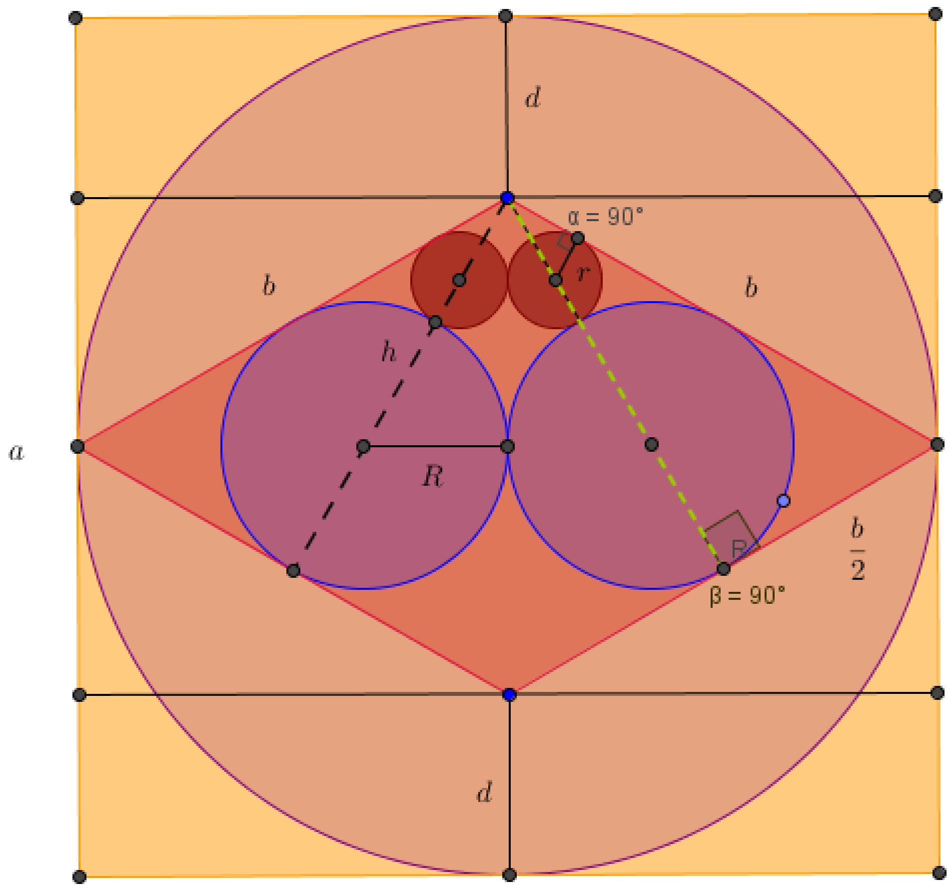


Figura 11.

3.11.2 Solución

Se tiene $2r = 35{,}5$, por tanto $r = 17{,}75$

El rombo está formado por dos triángulos equiláteros, por tanto la altura de cada triángulo equilátero será:

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$h^2 = b^2 - \frac{b^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3b^2}{4}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}b$$

Como el cuadrado es de lado a, se tiene que:

$$a = \frac{\sqrt{3}b}{2} + \frac{\sqrt{3}b}{2}$$

$$a = \frac{2\sqrt{3}b}{2}$$

$$a = \sqrt{3}b$$

También se tiene que:

$$a - b = 2d$$

Despejando d:

$$d = \frac{a - b}{2}$$

Para hallar el radio R de la circunferencia inscrita al triángulo equilátero se halla área A y semi-perímetro p de dicho triángulo:

$$A = R \cdot p$$

Despejando R se obtiene:

$$R = \frac{A}{p}$$

En donde A es:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A = \frac{b \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} b}{2}$$

$$A = \frac{\sqrt{3} b^2}{4}$$

Y p es:

$$p = \frac{b + b + b}{2}$$

$$p = \frac{3}{2} b$$

Reemplazando dichos valores en $R = \frac{A}{p}$, se obtiene:

$$R = \frac{A}{p}$$

$$R = \frac{\frac{\sqrt{3} b^2}{4}}{\frac{3}{2} b}$$

$$R = \frac{\sqrt{3}}{6} b$$

Y

$$2R = \frac{\sqrt{3}}{3} b$$

Por semejanza de triángulos se tiene:

$$\frac{\frac{b}{2}}{r} = \frac{b}{h - (2R + r)}$$

Reemplazando h y $2R$:

$$\frac{\frac{b}{2}}{r} = \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}b - \quad \frac{\sqrt{3}}{3}b + r}$$

$$br = \frac{b}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}b - \quad \frac{\sqrt{3}}{3}b + r$$

$$br = \frac{b}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{\sqrt{3}}{3}b - r$$

$$br = \frac{b}{2} \quad \frac{3 \quad \sqrt{3} - 2 \quad \sqrt{3}}{6}b - r$$

$$br = \frac{b}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{6}b - r$$

$$br = \frac{\sqrt{3}}{12}b^2 - \frac{br}{2}$$

$$0 = \frac{\sqrt{3}}{12}b^2 - \frac{br}{2} - br$$

$$0 = \frac{\sqrt{3}}{12}b^2 - \frac{3br}{2}$$

$$0 = \frac{b}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{6}b - 3r$$

Entonces:

$$\frac{b}{2} = 0$$

O

$$\frac{\sqrt{3}}{6}b - 3r = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{6}b = 3r$$

$$\sqrt{3}b = 18r$$

$$b = \frac{18r}{\sqrt{3}}$$

Racionalizando:

$$b = \frac{18}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}r$$

$$b = \frac{18\sqrt{3}}{3}r$$

$$b = 6\sqrt{3}r$$

Sustituyendo el valor de r:

$$b = 6\sqrt{3}\ 17{,}75$$

$$b = 184{,}4$$

Sustituyendo el valor de b en $R = \frac{\sqrt{3}}{6}b$, se tiene:

$$R = \frac{\sqrt{3}}{6}b$$

$$R = \frac{\sqrt{3}}{6}\ 184{,}4$$

$$R = 53{,}23$$

Reemplazando también el valor de b en $a = \sqrt{3}b$, se tiene:

$$a = \sqrt{3}b$$

$$a = \sqrt{3}\ 184{,}4$$

$$a = 319{,}5$$

Reemplazando el valor de a y b en $d = \frac{a-b}{2}$, se obtiene:

$$d = \frac{a - b}{2}$$

$$d = \frac{319{,}5 - 184{,}4}{2}$$

$$d = 67{,}55$$

Y

$$a\pi = 319{,}5 \cdot 3{,}16$$

$$a\pi = 1009{,}6$$

Obteniendo así todas las distancias que se pedían en el problema.

3.12 Problema 12[15]

ABC triángulo rectángulo, inscritos en él: un triángulo equilátero de lado t, un cuadrado de lado s, una circunferencia tangente al cuadrado, triángulo equilátero y triángulo rectángulo. Encontrar t en términos de a. (Ver Figura 12).

[15] Este problema fue propuesto por Watanabe Kiichi

3.12.1 Solución

Por adición de ángulos y ángulos suplementarios se puede notar que:

$m\sphericalangle JKL + m\sphericalangle IKP = 150$, de lo que se concluye que $\sphericalangle \mathrm{PKA} = 30$, entonces:

$$\measuredangle A = 30°$$

$$\measuredangle B = 60°$$

$$\measuredangle C = 90°$$

Por tanto

$$\sin 30 = \frac{y}{a-s}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{y}{a-s}$$

Despejando y:

$$y = \frac{a-s}{2}$$

Utilizando el teorema de Pitágoras en el triángulo $\blacktriangle AKI$, se obtiene el lado x:

$$x^2 = \ 2t\ ^2 - t^2$$

$$x^2 = 4t^2 - t^2$$

$$x^2 = 3t^2$$

$$x = \sqrt{3}t$$

Se puede deducir que $\blacktriangle AKI \sim \blacktriangle \mathrm{XLB}$ ya que ambos son semejantes a $\blacktriangle ABC$ Ahora, por semejanza de triángulos, se tiene:

$$\frac{x}{t} = \frac{s}{y}$$

Reemplazando valores y despejando s, se obtiene:

$$\frac{\sqrt{3}t}{t} = \frac{s}{\frac{a-s}{2}}$$

$$\sqrt{3} = \frac{2s}{a-s}$$

$$(a-s)\sqrt{3} = 2s$$

$$\sqrt{3}a - \sqrt{3}s = 2s$$

$$\sqrt{3}a = 2s + \sqrt{3}s$$

$$\sqrt{3}a = s\left(2 + \sqrt{3}\right)$$

$$s = \frac{\sqrt{3}a}{2 + \sqrt{3}}$$

Se puede determinar que $\blacktriangle JIX \sim \blacktriangle IKA$ por tanto se obtiene:

$$\frac{t-s}{s} = \frac{t}{\sqrt{3}t}$$

$$\sqrt{3}\left(t-s\right) = s$$

Despejando t:

$$\sqrt{3}t - \sqrt{3}s = s$$

$$\sqrt{3}t = s + \sqrt{3}s$$

$$\sqrt{3}t = s\left(1 + \sqrt{3}\right)$$

$$t = \frac{s\left(1 + \sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}}$$

Sustituyendo en $t = \frac{s\left(1+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}}$ el valor de s, encontrado anteriormente, se obtiene:

$$t = \frac{\sqrt{3}a}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$t = \frac{a\left(1+\sqrt{3}\right)}{2+\sqrt{3}}$$

Racionalizando:

$$t = \frac{a\left(1+\sqrt{3}\right)}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

$$t = \frac{a\left(2-\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3\right)}{4-3}$$

$$t = a\left(\sqrt{3}-1\right)$$

Obteniendo así t en términos de a.

3.12.2 Protocolo de Construcción

a) Construir un triángulo equilátero $\blacktriangle XYZ$, y su circunferencia inscrita de centro O.

b) Con la herramienta perpendicular y el punto medio de XZ se construye un ángulo recto de tal manera que sus lados sean tangentes a la circunferencia (el vértice será C).

c) *Nota:* De aquí en adelante la construcción se hará en el interior del ángulo recto donde está la circunferencia (Y está en este ángulo).

d) X es el vértice que el triángulo tiene en común con el ángulo recto. Prolongar XO hasta cortar el otro lado del Ángulo recto en I.

e) Con la herramienta "tangentes" construir las rectas tangentes a la circunferencia por I. Una de esas tangentes corta a XY en J.

f) Construir un cuadrado de lado XJ y será $\blacksquare XJKL$.

g) La prolongación de KL corta al ángulo recto en los puntos A y B.

h) Construir $\blacktriangle IKP$ equilátero de lado IK de tal manera que el otro vértice P este en el lado AC.

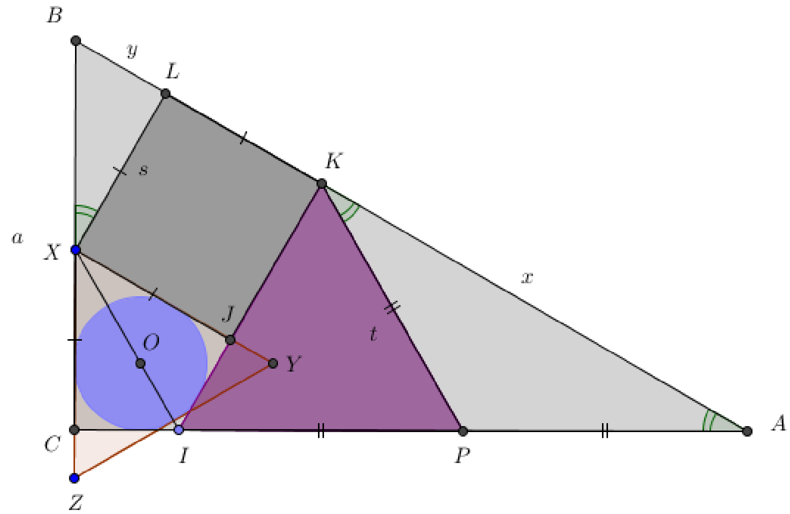


Figura 12.

3.13 Problema 13[16]

Un rombo, dos circunferencias de radio r, dos circunferencias de radio r_1 y cinco circunferencias de radio r_2. Mostrar que $r_2 = \frac{r_1}{2}$. (Ver Figura 13).

3.13.1 Protocolo de Construcción

a) Teniendo en cuenta la construcción del *problema 12* se construye: un triángulo equilátero, la circunferencia inscrita y las tres circunferencias tangentes a dos lados del triángulo y a la circunferencia inscrita al triángulo.

b) Trazar la paralela a unos de los lados que pase por el centro de una circunferencia pequeña, esa recta se será l.

c) Trazar la circunferencia con centro en el punto medio del lado paralelo a l y radio igual al de las circunferencias pequeñas.

---

[16] Este problema es propuesto por Yamasaki Tsugujirou.

d) Construir la circunferencia tangente interna a la inscrita al triángulo y tangente a las pequeñas teniendo en cuenta que su centro está sobre la mediatriz del lado paralelo a l con ayuda del punto medio.

e) Con la herramienta “simetría axial” y con respecto de la recta l, trazar la simetría de: el triángulo, la circunferencia inscrita al triángulo (grande), la circunferencia tangente a las otras dos (mediana) y la tangente a dos lados del triángulo únicamente (pequeña).

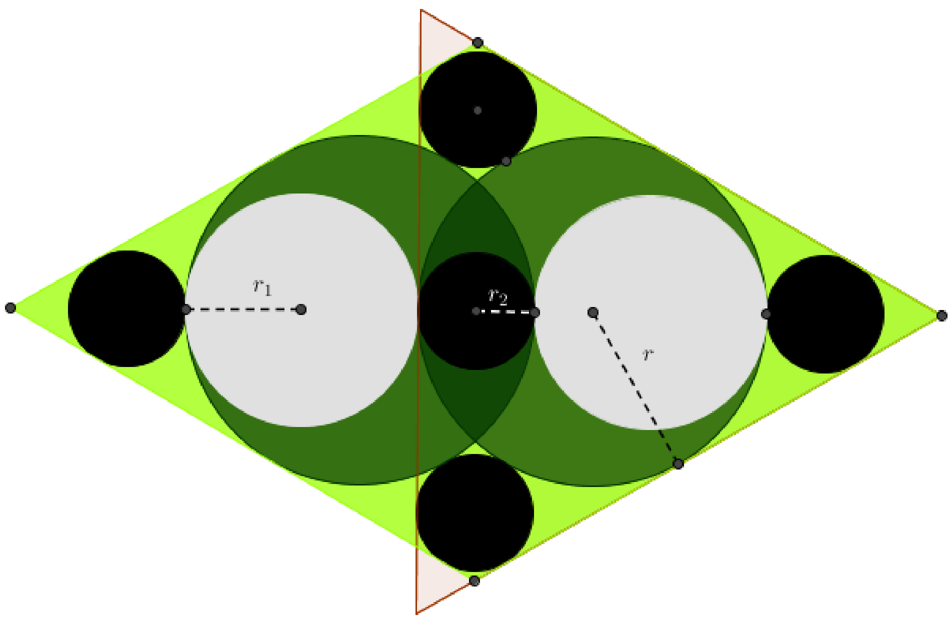


Figura 13.

3.13.2 Solución

Del *problema 12* se tiene que:

$$r = 3r_2$$

Por lo tanto se tiene:

$$2r_1 = 2r - 2r_2$$

Reemplazando el valor de r

$$2r_1 = 2\ 3r_2\ \ - 2r_2$$

$$2r_1 = 6r_2 - 2r_2$$

$$2r_1 = 4r_2$$

$$r_2 = \frac{r_1}{2}$$

3.14 Problema 14[17]

Dos circunferencias de radio r y dos circunferencias de radio t, se encuentran inscritas en un cuadrado. Encontrar t en términos de r. (Ver Figura 14).

3.14.1 Protocolo de Construcción

a) Construir un cuadrado.

b) Trazar una diagonal. (Determinará dos triángulos)

c) Construir las circunferencias inscritas en cada triángulo.

d) Construir las tangentes externas a las dos circunferencias (problema 7). Formando así dos triángulos semejantes a los construidos en el paso b.

e) Construir las circunferencias inscritas a los triángulos formados en el paso d.

[17] Este problema aparece en la capilla de Katayamahiko, también se encuentra en el santuario Ubara.

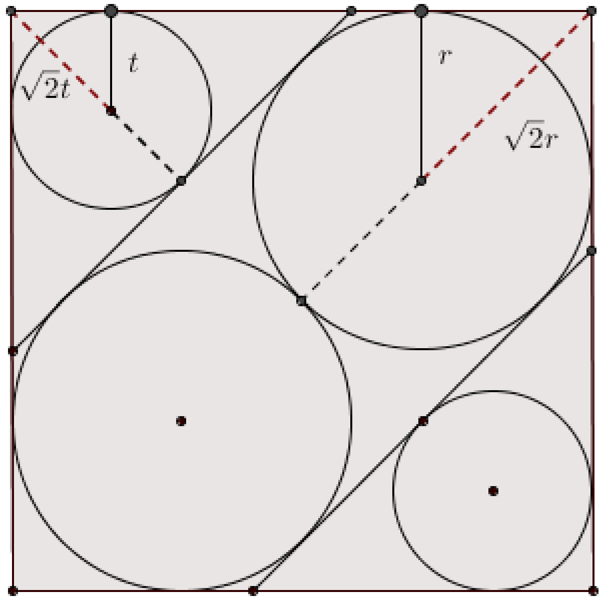


Figura 14.

3.14.2 Solución

Por teorema de Pitágoras, se obtiene:

$$h_1{}^2 = t^2 + t^2$$

$$h_1{}^2 = 2t^2$$

$$h_1{}^2 = \sqrt{2}t$$

Y

$$h_2{}^2 = r^2 + r^2$$

$$h_2{}^2 = 2r^2$$

$$h_2{}^2 = \sqrt{2}r$$

La medida de cada una de las diagonales del cuadrado será entonces:

$$D_1 = 2r + 2t + 2\sqrt{2}t$$

$$D_2 = 2r + 2\sqrt{2}r$$

Igualando estas dos diagonales del cuadrado, se tiene que:

$$2r + 2t + 2\sqrt{2}t = 2r + 2\sqrt{2}r$$

Despejando t se obtiene:

$$2t + 2\sqrt{2}t = 2r + 2\sqrt{2}r - 2r$$

$$2t + 2\sqrt{2}t = 2\sqrt{2}r$$

$$t + \sqrt{2}t = \sqrt{2}r$$

$$t\left(1 + \sqrt{2}\right) = \sqrt{2}r$$

$$t = \frac{\sqrt{2}r}{1 + \sqrt{2}}$$

Racionalizando:

$$t = \frac{\sqrt{2}r}{1 + \sqrt{2}} \cdot \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$$

$$t = \frac{\sqrt{2}r - 2r}{1 - 2}$$

$$t = \frac{r\left(\sqrt{2} - 2\right)}{-1}$$

$$t = r\left(2 - \sqrt{2}\right)$$

Obteniendo así t en términos de r

3.15 Problema 15[18]

Cuatro circunferencias de radio r, inscritas en una circunferencia de radio R. Los centros de dichas circunferencias forman un rectángulo cuya medida de uno de sus lados es $2R$. Una circunferencia de radio p es tangente a las cuatro circunferencias de radio r, dos circunferencias de radio q, son tangentes externas a r y tangentes internas a R. Encontrar p en términos de q. (Ver Figura 15).

3.15.1 Protocolo de Construcción

a) Construir un rectángulo no cuadrado. (Cada vértice será el centro de las circunferencias de radio r).
b) Hallar los puntos medios de dos lados mayores del rectángulo del paso a.
c) Trazar las cuatro circunferencias cuyo radio sea la mitad de los lados mayores y su centro será cada uno de los vértices del rectángulo. (Serán las circunferencias de lado r).
d) Trazar una recta que contenga una diagonal del rectángulo y otra con los puntos de corte de las circunferencias no tangentes.
e) Trazar la circunferencia de radio p teniendo en cuenta la distancia del punto medio de la intersección de la diagonal y las circunferencias cuyos centros la forman. (Será el centro de la circunferencia de radio R).
f) Trazar dos rectas paralelas a la diagonal del paso d por los vértices restantes del rectángulo.
g) Las circunferencias de radio q se centraran en la intersección entre las rectas paralelas del paso f y la recta obtenida en el paso d hecha de la intersección de las circunferencias.
h) Trazar la circunferencia de radio R utilizando la diagonal del paso d.

[18] Este problema es presentado en 1837 por Ohsu Kannon de la ciudad de Nagoya, propuesto originalmente por Mizuno Tsuneyuki.

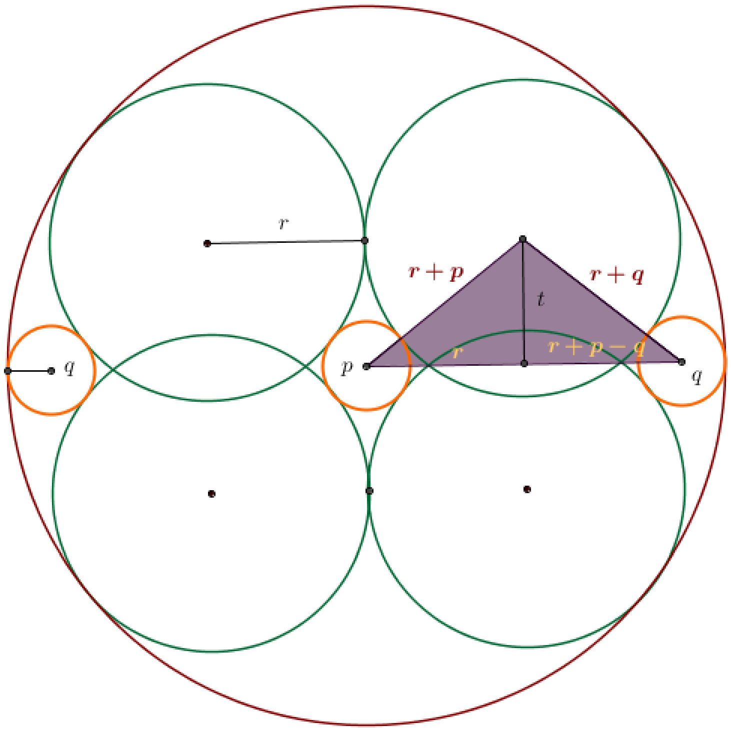


Figura 15.

3.15.2 Solución

Por teorema de Pitágoras, se tiene:

$$t^2 = (r+p)^2 - r^2$$

$$t^2 = r^2 + 2pr + p^2 - r^2$$

$$t^2 = p^2 + 2pr$$

Y

$$t^2 = (r+q)^2 - (r+p-q)^2$$

$$t^2 = r^2 + 2rq + q^2 - (r^2 + p^2 + q^2 + 2rp - 2rq - 2pq)$$

$$t^2 = r^2 + 2rq + q^2 - r^2 - p^2 - q^2 - 2rp + 2rq + 2pq$$

$$t^2 = 4rq - p^2 - 2rp + 2pq$$

Igualando el valor de t^2 se tiene:

$$p^2 + 2pr = 4rq - p^2 - 2rp + 2pq$$

Hallando el valor de p por medio de la fórmula cuadrática:

$$2p^2 - 4rq - 2pq + 4rp = 0$$

$$p = \frac{-(2r - q) \pm \sqrt{(2r - q)^2 - 4(-2rq)}}{2}$$

$$p = \frac{q - 2r \pm \sqrt{4r^2 - 4rq + q^2 + 8rq}}{2}$$

$$p = \frac{q - 2r \pm \sqrt{4r^2 + 4rq + q^2}}{2}$$

$$p = \frac{q - 2r \pm (2r + q)}{2}$$

$$p_1 = \frac{q - 2r + 2r + q}{2}$$

$$p_1 = \frac{2q}{2}$$

$$p_1 = q$$

$$p_2 = \frac{q - 2r - 2r - q}{2}$$

$$p_2 = \frac{-4r}{2}$$

$$p_2 = -2r$$

Como se pidió p en términos de q, la respuesta sería $p_1 = q$

3.16 Problema 16[19]

Una circunferencia de radio b es tangente a dos cuadrados de lado $2b$, que a su vez son tangentes a una recta l. Una circunferencia de radio a, es tangente a la recta l, a uno de los cuadrados y a la circunferencia de radio b. Encontrar a en términos de b. (Ver Figura 16).

3.16.1 Protocolo de construcción

a) Trazar una circunferencia (radio a).

b) Construir una tangente a dicha circunferencia.

c) Construir un ángulo de $45°$, con respecto al radio perpendicular a la tangente, tomando como vértice el centro de la circunferencia. (De la intersección del rayo construido y la circunferencia se determina un punto)

d) Trazar el segmento perpendicular a la tangente por el punto conseguido en paso c.

e) Construir dos cuadrados con un lado común, de tal manera que solo uno sea tangente por el punto del paso c y que se encuentren en el mismo semiplano en el que se encuentra la circunferencia determinada por la tangente. (Cuadrados de lado $2b$)

f) Prolongar el segmento común de los cuadrados.

g) Trazar la circunferencia de radio b tangente a los dos cuadrados y a l circunferencia de radio a.

[19] Este problema fue presentado por Kobayashi Nobutomo en 1828.

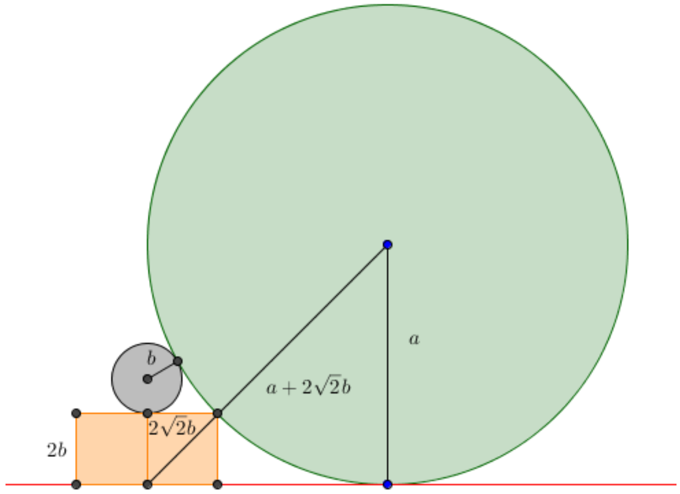


Figura 16.

3.16.2 Solución

Por teorema de Pitágoras se obtiene la diagonal de uno de los cuadrados:

$$h^2 = (2b)^2 + (2b)^2$$

$$h^2 = 4b^2 + 4b^2$$

$$h^2 = 8b^2$$

$$h = 2\sqrt{2}b$$

Por semejanza de triángulos se tiene:

$$\frac{a}{2b} = \frac{a + 2\sqrt{2}b}{2\sqrt{2}b}$$

Despejando a:

$$a\left(2\sqrt{2}b\right) = 2b\left(a + 2\sqrt{2}b\right)$$

$$2\sqrt{2}ab = 2ab + 4\sqrt{2}b^2$$

$$\sqrt{2}ab - ab = 2\sqrt{2}b^2$$

$$a\left(\sqrt{2}b - b\right) = 2\sqrt{2}b^2$$

$$a = \frac{2\sqrt{2}b^2}{\sqrt{2}b - b}$$

$$a = \frac{2\sqrt{2}b^2}{b\left(\sqrt{2} - 1\right)}$$

$$a = \frac{2\sqrt{2}b}{\sqrt{2} - 1}$$

Racionalizando:

$$a = \frac{2\sqrt{2}b}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1}$$

$$a = \frac{4b + 2\sqrt{2}b}{2 - 1}$$

$$a = 2b\left(2 + \sqrt{2}\right)$$

Obteniendo así el valor de a en términos de b.

3.17 Problema 17[20]

Dos circunferencias tangentes exteriormente de radio c, dos circunferencias de radio b, una circunferencia de radio a, y una circunferencia de radio R, tangente interiormente a una de las circunferencias de radio c. Encontrar R, b y c en términos de a. (Ver Figura 17).

[20] El creador de este problema fue Gunji Senuemon

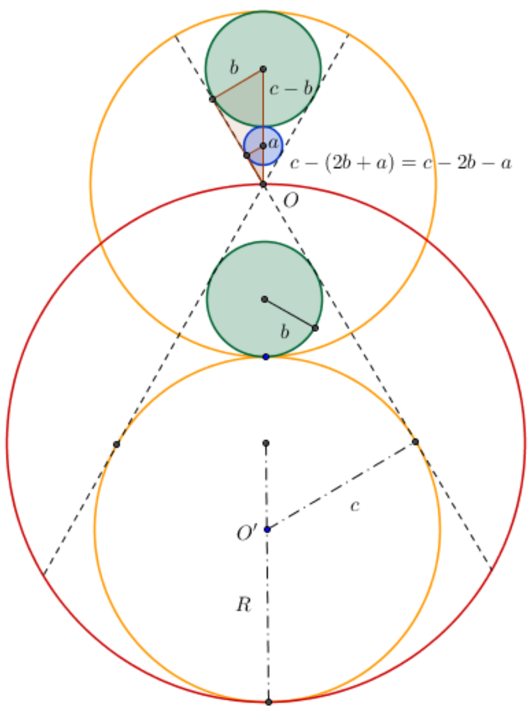
3.17.1 Protocolo de Construcción

a) Construir las dos circunferencias de radio c tangentes como ya se hizo en el *problema 7* de centros O y O'.

b) Desde O se trazan las tangentes a la circunferencia con centro en O'

c) Construir las circunferencias de radio b tangentes a la circunferencia y a las rectas tangentes del <u>paso b</u>, utilizando el mismo método del *Problema 12* y con ayuda de la OO'. Análogamente con la circunferencia de radio a.

d) De la intersección de OO' con la circunferencia de centro O', que será el punto F diferente al punto de tangencia entre las circunferencia del <u>paso a</u>. Trazar la circunferencia con centro en el punto medio de OF y radio $\frac{OF}{2}$.



Problema 17.

3.17.2 Solución

Por semejanza de triángulos se tiene que:

$$\frac{b}{a} = \frac{c - b}{c - \ 2b + a}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{c - b}{c - 2b - a}$$

$$b\;\; c - 2b - a\;\; = a\;\; c - b$$

$$bc - 2b^2 - ab = ac - ab$$

$$bc - 2b^2 - ac = 0$$

Por semejanza de triángulos se tiene:

$$\frac{c}{b} = \frac{2c}{c - b}$$

$$c\;\; c - b\;\; = b\;\; 2c$$

$$c^2 - cb = 2bc$$

$$c^2 = 2bc + cb$$

$$c^2 = 3bc$$

$$\frac{c^2}{c} = 3b$$

$$c = 3b$$

Reemplazando este valor de c en $bc - 2b^2 - ac = 0$, se tiene:

$$b\;\; 3b\;\; - 2b^2 - a\;\; 3b\;\; = 0$$

$$3b^2 - 2b^2 - 3ab = 0$$

$$b^2 - 3ab = 0$$

$$b^2 = 3ab$$

$$\frac{b^2}{b} = 3a$$

$$b = 3a$$

Sustituyendo el valor de b en $c = 3b$, se obtiene:

$$c = 3b$$

$$c = 3\ \ 3a$$

$$c = 9a$$

Y sustituyendo el valor de c en $2R = 3c$, se tiene:

$$R = \frac{3c}{2}$$

$$R = \frac{3\ \ 9a}{2}$$

$$R = \frac{27}{2}a$$

Obteniendo así todos los valores en términos de a.

3.18 Problema 18[21]

Recta AB, dos circunferencias con diámetro AC y BC respectivamente, tangentes en C. Desde el punto A, dos tangentes a la circunferencia t y desde el punto B, dos tangentes a la circunferencia s. Dos circunferencias de radio p y q son tangentes en el punto C. Demostrar que $p = q$. (Ver Figura 18).

3.18.1 Protocolo de Construcción

Trazar el segmento AB y ubicar un punto C en el segmento.

Construir dos circunferencias cuyos diámetros serán AC y CB.

[21] Este problema fue propuesto por Nagata Takamichi en 1842, se encuentra ubicado en el santuario Atsuta de la ciudad de Nagoya, prefectura de Aichi.

Trazar las tangentes a la circunferencia de diámetro AC desde B y análogamente las tangentes a la circunferencia de diámetro CB desde A.

Trazar una perpendicular a AB por C. (Formando así dos triángulos isósceles con las tangentes del paso c y la perpendicular que se acaba de trazar).

Construir las circunferencias inscritas en los triángulos del paso d.

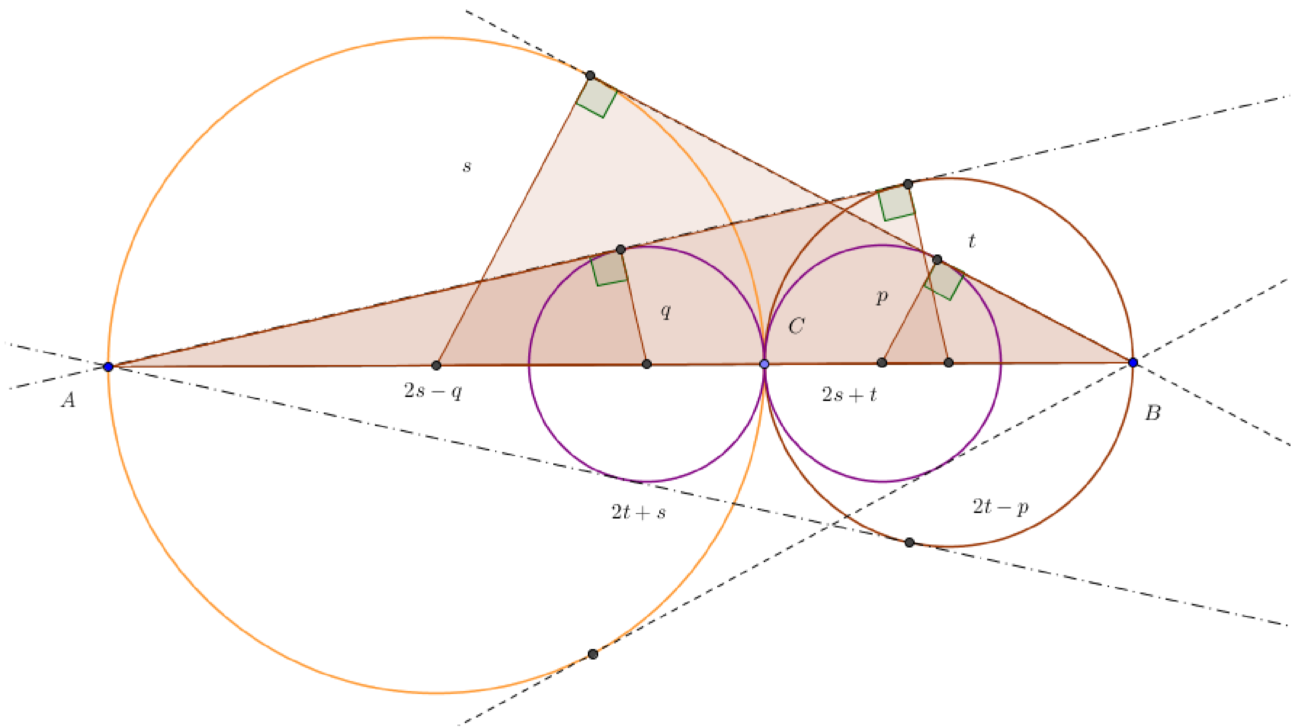


Figura 18.

3.18.2 Solución

Por semejanza de triángulos:

$$\frac{t}{q} = \frac{2s + t}{2s - q}$$

Despejando s:

$$t\ \ 2s - q\ \ = q\ \ 2s + t$$

$$2st - tq = 2qs + qt$$

$$2st - 2qs = 2qt$$

$$st - qs = qt$$

$$s\ \ t - q\ \ = qt$$

$$s = \frac{qt}{t - q}$$

Por semejanza de triángulos, se tiene también:

$$\frac{s}{p} = \frac{2t + s}{2t - p}$$

Despejando s:

$$s\ \ 2t - p\ \ = p\ \ 2t + s$$

$$2ts - sp = 2tp + ps$$

$$2ts - sp - sp = 2tp$$

$$2ts - 2sp = 2tp$$

$$s\ \ t - p\ \ = tp$$

$$s = \frac{tp}{t - p}$$

Igualando los valores de s, se obtiene:

$$\frac{qt}{t - q} = \frac{tp}{t - p}$$

$$qt\ \ t - p\ \ = tp\ \ t - q$$

$$t^2q - qtp = t^2p - pqt$$

$$t^2q = t^2p$$

$$q = p$$

Quedando así demostrado.

3.19 Problema 19[22]

En un campo circular de diámetro $2r = 100\,m$, se trazan 4 segmentos de longitud t, dividiendo al campo en cinco áreas iguales S. El cuadrado formado es de lado d. Hallar d y t utilizando $\pi = 3{,}16$.

3.19.1 Solución

Según los datos del problema, se tiene que:

$$2r = 100$$

$$r = 50$$

El área del campo circular será:

$$A = \pi r^2$$

$$A = \ 3{,}16 \quad 50 \ ^{2}$$

$$A = \ 3{,}16 \quad 2500$$

$$A = 7900$$

Dividiendo el área total entre 5, se tiene:

$$S = \frac{7900}{5}$$

$$S = 1580$$

Como el área del cuadrado es $S = 1580$, entonces:

[22] Este sangaku pertenece al santuario Katayamahiko

$$d = \sqrt{S}$$

$$d = \sqrt{1580}$$

$$d = 39{,}75$$

Por teorema de Pitágoras:

$$h^2 = r^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$h^2 = r^2 - \frac{d^2}{4}$$

$$h = \sqrt{r^2 - \frac{d^2}{4}}$$

Reemplazando el valor de r y d, se obtiene:

$$h^2 = \sqrt{(50)^2 - \frac{(39{,}75)^2}{4}}$$

$$h^2 = \sqrt{2500 - 395}$$

$$h^2 = \sqrt{2105}$$

$$h = 45{,}88$$

Por tanto:

$$t = \sqrt{r^2 - \frac{d^2}{4}} + \frac{d}{2}$$

$$t = 45{,}88 + 19{,}88$$

$$t = 65{,}75$$

3.20 Problema 20[23]

Dos circunferencias de radio r y dos circunferencias de radio t están inscritas en un cuadrado. El cuadrado está inscrito en un triángulo rectángulo, dos circunferencias de radios R y r respectivamente están inscritas en los triángulos rectángulos externos al cuadrado. Demostrar que $R = 2t$. (Ver Figura 19).

3.20.1 Protocolo de Construcción

a) Trazar un segmento AB, el punto medio C y las circunferencias cuyos diámetros sean AC y CB[24]. Sea D el punto medio de AC.

b) Trazar la perpendicular por B a AB.

c) Con centro en B y radio CB trazar la circunferencia que corta la recta del paso 2 en F y G.

d) Trazar un cuadrado $\blacksquare FGHI$ de tal manera que FG sea uno de sus lados y esté en el semiplano en el que se encuentran las circunferencias.

e) Hallar el punto medio de DH llamado J y trazar la circunferencia de centro J y radio DJ. Además de A, el otro punto de intersección con la circunferencia de centro D es K.

f) Trazar la perpendicular a AB por C y la recta DK. Estas se cortan en el punto L.

g) Con centro en L y radio KL trazar la circunferencia de radio t. Trazar su simétrico con respecto a AB.

h) Con la herramienta compás, teniendo en cuenta la distancia AD y el punto H como centro trazar la circunferencia. Los puntos M y N serán los cortes con HI y GH.

i) El punto O será la intersección de las perpendiculares a HI por N y GH por M. Con O como centro y radio OM, trazar la circunferencia.

---

[23] El sangaku de donde se tomó este problema fue colgado en 1847 en el templo Akahagi Kannon en la ciudad de Ichinoseki. Su tamaño es de $188cm$ por $61cm$. El problema en sí fue propuesto por Sato Naosue.

[24] Como en el *problema 19* pasos a y b

j) Trazar la tangente a la circunferencia con centro en O. Esta corta las rectas GH y GF en Q y P respectivamente.

k) Construir la circunferencia inscrita al triángulo $\blacktriangle PFI$.

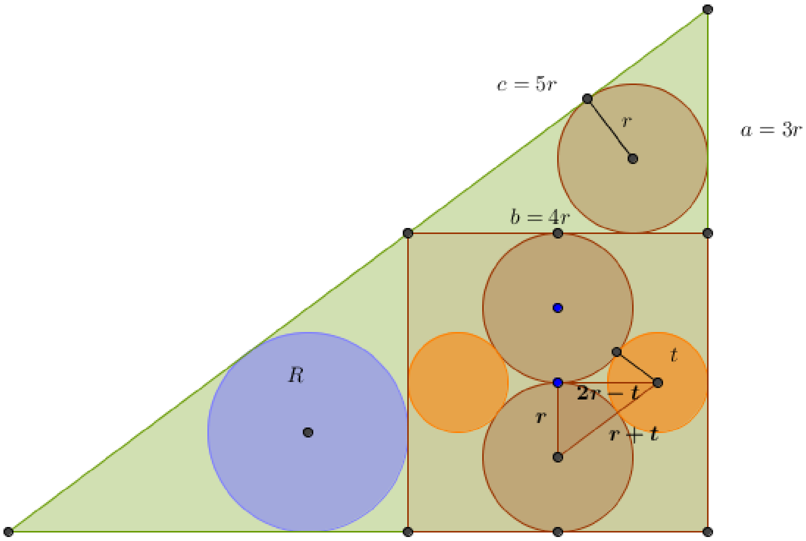


Figura 19.

3.20.2 Solución

Para el triángulo rectángulo que tiene inscrita a la circunferencia de radio r, se tiene:

$$S_1 = \frac{4r \cdot a}{2}$$

$$2S_1 = 4ar$$

Y

$$S_2 = \frac{r\ \ a + c + 4r}{2}$$

$$2S_2 = r\ \ a + c + 4r$$

Igualando estas áreas:

$$4ar = r \;\; a + c + 4r$$

$$\frac{4ar}{r} = a + c + 4r$$

$$4a = a + c + 4r$$

$$c = 4a - a - 4r$$

$$c = 3a - 4r$$

Por teorema de Pitágoras se tiene que:

$$r + t \;\; ^{2} = r^2 + \;\; 2r - t \;\; ^{2}$$

$$r^2 + 2rt + t^2 = r^2 + 4r^2 - 4rt + t^2$$

$$4r^2 - 4rt - 2rt = 0$$

$$4r^2 - 6rt = 0$$

$$r \;\; 4r - 6t \;\; = 0$$

Por tanto:

$$4r - 6t = 0$$

$$2r - 3t = 0$$

$$2r = 3t$$

$$r = \frac{3}{2}t$$

Por semejanza de triángulos

$$\frac{r}{3r} = \frac{R}{3R}$$

Por triada pitagórica 3,4,5

$$4r = 3R$$

$$\frac{4}{3}r = R$$

$$\frac{4}{3}\ \frac{3}{2}\ \ t = R$$

$$\frac{12}{6}t = R$$

$$2t = R$$

3.21 Problema 21

Un cuadrado de lado c está inscrito en un triángulo equilátero de lado k. Dos cuadrados de lado a y b se inscriben entre el triángulo equilátero y el cuadrado de lado c. Un triángulo equilátero de lado d, se inscribe en el cuadrado de lado c y en una circunferencia de radio r. Si $a = 7{,}8179$, hallar b, c, d, k, y r. (Ver Figura 20).

3.21.1 Protocolo de Construcción

a) Trazar un cuadrado con lado inicial UV será $\blacksquare UVWZ$.

b) Trazar la mediatriz de UV y la circunferencia de radio UV y centro W. Unos de los cortes entre estas dos será el punto A. (A no pertenece al cuadrado).

c) Con las intersecciones de las rectas AW, AZ, UV, construir un triángulo (Será el triángulo equilátero).

d) De forma análoga se construyen los triángulos circunscritos a los cuadrados cuyo lado coincide con los de los triángulos, definiendo los cuadrados de lado PQ (mediano) y GF (grande).

e) En el interior del cuadrado de lado GF inscribir una circunferencia, en ella un triángulo y en el triángulo otra circunferencia.

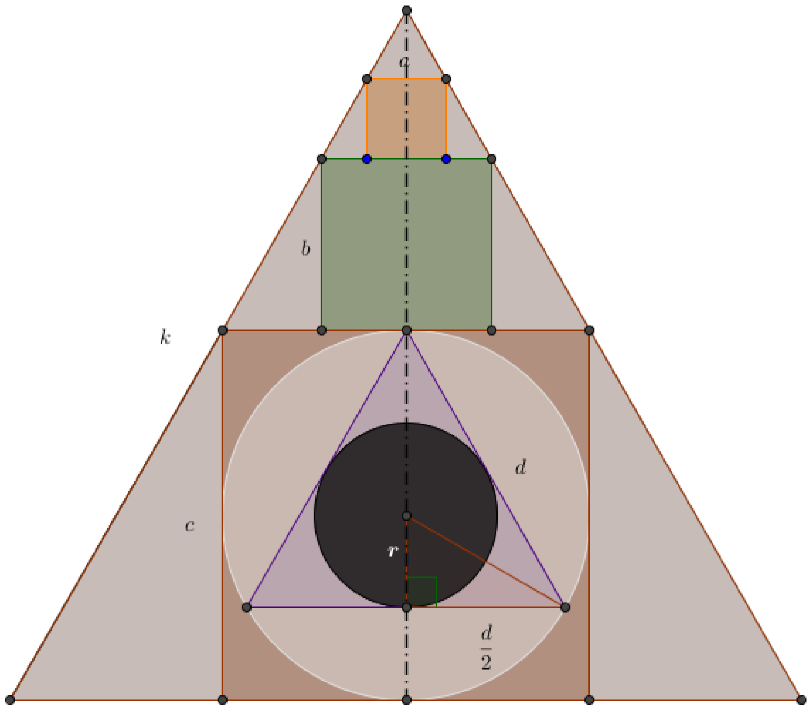


Figura 20.

3.21.2 Solución

Por teorema de Pitágoras:

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Entonces la altura del triángulo que tiene inscrito al cuadrado de lado a, será:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a + a = a\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)$$

Por teorema de Pitágoras:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)\right)^2 = b^2$$

$$\frac{b^2}{4} + \left(a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)\right)^2 = b^2$$

$$a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)^2 = b^2 - \frac{b^2}{4}$$

$$\frac{4a^2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)^2 = b^2$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right) = b$$

$$a\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+1\right) = b$$

Reemplazando, se tiene:

$$b = 16{,}84$$

Según los datos obtenidos se tiene que:

$$a + b = a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right) + a\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+1\right)$$

Por teorema de Pitágoras:

$$c^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \left(a\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right) + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}+1\right)\right)\right)^2$$

$$\frac{3c^2}{4} = a^2\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right) + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}+1\right)\right)^2$$

$$c^2 = \frac{4a^2}{3}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right) + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}+1\right)\right)^2$$

$$c = \frac{2a}{\sqrt{3}}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right) + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}+1\right)\right)$$

$$c = \frac{2a}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right) + \frac{2a}{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+1\right)$$

$$c = a + \frac{2a}{\sqrt{3}} + \left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

$$c = a + \frac{4a}{\sqrt{3}} + \frac{4}{3}a$$

$$c = a\left(1 + \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{4}{3}\right)$$

Reemplazando el valor de a, se tiene:

$$c = (7{,}8179)\left(1 + \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{4}{3}\right)$$

$$c = 36{,}2964$$

Despejando r de $\frac{c}{2} = 2r$, se tiene:

$$r = \frac{c}{4}$$

Reemplazando el valor de c en la anterior ecuación:

$$r = \frac{36{,}2964}{4}$$

$$r = 9{,}074$$

Por teorema de Pitágoras, se tiene:

$$d^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + (3r)^2$$

$$d^2 = \frac{d^2}{4} + 9r^2$$

$$\frac{3d^2}{4} = 9r^2$$

$$d^2 = 12r^2$$

$$d = 2\sqrt{3}r$$

Reemplazando el valor de r en la anterior ecuación, se tiene:

$$d = 31{,}43$$

Por teorema de Pitágoras:

$$k^2 = \left(\frac{k}{2}\right)^2 + (14{,}5884 + 16{,}84 + 36{,}2964)^2$$

$$k^2 = \left(\frac{k}{2}\right)^2 + (67{,}7248)^2$$

$$k^2 - \frac{k^2}{4} = (67{,}7248)^2$$

$$\frac{3}{4}k^2 = (67{,}7248)^2$$

$$k^2 = \frac{4}{3}(67{,}7248)^2$$

$$k = \frac{2}{\sqrt{3}}(67{,}7248)$$

$$k = 78{,}20$$

Obteniendo así todos los valores pedidos.

3.22 Problema 22

En una circunferencia de radio R*, se inscribe un rectángulo de ancho* $a + b$ *y de altura* t*. Un rombo inscrito en el rectángulo, cuya diagonal corta es* d*. El diámetro de cada una de las circunferencias inscritas en los triángulos rectángulos es* $2r = 30$ *y* $a = 45$*. Hallar* $b, d, 2R, 2\pi R, e$ *y* t*. (Ver Figura 21).*

3.22.1 Protocolo de Construcción

a) Construir con un rectángulo ■ $ABDC$ no cuadrado, de lado mayor AB y lado menor AC.

b) Trazar la diagonal BC con su respectiva mediatriz, cortando los lados del rectángulo AB y CD en G y F respectivamente.

c) Trazar el rombo $CFBG$. Se formaran los triángulos ▲ACG y ▲BDF.

d) Construir las circunferencias inscritas a los triángulos encontrados en el paso c.

e) Trazar los segmentos de lado e del *problema inicial* con ayuda de la recta perpendicular a AB.

f) Trazar la circunferencia con diámetro BC

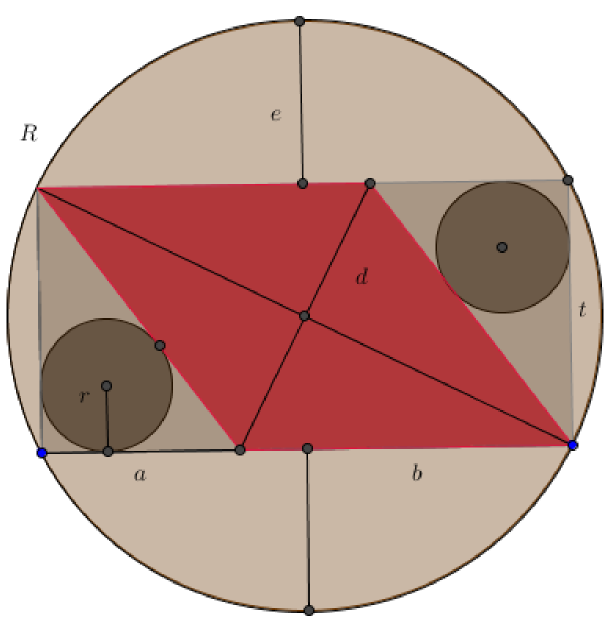


Figura 21.

3.22.2 Solución

Se tiene que:

$$2r = 30$$

$$r = 15$$

$$a = 45$$

$$b^2 = a^2 + t^2$$

$$b = \sqrt{a^2 + t^2}$$

$$b = (a - r) + (t - r) = a - r + t + r = a + t - 2r$$

Igualando los valores de b se tiene:

$$\sqrt{a^2 + t^2} = a + t - 2r$$

$$\left(\sqrt{a^2 + t^2}\right)^2 = (a + t - 2r)^2$$

$$a^2 + t^2 = a^2 + t^2 + 4r^2 + 2at - 4ar - 4tr$$

$$-4r^2 + 4ar = 2at - 4tr$$

$$-2r^2 + 2ar = at - 2tr$$

$$-2r^2 + 2ar = t(a - 2r)$$

$$t = \frac{2ar - 2r^2}{a - 2r} = \frac{2r(a - r)}{a - 2r}$$

Reemplazando el valor de r y de a se obtiene:

$$t = \frac{2(45)(15) - 2(15)^2}{45 - 2(15)}$$

$$t = 60$$

Reemplazando t y r en $b = a + t - 2r$, se tiene:

$$b = 45 + 60 - 2\ \ 15$$

$$b = 75$$

Se tiene que la diagonal es:

$$2R\ \ ^2 = t^2 + \ \ a + b\ \ ^2$$

$$4R^2 = t^2 + \ \ a + b\ \ ^2$$

$$R^2 = \frac{t^2 + \ \ a + b\ \ ^2}{4}$$

$$R = \frac{\overline{t^2 + \ \ a + b\ \ ^2}}{2}$$

Reemplazando los valores de t, a y b, se tiene:

$$R = \frac{\overline{\ 60\ \ ^2 + \ \ 45 + 75\ \ ^2}}{2}$$

$$R = \frac{\overline{3600 + 14400}}{2}$$

$$R = \frac{\overline{18000}}{2}$$

$$R = 67{,}082$$

Para hallar d, se tiene:

$$\frac{d}{2}\ \ ^2 + R^2 = b^2$$

$$\frac{d^2}{4} = b^2 - R^2$$

$$d^2 = 4\ \ b^2 - R^2$$

$$d = 2\ \ \sqrt{b^2 - R^2}$$

Reemplazando el valor de b y R se obtiene:

$$d = 2\ \ \sqrt{\ 75\ ^2 -\ \ 67{,}082\ ^2}$$

$$d = 2\ \ \sqrt{5625 - 4500}$$

$$d = 2\ \ 33{,}54$$

$$d = 67{,}082$$

También se tiene:

$$e = R - \frac{t}{2}$$

Reemplazando valores se tiene:

$$e = 67{,}082 - 30$$

$$e = 37{,}082$$

Y el último valor se obtiene:

$$2\pi R = 2\ \ 3{,}16\ \ \ 67{,}082$$

$$2\pi R = 423{,}95$$

3.23 Problema 23[25]

En una circunferencia de diámetro $AB = 2R$, *dos arcos de radio* R *con centros* A *y* B *respectivamente. Diez circunferencias inscritas, dos de diámetro* R, *cuatro de radio* t *y cuatro de radio* t'. *Demostrar* $t = t' = \frac{R}{6}$. *(Ver Figura 22).*

3.23.1 Protocolo de Construcción

a) Trazar una circunferencia de radio OB y centro O. Trazar el diámetro AB tal que $A - O - B$. $(OB = R)$

b) Trazar la perpendicular m por O a AB.

c) Trazar la circunferencia de diámetro OB y su simétrica con respecto a la recta m.

d) Construir $\frac{R}{6}$, y con ese radio y centro en O trazar la circunferencia correspondiente. El corte con OB será J.

e) Trazar la mediatriz de OB. Esta cortará la circunferencia de radio R en el punto N.

f) Con centro en N y radio OJ trazar la circunferencia encontrando el punto P que no está en el interior de la circunferencia de diámetro OB.

g) Trazar la circunferencia de centro P y radio PN, $PN = t$. Con ayuda de la herramienta simetría con respecto a las rectas m y AB se construyen las cuatro circunferencias de radio t.

h) Trazar la circunferencia de centro A y radio AP. Una de las intersecciones con la recta m es T.

i) Trazar la perpendicular a OB por J. La intersección de esta recta con la circunferencia trazada en el paso h es Q, que se encuentra en el mismo semiplano de T con respecto de AB.

j) Con centro en Q y radio QT ($QT = t'$) trazar la circunferencia correspondiente. Análogamente como en el paso g construir las circunferencias t'.

[25] Este ejemplo fue propuesto por una mujer, Okuda Tsume.

k) Construir el arco interno a la circunferencia del paso a que se encuentra en la circunferencia centrada en B y radio OB. Construir su simétrico con respecto a m.

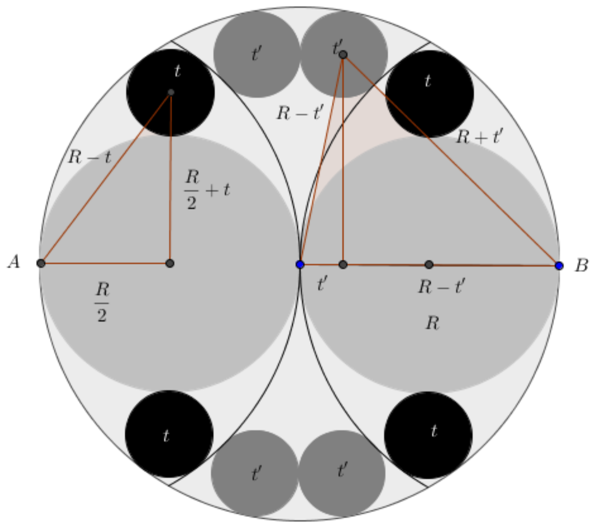


Figura 22.

3.23.2 Solución

Se tiene $r = \frac{R}{2}$

Y por teorema de Pitágoras:

$$\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{R}{2} + t\right)^2 = \left(R - t\right)^2$$

$$\frac{R^2}{4} + \frac{R^2}{4} + Rt + t^2 = R^2 - 2Rt + t^2$$

$$Rt + 2Rt = R^2 - \frac{R^2}{4} - \frac{R^2}{4}$$

$$3Rt = R^2 - \frac{2R^2}{4}$$

$$3Rt = \frac{2R^2}{4}$$

$$3Rt = \frac{R^2}{2}$$

$$t = \frac{R}{6}$$

Igualando la altura común de los triángulos:

$$R - t'\ ^2 - t'^2 = \ R + t'\ ^2 - \ R - t'\ ^2$$

$$R^2 - 2Rt' + t'^2 - t'^2 = R^2 + 2Rt' + t'^2 - \ R^2 - 2Rt' + t'$$

$$R^2 = 2Rt' + 2Rt' + 2Rt'$$

$$R^2 = 6Rt'$$

$$t' = \frac{R}{6}$$

Quedando demostrado que $t = t'$

3.24 Problema 24[26]

Dos cuadrados de lados b y d se tocan en un vértice. Dos vértices del cuadrado d y b respectivamente tocan a dos cuadrados de lados a y c. Encontrar d en términos de a, b y c. (Ver Figura 23).

3.24.1 Protocolo de Construcción

Construir un cuadrado de lado AB, será $\blacksquare ABCD$.

a) Ubicar un punto E en el semiplano opuesto al que se encuentra A con respecto de CD.

[26] Este problema fue originalmente propuesto por Takeda Sadatada. Se encontró colgado en una tablilla del santuario de Atago de Tokio en 1830.

b) Trazar un cuadrado $\blacksquare DEFG$ con el segmento DE en el semiplano opuesto al que se encuentra C con respecto de DE.

c) Trazar un cuadrado $\blacksquare ECHI$ con el segmento CE en el semiplano opuesto al que se encuentra D con respecto de CE.

d) Trazar un cuadrado $\blacksquare HBJK$ con el segmento HB en el semiplano opuesto al que se encuentra C con respecto de HB.

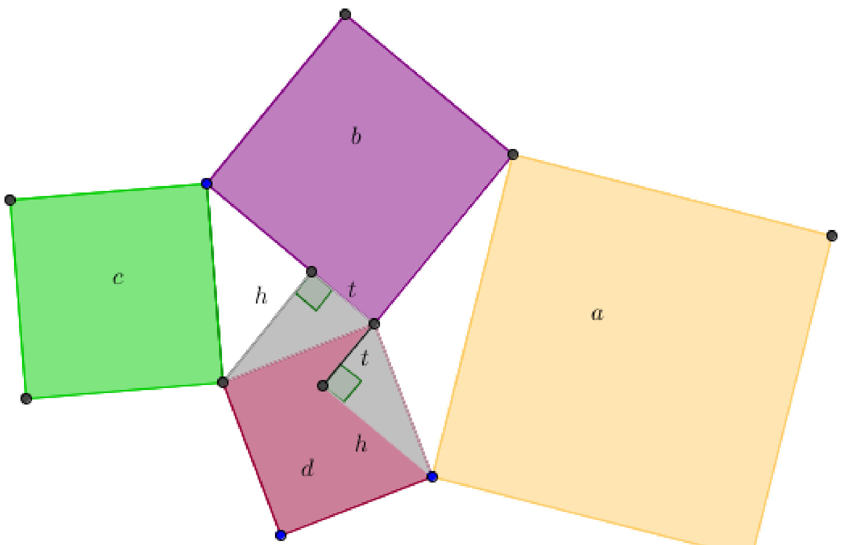


Figura 23.

Solución

Por el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = d^2 - t^2$$

$$h^2 = c^2 - \;\; b - t \;\; {}^2$$

$$h^2 = a^2 - \;\; b + t \;\; {}^2$$

Igualando la segunda y tercera ecuación se tiene:

$$c^2 - \quad b - t \ ^2 = a^2 - \quad b + t \ ^2$$

$$c^2 - \quad b^2 - 2bt + t^2 \quad = a^2 - \quad b^2 + 2bt + t^2$$

$$c^2 - b^2 + 2bt - t^2 = a^2 - b^2 - 2bt - t^2$$

$$2bt + 2bt = a^2 - c^2$$

$$4bt = a^2 - c^2$$

$$t = \frac{a^2 - c^2}{4b}$$

Igualando la primera tercera ecuación, se tiene:

$$d^2 - t^2 = a^2 - \quad b + t \ ^2$$

$$d^2 - t^2 = a^2 - \quad b^2 + 2bt + t^2$$

$$d^2 - t^2 = a^2 - b^2 - 2bt - t^2$$

$$d^2 = a^2 - b^2 - 2bt$$

Reemplazando el valor de t en la anterior ecuación:

$$d^2 = a^2 - b^2 - 2b \quad \frac{a^2 - c^2}{4b}$$

Resolviendo d, se obtiene:

$$d^2 = a^2 - b^2 - \quad \frac{a^2 - c^2}{2}$$

$$d^2 = a^2 - b^2 - \frac{a^2}{2} + \frac{c^2}{2}$$

$$d^2 = \frac{a^2}{2} - b^2 + \frac{c^2}{2}$$

$$d^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - b^2$$

$$d = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2} - b^2}$$

3.25 Problema 25[27]

El triángulo ABC está inscrito en una circunferencia de diámetro $2r$, CH es perpendicular a AB. Encontrar r en términos de BC, CA y CH. (Ver Figura 24).

3.25.1 Protocolo de Construcción

a) Trazar una circunferencia de centro O que pase por A.

b) Ubicar un punto B distinto de A en la circunferencia y trazar el segmento AB.

c) Ubicar un punto H en AB y la recta perpendicular al segmento por dicho punto. Uno de los cortes de la circunferencia con la perpendicular es C.

d) Trazar el triángulo ▲ABC.

[27] Ito Tsunehiro de la escuela Ito Así Taro, propuso este problema en 1849. Este Sangaku tiene dimensiones $245\ cm$ por $47\ cm$, fue colgado en Kumano santuario ciudad Senhoku.

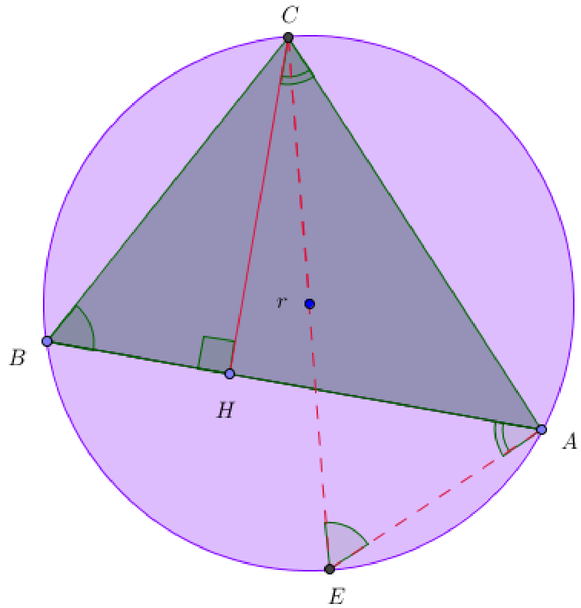


Figura 24.

3.25.2 Solución

El triángulo ACE es rectángulo debido a que CE pasa por el diámetro.

$$\measuredangle B = \measuredangle E$$

Por tanto

$$\Delta ACE \sim \Delta CHB$$

Entonces:

$$\frac{2r}{BC} = \frac{CA}{CH}$$

Despejando r se obiene:

$$2r = \frac{BC \cdot CA}{CH}$$

$$r = \frac{BC \cdot CA}{2CH}$$

3.26 Problema 26

Una circunferencia de radio r, se encuentra inscrita en dos triángulos equiláteros ACE y BDE, que a su vez se encuentran inscritos en un hexágono regular $ABCDEF$, junto con seis circunferencias de radio t. (Ver Figura 25).

3.26.1 Protocolo de Construcción

a) Trazar un hexágono regular $ABCDEG$ de lado AB.

b) Trazar los triángulos $\blacktriangle ACE$ y $\blacktriangle BDG$. También serán formados seis triángulos isósceles no equiláteros congruentes a $\blacktriangle ABC$.

c) Construir las circunferencias inscritas a los triángulos nombrados en el paso b.

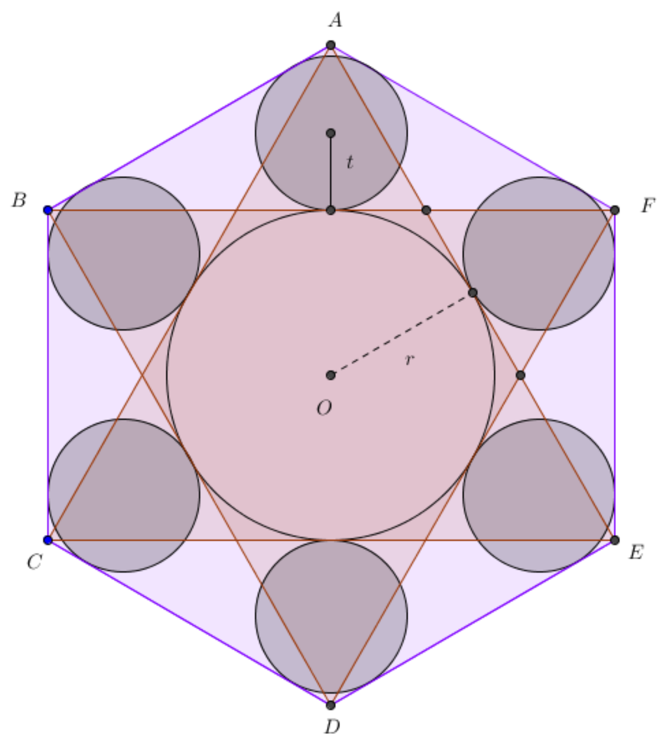


Figura 25.

3.26.2 Solución

Por el área del triángulo, se tiene que:

$$A_1 = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A_1 = \frac{2\sqrt{3}r \cdot r}{2}$$

$$A_1 = \sqrt{3}r^2$$

Y

$$A_2 = \frac{t \cdot p}{2}$$

Donde t es el radio de la circunferencia inscrita al triángulo y p es el semi-perímetro del triángulo.

$$A_2 = \frac{t\left(2r + 2r + 2\sqrt{3}r\right)}{2}$$

$$A_2 = \frac{t\left(4r + 2\sqrt{3}r\right)}{2}$$

$$A_2 = \frac{2rt\left(2r + \sqrt{3}\right)}{2}$$

$$A_2 = rt\left(2r + \sqrt{3}\right)$$

Igualando $A_1 = A_2$, se tiene:

$$\sqrt{3}r^2 = rt\left(2r + \sqrt{3}\right)$$

$$t = \frac{\sqrt{3}r^2}{r\left(2r + \sqrt{3}\right)}$$

$$t = \frac{\sqrt{3}r}{2r + \sqrt{3}}$$

Racionalizando:

$$t = \frac{\sqrt{3}r}{2r + \sqrt{3}} \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$$

$$t = \frac{\sqrt{3}r\left(2-\sqrt{3}\right)}{4-3}$$

$$t = r\left(2\sqrt{3}-3\right)$$

3.27 Problema 27[28]

Ocho circunferencias de radio t, cuyos centros son los vértices de un octágono regular. Una circunferencia de radio r, y una circunferencia de radio R. Encontrar R y r en términos de t. (Ver Figura 26).

3.27.1 Protocolo de Construcción

a) Trazar un octágono regular $ABCDEFGH$ de lado AB.

b) Tazar la diagonal AE y las mediatrices de AB y AH. La intersección de estas es O el centro del octágono.

c) Trazar la perpendicular a AE por A cortando las mediatrices en S e I. Formándose el triángulo $\blacktriangle OIS$.

d) Análogo al *problema 30* se encuentran ocho triángulos congruentes con $\blacktriangle OIS$, se procede de la misma manera a construir las circunferencias inscritas a los triángulos (estas serán las de radio t).

e) Con centro en O trazar la circunferencia que pasa por A. Con ayuda de OA y la primera circunferencia que se formó, trazar la circunferencia de centro O y radio r.

[28] Este problema fue descubierto por Yoji Hori, ubicado en el santuario Ubara de Toyama en 2005. Data de 1879 y mide $76cm$ por $26cm$.

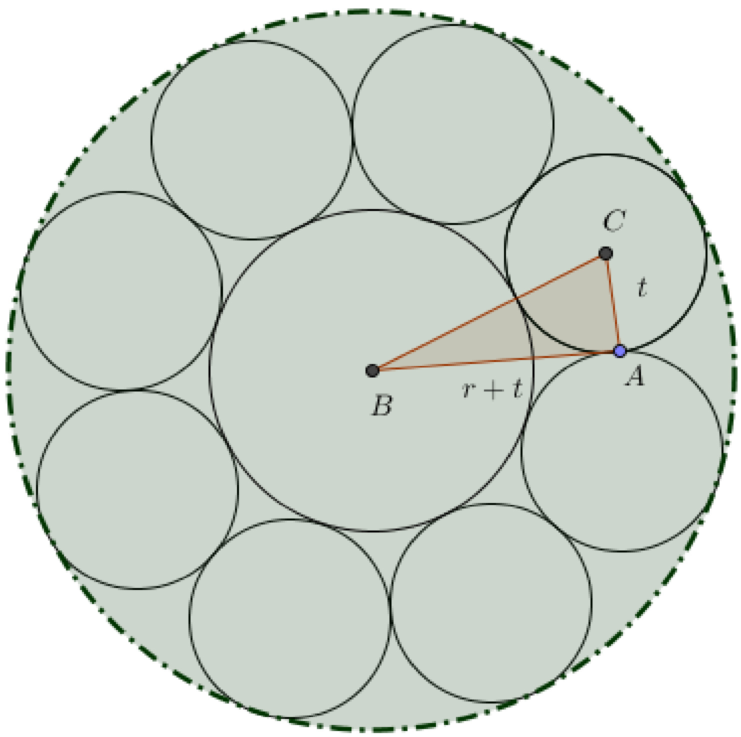


Figura 26..

3.27.2 Solución

Según el triángulo ABC, se tiene:

$$k = \sin\ \frac{180°}{8}\ = \frac{t}{R-t}$$

$$k = \sin\ \frac{45°}{2}\ = \frac{t}{r+t}$$

Ahora, según la identidad del ángulo medio:

$$\sin\ \frac{45°}{2}\ = \sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}}$$

$$\sin\ \frac{45°}{2}\ = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{45°}{2}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$$

$$\sin\left(\frac{45°}{2}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$k = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Despejando r de k

$$k = \sin\left(\frac{45°}{2}\right) = \frac{t}{r+t}$$

$$k = \frac{t}{r+t}$$

$$k(r+t) = t$$

$$kr + kt = t$$

$$kr = t - kt$$

$$r = \frac{t-kt}{k}$$

$$r = \frac{t}{k} - t$$

$$r = t\left(\frac{1}{k} - 1\right)$$

Ahora, despejando R de $k = \sin\left(\frac{180°}{8}\right) = \frac{t}{R-t}$

$$k = \frac{t}{R-t}$$

$$k(R-t) = t$$

$$kR - kt = t$$

$$kR = t + kt$$

$$R = \frac{t + kt}{k}$$

$$R = \frac{t}{k} + t$$

$$R = t \quad \frac{1}{k} + 1$$

Problema 28[29]

Una circunferencia de radio r, es tangente externamente a cinco circunferencias iguales de radio R. Encontrar r en términos de R. (Ver Figura 27).

3.28.1 Protocolo de Construcción

a) Construir un pentágono regular.

b) Trazar las mediatrices de dos lados adyacentes, la intersección de estas será el centro del pentágono.

c) Trazar las cinco circunferencias cuyo centro serán los vértices que pasen por los puntos medios de los lados del pentágono a los que pertenece.

d) Análogo al *problema 31* construir la circunferencia de radio r.

[29] La tableta que contiene este problema fue colgada en el santuario Kitano de la ciudad de Fujioka de Gumma en 1891 por la escuela Kishi Mitsutomo. Sus dimensiones son 121cm de ancho y 186cm de altura.

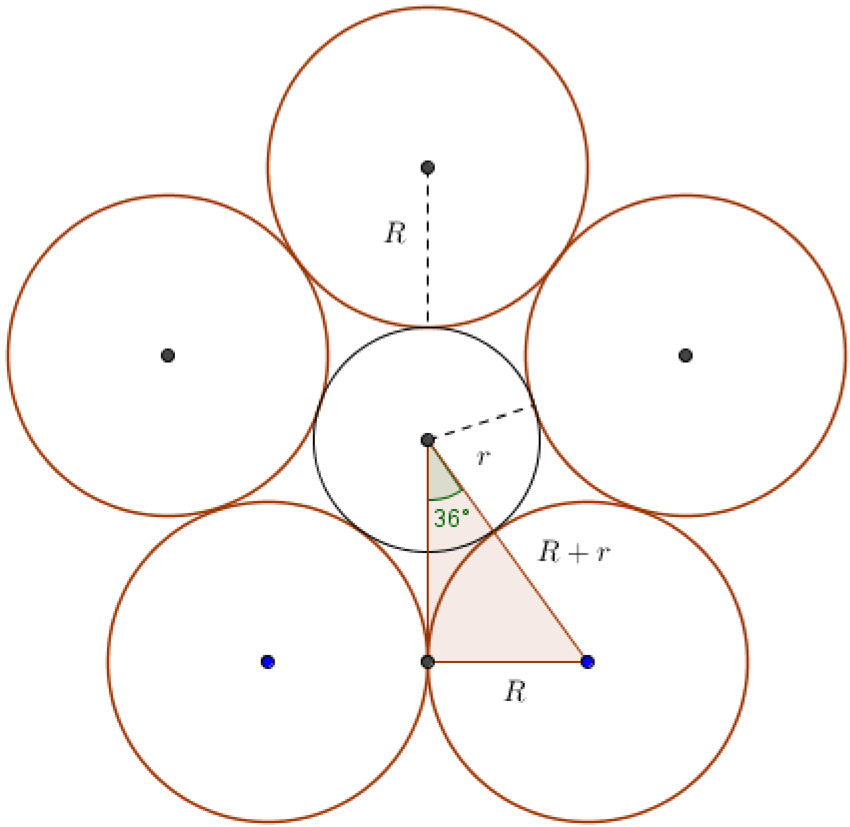


Figura 27.

3.28.2 Solución

Se tiene que

$$k = \sin\frac{72°}{2} = \sin 36° = \frac{R}{R + r}$$

Según la identidad del ángulo medio

$$\sin\frac{72°}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 72}{2}}$$

$$\sin\frac{72°}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{5} - 1}{4}}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{72°}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{8}}$$

$$\sin\left(\frac{72°}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{8}}$$

$$\sin\left(\frac{72°}{2}\right) = \sqrt{\frac{4-\left(\sqrt{5}-1\right)}{8}}$$

$$\sin\left(\frac{72°}{2}\right) = \frac{\sqrt{4-\sqrt{5}+1}}{\sqrt{8}} \cdot \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}}$$

$$\sin\left(\frac{72°}{2}\right) = \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{4-\sqrt{5}+1}}{8}$$

$$\sin\left(\frac{72°}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{4-\sqrt{5}+1}}{8}$$

$$\sin\left(\frac{72°}{2}\right) = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{4-\sqrt{5}+1}}{4}$$

$$k = \sin\left(\frac{72°}{2}\right) = \sin 36° = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$k = \frac{R}{R+r}$$

Despejando r:

$$k(R+r) = R$$

$$kR + kr = R$$

$$kr = R - kR$$

$$r = \frac{R}{k} - R$$

$$r = R\ \ \frac{1}{k} - 1$$

3.29 Problema 29

Una circunferencia inscribe a dos triángulos equiláteros, cada uno de lado $3a$. Seis circunferencias de radio r son tangentes internamente a la circunferencia mayor. Encontrar r en términos de a. (Ver Figura 28).

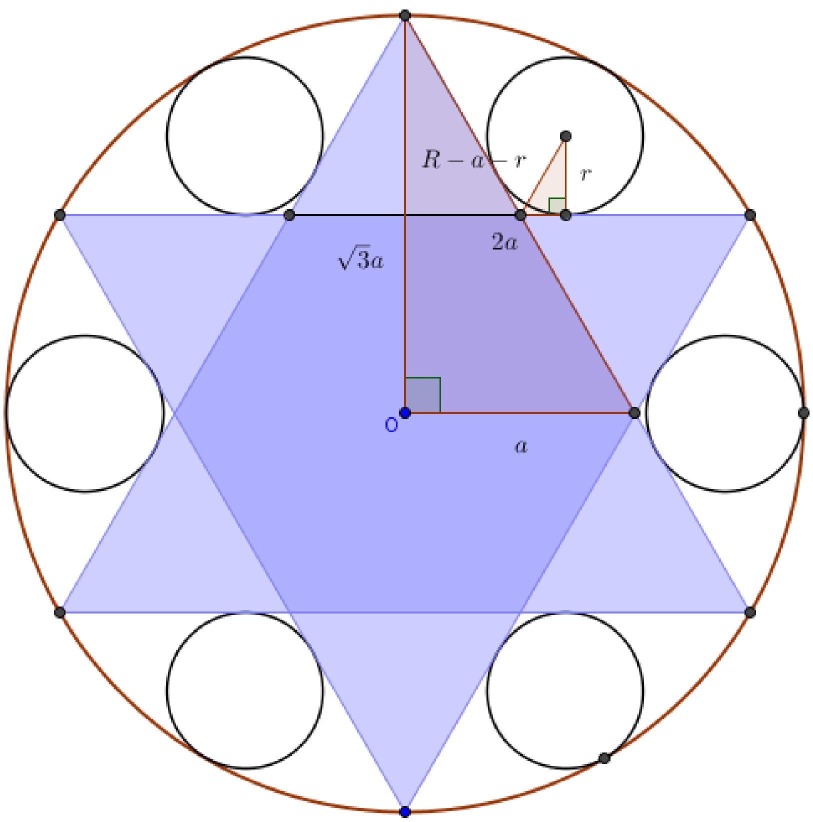


Figura 28.

3.29.1 Protocolo de Construcción

a) Trazar tres circunferencias de centro O y pase por B, centrada en B y pase por O y centrada en A y pase por O (A es la segunda intersección de OB con la circunferencia centrada en O).

b) De la intersección de las circunferencias centradas en A, B y la recta AB con la circunferencia centrada en O se encuentran los puntos A, D, G, B, F, E. Trazar los triángulos $\blacktriangle AFG$ y $\blacktriangle BDE$ (equiláteros).

c) Trace el rayo cuyo vértice es O y pasa por la intersección de AG y ED será H. I Será la intersección del rayo y la circunferencia centrada en O.

d) Trazar la perpendicular i a OI por I, prolongar AG y ED cortaran a i en Q y J respectivamente.

e) Construir la circunferencia inscrita al triángulo $\blacktriangle QHJ$. (Será de radio r). Utilizando simetría de esta circunferencia, se pueden construir las otras cinco, o repitiendo en proceso de los <u>pasos c y d</u>.

3.29.2 Solución

Por teorema de Pitágoras se tiene:

$$h^2 = (2a)^2 - a^2$$

$$h^2 = 4a^2 - a^2$$

$$h^2 = 3a^2$$

$$h = \sqrt{3}a$$

Por tanto $R = \sqrt{3}a$

Por semejanza de triángulos:

$$\frac{2a}{R - a - r} = \frac{\sqrt{3}a}{r}$$

Reemplazando el valor de R:

$$\frac{2a}{\sqrt{3}a - a - r} = \frac{\sqrt{3}a}{r}$$

Despejando r se tiene:

$$2ar = \sqrt{3}a\left(\sqrt{3}a - a - r\right)$$

$$2ar = 3a^2 - \sqrt{3}a^2 - \sqrt{3}ar$$

$$2ar + \sqrt{3}ar = 3a^2 - \sqrt{3}a^2$$

$$ar\left(2 + \sqrt{3}\right) = a^2\left(3 - \sqrt{3}\right)$$

$$r = \frac{a^2\left(3 - \sqrt{3}\right)}{a\left(2 + \sqrt{3}\right)}$$

$$r = \frac{a\left(3 - \sqrt{3}\right)}{2 + \sqrt{3}}$$

Racionalizando se tiene:

$$r = \frac{a\left(3 - \sqrt{3}\right)}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$$

$$r = \frac{a\left(3 - \sqrt{3}\right)\left(2 - \sqrt{3}\right)}{4 - 3}$$

$$r = \left(3a - \sqrt{3}a\right)\left(2 - \sqrt{3}\right)$$

$$r = 6a - 3\sqrt{3}a - 2\sqrt{3}a + 3a$$

$$r = 9a - 5\sqrt{3}a$$

$$r = a\left(9 - 5\sqrt{3}\right)$$

3.30 Problema 30

La figura está formada por un triángulo equilátero y tres cuadrados iguales. El lado del triángulo equilátero es a. Calcular el lado del cuadrado. (Ver Figura 29).

3.30.1 Solución

Sea el triángulo equilátero $\blacktriangle ABC$ de lado a.

Sea $l = DE = DB$ lado del cuadrado.

Por tanto

$$FD = 2l\cos 30$$

$$FD = 2l\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$FD = \sqrt{3}l$$

Entonces

$$a = l + l + \sqrt{3}l$$

$$a = 2l + \sqrt{3}l$$

$$a = l\left(2 + \sqrt{3}\right)$$

Despejando el lado del cuadrado l :

$$l = \frac{a}{2 + \sqrt{3}}$$

Racionalizando, se tiene que:

$$l = \frac{a}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$$

$$l = \frac{2a - \sqrt{3}a}{4 - 3}$$

$$l = \frac{a\left(2-\sqrt{3}\right)}{1}$$

Así, el lado del cuadrado en función del lado del triángulo será:

$$l = a\left(2-\sqrt{3}\right)$$

3.30.2 Protocolo de Construcción

a) Construir un triángulo de lado a equilátero $\blacktriangle ABC$.

b) Construir el segmento de medida $l = a(2-\sqrt{3})$.

c) Con centro en A y radio l trazar la circunferencia correspondiente. Los cortes de la circunferencia y el triángulo serán K y L.

d) Construir un cuadrado de lado KL de tal manera que el interior de este, esté en el interior del triángulo. Repetir este paso con cada uno de los vértices del triángulo.

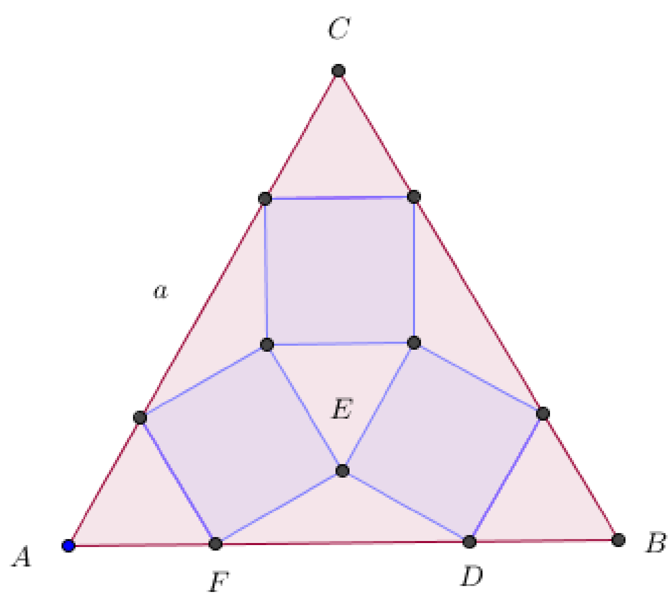


Figura 29.

3.31 Problema 31

Sea el triángulo isósceles $\Delta ABC, AB = AC$. Sea la circunferencia inscrita de centro O_1 y radio r_1. Sean D, E los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita y los lados AB, AC del triángulo. Sea la circunferencia inscrita al triángulo ΔADE de centro O_2 y radio r_2. Sea la circunferencia de centro O_3 y radio r_3. Determinar el valor de r_2 en términos de r_3. (Ver Figura 30).

3.31.1 Protocolo de Construcción

a) Construir un triángulo $\blacktriangle ABC$ isósceles con ayuda de la mediatriz b de CB.

b) Inscribir una circunferencia en $\blacktriangle ABC$. Los cortes con los lados congruentes serán D y E. Las intersecciones de la mediatriz de BC con la circunferencia serán O_2 y P, siendo P el punto medio de BC.

c) Construir la circunferencia inscrita al $\blacktriangle ADE$. Las intersecciones de la mediatriz b con la circunferencia de centro O_2 serán K y M.

d) Construir la circunferencia cuyo diámetro es KO_2.

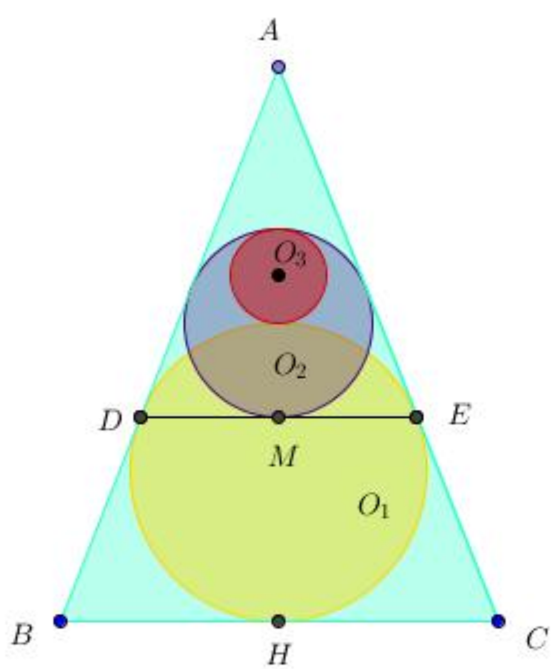


Figura 30.

3.31.2 Solución

Solución 1

De acuerdo a la construcción de la figura, se tiene que el radio de la circunferencia O_2 es dos veces el radio de la circunferencia O_3, es decir:

$$r_2 = 2r_3$$

Solución 2

Sea H el punto medio de BC

Sea M el punto medio de DE

Sea $\alpha = \angle DAM = \angle MDO_1$

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $\blacktriangle MDO_1$:

$$DM = r_1 \cos\alpha$$

Por tanto

$$DE = 2r_1 \cos\alpha$$

$$MO_1 = r_1 \sin\alpha$$

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $\blacktriangle ADO_1$:

$$AO_1 = \frac{r_1}{\sin\alpha}$$

$$AD = \frac{r_1}{\tan\alpha}$$

Entonces

$$AM = AO_1 - MO_1$$

$$AM = \frac{r_1}{\sin\alpha} - r_1 \sin\alpha$$

Calculando el área del triángulo $\blacktriangle ADE$

Área 1:

$$A_1 = \frac{DE \cdot AM}{2}$$

$$A_1 = \frac{2r_1 \cos\alpha \quad \frac{r_1}{\sin\alpha} - r_1 \sin\alpha}{2}$$

$$A_1 = r_1^2 \quad \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \sin\alpha \cos\alpha$$

Área 2:

$$A_2 = \frac{2AD + DE \;\; r_2}{2}$$

$$A_2 = \frac{\frac{2r_1}{\tan\alpha} + 2r_1 \cos\alpha \quad r_2}{2}$$

$$A_2 = r_1 r_2 \quad \frac{1}{\tan\alpha} + \cos\alpha$$

Haciendo $A_1 = A_2$, se tiene que:

$$r_1^2 \quad \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \sin\alpha \cos\alpha \quad = r_1 r_2 \quad \frac{1}{\tan\alpha} + \cos\alpha$$

Simplificando

$$r_1 \quad \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \sin\alpha \cos\alpha \quad = r_2 \quad \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \cos\alpha$$

Despejando r_2 se tiene que

$$r_2 = \frac{\cos\alpha - \sin^2\alpha \cos\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha \cos\alpha} r_1$$

$$r_2 = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 + \sin \alpha} r_1$$

$$r_2 = \quad 1 - \sin \alpha \;\; r_1$$

Entonces

$$r_2 = r_1 - MO_1$$

Por tanto el centro de la circunferencia inscrita al triángulo $\blacktriangle ADE$ pertenece a la circunferencia inscrita al triángulo $\blacktriangle ABC$.

Entonces

$$r_2 = 2r_3$$

3.32 Problema 32

En el triángulo rectángulo $\blacktriangle ABC, B = 90°$, *se han inscrito los cuadrados* P, Q, R, S, T. *Si los lados de los cuadrados* S, T, *son* a, b *respectivamente, calcular el lado del cuadrado* P. *(Ver Figura 31).*

3.32.1 Protocolo de Construcción

a) Construir un triángulo rectángulo $\blacktriangle ABC$.
b) Trazar la bisectriz del ángulo recto e que corta la hipotenusa en D.
c) Construir un cuadrado cuya diagonal sea BD.
d) Los otros cuatro cuadrados se construyen de manera análoga.

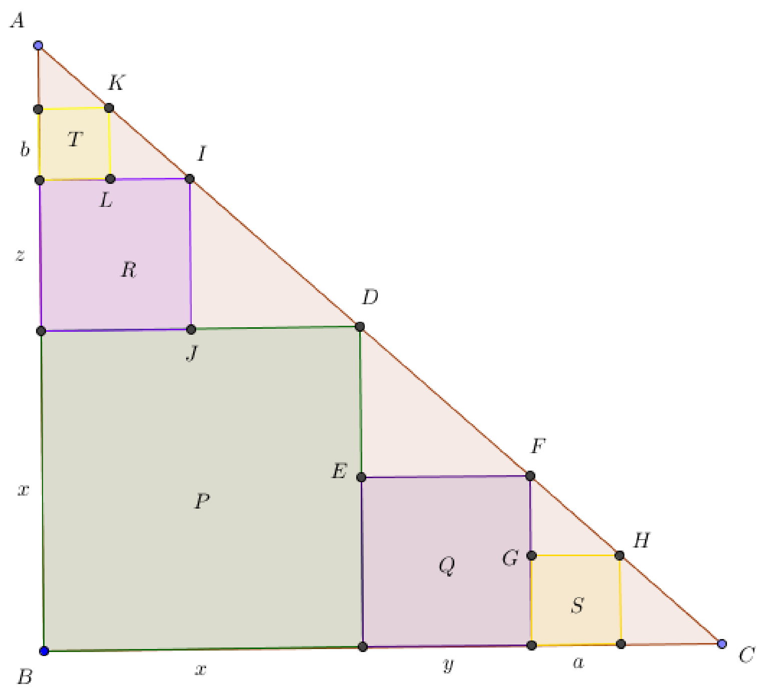


Figura 31.

3.32.2 Solución

Sea x el lado del cuadrado P

Sea y el lado del cuadrado Q

Sea z el lado del cuadrado R

Los triángulos rectángulos $\blacktriangle DEF$ y $\blacktriangle FGH$ son semejantes. Aplicando el Teorema de Tales:

$$\frac{a}{y-a} = \frac{y}{x-y}$$

$$y \;\; y-a \;\; = a \;\; x-y$$

$$y^2 - ay = ax - ay$$

Entonces

$$y^2 = ax$$

$$y = \quad \overline{ax}$$

Los triángulos rectángulos $\blacktriangle DEF$ y $\blacktriangle IJD$ son semejantes. Aplicando el Teorema de Tales:

$$\frac{y}{x-y} = \frac{x-z}{z}$$

$$yz = \quad x-y \quad x-z$$

$$yz = x^2 - xz - xy - yz$$

$$xz = x^2 - xy$$

$$xz = x \;\; x-y$$

$$z = \frac{x \;\; x-y}{x}$$

Entonces:

$$z = x - y$$

Los triángulos rectángulos ΔIJD y ΔKLI son semejantes. Aplicando el Teorema de Tales

$$\frac{x-z}{z} = \frac{z-b}{b}$$

Entonces

$$b \;\; x-z \quad = z \;\; z-b$$

Sustituyendo $z = x - y$ en $b \;\; x-z \quad = z \;\; z-b$, se tiene que:

$$b \;\; x-x-y \quad = \quad x-y \quad x-y-b$$

$$bx - bx - by = x^2 - xy - bx - xy + y^2 + by$$

$$x^2 - 2xy - bx + y^2 = 0$$

$$y^2 - 2xy + x^2 - bx = 0$$

Utilizando fórmula cuadrática:

$$\frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4\ \ x^2 - bx}}{2}$$

$$\frac{2x \pm \sqrt{4\ \ x^2 - x^2 + bx}}{2}$$

$$\frac{2x \pm \sqrt{4bx}}{2}$$

$$\frac{2x \pm \sqrt{4}\ \sqrt{bx}}{2}$$

$$\frac{2x \pm 2\ \sqrt{bx}}{2}$$

$$\frac{2\ \ x \pm \sqrt{bx}}{2}$$

Resolviendo la ecuación en la incógnita y:

$$y = x \pm \sqrt{bx}$$

Es decir:

$$y = x - \sqrt{bx}$$

Se tiene que $y = \sqrt{ax}$ y $y = x - \sqrt{bx}$, por tanto:

$$\sqrt{ax} = x - \sqrt{bx}$$

Elevando al cuadrado:

$$ax = \ x - \sqrt{bx}\ ^2$$

Resolviendo la ecuación en la incógnita x:

$$ax = x^2 - 2x\ \sqrt{bx} + bx$$

$$ax = x\left(x - 2\sqrt{bx} + b\right)$$

$$a = \frac{x\left(x - 2\sqrt{bx} + b\right)}{x}$$

$$a = x - 2\sqrt{bx} + b$$

$$a = x - 2\sqrt{b}\sqrt{x} + b$$

Igualando a cero, se tiene que:

$$0 = x - 2\sqrt{b}\sqrt{x} + b - a$$

Utilizando la fórmula cuadrática, se tiene que:

$$\sqrt{x} = \frac{2\sqrt{b} \pm \sqrt{4b - 4(b - a)}}{2}$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{b} \pm \sqrt{b - b + a}$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{b} \pm \sqrt{a}$$

Entonces:

$x_1 = a + b + 2\sqrt{ab}$ ó $x_2 = a + b - 2\sqrt{ab}$

Siendo $x_1 = a + b + 2\sqrt{ab}$ la respuesta.

3.33 Problema 33

El rombo $BDEF$ está inscrito en el triángulo $\blacktriangle ABC$. Sea r el radio de la circunferencia inscrita al triángulo $\blacktriangle AFE$ y s el radio de la circunferencia inscrita al triángulo $\blacktriangle DCE$. Determinar r en función de s y de los lados a y c. (Ver Figura 32).

3.33.1 Protocolo de Construcción

a) Trazar un triángulo $\blacktriangle ABC$.

b) Trazar la bisectriz de B, esta cortará a AC en E.

c) Trazar la paralela por E a AB cortando a BC en D. Y la paralela por E a BC cortando a AB en F.

d) Construir las circunferencias inscritas a los triángulos $\blacktriangle AFE$ y $\blacktriangle EDC$.

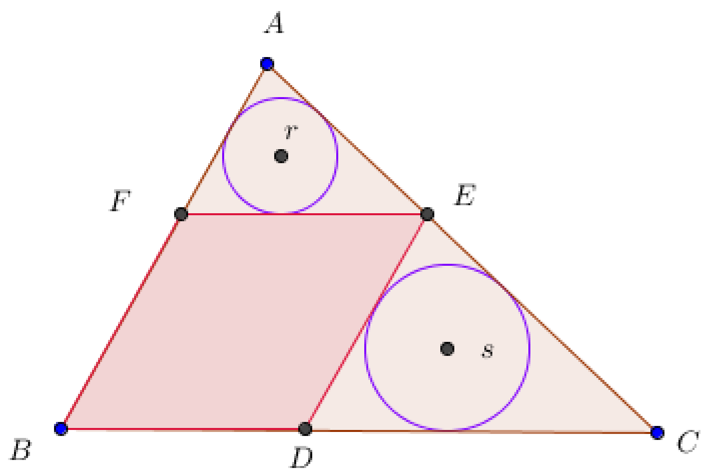


Figura 32.

3.33.2 Solución

Sea $x = BD = BF$ lado del rombo.

Los triángulos $\blacktriangle AFE$ y $\blacktriangle DCE$ son semejantes. Aplicando el Teorema de Tales:

$$\frac{r}{s} = \frac{x}{a-x}$$

Por tanto

$$r = \frac{x}{a-x} \cdot s$$

Los triángulos $\blacktriangle AFE$ y $\blacktriangle ABC$ son semejantes. Aplicando el Teorema de Tales:

$$\frac{x}{a} = \frac{c}{c-x}$$

Entonces:

$$x = \frac{ac}{a+c}$$

Sustituyendo esta expresión en:

$$r = \frac{x}{a-x} \cdot s$$

Y simplificando se obtiene:

$$r = \frac{x}{a-x} \cdot s$$

$$r = \frac{\frac{ac}{a+c}}{a - \frac{ac}{a+c}} \cdot s$$

$$r = \frac{\frac{ac}{a+c}}{\frac{a\ \ a+c\ \ -ac}{a+c}} \cdot s$$

$$r = \frac{\frac{ac}{a+c}}{\frac{a^2+ac-ac}{a+c}} \cdot s$$

$$r = \frac{\frac{ac}{a+c}}{\frac{a^2}{a+c}} \cdot s$$

$$r = \frac{ac\ \ a+c}{a^2\ \ a+c} \cdot s$$

$$r = \frac{c}{a} \cdot s$$

Por tanto r en función de s, a y c es:

$$r = \frac{cs}{a}$$

3.34 Problema 34

Sea el triángulo rectángulo $\blacktriangle ABC, C = 90°,$ *sea* CD *la altura sobre la hipotenusa. Determinar los radios de las circunferencias inscritas a los triángulos rectángulos* $\blacktriangle ADC$ *y* $\blacktriangle BCD$ *respectivamente. (Ver Figura 33).*

3.34.1 Protocolo de Construcción

a) Construir un triángulo rectángulo $\blacktriangle ABC$ con C recto.

b) Trazar la altura con respecto a la hipotenusa CD

c) Construir las circunferencias inscritas a los triángulos $\blacktriangle DBC$ y $\blacktriangle ADC$.

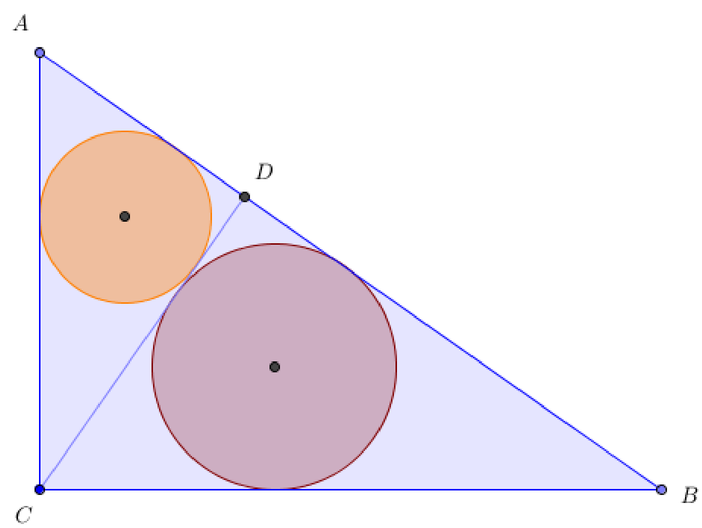


Figura 33.

3.34.2 Solución

Sean los catetos

$$a = BC$$

$$b = AC$$

Sean r y s los radios de las circunferencias inscritas a los triángulos rectángulos $\blacktriangle ADC$ y $\blacktriangle BCD$, respectivamente.

El radio de una circunferencia inscrita a un triángulo rectángulo es igual al semiperímetro del triángulo menos la hipotenusa, por tanto:

$$r = \frac{AC + AD + CD}{2} - AC$$

$$r = \frac{b + \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}}{2} - b$$

$$r = \frac{b + \frac{ab + b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}}{2} - b$$

$$r = \frac{\frac{b\sqrt{a^2 + b^2} + ab + b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}}{2}$$

$$r = \frac{ab + b^2 + b\sqrt{a^2 + b^2}}{2\sqrt{a^2 + b^2}} - b$$

$$r = \frac{ab + b^2 + b\sqrt{a^2 + b^2} - 2b\sqrt{a^2 + b^2}}{2\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$r = \frac{ab + b^2 - b\sqrt{a^2 + b^2}}{2\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Análogamente para s, se tiene que:

$$s = \frac{BC + DC + BD}{2} - BC$$

$$s = \frac{a + \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}}{2} - a$$

$$s = \frac{a + \frac{ab + a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}}{2} - a$$

$$s = \frac{\frac{a\sqrt{a^2+b^2}+ab+a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}}{2}$$

$$s = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}+ab+a^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$s = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}+ab+a^2-2a\sqrt{a^2+b^2}}{2\sqrt{a^2+b^2}}$$

Por tanto:

$$s = \frac{ab+a^2-a\sqrt{a^2+b^2}}{2\sqrt{a^2+b^2}}$$

3.35 Problema 35

Sea el triángulo rectángulo ΔABC, $B = 90°$. *Sea* D *un punto de la hipotenusa* AC. *Sea* r_1 *el radio de la circunferencia inscrita al triángulo* $\blacktriangle ABD$ *y* r_2 *el radio de la circunferencia inscrita al triángulo* $\blacktriangle BCD$. *Determinar el radio* r_1 *en función de* r_2 *y de los catetos* $a = BC$ *y* $c = AB$. *(Ver Figura 34).*

3.35.1 Protocolo de Construcción

a) Construir un triángulo rectángulo $\blacktriangle ABC$ con B recto.

b) Ubicar un punto en la hipotenusa CA

c) Construir las circunferencias inscritas a los triángulos $\blacktriangle DBC$ y $\blacktriangle ADB$.

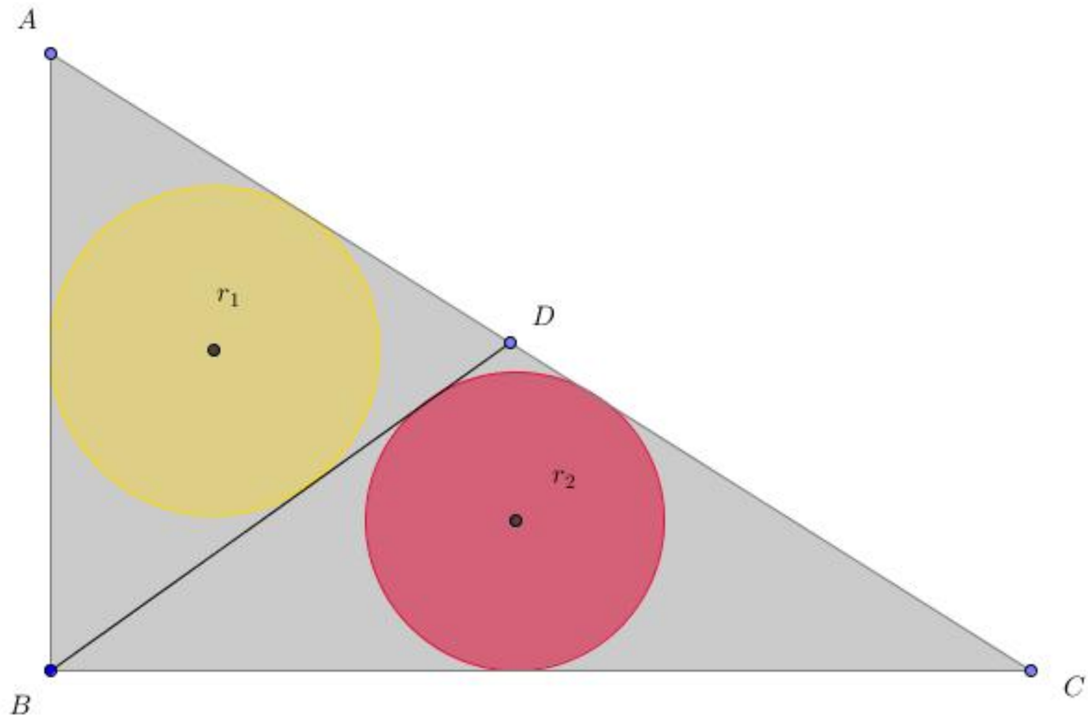


Figura 34.

3.35.2 Solución

Sea O_1 el centro de la circunferencia inscrita al triángulo $\blacktriangle ABD$ de radio r_1.

Sea O_2 el centro de la circunferencia inscrita al triángulo $\blacktriangle BCD$ de radio r_2.

Se considera la circunferencia inscrita al triángulo $\blacktriangle ABC$ de centro l y radio r.

Sea H y E los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita al triángulo $\blacktriangle ABC$ y los lados a y c respectivamente.

Sea M el punto de tangencia de la circunferencia inscrita al triángulo $\blacktriangle ABD$ y el lado c.

Sea N el punto de tangencia de la circunferencia inscrita al triángulo $\blacktriangle BCD$ y el lado a.

Los triángulos $\blacktriangle AMO_1$ y $\blacktriangle AEI$ son semejantes. Aplicando el Teorema de Tales, se tiene que:

$$\frac{AM}{AE} = \frac{MO_1}{EI}$$

Es decir:

$$\frac{AM}{c-r}=\frac{r_1}{r}$$

Entonces:

$$AM=\frac{r_1\ \ c-r}{r}$$

Como

$$AM=c-BM$$

$$BM=c-AM$$

Entonces:

$$BM=c-\frac{r_1\ \ c-r}{r}$$

Los triángulos $\blacktriangle CNO_2$ y $\blacktriangle CHI$ son semejantes. Aplicando el Teorema de Tales, se tiene que:

$$\frac{CN}{CH}=\frac{NO_2}{HI}$$

Es decir:

$$\frac{CN}{a-r}=\frac{r_2}{r}$$

Entonces

$$CN=\frac{r_2\ \ a-r}{r}$$

$$CN=a-BN$$

$$BN=a-CN$$

$$BN = a - \frac{r_2\ \ a - r}{r}$$

Se considera el triángulo rectángulo $\blacktriangle BKL$, $L = 90°$, tal que la circunferencia de centro O_2 y radio r_2 está inscrita al triángulo. Sea J el punto de tangencia del lado KL y la circunferencia.

$$BK = BN + KJ$$

Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\blacktriangle BLK$:

$$BN + KJ\ \ ^2 = \ \ BN + r_2\ \ ^2 + \ \ KJ + r_2\ \ ^2$$

$$BN^2 + 2BN \cdot KJ + KJ^2 = BN^2 + 2BN \cdot r_2 + r_2^2 + KJ^2 + 2KJ \cdot r_2 + r_2^2$$

$$BN^2 + 2BN \cdot KJ + KJ^2 = BN^2 + 2BN \cdot r_2 + KJ^2 + 2KJ \cdot r_2 + 2r_2^2$$

Igualando a cero, se tiene:

$$BN^2 + 2BN \cdot KJ + KJ^2 - BN^2 - 2BN \cdot r_2 - KJ^2 - 2KJ \cdot r_2 - 2r_2^2 = 0$$

$$2BN \cdot KJ - 2BN \cdot r_2 - 2KJ \cdot r_2 - 2r_2^2 = 0$$

$$2BN \cdot KJ - 2KJ \cdot r_2 = 2BN \cdot r_2 + 2r_2^2$$

$$2KJ\ \ BN - r_2\ \ = 2r_2^2\ \ BN + r_2$$

$$2KJ = \frac{2r_2\ \ BN + r_2}{BN - r_2}$$

$$KJ = \frac{2r_2\ \ BN + r_2}{2\ \ BN - r_2}$$

$$KJ = \frac{r_2\ \ BN + r_2}{BN - r_2}$$

Sustituyendo $BN = a - \frac{r_2\ \ a-r}{r}$ en $KJ = \frac{r_2\ \ BN+r_2}{BN-r_2}$, se tiene que:

$$BN = a - \frac{r_2\ \ a - r}{r}$$

$$BN = \frac{ar - r_2\ \ a - r}{r}$$

Y que

$$KJ = \frac{r_2\ \ BN + r_2}{BN - r_2}$$

Entonces:

$$KJ = \frac{r_2\ \ \frac{ar - r_2\ \ a - r}{r} + r_2}{\frac{ar - r_2\ \ a - r}{r} - r_2}$$

$$KJ = \frac{r_2\ \ \frac{ar - r_2\ \ a - r\ \ + rr_2}{r}}{\frac{ar - r_2\ \ a - r\ \ - rr_2}{r}}$$

$$KJ = \frac{\frac{arr_2 - r_2 r_2\ \ a - r\ \ + rr_2 r_2}{r}}{\frac{ar - r_2\ \ a - r\ \ - rr_2}{r}}$$

$$KJ = \frac{r_2\ \ ar - r_2\ \ a - r\ \ + rr_2}{ar - r_2\ \ a - r\ \ - rr_2}$$

$$KJ = \frac{r_2\ \ ar - ar_2 + 2rr_2}{ar - ar_2 + rr_2 - rr_2}$$

$$KJ = \frac{r_2\ \ ar - ar_2 + 2rr_2}{a\ \ r - r_2}$$

Los triángulos $\blacktriangle BMO_1$ y $\blacktriangle KJO_2$ son semejantes. Aplicando el Teorema de Tales, se tiene que:

$$\frac{BM}{r_1} = \frac{KJ}{r_2}$$

Sustituyendo $BM = c - \frac{r_1\ \ c-r}{r} = \frac{cr-r_1\ \ c-r}{r}$ y $KJ = \frac{r_2\ \ ar-ar_2+2rr_2}{a\ \ r-r_2}$ en $\frac{BM}{r_1} = \frac{KJ}{r_2}$, se tiene:

$$\frac{\frac{cr - r_1 (c - r)}{r}}{r_1} = \frac{\frac{r_2 (ar - ar_2 + 2rr_2)}{a (r - r_2)}}{r_2}$$

$$\frac{cr - r_1 (c - r)}{rr_1} = \frac{r_2 (ar - ar_2 + 2rr_2)}{ar_2 (r - r_2)}$$

$$\frac{cr - cr_1 - rr_1}{rr_1} = \frac{ar - ar_2 + 2rr_2}{ar - ar_2}$$

$$(ar - ar_2)(cr - cr_1 - rr_1) = rr_1 (ar - ar_2 + 2rr_2)$$

$$acr^2 - acrr_1 - acr^2r_1 - acrr_2 + acr_1r_2 + arr_1r_2 = ar^2r_1 - arr_1r_2 + 2r^2r_1r_2$$

$$acr^2 - acrr_1 - acrr_2 + acr_1r_2 = 2r^2r_1r_2$$

Despejando r_1 se tiene que:

$$acr^2 - acrr_2 = 2r^2r_1r_2 + acrr_1 - acr_1r_2$$

$$acr^2 - acrr_2 = r_1 (2r^2r_2 + acr - acr_2)$$

$$r_1 = \frac{acr^2 - acrr_2}{2r^2r_2 + acr - acr_2}$$

$$r_1 = \frac{ac (r^2 - rr_2)}{2r^2r_2 + ac (r - r_2)}$$

El radio de la circunferencia inscrita al triángulo rectángulo es igual al semiperímetro del triángulo menos la hipotenusa, por tanto:

$$r = \frac{a + c + \sqrt{a^2 + c^2}}{2} - \sqrt{a^2 + c^2}$$

$$r = \frac{a + c + \sqrt{a^2 + c^2} - 2\sqrt{a^2 + c^2}}{2}$$

$$r = \frac{a + c - \sqrt{a^2 + c^2}}{2}$$

Sustituyendo $r = \frac{a+c-\sqrt{a^2+c^2}}{2}$ en $r_1 = \frac{ac\ \ r^2-rr_2}{2r^2r_2+ac\ \ r-r_2}$, se tiene que:

$$r_1 = \frac{ac\ \ a+c-2r_2-\sqrt{a^2+c^2}}{2\ \ ac-2r_2\sqrt{a^2+c^2}}$$

4 CLASIFICACIÓN

De acuerdo al método de solución varios problemas se pueden clasificar en más de una categoría.

4.1 ARITMÉTICOS

Aquellos en los que su solución es un número específico o incógnita.

Problemas 1, 2, 3, 5, 6, 11, 19, 21 y 22.

4.2 ALGEBRAICOS

Aquellos problemas cuya solución consiste en despejar una variable en términos de otra.

Por lo tanto los problemas son: el Problema 1 ya que el proceso que se utiliza para su solución es algebraico, también los problemas 4, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34 y 35.

4.3 GEOMÉTRICOS

Se evidencia que la gran mayoría de los problemas Sangaku son de tipo geométrico (los trabajados en esta monografía).

Teniendo en cuenta que la gran mayoría son geométricos se puede hacer la siguiente clasificación.

De acuerdo a su construcción: (Esta clasificación solo tendrá en cuenta los problemas de tipo geométrico)

Algunas construcciones fueron necesarias para la resolución de los ejercicios, como las siguientes:

Construcción de problemas 4, 5, 6, 7, 8, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33 y 34. Estas son modificables.

Y otras se necesitan primero saber la solución del problema para tener los elementos suficientes para la construcción. Como las siguientes: 9, 10, 12, 23 y 30.

Además estas últimas construcciones son rígidas (no modificables), la razón es porque es necesario construir un número específico para lograr construirlas.

5 CONCLUSIONES

Al finalizar este trabajo nos permitimos expresar las siguientes conclusiones:

- Escudriñar la Historia de las Matemáticas en otras civilizaciones, nos permiten apreciar cómo aprovechaban al máximo conceptos básicos de la Geometría, la Aritmética o el Álgebra elemental.
- Intentar resolver problemas Sangaku nos obliga a revisar propiedades de figuras planas sencillas y complejas que por lo general no se alcanzan a desarrollar y explotar en un curso de Geometría de la Universidad.
- La revisión y solución de estos problemas nos motiva a utilizarlos con mayor frecuencia en el desarrollo de nuestras clases como docentes en ejercicio y en formación, teniendo en cuenta que los retos de lógica y pensamiento parecen ser ya no tan prioritarios como antes, mostrando aquí varios problemas y/o ejercicios complejos para nuestros estudiantes por la riqueza de procedimientos que contienen.

- Durante el desarrollo del trabajo nos surgieron preguntas como el por qué en un curso de geometría analítica, espacial o historia no acercan a los estudiantes a este tipo de problemas, los cuales consideramos deben hacer parte de la cultura general de un docente de matemáticas.
- Consideramos que proponer este tipo de problemas en un curso de álgebra o geometría analítica, no sólo permite conocer problemas históricos y aplicar los conceptos del álgebra, sino que además nos obliga a involucrar el uso de la tecnología en la clase, ya que en muchos problemas se hace necesario realizar la construcción geométrica.
- El uso del software GeoGebra nos permite manipular y modificar las figuras, permitiéndonos ver ciertas características del objeto construido, que a la vez nos evita sacar conclusiones erróneas.
- La noción de problema o ejercicio
- Por último, la realización de este nos dejó la inquietud de seguir indagando por problemas antiguos propuestos y desarrollados en otras culturas, que por lo general no son abordados en los libros de texto para cursos de matemáticas.

BIBLIOGRAFÍA

Fukagawa, H. Rothman, T. (2008). *Sacred Mathematics. Japanese Temple Geometry. Princeton University Press.*

Smith, E. Mikami, Y. (2007). *A History of Japanese Mathematics.*

Vincent, J. Vincent, C. (2004). *Japanese Temple Geometry*. Australian Senior Mathematics Journal.

Fouz, F. (2003). *Sangaku: Geometría en los Templos Japoneses*.