

ALGEBRA DE LAS DIMENSIONES FRACTALES

KAREN CASTELBLANCO

Código: 2007240016

C.C 53117277

Modalidad de trabajo

Interés del estudiante

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ

2015

ALGEBRA DE LAS DIMENSIONES FRACTALES

KAREN LILIANA CASTELBLANCO PEÑA

Código 2007240016

Trabajo de grado para optar el título de licenciado en matemáticas

Asesor

JORGE EDGAR PÁEZ ORTEGÓN

Msc. Matemáticas

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ

2015

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN – RAE

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Algebra de las dimensiones fractales
Autor(es)	CASTELBLANCO PEÑA, Karen Liliana
Director	PAEZ ORTEGÓN, Jorge Edgar
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2015, 93 páginas.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional.
Palabras Claves	fractal, dimensión, unión, producto, intersección, proyección,

2. Descripción
<p>Inicialmente, se describen diferentes dimensiones y se dan algunos ejemplos con los elementos básicos para lograr una mejor aproximación al concepto de dimensión fractal.</p> <p>También se relata el proceso para concebir el álgebra de las dimensiones a través de la unión, intersección, producto y proyección, tomando como base el documento http://classes.yale.edu/fractals/ sobre Dimensiones Algebraicas. A su vez, se describen conceptos matemáticos involucrados en las demostraciones.</p> <p>Se encuentra también dentro del trabajo, ejemplos detallados paso a paso en su construcción con Geogebra.</p>

3. Fuentes
<p>Dentro de la bibliografía consultada se encuentran en su mayoría libros y tesis, siendo de especial aporte el vínculo http://classes.yale.edu/fractals/, entre otros; sin embargo, se consultaron los libros de Falconer (2002), Barnsley (2012) que contribuyeron y enriquecieron este trabajo.</p>

- BARNESLEY. (2012). *FRACTALS EVERYWHERE*. San Diego: Academic Press.
- FALCONER. (1990). *FRACTAL GEOMETRY MATHEMATICAL FOUNDATIONS AND APPLICATIONS*. England: Typeset by thompson.
- FALCONER. (2002). *THE GEOMETRY OF FRACTAL SETS*. Cambridge: Universidad Cambridge.
- <http://classes.yale.edu/fractals/>. (s.f.). Recuperado el 22 de 06 de 2014
- <http://formasfractales.galeon.com/Autosi.htm>. (s.f.). Recuperado el 30 de 10 de 2014
- HUREWICZ. W, W. H. (1948). *DIMENSION THEORY*. London: Princeton University.
- ISRAEL, M. A. (2010). *TOPOLOGIA FRACTAL DE PAPEL ARRUGADO MANUALMENTE*. MEXICO D.F.
- L. PIETRONERO, E. T. (1986). *FRACTAL IN PHYSICS*. HOLANDA: ELEVIER SCIENCE PUBLISHERS.
- NAVARRO.J, G. G. (2003). *MATEMATICAS (VOLUMEN III)*. ESPAÑA: EDITORIAL MAD.
- ORJUELA, C. (2006). *DIMENSION: MAS QUE UNA IDEA INTUITIVA*. Bogota: Universidad Pedagogica Nacional.

4. Contenidos

El documento está organizado en 3 capítulos. En el primero lo constituye el marco teórico en relación al concepto de dimensión en los fractales, donde se describen diferentes dimensiones como la dimensión de Hausdorff, dimensión topológica, dimensión de autosimilaridad, dimensión por conteo de cajas, las generalidades de la mismas y culminando con la profundización del concepto de dimensión y sus características.

En el segundo capítulo se muestran las dimensiones de la unión, intersección, producto y proyección, donde se presentan de forma algebraica formas construidas a partir de otras formas donde por lo general las dimensiones de las piezas están relacionadas con las dimensiones del conjunto y se realizan ejemplos de estas mismas.

Por último, en el tercer capítulo se encuentra la construcción con Geogebra de diferentes fractales, se muestra el desarrollo paso a paso de la construcción y deja bases para el lector de la construcción de más formas.

5. Metodología

El primer paso, en la construcción de este documento, fue la realización de una pormenorizada consulta bibliográfica alrededor del concepto de dimensión (que también fue necesaria durante todo el proceso de elaboración). Como segunda tarea, se organizó la información recolectada; de esta manera, se descartó aquella que no contribuía en gran medida a lo que se pretendía o era ampliada en otros documentos.

El siguiente paso consistió en encontrar un software de fácil acceso para describir algunos ejemplos de dimensiones. Por último se organizó la estructura del documento.

6. Conclusiones

La elaboración de este trabajo tuvo como objetivo estudiar el álgebra de las dimensiones fractales como la unión, intersección, producto y proyección de objetos fractales.

Se mostró el trabajo con geogebra en la construcción de fractales, la unión, intersección, producto y proyección dejando como herramienta didáctica para trabajar fractales y la cual permite conocer una manera distinta del trabajo con geogebra.

Se encontró de manera analítica la dimensión fractal de la unión, la intersección y el producto de algunos fractales clásicos, como la proyección de unos sobre otros.

Las conclusiones que se derivan del trabajo de investigación que se presenta, me permite estudiar conceptos que no se abarcan durante el proceso de formación y a su vez llenar vacíos mediante la aclaración de estos conceptos y definiciones.

Este trabajo aporta a la formación mediante el estudio de nuevos conceptos y nuevas herramientas para desempeñar una mejor labor docente debido a que brinda una nueva mirada para trabajar con los estudiantes e incluirla en el proceso de aprendizaje en el aula.

Se deja el trabajo como aporte a la comunidad donde se muestra el estudio del algebra de las dimensiones fractales.

Elaborado por:	Karen Liliana Castelblanco Peña
Revisado por:	Jorge Edgar Páez Ortégón

Fecha de elaboración del Resumen:	16	02	2015
--	----	----	------

Tabla de Contenido

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN – RAE	3
INTRODUCCIÓN	12
JUSTIFICACIÓN	13
OBJETIVOS	14
1. CAPÍTULO 1.....	15
DIMENSIONES.....	15
1.1 DIMENSIÓN TOPOLÓGICA	17
1.2 DIMENSIÓN DE AUTOSIMILARIDAD.....	20
1.2.1 DEFINICIÓN DIMENSIÓN SIMILITUD	21
1.2.2 LA ECUACIÓN DE MORAN.....	22
1.2.3.1 CUANDO LA FORMULA DE DIMENSIÓN DE AUTOSIMILITUD FALLA	22
1.2.3.2 DERIVACIÓN DE LA ECUACIÓN MORAN	23
1.2.3.3 SOLUCIÓN ÚNICA DE MORAN	24
1.2.3.4 SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE MORAN.....	25
1.2.4 EJEMPLOS	26
1.3 DIMENSIÓN DE HAUSDORFF.....	27
1.3.1 MEDIDA DE HAUSDORFF.....	27
1.3.2 PROPIEDAD DE ESCALA FUNDAMENTAL PARA LA TEORÍA DE FRACTALES.....	28
1.3.2.1 PROPOSICIÓN DE LAS PROPIEDADES DE ESCALA.....	28
1.3.3 DIMENSIÓN HAUSDORFF.....	29
1.4 DIMENSIÓN POR CONTEO DE CAJAS	33
2. CAPÍTULO 2	42
ALGEBRA DE LAS DIMENSIONES	42

2.1 DIMENSION DE LA UNIÓN	42
2.2 DIMENSIÓN DE LA INTERSECCIÓN	48
2.2.1 CODIMENSIÓN	49
2.2.2 EJERCICIOS DE INTERSECCIÓN	51
2.3 DIMENSIÓN DEL PRODUCTO	58
2.3.1 EJERCICIOS DE PRODUCTO	60
2.4 DIMENSIÓN DE PROYECCIONES	64
2.4.1 PROYECCIÓN DE OBJETOS EUCLIDIANOS	64
2.4.2 PROYECCIONES DE GRÁFICOS FRACTALES	65
2.4.3 PROYECCIONES DE LOS FRACTALES	66
3. CAPÍTULO 3	68
SOFTWARE	68
3.1 GEOGEBRA	68
3.2 CONSTRUCCIÓN DE FRACTALES	69
3.3 EJEMPLOS DE DIMENSIONES FRACTALES CON GEOGEBRA	78
3.3.1 UNIÓN DE FRACTALES	78
3.2.2 INTERSECCIÓN DE FRACTALES	82
3.2.3 PRODUCTO DE FRACTALES	86
3.2.4. PROYECCIÓN DE FRACTALES	88
CONCLUSIONES	92
BIBLIOGRAFÍA	93

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Dimensión de un punto.....	18
<i>Figura 2.</i> Dimensión de un Segmento.	18
<i>Figura 3.</i> Dimensión conjunto de Cantor.....	20
Figura 5. Dimensión de similitud falla. Tomado de http://classes.yale.edu/fractals/	23
Figura 6. Ejemplo solución única de moran. . Tomado de http://classes.yale.edu/fractals/	24
Figura 7. Triángulo de Sierpinsky por ecuación de Moran. Tomado de http://classes.yale.edu/fractals/	26
Figura 8. Dimensión Similitud Alfombra Sierpinsky. Tomado de http://classes.yale.edu/fractals/	27
<i>Figura 9.</i> Grafica de $\mathcal{H}^s(F)$ contra s para un conjunto F . La dimensión de Hausdorff en el valor de s en el que el "salto" ocurre desde ∞ a 0. (Falconer, 1990)	30
<i>Figura 10.</i> Tabla de Registro del Conteo (Rojas, Orjuela,2006)	34
Figura 11. Conteo de cajas – Segmento de línea. Tomado de http://classes.yale.edu/fractals/	35
Figura 12. Conteo de cajas- Relleno de un cuadrado. Tomado de http://classes.yale.edu/fractals/	36
Figura 13. Curva de koch por conteo de cajas. Tomado de http://classes.yale.edu/fractals	37
Figura 14. Segmento de línea por conteo de cajas. Tomado de http://classes.yale.edu/fractals	39
Figura 15. Triángulo de Sierpinsky por conteo de cajas . Tomado de http://classes.yale.edu/fractals	40
Figura 16. Unión Triangulo de Sierpinsky y segmento de línea. Tomado de http://classes.yale.edu/fractals/	42
Figura 17. Dimensión por cajas Triangulo de Sierpinsky y segmento de línea. Tomado de http://classes.yale.edu/fractals/	43
Figura 18. Unión conjunto de Cantor y segmento de línea. . Tomado de http://classes.yale.edu/fractals/	45
Ilustración 19. Unión Conjunto de cantor y segmento de línea vertical. . Tomado de http://classes.yale.edu/fractals/	46

Figura 20. Unión contando cuadros de 2 triángulos de Sierpinsky. . Tomado de http://classes.yale.edu/fractals/	47
Figura 21. Ejemplo de codimensión punto-línea en el plano. Tomado de http://classes.yale.edu/fractals/	49
Figura 22. Ejemplo codimensión punto, línea, plano en el espacio. Tomado de http://classes.yale.edu/fractals/	49
Figura 23. Dimensión de intersección Triangulo de Sierpinsky y Cantor. Tomado de http://classes.yale.edu/fractals/	51
Figura 24. Intersección triángulo de sierpinsky y un segmento de línea. . Tomado de http://classes.yale.edu/fractals/	51
Figura 25. Intersección triángulo de Sierpinsky y conjunto de Cantor. . Tomado de http://classes.yale.edu/fractals/	52
Figura 26. Intersección de 2 conjuntos de Cantor. . Tomado de http://classes.yale.edu/fractals/ .	53
Figura 27. Interseccion triangulo de Sierpinsky y producto de conjunto de Cantor. Tomado de http://classes.yale.edu/fractals/	54
Figura 28. Intersección producto de cantor y un conjunto de Cantor. Tomado de http://classes.yale.edu/fractals/	55
Figura 29. Intersección triángulo de Sierpinsky y tetraedro de Sierpinsky. . Tomado de http://classes.yale.edu/fractals/	56
Figura 30. Intersección tetraedro de Sierpinsky y conjunto de Cantor. . Tomado de http://classes.yale.edu/fractals/	57
Figura 31. .Dimensión del conjunto de Cantor y Segmento de Línea. Tomado de http://classes.yale.edu/fractals/	58
Figura 32. Ejemplo Dimensión por cajas Cantor-Segmento de Línea. Tomado de http://classes.yale.edu/fractals/	59
Figura 33. Dimensión del producto de conjuntos de Cantor Regulares. Tomado de http://classes.yale.edu/fractals/	60
Figura 34. Producto de dos conjuntos de Cantor. . Tomado de http://classes.yale.edu/fractals/ .	61
Figura 35. Producto triángulo de Sierpinsky y segmento de línea. Tomado de http://classes.yale.edu/fractals/	62

Figura 36. Producto triángulo de Sierpinky y un conjunto de Cantor. Tomado de http://classes.yale.edu/fractals/	63
Figura 37. Proyecciones de Objetos Euclidianos. Tomado de http://classes.yale.edu/fractals	64
Figura 38. Conservación de la dimensión. Tomado de http://classes.yale.edu/fractals	65
Figura 39. Movimiento Browniano unidimensional. Tomado de http://classes.yale.edu/fractals	65
Figura 40. Proyección de un gráfico a un segmento de línea en el eje y. Tomado de http://classes.yale.edu/fractals	66
Figura 41. Proyecciones Conjunto de Cantor. Tomado de http://classes.yale.edu/fractals	67
Figura 42. Construcción Triangulo de Sierpinsky.	70
Figura 43. Vista pantalla de herramienta construida Cantor.	72
Figura 44 Construcción conjunto de cantor en geogebra.	72
Figura 45. Construcción Curva de Koch.....	75
Figura 46. Construcción copo de nieve Koch.....	77
Figura 47. Construcción Triangulo de Sierpinsky.	80
Figura 48. Vista de la Unión Triangulo de Sierpinsky segmento de línea.	81
Figura 49 Unión entre triángulo de Sierpinsky y segmento de línea.	81
Figura 50. Vista pantalla de herramienta construida cantor.	83
Figura 51 Construcción conjunto de Cantor en geogebra.	84
Figura 52. Vista Geogebra Intersección Conjunto de Cantor y Triangulo de Sierpinsky.....	85
Figura 53. Intersección Conjunto de Cantor y triángulo de Sierpinsky.	85
Figura 54. Vista geogebra producto conjunto de Cantor y Segmento vertical.	88
Figura 55. Producto conjunto de Cantor y segmento vertical.	88
Figura 56. Vista geogebra proyección del producto del Conjunto de Cantor sobre el eje X.	90
Figura 57. Proyección del producto del Conjunto de Cantor al eje X.	91

INTRODUCCIÓN

El presente documento, asociado al interés del estudiante es el resultado de una investigación donde se trabajó con el concepto de dimensión fractal. Describe en su primera parte diferentes clases de dimensiones involucrando la definición de fractal apoyado de ejemplos de cada dimensión. En segundo lugar, se presentan las formas construidas a partir de otras formas que por lo general las dimensiones de las piezas están relacionadas con las dimensiones del conjunto, en el que se consideran la unión, intersección, producto y proyección, donde se presentan de forma algebraica y se realizan ejemplos de estas mismas. Por último, en el tercer capítulo se encuentra la construcción con Geogebra de diferentes fractales, se muestra el desarrollo paso a paso de la construcción y deja bases para el lector de la construcción de más formas.

Uno de los motivos por el cual se eligió esta investigación fue porque se permite mostrar el manejo de Geogebra en la construcción de fractales, lo que ocasiona una mejor visión de lo desarrollado en el segundo capítulo.

JUSTIFICACIÓN

El proyecto “Algebra de las Dimensiones Fractales” pretende aportar un documento que muestre las relaciones existentes entre las operaciones conjuntistas de objetos fractales y las respectivas dimensiones. Con el fin que los estudiantes conozcan otra mirada sobre el trabajo que se pueda realizar sobre el álgebra de las dimensiones y los profesores puedan hacerlo parte de los contenidos a desarrollar dentro del currículo de la Licenciatura de Matemáticas.

OBJETIVOS

Objetivo General

Encontrar la Dimensión Fractal de objetos construidos a partir de otros.

Objetivos Específicos

- Mostrar mediante el software de Geogebra cómo se representan uniones, intersecciones, productos de algunos fractales clásicos y cómo es la representación de una proyección de un fractal sobre otro.
- Encontrar de manera analítica la dimensión de fractal de la Unión, la Intersección y el producto de algunos fractales clásicos, de igual manera la proyección de unos sobre otros.

1. CAPÍTULO 1

DIMENSIONES

Para comenzar debemos definir que es fractal, la definición que se tomó fue la siguiente.

FRACTAL:

En el libro de Benoît B. Mandelbrot titulado “The Fractal Geometry of Nature” (1983), Mandelbrot propone la siguiente definición: “Un fractal es, por definición, un conjunto cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica.”

Dimensión fractal: Un conjunto S es auto-similar si puede ser dividido en subconjuntos N congruentes, cuando cada uno se aumenta por un factor constante M produce todo el conjunto S. La dimensión fractal de un conjunto S es:

$$D = \frac{\text{Log}(N)}{\text{Log}(M)}$$

Según la definición anterior los siguientes son fractales

- Cantor

Dado que el conjunto de Cantor es totalmente desconectado, tiene dimensión topológica 0. El conjunto de Cantor es auto-similar, si tenemos $N = 2$ subconjuntos congruentes, cada uno cuando se aumenta por un factor de $M = 3$ produce el conjunto original. Por lo tanto la dimensión fractal de Cantor es

$$D = \frac{\text{Log}(2)}{\text{Log}(3)} \approx 0,631$$

- Curva de Koch

La curva de Koch se construye con una unidad de intervalo. En la primera etapa se debe dividir el intervalo en 3 partes iguales y se suprime la parte del centro, quedando 2 segmentos de longitud $1/3$. En la segunda etapa cada uno de estos segmentos se divide en tres partes iguales y

se suprime la parte del centro de cada uno de los segmentos, el conjunto resultante consta de 4 segmentos de línea de longitud $1/3$. En la etapa siguiente, repetir este procedimiento en todos los segmentos de línea existentes, dando como resultado un conjunto que contiene 16 segmentos de línea de longitud de $1/9$. En cada etapa hay 4^n líneas segmentos de longitud $1/3^n$. Cuando $n \rightarrow \infty$, el conjunto resultante se llama la curva de Koch y su dimensión topológica es 1. El conjunto es auto-similar, con 4^n subconjuntos con factor de ampliación 3, por lo que la dimensión fractal es

$$D = \frac{\text{Log}(4^n)}{\text{Log}(3^n)} = \frac{n\text{Log}(4)}{n\text{Log}(3)} \approx 1,2619$$

- Triángulo de Sierpinsky

El Triángulo de Sierpinski se construye con un triángulo equilátero de unidad, en la primera etapa se retira 1 triángulo abierto formado por los puntos medios del triángulo unidad de tamaño $1/2$. En la segunda etapa, eliminar 3 triángulos abiertos de tamaño $1/4$. En la etapa de orden n , retire 3^{n-1} triángulos blancos de tamaño $1/2^n$. Cuando $n \rightarrow \infty$, nos quedamos con un conjunto auto-similar que tiene dimensión topológica 1. El Triángulo de Sierpinski consiste en 3 subconjuntos congruentes con un factor de ampliación 2. Así que la dimensión fractal es

$$D = \frac{\text{Log}(3)}{\text{Log}(2)} \approx 1,585$$

- Copo de Nieve

El copo de nieve es una variación de la curva de Koch. Se parte de un triángulo equilátero, el cual se divide en 3 partes congruentes de longitud $1/3$ cada lado. Se sustituye el segmento central por dos segmentos de tamaño idéntico. La iteración indefinida nos proporciona el Copo de Nieve. Este fractal ocupa una región limitada del espacio, un área finita y su perímetro es infinito. Con relación a la semejanza, se observa que la representación gráfica de un paso finito del copo de nieve no es estrictamente autosemejante a la figura total, pues si se observa una parte del copo no tenemos el copo completo. Por lo tanto podemos encontrar la dimensión fractal de su perímetro en el cual utilizamos como generador el copo de nieve cuando $n \rightarrow \infty$, el perímetro de la curva es

infinito; como un lado de copo de nieve está constituido por cuatro trozos y cada uno de ellos tiene la tercera parte de la longitud total, su dimensión fractal es:

$$\frac{\text{Log}(4)}{\text{Log}(3)} \approx 1,2619$$

Una dimensión fractal D , es un número real que generaliza el concepto de dimensión ordinaria para objetos geométricos que no admiten espacio tangente¹. No existe una única dimensión fractal sino una serie de dimensiones que frecuentemente resultan equivalentes pero no siempre. Las cuales estudiaremos a continuación.

1.1 DIMENSIÓN TOPOLÓGICA

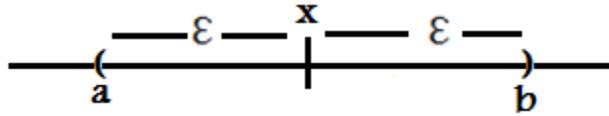
Dimensión Topológica:

Según Gustavo Rubiano en su libro *Fractales para Profanos* define inductivamente el concepto de dimensión topológica de la siguiente manera:

- La dimensión del conjunto vacío es -1.
- Un espacio topológico es 0 dimensional si y solo si, dado cualquier $x \in V$ con V abierto en x , existe un conjunto abierto U con frontera vacía, de tal manera que $x \in U \subset V$.
- Un espacio A tiene dimensión $\leq n$ si y solo si, para cada punto x en A , y cada conjunto abierto V que contiene a x , existe un conjunto abierto U tal que $x \in U \subset V$ y dimensión de frontera $U \leq n-1$; A tiene dimensión n si y solo si dimensión $A \leq n$, pero es falso que dimensión $A \leq n-1$.

EJEMPLOS

¹ Es el conjunto asociado a cada punto de una variedad diferenciable formado por todos los vectores tangentes a dicho punto.



$$a = x - \varepsilon, b = x + \varepsilon$$

Figura 1. Dimensión de un punto.

PUNTO: Teniendo $A = \{x\}$ donde $A \in \mathbb{R}$, existe una vecindad $V = U$ abierto que contiene a x , de tal manera que, $V = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, cuando $\varepsilon > 0$ entonces $\partial(V) = \{x - \varepsilon, x + \varepsilon\}$, se tiene que $x - \varepsilon < x < x + \varepsilon$; al interceptar $\partial(V) \cap A = \{x - \varepsilon, x + \varepsilon\} \cap \{x\} = \emptyset$, por lo tanto $\partial(V) \cap A = \emptyset$ se puede afirmar que la dimensión es 0 por la definición de dimensión topológica.

DOS PUNTOS: Teniendo $A = \{x, y\}$ donde $A \in \mathbb{R}$ y $x < y$, existe una vecindad $V = U$ abierto que contiene a $\{x, y\}$, de tal manera que $V = (x - \varepsilon, y + \varepsilon)$ cuando $\varepsilon > 0$ entonces $\partial(V) = \{x - \varepsilon, y + \varepsilon\}$, se tiene que $x - \varepsilon < x < y < y + \varepsilon$; al interceptar $\partial(V) \cap A = \{x - \varepsilon, y + \varepsilon\} \cap \{x, y\} = \emptyset$, por lo tanto $\partial(V) \cap A = \emptyset$ podemos afirmar que la dimensión es 0.

CONJUNTO DE NUMEROS NO VACIO, FINITOS O ENUMERABLES: Teniendo $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ donde $A \in \mathbb{R}$ y $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, se tiene un punto $x_i \in A$; existe una vecindad $V = U$ abierto que contiene a $\{x_i\}$, de tal manera que $\varepsilon = \frac{1}{2} \min\{x_i - (x_i - 1), (x_i + 1) - x_i\}$ por lo tanto $V = (x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$ entonces $\partial(V) = \{x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon\}$, se tiene que $x_i - \varepsilon < x_i < x_i + \varepsilon$; al interceptar $\partial(V) \cap A = \{x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon\} \cap \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \emptyset$, por lo tanto $\partial(V) \cap A = \emptyset$ podemos afirmar que la dimensión es 0.

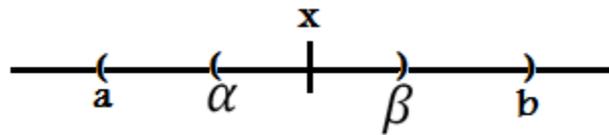


Figura 2. Dimensión de un Segmento.

SEGMENTO:

CASO I: Sea $A = (a, b)$ un segmento donde $x \in (a, b) / a < x < b$, existe una vecindad $V = U$ abierto que contiene a x en donde $V = (\alpha, \beta)$ de tal manera $a < \alpha < x < \beta < b$ entonces $\partial(V) = \{\alpha, \beta\}$; al interceptar $\partial(V) \cap A = \{\alpha, \beta\} \cap (a, b) = \{\alpha, \beta\}$ por el ejemplo anterior se tiene que la intercepción es de dimensión 0; al cumplirse esto se tiene que la dimensión del segmento es 1.

CASO II: Sea $A = (a, b]$ y $x \in A$. Si $x \in (a, b]$ siguiendo los mismos pasos del caso 1 la dimensión de ese segmento es 1; y si $x = b$ se considera la vecindad $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ entonces $\partial(V) = \{b - \varepsilon, b + \varepsilon\}$ al interceptar $\partial(V) \cap A = \emptyset$ por lo tanto la dimensión de $A = 0 \leq 1$. Por lo tanto por la definición la dimensión es igual 1.

CONJUNTO DE LOS NUMEROS REALES: Sea $A = \mathbb{R}$ números reales donde $x \in \mathbb{R}$ existe una vecindad $V = U$ abierto que contiene a x en donde $V = (\alpha, \beta)$ de tal manera $\alpha < x < \beta$ entonces $\partial(V) = \{\alpha, \beta\}$; al interceptar $\partial(V) \cap A = \{\alpha, \beta\} \cap \mathbb{R} = \{\alpha, \beta\}$ por el ejemplo anterior se tiene que la intercepción es de dimensión 0; al cumplirse esto se tiene que la dimensión del conjunto de los números reales es 1.

CIRCUNFERENCIA: Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x^2 + y^2 = r^2\}$. Si $(x, y) \in A$ existe una vecindad $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } (\alpha - x^2) + (\beta - y^2) = r^2\} = U$ abierto que contiene a (x, y) en donde al interceptar $\partial(V) \cap A = \text{un conjunto que tiene dos puntos}$ y por lo tanto la intersección es de dimensión 0; al cumplirse esto se tiene que la dimensión del conjunto de la circunferencia es 1

CONJUNTO DE LOS NUMEROS RACIONALES: Sea $A = \mathbb{Q}$ números racionales y $x \in \mathbb{Q}$. Existe una vecindad $V = U$ abierto que contiene a x en donde $V = (\alpha, \beta)$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{I}$ de tal manera $\alpha < x < \beta$ entonces $\partial(V) = \{\alpha, \beta\}$; al interceptar $\partial(V) \cap A = \{\alpha, \beta\} \cap \mathbb{Q} = \emptyset$ podemos afirmar que su dimensión es 0.

CONJUNTO DE LOS NUMEROS IRRACIONALES: Sea $A = \mathbb{I}$ números irracionales donde $x \in \mathbb{I}$ existe una vecindad $V = U$ abierto que contiene a x en donde $V = (\alpha, \beta)$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$

de tal manera $\alpha < x < \beta$ entonces $\partial(V) = \{\alpha, \beta\}$; al interceptar $\partial(V) \cap A = \{\alpha, \beta\} \cap (\mathbb{I}) = \emptyset$ podemos afirmar que su dimensión es 0.

CONJUNTO DE CANTOR: El conjunto C está definido por la intersección de todos los subconjuntos cerrados de $[0, 1]$. Donde $C_k = \bigcup_{j=0}^{2^k-1} \left[\frac{a_j}{3^k}, \frac{a_{j+1}}{3^k} \right]$

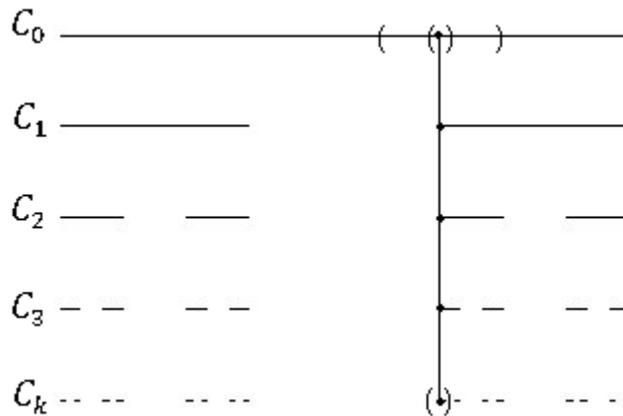


Figura 3. Dimensión conjunto de Cantor.

Sea $x \in C$ y $U = (a, b)$ tal que $x \in U$. Sea k suficientemente grande de tal manera que el intervalo cerrado I en C_k que contiene a x sea tal que $I \subset U$. Ahora se construye V de forma que $I \subset V \subset U$, con la condición de que V no intercepte a ningún otro intervalo cerrado de los que conforman C_k , entonces $\partial(V) \cap C_k = \emptyset$. Por otra parte, teniendo en cuenta la construcción de C , se ve que $\partial(V) \cap C = \partial(V) \cap C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_k \dots$ por tanto $\partial(V) \cap C = \emptyset$ y la dimensión del conjunto de Cantor es 0.

1.2 DIMENSIÓN DE AUTOSIMILARIDAD

Según Benoit Mandelbrot, un objeto es auto similar o auto semejante si sus partes tienen la misma forma o estructura que el todo, aunque pueden presentarse a diferente escala y hasta estar ligeramente deformada. (Israel, 2010)

Los fractales pueden presentar tres tipos de Auto similitud que pueden ser:

Auto similitud exacta: este es el tipo más restrictivo de Auto similitud: exige que el fractal parezca idéntico a diferentes escalas. A menudo la encontramos en fractales definidos por sistemas de funciones iteradas (IFS).

Cuasiautosimilitud: exige que el fractal parezca aproximadamente idéntico a diferentes escalas. Los fractales de este tipo contienen copias menores y distorsionadas de sí mismos.

Sullivan definió el concepto de conjunto cuasiauto-similar a partir del concepto de cuasi-isometría². Los fractales definidos por relaciones de recurrencia son normalmente de este tipo.

Auto similitud estadística: Es el tipo más débil de auto similitud: se exige que el fractal tenga medidas numéricas o estadísticas³ que se preserven con el cambio de escala. Los fractales aleatorios⁴ son ejemplos de fractales de este tipo

1.2.1 Definición Dimensión Similitud

Para enfatizar este patrón común⁵, y para dar un atajo para calcular la dimensión de una forma auto-similar, definimos la dimensión similitud.

² Las funciones $f: M1/ M2$ es un cuasi-isometría si existen constantes $A = 1$ y $B = 0$ tal que y una constante $C = 0$ de manera que cada punto en $M2$ tiene una distancia a lo sumo C desde un cierto punto en la imagen de f . Se debe tener en cuenta que un cuasi-isometría no está obligado a ser continua. Cuasi isometrías comparan la "estructura a gran escala" de los espacios métricos (SALAZAR.O, 2011).

³ Las medidas estadísticas pretenden "resumir" la información de la "muestra" para poder tener así un mejor conocimiento de la población y se pueden clasificar en: centralización, dispersión, localización, simetría.

⁴Reciben este nombre los fractales que en su generación actúa el azar, como por ejemplo la técnica ideada por Michael Barnsley denominada "El Juego del Caos"

⁵ Para fractales auto-similares, como la curva de Koch y el triángulo de Sierpinski, la dimensión contando cuadros, es más fácil de calcular si se toman los tamaños de cajas al poner un factor de escala, $1/3$ de la curva de Koch y $1/2$ para el triángulo de Sierpinski.

Por ejemplo, se observó que el triángulo de Sierpinsky se puede cubrir con 3^n cajas de longitud de lado media n , por lo que la dimensión contando cuadros de cálculo es

Para una forma de auto-similar hecha de N copias de sí mismo, cada escalado por una similitud con el factor de contracción r, la dimensión de similitud es

$$d_s = \text{Log}(N) / \log(1/r).$$

Cuando al inicio se calculo la dimension fractal de algunos conjuntos se utilizo la dimension de similitud.

1.2.2 La Ecuación de Moran

La ecuación dimensión similitud sólo puede aplicarse cuando todas las piezas son escaladas por la misma cantidad.

Sin embargo, muchos fractales auto-similares están hechos de piezas a escala en diferentes cantidades.

Se calculara la dimensión de similitud de los fractales auto-similares más generales.

1.2.3.1 CUANDO LA FORMULA DE DIMENSIÓN DE AUTOSIMILITUD FALLA

Este es un ejemplo de un fractal auto-similar cuya dimensión no podemos calcular con la fórmula dimensión similitud.

Para fractales auto-similares hechas de N copias, cada escala por el mismo factor r, la similitud dimensión d_s viene dada por

$$d_s = \text{Log}(N) / \log(1/r).$$

$$d_b = \lim_{n \rightarrow \infty} \log(3^n) / \log(2^n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \log(3) / n \log(2)$$

$$\log(3) / \log(2)$$

Ahora se considera el fractal se muestra a la izquierda. A la derecha vemos que está hecho de tres piezas a escala de $r = 1/2$ y una pieza escalado por $r = 1/4$.

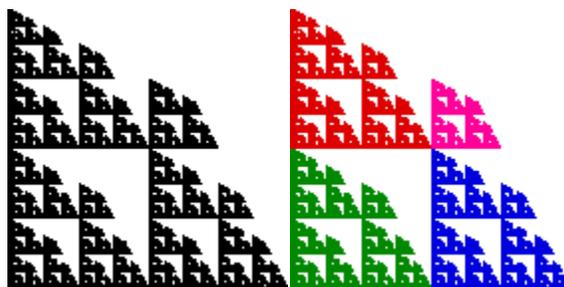


Figura 4. Dimensión de similitud falla. Tomado de <http://classes.yale.edu/fractals/>.

Debido a los diferentes valores de r están involucrados, la fórmula dimensión similitud no se puede aplicar.

1.2.3.2 Derivación de la Ecuación Moran

Tenemos que volver a escribir la fórmula dimensión similitud

$$d_s = \text{Log}(N) / \log(1/r)$$

Por lo que los factores de escala de cada pieza (cada uno es r en los casos en que esta fórmula puede ser aplicada) se pueden separar el uno del otro. Entonces podríamos cambiar los valores individuales de r en diferentes valores de r_i .

Escribiendo $d = d_s$,
$$d = \log(N)/\log(1/r)$$

Puede ser reescrita como
$$d \cdot \log(1/r) = \log(N)$$

Operamos a d dentro
$$\log((1/r)^d) = \log(N)$$

y aplicamos exponenciación a ambos lados
$$(1/r)^d = N$$

Es decir,
$$1 = N \cdot r^d$$

y entonces
$$1 = r^d + \dots + r^d$$

donde tenemos una r para cada uno de los ejemplares N del fractal en la descomposición.

Se sustituye de cada copia de r con r_i , vemos la dimensión similitud satisfice

$$1 = r_1^d + \dots + r_N^d$$

Esta es la ecuación Moran.

Mientras cada uno de los r_i satisfice $0 < r_i < 1$, vemos que la ecuación Moran tiene una solución única, y esa solución es la dimensión similitud $d = d_s$.

1.2.3.3 Solución Única de Moran

Para mostrar la ecuación Moran $1 = r_1^d + \dots + r_N^d$ tiene una solución única, asumiendo $0 < r_1 < 1, \dots$ y $0 < r_N < 1$, considere la función $f(d) = r_1^d + \dots + r_N^d$

En primer lugar, $f(0) = r_1^0 + \dots + r_N^0 = 1 + \dots + 1 = N$

En segundo lugar, $f(d) \rightarrow 0$ cuando $d \rightarrow \infty$.

Esto es porque cada r_i satisfice $0 < r_i < 1$, por lo que $r_i^d \rightarrow 0$ cuando $d \rightarrow \infty$.

En tercer lugar, la gráfica de $f(d)$ es estrictamente decreciente.

Para ver esto, se observa la derivada $f'(d) = r_1^d \ln(r_1) + \dots + r_N^d \ln(r_N)$

Como a $0 < r_i < 1$, cada $\ln(r_i) < 0$, por lo que $f'(d) < 0$.

Por ejemplo, en la figura 6 se muestra la gráfica de $f(d)$ vs d para $N=4$, $r_1 = r_2 = r_3 = 1/2$, y $r_4 = 1/4$.

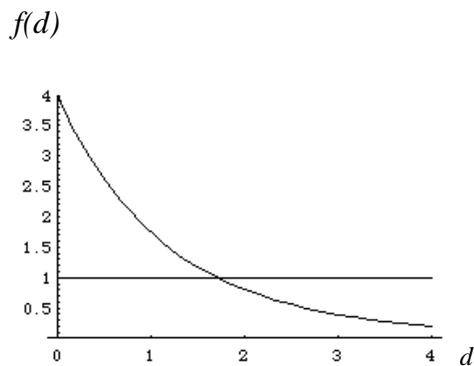


Figura 5. Ejemplo solución única de moran. . Tomado de <http://classes.yale.edu/fractals/>.

Se tiene que la gráfica de $y = f(d)$ cruza la línea horizontal $y = 1$ en $d = 1,72368 \dots$

Se mostrara como encontrar este valor a continuación

1.2.3.4 Solución de la ecuación de Moran

Para algunos valores de r_i la ecuación Moran pueden resolverse exactamente, pero a menudo tenemos que resolverlo numéricamente. Resolveremos la siguiente ecuación

$$0,5^d + 0,5^d + 0,5^d + 0,25^d = 1$$

Solución exacta. La ecuación Moran puede resolverse analíticamente cuando observamos $1/4 = (1/2)^2$. Entonces la ecuación Moran

$$3 \cdot (1/2)^d + (1/4)^d = 1$$

puede ser escrito como

$$3 \cdot (1/2)^d + ((1/2)^2)^d = 1$$

Intercambiando los exponentes del segundo término del lado izquierdo obtenemos

$$3 \cdot (1/2)^d + ((1/2)^d)^2 = 1$$

Escritura

$$(1/2)^d = x,$$

la ecuación Moran se convierte en la ecuación cuadrática

$$3x + x^2 = 1.$$

La fórmula cuadrática da

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Recordando $x = (1/2)^d$, lo cual es positivo, tenemos

$$x = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$$

y entonces

$$d = \text{Log}((-3 + \sqrt{13})/2) / \text{Log}(1/2).$$

Ejemplo:

Como muestra el lado derecho de la figura 7, este fractal se puede descomponer en tres piezas con $r_1 = r_2 = r_3 = 1/3$, y uno con $r_4 = 2/3$.

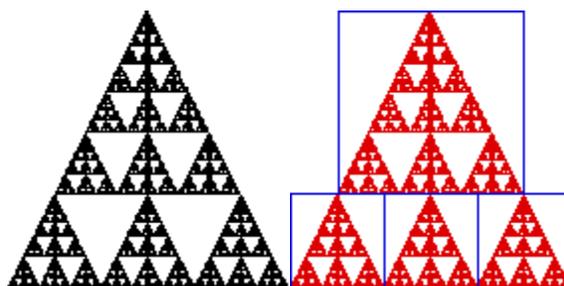


Figura 6. Triángulo de Sierpinsky por ecuación de Moran. Tomado de <http://classes.yale.edu/fractals/>.

Así, la ecuación es Moran

$$3 (1/3^d) + 2/3^d = 1.$$

Debido a que el r_i no son potencias enteras de la misma cantidad, debemos usar el método numérico descrito en la resolución de la ecuación de Moran . Con esto, obtenemos

$$d \approx 1.65196 \dots$$

La dimensión de similitud para los casos de fractales auto semejantes son iguales a la dimensión contando cuadros.

1.2.4 Ejemplos

Para encontrar d_s , se debe descomponer la forma en copias más pequeñas de sí mismo y se encuentra el factor de contracción de las piezas.

1. Se tiene la alfombra de Sierpinsky (Figura 8), esta forma se puede descomponer en $N = 8$ piezas, cada escala por un factor de $r = 1/3$, de modo $d_s = \text{Log}(8) / \text{Log}(3)$.

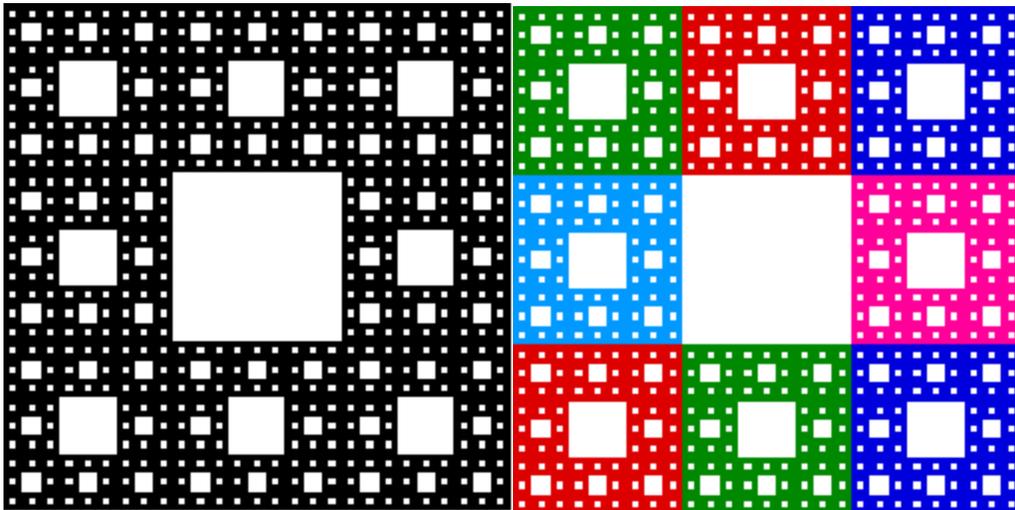


Figura 7. Dimensión Similitud Alfombra Sierpinsky. Tomado de <http://classes.yale.edu/fractals/>.

1.3 DIMENSIÓN DE HAUSDORFF

1.3.1 Medida de Hausdorff

Si U es un subconjunto no vacío de n -dimensional en un espacio Euclidiano, \mathbb{R}^n , el diámetro de U es definido como $|U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}$, es decir la mayor distancia entre cualquier par de puntos de U . Si $\{U_i\}$ es una colección contable (o finita) de conjuntos de diámetro al máximo δ que cubre a F , es decir $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ con $0 < |U_i| \leq \delta$ para cada i , se puede decir que $\{U_i\}$ es una δ -cubrimiento de F .

Suponemos que F es un subconjunto de \mathbb{R}^n y s es un número no negativo. Para cualquier $\delta > 0$ se define:

$$\mathcal{H}_\delta^s = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ es } \delta \text{ cubierta de } F\} \quad (1)$$

De este modo se consideran todos los cubrimientos de F por conjuntos de diámetro a lo más δ e intentamos minimizar la suma de las s potencias de los diámetros. Cuando δ decrece, los

cubrimientos permitidos para F en (1) se reducen. Por lo tanto, el ínfimo $\mathcal{H}_\delta^s(F)$ se incrementa, y así se aproxima a un límite. Cuando $\delta \rightarrow 0$. Se denota

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F) \quad (2)$$

Este límite existe para cualquier subconjunto F de \mathbb{R}^n , aunque el valor del límite puede ser (y usualmente es) 0 o ∞ . Se llama $\mathcal{H}^s(F)$ a la medida Hausdorff s -dimensional de F . En particular, $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$, y si E está contenido en F entonces $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$, además $\{F_i\}$ es cualquier colección contable de conjuntos disjuntos de Borel⁶, entonces (Falconer, 1990,p.25)

$$\mathcal{H}^s(\cup_{i=1}^{\infty} F_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_i) \quad (3)$$

1.3.2 Propiedad de Escala fundamental para la teoría de fractales

Si E está contenido en F y $F \subset \mathbb{R}^n$ y $\lambda > 0$ entonces

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F) \quad (4)$$

Donde $\lambda F = \{\lambda x : x \in F\}$, es decir el conjunto F escalado por un factor λ .

Prueba. Si $\{U_i\}$ es un δ -cubierta de F entonces $\{\lambda U_i\}$ es una $\lambda\delta$ -cubierta de λF . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(\lambda F) &\leq \sum |\lambda U_i|^s = \lambda^s \sum |U_i|^s \\ &\leq \lambda^s \mathcal{H}_\delta^s(F) \end{aligned}$$

ya que esto se cumple para cualquier δ -cubrimiento $\{U_i\}$. Dejamos $\delta \rightarrow 0$ dado que $\mathcal{H}^s(\lambda F) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$. Reemplazando λ por $1/\lambda$ y F por λF tenemos la desigualdad opuesta requerida.

1.3.2.1 Proposición de las propiedades de Escala

⁶ Un conjunto de Borel es cualquier conjunto obtenido mediante uniones e intersecciones numerables de conjuntos cerrados o abiertos de una topología.

Si $F \subset \mathbb{R}^n$ y $f: F \rightarrow \mathbb{R}^m$ de tal forma que:

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha \quad (x, y \in F) \quad (5)$$

Donde $c > 0$ y $\alpha > 0$.

Proposición: Para cada s se tiene que:

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F) \quad (6)$$

Prueba. Si $\{U_i\}$ es δ -cubierta de F , entonces, puesto $|f(F \cap U_i)| \leq c|U_i|^\alpha$, se deduce que $\{f(F \cap U_i)\}$ es una ε cobertura de $f(F)$, donde $\varepsilon = c\delta^\alpha$. Por tanto $\sum_i |f(F \cap U_i)|^{s/\alpha} \leq c^{s/\alpha} \sum_i |U_i|^s$, de modo que $\mathcal{H}_\varepsilon^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}_\delta^s(F)$. Como $\delta \rightarrow 0$, así $\varepsilon \rightarrow 0$, dando (6). (Falconer, 1990, p.27)

La condición (5) es conocida como la condición de exponente α de Holder; tal condición implica que f es continuo. Particularmente importante es el caso $\alpha = 1$, es decir

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y| \quad (x, y \in F) \quad (7)$$

Donde f es llamado medida de Lipschitz, y

$$\mathcal{H}^s(f(F)) \leq c^s \mathcal{H}^s(F) \quad (8)$$

Cualquier función diferenciable con derivada acotada es necesariamente de Lipschitz como una consecuencia del teorema de valor medio. Si f es un isométrico, es decir $|f(x) - f(y)| = |x - y|$, entonces $\mathcal{H}^s(f(F)) = \mathcal{H}^s(F)$. En particular, las medidas Hausdorff son invariantes por traslaciones es decir $\mathcal{H}^s(F + z) = \mathcal{H}^s(F)$, donde $F + z = \{x + z : x \in F\}$, e invariantes por rotaciones.

1.3.3 Dimensión Hausdorff

Volviendo a la ecuación (1) se tiene que para cualquier conjunto dado F y $\delta < 1$, $\mathcal{H}_\delta^s(F)$ es no creciente con s , por lo que para (2) $\mathcal{H}^s(F)$ es también no creciente. De hecho, si $t > s$ y $\{U_i\}$ es un δ - cubrimiento de F tenemos:

$$\sum_i |U_i|^t \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s \quad (9)$$

Por lo que, tomando ínfimos $\mathcal{H}_\delta^t(f) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(F)$. Y si $\delta \rightarrow 0$ vemos que si $\mathcal{H}^s(f) < \infty$ entonces $\mathcal{H}^s(f) = 0$ con $t > s$. Por lo tanto un grafico de $\mathcal{H}^s(f)$ contra s (figura 9) muestra que hay un valor crítico de s en la que $\mathcal{H}^s(f)$ “salta” desde ∞ hasta 0. Este valor crítico es llamado la dimensión Hausdorff de F , y se escribe $\dim_H F$

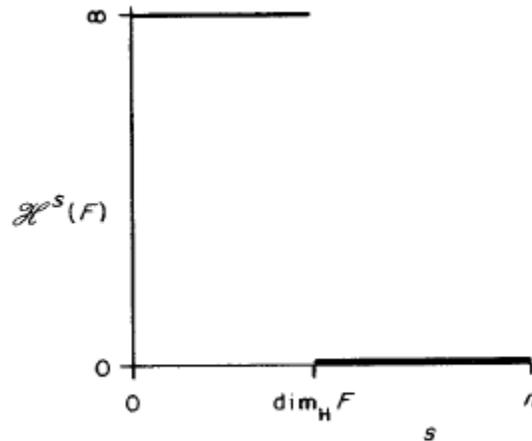


Figura 8. Grafica de $\mathcal{H}^s(F)$ contra s para un conjunto F . La dimensión de Hausdorff en el valor de s en el que el “salto” ocurre desde ∞ a 0 . (Falconer, 1990)

Formalmente

$$\dim_H F = \inf\{s: \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s: \mathcal{H}^s(F) = \infty\} \quad (10)$$

De modo que

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{si } s < \dim_H F \\ 0 & \text{si } s > \dim_H F \end{cases} \quad (11)$$

Si $s = \dim_H F$, entonces $\mathcal{H}^s(F)$ puede ser cero o infinito, o satisface

$$0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$$

Un conjunto Borel que satisface esta última condición es llamado s -conjunto. Matemáticamente, s -conjuntos son con mucho los más convenientes conjuntos a estudiar, y afortunadamente ocurren con sorprendente frecuencia. (HUREWICZ. W, 1948)(Falconer, 1990, p.28)

Ejemplos

El valor D se denomina dimensión Hausdorff del conjunto S . Se ha de considerar el número N_δ de bolas de radio no mayor a δ necesarias para cubrir S completamente.

Para medir una línea curva de longitud L_0 , ésta se cubre con N_δ segmentos de longitud δ , por tanto $N_\delta \cdot \delta = L_0$, luego $N_0 = L_0/\delta$ y la longitud total estimada será:

$$L = \sum \delta^1 = N_\delta * \delta^1 = \frac{L_0}{\delta^1} \delta^1$$

Al hacer que el segmento δ tienda a cero obtenemos la longitud que queremos medir:

$$L = L_0 \delta^0 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} L_0$$

De la misma forma para una superficie de dimensión A_0 y midiendo ésta con N_δ segmentos de área de dimensión δ^2 se tiene:

$$A = \sum \delta^2 = N_\delta * \delta^2 = \frac{A_0}{\delta^2} \delta^2$$

$$A = A_0 \delta^0 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} A_0$$

Igualmente, para el volumen:

$$V = \sum \delta^3 = N_\delta * \delta^3 = \frac{V_0}{\delta^3} \delta^3$$

$$V = V_0 \delta^0 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} V_0$$

Si quisiéramos medir la línea curva, tomando como regla un objeto de dimensión 2, estaríamos midiendo el área de la línea y por lo tanto.

$$L = \sum \delta^2 = N_\delta * \delta^2 = \frac{L_0}{\delta^1} \delta^2$$

$$L = L_0 \delta^1 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

Generalizando, al medir un objeto de determinada dimensión con una regla de dimensión mayor, encontraríamos un valor de magnitud cero. De la misma forma, sucede a la inversa: si midiésemos un objeto con una regla de dimensión menor, el valor de magnitud sería infinito. La dimensión de Hausdorff es el valor del exponente de δ para el cual la estimación de la magnitud pasaría de 0 a infinito.

$$A = \sum \delta^2 = N_\delta * \delta^1 = \frac{A_0}{\delta^2} \delta^1$$

$$A = A_0 \delta^{\delta-1} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \infty$$

Las dimensiones Hausdorff satisfacen las siguientes propiedades: (Que bien se podría esperar contiene cualquier definición razonable de dimensión)

- Conjuntos abiertos, si $F \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, entonces $\dim_H F = n$, ya que F contiene una bola de volumen positivo n -dimensional.
- Conjuntos lisos⁷, si F es un liso subvariedad⁸ m -dimensional de \mathbb{R}^n entonces $\dim_H F = m$. En particular curvas lisas tienen dimensión 1 y superficies lisas tienen dimensión 2. Esencialmente, esto puede ser deducido por la relación entre las medidas Hausdorff y Lebesgue.
- Monotonicidad. Si $E \subset F$ entonces $\dim_H E \leq \dim_H F$. esto es inminente para las propiedades de medidas que $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$ para cada s .
- Estabilidad contable. Si F_1, F_2, \dots es una secuencia (contable) de conjuntos entonces $\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \leq i < \infty} \{\dim_H F_i\}$. Ciertamente, $\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \geq \dim_H F_j$ para cada j desde la propiedad de monotonicidad. Por otra parte, si $s > \dim_H F_i$ para todo i , entonces $\mathcal{H}^s(F_i) = 0$, de modo que $\mathcal{H}^s(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = 0$, teniendo la desigualdad opuesta.

⁷ Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice que A es un conjunto liso si existe un entero no negativo $k < n$, una función $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 y un conjunto $D \subset \mathbb{R}^k$ compacto tal que $A = g(D)$ (BRUZUAL.R, 2005)

⁸ En general las subvariedades diferenciables son los subconjuntos de puntos para los cuales es posible definir localmente una función diferenciable f que satisfaga, $(p)=0, p \in M$

Conjuntos contables⁹. Si F es contable entonces $\dim_{\mathbb{H}}F = 0$. Para F_i siendo un simple punto, $\mathcal{H}^0(F_i) = 1$ y $\dim_{\mathbb{H}}F_i = 0$, por lo que por la estabilidad contable $\dim_{\mathbb{H}} \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = 0$. (Falconer, 1990, p.29)

1.4 DIMENSIÓN POR CONTEO DE CAJAS

Dado que un fractal está constituido por elementos cada vez más pequeños, el concepto de longitud no está claramente definido; por ejemplo, cuando se quiere medir un forma fractal con una unidad, o con un instrumento de medida determinado los resultados obtenidos no siempre serán confiables debido a la precisión en la observación.

El cálculo de la dimensión fractal se basa en la correspondiente medición del número de recubrimientos o cajas necesarias (n) para cubrir un determinado conjunto (línea, superficie o volumen) en función de la escala r de los recubrimientos mediante rejillas (o cajas) y está definida mediante la siguiente expresión:

$$D = \frac{\ln(n)}{\ln(1/r)} \quad (12)$$

El método de conteo por cajas propone la realización del cálculo de la siguiente manera:

- Tomar una forma fractal y sobreponer una rejilla de longitud r .
- Contar el número de cajas (celda de la rejilla) que toquen cualquier parte de frontera de la forma fractal. Repitiendo el proceso para todos los valores de la escala de longitud posible teniendo en cuenta que esta va disminuyendo en cada paso, asumiendo que se debe conservar el mismo factor de escala entre un paso y el siguiente. Se consignan los datos en una tabla como la siguiente:

⁹ Un conjunto es contable si es finito o existe una correspondencia uno por uno con un subconjunto de los números naturales.

Escala (R) Lado	1	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64
No. Cuadrados Ocupados (N)							
Total de cuadrados							
Razón							

Figura 9. Tabla de Registro del Conteo (Rojas, Orjuela, 2006)

- Se dibuja en un plano cartesiano (escala versus número de cuadrados ocupados) donde se va a observar que los datos son muy dispersos. Por lo tanto para dar mayor precisión a los datos se les aplica logaritmo y se tabula la información, para así realizar una gráfica ahora en papel logarítmico, de tal modo que se haga uso del método de mínimos cuadrados, para ajustar los puntos.
- Como se obtiene una recta se debe calcular la pendiente que corresponderá a la dimensión.

Por lo anterior, se tiene que $N(r)$ es el número de cajas de la rejilla de escala r . Estas dos variables están relacionadas de la siguiente forma:

$$N(r) = k \left(\frac{1}{r}\right)^d$$

Donde d y k son constantes. $\log N(r)$ y $\log\left(\frac{1}{r}\right)$ varían dependiendo de r y tiene la forma de la ecuación de la recta con pendiente d . (Orjuela, Rojas, 2006, p.108)

despejando d se obtiene

$$\log(N(r)) = d \log\left(\frac{1}{r}\right) + \log(k)$$

Si tomamos a $k=1$, encontramos a $d=D$

$$y = mx + b$$

$$\log(N(r)) = d \log\left(\frac{1}{r}\right) + \log(k)$$

Para diferentes longitudes de lados r contamos $N(r)$, el menor número de cajas de longitud de lado r necesarios para cubrir la figura.

¿Cómo $N(r)$ depende de r ?

- Si la figura es 1-dimensional, como el segmento de línea, entonces $N(r) = 1/r$. Luego $K=1$ y $d=1$ Como se muestra en el siguiente gráfico:

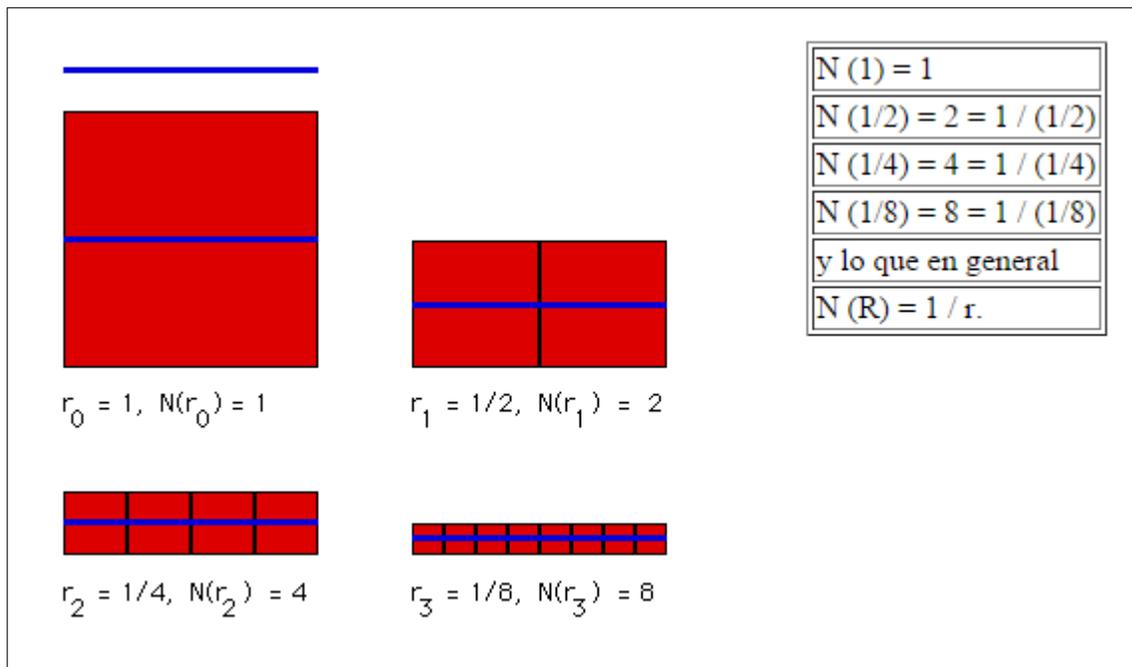


Figura 10. Conteo de cajas – Segmento de línea. Tomado de <http://classes.yale.edu/fractals/>.

- Si la figura es de 2 dimensiones, como el interior de un cuadrado de una unidad, entonces $N(r) = (1/r)^2$. Luego $k=1$ y $d=2$.

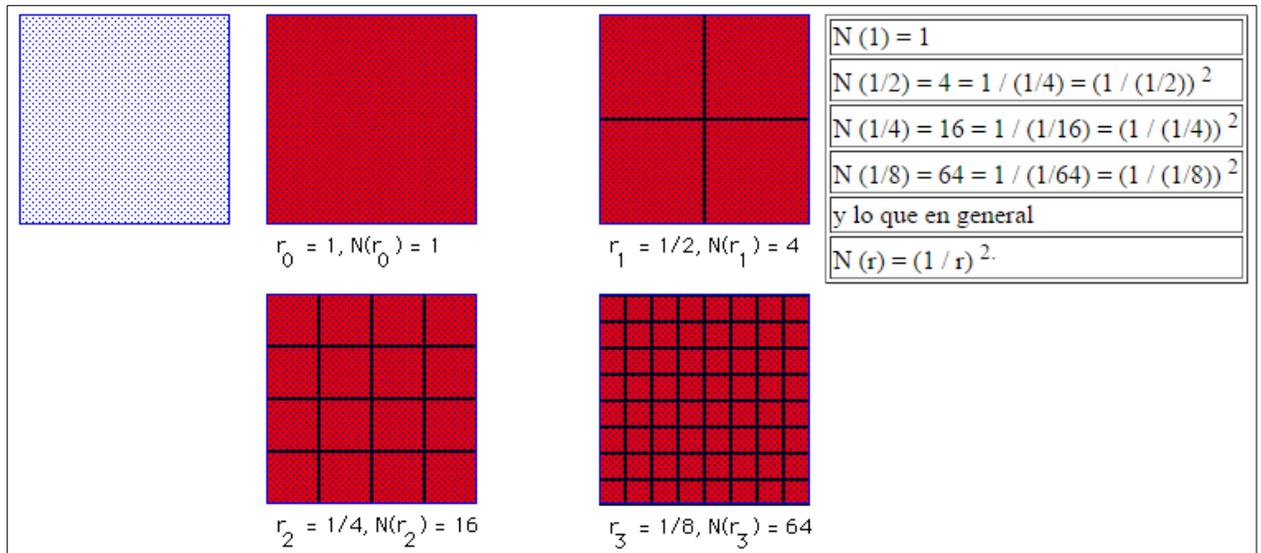


Figura 11. Conteo de cajas- Relleno de un cuadrado. Tomado de <http://classes.yale.edu/fractals/>.

- Si la figura es de 3 dimensiones, como el interior de un cubo de lado unidad, entonces $N(r) = (1/r)^3$. Donde $k = 1$ y $d = 3$.

Para figuras más complicadas, la relación entre $N(r)$ y $1/r$ puede que no sea tan clara.

Se sospecha que $N(r)$ es aproximadamente $k(1/r)^d$ por las leyes de la potencia, entonces debemos encontrar a d tomando \log a ambos lados y obtenemos:

$$\log(N(r)) = \log(k) + \log((1/r)^d)$$

despejamos d y obtenemos

$$d = \frac{\log(N(r))}{\log\left(N\left(\frac{1}{r}\right)\right)} - \frac{\log(k)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)}$$

Como r se hace cada vez más pequeño, despejando d y tomando el límite cuando $r \rightarrow 0$.

Tenemos $1/r \rightarrow \infty$, por lo que $\log(1/r) \rightarrow \infty$ y $\log(k) / \log(1/r) \rightarrow 0$.

Luego,

$$d = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(N(r))}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} \quad (13)$$

Nota: Si el límite existe, se llama la dimensión contando cajas de la forma d_b . Otra forma de notación es:

$$\log(N(r)) = d \cdot \log(1/r) + \log(k) \quad (14)$$

La anterior es la ecuación de la línea recta.

Así que el trazado de $\log(N(r))$ vs $\log(1/r)$, los puntos deben estar aproximadamente en una línea recta con pendiente d_b . Este es el enfoque log-log para encontrar la dimensión por conteo de cajas. (<http://classes.yale.edu/fractals/>, 5/10/2014)

Ejemplo de la curva Koch por conteo de cajas

- Curva de Koch

Si realizamos los cálculos para la curva de Koch, obtenemos los resultados siguientes:

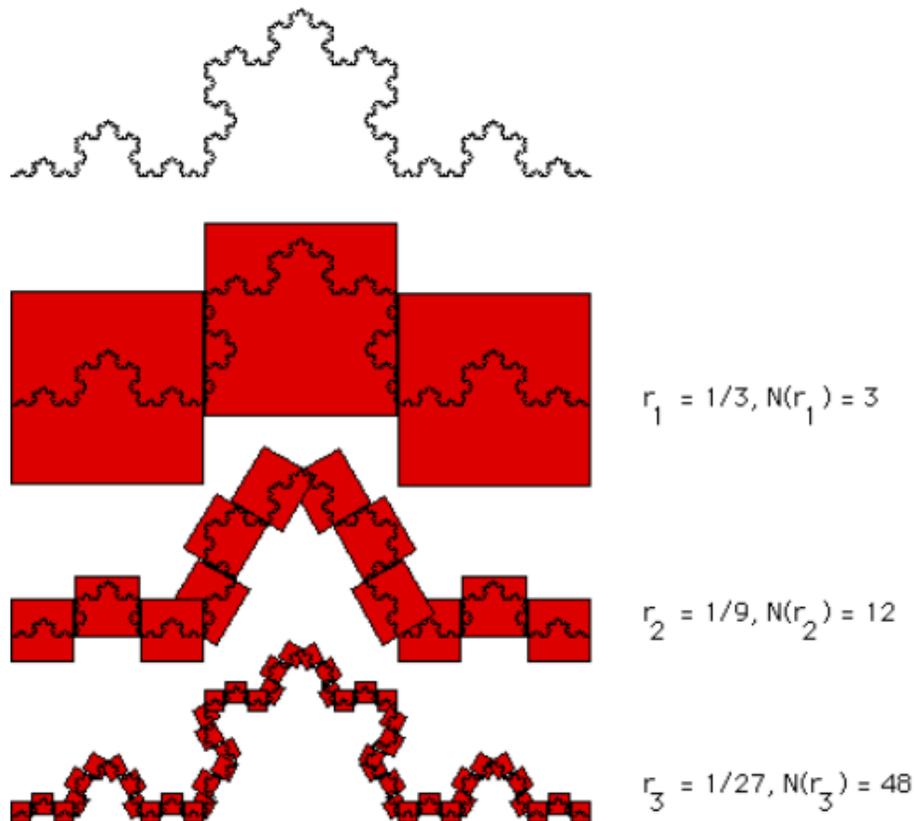


Figura 12. Curva de koch por conteo de cajas. Tomado de <http://classes.yale.edu/fractals>

- $N(1/3) = 3$
- $N(1/9) = 12$
- $N(1/27) = 48$
- $N(1/3^n) = 3 \cdot 4^{n-1}$

Luego

$$\begin{aligned}
 d &= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\text{Log}(N(r))}{\text{Log}\left(\frac{1}{r}\right)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\text{Log}(N(r))}{\text{Log}\left(\frac{1}{r}\right)} \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Log}(N(\frac{1}{3^n}))}{\text{Log}\left(\frac{1}{(\frac{1}{3^n})}\right)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Log}(3 \cdot 4^{n-1})}{\text{Log}3^n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n-1)\text{Log}(4) + \text{Log}(3))}{n \cdot \text{Log}(3)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n \cdot \text{Log}(4) - \text{Log}(4) + \text{Log}(3))}{n \cdot \text{Log}(3)} = \frac{\text{Log}(4)}{\text{Log}(3)} \approx 1.26186
 \end{aligned}$$

Es decir, la dimensión de la curva de Koch es 1.26186.

- Segmento de línea

Se cubre un segmento de línea con cajas más pequeñas y más pequeñas.

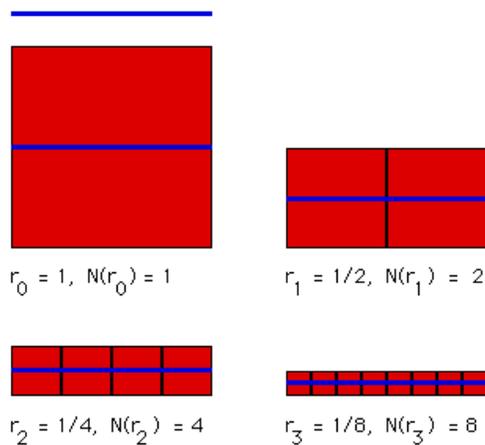


Figura 13. Segmento de línea por conteo de cajas. Tomado de <http://classes.vale.edu/fractals>

$$N(1) = 1$$

$$N(1/2) = 2 = 1 / (1/2)$$

$$N(1/4) = 4 = 1 / (1/4)$$

$$N(1/8) = 8 = 1 / (1/8)$$

y en general

$$N(r) = 1 / r.$$

Se concluye que si el objeto es 1-dimensional, como lo es el segmento de línea, entonces $N(r) = 1/r$ en lugar de r porque como las cajas se hacen más pequeñas, se necesitan más para cubrir el objeto.

- Triángulo de Sierpinsky
Cubriendo el triángulo con cajas más pequeñas y más pequeñas.

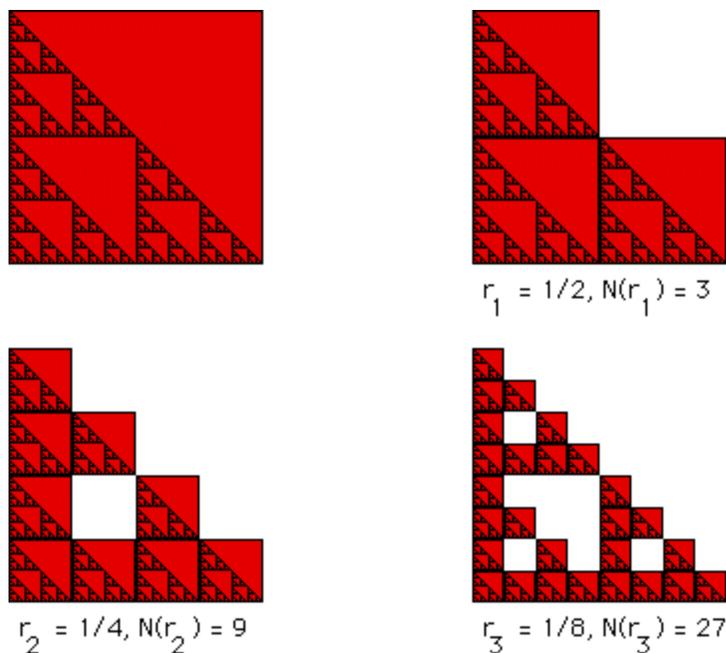


Figura 14. Triángulo de Sierpinsky por conteo de cajas . Tomado de <http://classes.yale.edu/fractals>

$$N(1) = 1$$

$$N(1/2) = 3$$

$$N(1/4) = N((1/2)^2) = 9 = 3^2$$

$$N(1/8) = N((1/2)^3) = 27 = 3^3$$

y, en general

$$N((1/2)^n) = 3^n.$$

De la relación $N((1/2)^n) = 3^n$ podemos calcular el valor exacto de d_b para el triángulo.

$$\begin{aligned} d_b &= \lim_{n \rightarrow \infty} [\log(N(r_n)) / \log(1/r_n)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log(N((1/2)^n)) / \log(1/((1/2)^n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log(3^n) / \log(2^n) \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot \log(3) / (n \cdot \log(2)))$$

$$= \log(3) / \log(2) \approx 1,58996$$

2. CAPÍTULO 2

ALGEBRA DE LAS DIMENSIONES

Para formas construidas a partir de otras formas, típicamente las dimensiones de las piezas están relacionadas con las dimensiones del conjunto. Las construcciones que se consideran son la unión, intersección, producto y proyección. (<http://classes.yale.edu/fractals/>, 3/09/2014)

2.1 DIMENSION DE LA UNIÓN

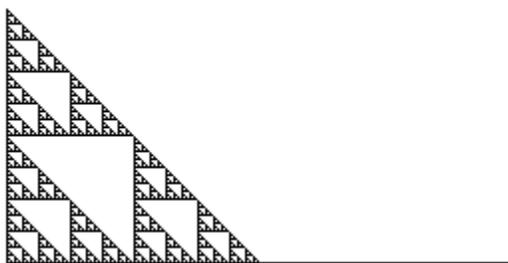


Figura 15. Unión Triángulo de Sierpinsky y segmento de línea. Tomado de <http://classes.yale.edu/fractals/>.

La Unión entre el triángulo Sierpinsky y el segmento de línea decimos que, donde d_b es el conteo de cajas.

$$d_b(A \cup B) = \max\{d_b(A), d_b(B)\}$$

Argumentamos que esto es cierto.

Para un tamaño de cuadro dado r , denota por $N_A(r)$, $N_B(r)$, y $N_{A \cup B}(r)$ el número de cajas de longitud de lado r necesarios para cubrir A , B , y $A \cup B$.

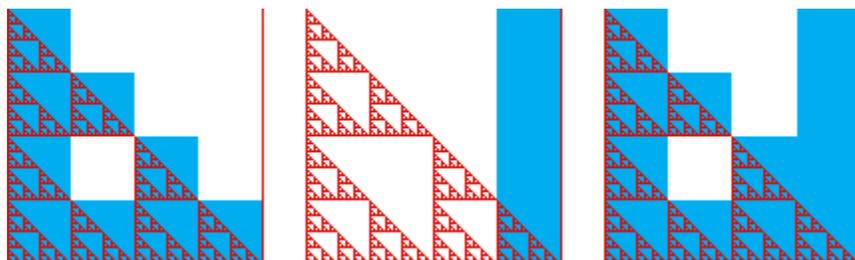
Entonces, sin duda es cierto que

$$N_A(r) \leq N_{A \cup B}(r) \leq N_A(r) + N_B(r)$$

y

$$N_B(r) \leq N_{A \cup B}(r) \leq N_A(r) + N_B(r)$$

En consecuencia,



Izquierda: $N_A(r)$

Centro: $N_B(r)$

Derecha: $N_{A \cup B}(r)$

Figura 16. Dimensión por cajas Triángulo de Sierpinsky y segmento de línea. Tomado de <http://classes.yale.edu/fractals/>.

Por lo que se ve

$$\max\{N_A(r), N_B(r)\} \leq N_{A \cup B}(r) \leq N_A(r) + N_B(r)$$

Es decir

$$N_A(r) = \max\{N_A(r), N_B(r)\}.$$

Entonces

$$N_A(r) \leq N_{A \cup B}(r) \leq N_A(r) \cdot \left(1 + N_B(r)/N_A(r)\right)$$

Se tiene que:

Sea a un número real positivo no nulo distinto de 1 se llama función logarítmica real en base a , a la función $f(x) = \text{Log}_a x$.

Si $a > 1$ tenemos:

- $\text{Log}_a x < 0$ si $x < 1$
- $\text{Log}_a x > 0$ si $x > 1$
- Es estrictamente creciente

Como Log es una función creciente, por lo tanto Log da:

$$\begin{aligned}\log(N_A(r)) &\leq \log(N_{A \cup B}(r)) \leq \log\left(N_A(r) \cdot \left(1 + N_B(r)/N_A(r)\right)\right) \\ &= \log(N_A(r)) + \log\left(1 + N_B(r)/N_A(r)\right)\end{aligned}$$

Se toma a r lo suficientemente pequeño para $1/r > 1$, dividiendo por $\log(1/r)$ (que es > 0 por que $1/r > 1$) da

$$\begin{aligned}\log(N_A(r))/\log(1/r) &\leq \log(N_{A \cup B}(r))/\log(1/r) \\ &\leq \log(N_A(r))/\log(1/r) + \log\left(1 + N_B(r)/N_A(r)\right)/\log(1/r)\end{aligned}$$

Debido $N_B(r) \leq N_A(r)$, el numerador $\left(1 + N_B(r)/N_A(r)\right)$ es $\leq \log(2)$ y así $\log\left(1 + N_B(r)/N_A(r)\right)/\log(1/r) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 0$

Ahora, como $r \rightarrow 0$,

$$\log(N_A(r))/\log(1/r) \rightarrow d_b(A) \text{ y } \log(N_{A \cup B}(r))/\log(1/r) \rightarrow d_b(A \cup B)$$

Así $d_b(A \cup B)$ se encuentra entre dos términos, los cuales van a $d_b(A) = \max\{d_b(A), d_b(B)\}$.

2.1.1 Ejercicios de unión

1. Calcular la dimensión contando cuadros de la unión de un conjunto de Cantor y un segmento de línea.

Seleccionamos los cuadrados de las longitudes laterales $1/3, 1/9, 1/27, 1/81, \dots, 1/3^n, \dots$ tomando nota de la escala del conjunto de Cantor.



$$N(1/3) = 2 + 3$$

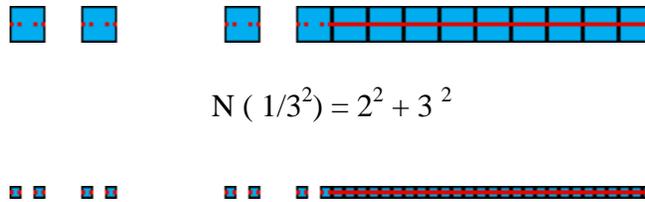


Figura 17. Unión conjunto de Cantor y segmento de línea. . Tomado de <http://classes.yale.edu/fractals/>.

$$N(1/3^3) = 2^3 + 3^3$$

y, en general

$$N(1/3^n) = 2^n + 3^n$$

Conociendo $N(1/3^n)$ podemos calcular la dimensión contando cuadros al factorizar el término más amplio de la suma:

$$\begin{aligned} d &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(N(1/3^n))}{\log(1/(1/3^n))} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(2^n + 3^n)}{\log(3^n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(3^n(1 + (2/3)^n))}{\log(3^n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(3^n) + \log((1 + (2/3)^n))}{\log(3^n)} \\ &= 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log((1 + (2/3)^n))}{n \cdot \log(2)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. Calcular la dimensión contando cuadros de esta unión de un conjunto de Cantor y un segmento de línea vertical.

Seleccionamos los cuadrados de las longitudes laterales $1/3, 1/9, 1/27, 1/81, \dots, \frac{1}{3^n}, \dots$ tomando nota de la escala del conjunto de Cantor.

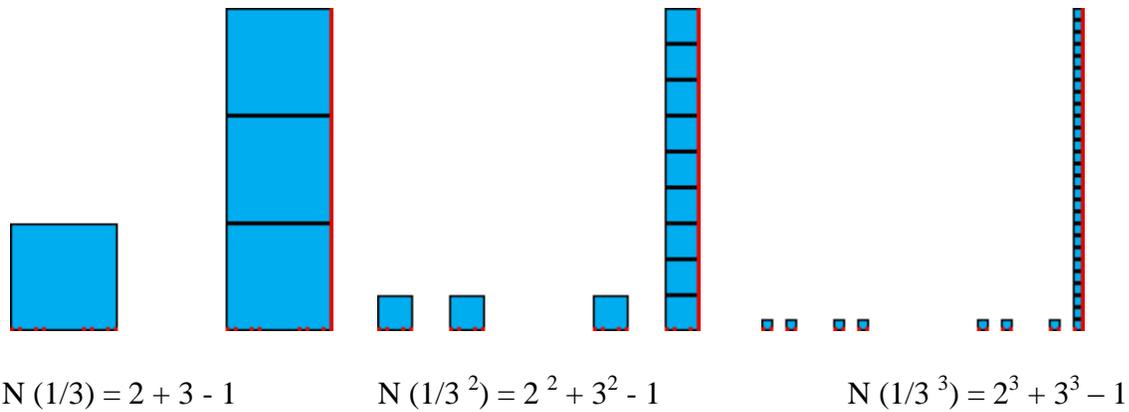


Ilustración 18. Unión Conjunto de cantor y segmento de línea vertical. . Tomado de <http://classes.yale.edu/fractals/>.

y, en general

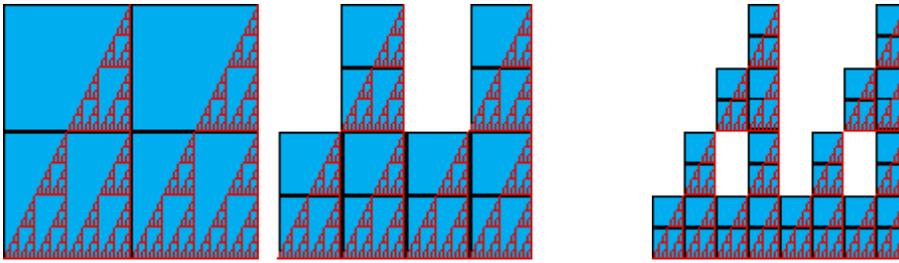
$$N(1/3^n) = 2^n + 3^n - 1$$

Conociendo $N(1/3^n)$ podemos calcular la dimensión contando cuadros al factorizar el término más amplio de la suma:

$$\begin{aligned}
 d &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(N(1/3^n))}{\log(1/(1/3^n))} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(2^n + 3^n - 1)}{\log(3^n)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(3^n(1 + (2/3)^n - (1/3)^n))}{\log(3^n)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\log(3^n) + \log((1 + (2/3)^n - (1/3)^n))) / \log(3^n) \\
 &= 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log((1 + (2/3)^n - (1/3)^n))}{n \cdot \log(3)} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

3. Calcular la dimensión contando cuadros de la unión de dos triángulos de Sierpinsky.

Seleccionamos los cuadrados de las longitudes laterales $1/2, 1/4, 1/8, \dots, 1/2^n, \dots$ tomando nota de la escala del conjunto de Cantor.



$$= 2 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^0$$

$$N(1/2) = 2 + 2$$

$$N(1/2^2) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3$$

$$N(1/2^3) = 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^2$$

Figura 19. Unión contando cuadros de 2 triángulos de Sierpinsky. . Tomado de <http://classes.yale.edu/fractals/>.

y, en general

$$N(1/2^n) = 2 \cdot 3^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-1} = 4 \cdot 3^{n-1}$$

Conociendo $N(1/3^n)$ podemos calcular la dimensión contando cuadros al factorizar el término más amplio de la suma:

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(N(1/2^n))}{\log(1/(1/2^n))}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(4 \cdot 3^{n-1})}{\log(2^n)}$$

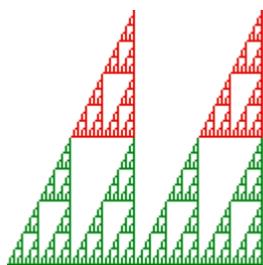
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(4) + \log(3^{n-1})}{\log(2^n)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(4) + (n-1) \cdot \log(3)}{n \cdot \log(2)}$$

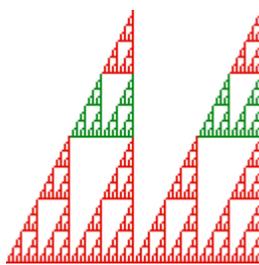
$$= \log(3) / \log(2)$$

Un enfoque alternativo es ampliar la ecuación de Moran a uniones infinitas.

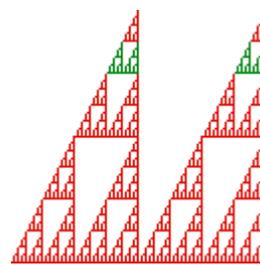
Esta unión de dos conjuntos consiste en



2 copias escaladas 1/2



2 copias escalados 1/4



2 copias escala por 1/8

y en general 2 copias escaladas por $1/2^n$.

Extendido a las uniones infinitas, la ecuación se convierte en Moran

$$1 = 2 \cdot ((1/2)^d) + 2 \cdot ((1/4)^d) + 2 \cdot ((1/8)^d) + \dots$$

$$1 = 2 \cdot ((1/2)^d) + 2 \cdot (((1/2)^d)^2) + 2 \cdot (((1/2)^d)^3) + \dots$$

$$1 = 2 \cdot ((1/2)^d) \cdot (1 + (1/2)^d + ((1/2)^d)^2 + \dots)$$

Los términos entre paréntesis son una serie geométrica. Resumiendo da

$$1 = 2 \cdot ((1/2)^d) \cdot (1 / (1 - ((1/2)^d)))$$

multiplicando por $1 - (1/2)^d$ obtenemos

$$1 - (1/2)^d = 2 \cdot ((1/2)^d)$$

$$1 = 3 \cdot ((1/2)^d)$$

$$1/3 = (1/2)^d$$

Así que de nuevo obtenemos $d = \text{Log}(3) / \text{Log}(2) \approx 1,5849625$

2.2 DIMENSIÓN DE LA INTERSECCIÓN

Para entender la dimensión de la intersección de conjuntos, debemos entender la codimensión de un conjunto. (<http://classes.yale.edu/fractals/>, 3/09/2014)

2.2.1 CODIMENSIÓN

La codimensión de un conjunto es la dimensión del conjunto complementario. En consecuencia la codimensión depende tanto de la dimensión del conjunto y la dimensión del espacio en el que esta incrustado el conjunto.

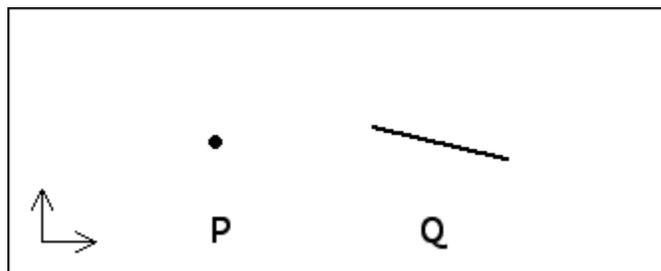


Figura 20. Ejemplo de codimensión punto-línea en el plano. Tomado de <http://classes.yale.edu/fractals/>.

Si P es un punto en el plano, su codimensión es $2 - 0 = 2$

Si Q es una línea en el plano, su codimensión es $2 - 1 = 1$

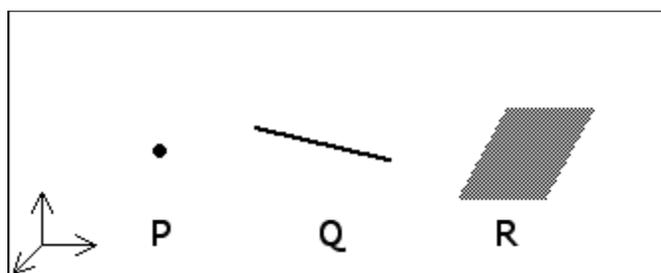


Figura 21. Ejemplo codimensión punto, línea, plano en el espacio. Tomado de <http://classes.yale.edu/fractals/>.

Si P es un punto en el espacio, su codimensión es el $3-0 = 3$

Si Q es una línea en el espacio, su codimensión es $3-1 = 2$

Si R es un plano en el espacio, su codimensión es $3-2 = 1$

Ahora usamos la codimensión para estudiar la dimensión de la intersección de conjuntos euclidianos.

Suponga Q y R son rectas en el plano. Q y R no se intersecan en ningún punto. ¿Cómo se agregan sus co-dimensiones?

$$(2 - \dim(Q)) + (2 - \dim(R)) = (2 - 1) + (2 - 1) = 2$$

$$= 2 - 0, = 2 - \dim (Q \cap R)$$

donde $\dim (Q \cap R) = 0$ refuerza la observación de que Q y R se cruzan en un punto, que tiene dimensión 0.

Supongamos que P es un punto en el plano y Q es una línea en el plano. P y Q no se cruzan. ¿Cómo se agregan sus co-dimensiones?

$$(2 - \dim (P)) + (2 - \dim (Q)) = (2 - 0,) + (2 - 1) = 3$$

$$= 2 - (-1) = 2 - \dim (P \cap Q)$$

Donde $\dim (P \cap Q) = -1$ expresa la condición de que por lo general P y Q no se cruzan.

A partir de estos ejemplos se postula que si A y B se encuentran en el espacio n-dimensional,

$$n - \dim (A \cap B) = (n - \dim (A)) + (n - \dim (B))$$

Es decir,

$$\text{codim}(A \cap B) = \text{codim} (A) + \text{codim} (B)$$

Aunque la prueba es bastante complicada, el resultado intersección se extiende a formas fractales:

Si A y B son subconjuntos de espacio n-dimensional, entonces:

$$\text{codim}(A \cap B) = \text{codim} (A) + \text{codim} (B)$$

Es decir,

$$n - \dim(A \cap B) = (n - \dim (A)) + (n - \dim (B))$$

Dando

$$\dim(A \cap B) = \dim (A) + \dim (B) - n$$

La prueba se encuentra en el libro Fractal in Physics (L. Pietrener, E. Tossati), pag 102

Ejemplo 1: Supongamos que A es un triángulo de Sierpinsky con dimensión $d(A) = \log(3)/\log(2) = 1,58496$ y B es un conjunto de Cantor con dimensión $d(B) = \log(3)/\log(2) = 0,63093$

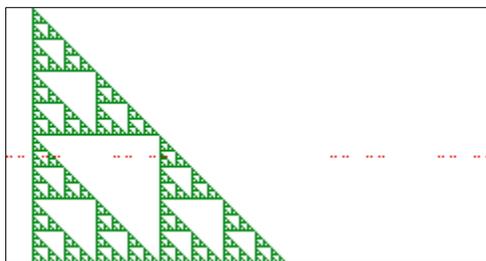


Figura 22. Dimensión de intersección Triángulo de Sierpinsky y Cantor. Tomado de <http://classes.yale.edu/fractals>.

Podemos decir $d(A \cap B) = 1,58496 + 0,63093 - 2 = 0,21589$.

Ejemplo 2: Supongamos que A y B son conjuntos de Cantor y están en la misma recta, y tanto $\dim(A)$ y $\dim(B)$ están a menos de $1/2$ de distancia.

Entonces se puede afirmar: (es decir, para todas las partes de A y B en la recta),

$$\text{codim}(A \cap B) = \text{codim}(A) + \text{codim}(B) > 1$$

Por lo tanto, $\dim(A \cap B) < 0$.

2.2.2 Ejercicios de intersección

1. Calcular la dimensión contando cuadros de la intersección de un triángulo de Sierpinski y un segmento de línea.

En primer lugar se asume que son subconjuntos de espacio euclidiano 2-dimensional.

Entonces son subconjuntos de espacio euclidiano 3-dimensional.

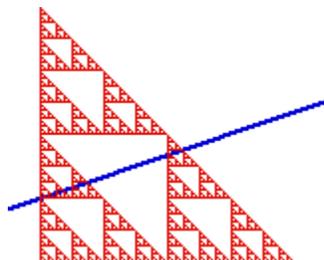


Figura 23. Intersección triángulo de sierpinsky y un segmento de línea. . Tomado de <http://classes.yale.edu/fractals/>.

Se denota el triángulo de Sierpinski por S y el segmento de línea por L .

Recordemos la fórmula intersección: para casi todas las colocaciones de S y L en el espacio E -dimensional,

$$\dim(S \cap L) = \dim(S) + \dim(L) - E$$

Para $E = 2$ esto se convierte

$$\dim(S \cap L) = \text{Log}(3) / \text{Log}(2) + 1 - 2 \approx 0.585$$

Para $E = 3$ esto se convierte

$$\dim(S \cap L) = \text{Log}(3) / \text{Log}(2) + 1 - 3 \approx -0,415$$

2. Calcular la dimensión contando cuadros de la intersección de triángulo de Sierpinski y el conjunto de Cantor.

En primer lugar asumir tanto son subconjuntos de espacio euclidiano 2-dimensional.

Entonces son subconjuntos de espacio euclidiano 3-dimensional.

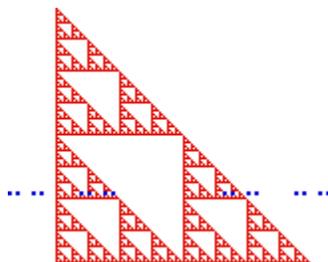


Figura 24. Intersección triángulo de Sierpinsky y conjunto de Cantor. . Tomado de <http://classes.yale.edu/fractals/>.

Se denota el triángulo de Sierpinski por S y el conjunto de Cantor por C .

Recordemos la fórmula intersección: para casi todas las colocaciones de S y C en el espacio E -dimensional,

$$\dim(S \cap C) = \dim(S) + \dim(C) - E$$

Para $E = 2$ esto se convierte

$$\dim(S \cap C) = \text{Log}(3) / \text{Log}(2) + \text{Log}(2) / \text{Log}(3) - 2 \approx 0.261$$

Para $E = 3$ esto se convierte

$$\dim(S \cap C) = \text{Log}(3) / \text{Log}(2) + \text{Log}(2) / \text{Log}(3) - 3 \approx -0.784$$

3. Calcular la dimensión contando cuadros de la intersección de dos conjuntos de Cantor.

Primero asumen tanto son subconjuntos de espacio euclidiano 1-dimensional.

Entonces son subconjuntos de espacio euclidiano 2-dimensional.



Figura 25. Intersección de 2 conjuntos de Cantor. . Tomado de <http://classes.yale.edu/fractals/>.

Se denota un conjunto de Cantor por H y los tercios medio Cantor establecidos por T .

Recordemos la fórmula intersección: para casi todas las colocaciones de H y T en el espacio E -dimensional,

$$\dim(H \cap T) = \dim(H) + \dim(T) - E$$

Para $E = 1$ esto se convierte

$$\dim(H \cap T) = \text{Log}(2) / \text{Log}(4) + \text{Log}(2) / \text{Log}(3) - 1 \approx 0.131$$

Para $E = 2$ esto se convierte

$$\dim(H \cap T) = \text{Log}(2) / \text{Log}(4) + \text{Log}(2) / \text{Log}(3) - 2 \approx -0,869$$

4. Calcular la dimensión contando cuadros de la intersección de un triángulo de Sierpinski y el producto de conjunto de Cantor.

En primer lugar asumir tanto son s

Conjuntos de espacio euclidiano 2-dimensional.

Entonces asumen tanto son subconjuntos de espacio euclidiano 3-dimensional.

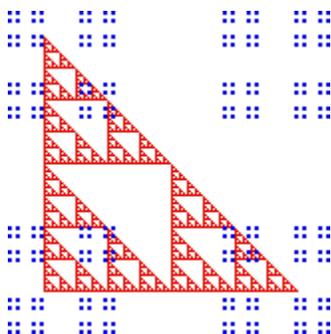


Figura 26. Intersección triángulo de Sierpinski y producto de conjunto de Cantor. Tomado de <http://classes.yale.edu/fractals/>.

Se denota el triángulo de Sierpinski por S y el producto de conjunto de Cantor por P.

Recordemos la fórmula de intersección : para casi todas las colocaciones de S y P en el espacio E dimensiones,

$$\dim(S \cap P) = \dim(S) + \dim(P) - E$$

Para E = 2 esto se convierte

$$\dim(S \cap P) = \text{Log}(3) / \text{Log}(2) + \text{Log}(4) / \text{Log}(3) - 2 \approx 0.847$$

Para E = 3 esto se convierte

$$\dim(S \cap P) = \text{Log}(3) / \text{Log}(2) + \text{Log}(4) / \text{Log}(3) - 3 \approx -0,153$$

5. Calcular la dimensión contando cuadros de la intersección de un producto de Cantor y un conjunto de Cantor.

En primer lugar asumir tanto son subconjuntos de espacio euclidiano 2-dimensional.

Entonces asumen tanto son subconjuntos de espacio euclidiano 3-dimensional.

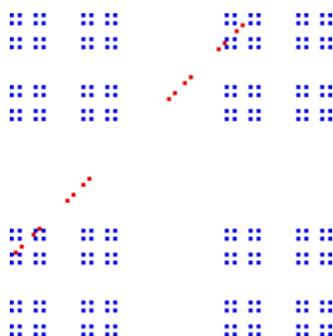


Figura 27. Intersección producto de cantor y un conjunto de Cantor. Tomado de <http://classes.yale.edu/fractals/>.

Denotemos el conjunto de Cantor establecidos por C y el producto Cantor por P.

Recordemos la fórmula cruce: para casi todas las colocaciones de S y P en el espacio E dimensiones,

$$\dim(C \cap P) = \dim(C) + \dim(P) - E$$

Para E = 2 esto se convierte

$$\dim(C \cap P) = \text{Log}(2) / \text{Log}(3) + \text{Log}(4) / \text{Log}(3) - 2 \approx -0,107$$

Para E = 3 esto se convierte

$$\dim(C \cap P) = \text{Log}(2) / \text{Log}(3) + \text{Log}(4) / \text{Log}(3) - 3 \approx -1,107$$

6. Calcular la dimensión contando cuadros de la intersección de un tetraedro de Sierpinski y un triángulo de Sierpinski.

Supongamos que ambos son subconjuntos de espacio euclidiano 3-dimensional.

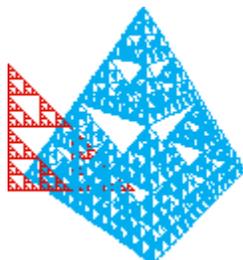


Figura 28. Intersección triángulo de Sierpinsky y tetraedro de Sierpinsky. . Tomado de <http://classes.yale.edu/fractals/>.

Denotar el tetraedro de Sierpinski por T y el triángulo por G.

Recordemos la fórmula intersección: para casi todas las colocaciones de T y G en el espacio E-dimensional,

$$\dim(T \cap G) = \dim(T) + \dim(G) - E$$

Para $E = 3$ esto se convierte

$$\dim(T \cap G) = \log(4) / \log(2) + \log(3) / \log(2) - 3 = \log(3) / \log(2) - 1 \approx 0,58496.$$

7. Calcular la dimensión contando cuadros de la intersección de un tetraedro de Sierpinski y un conjunto de Cantor.

Supongamos que ambos son subconjuntos de espacio euclidiano 3-dimensional.

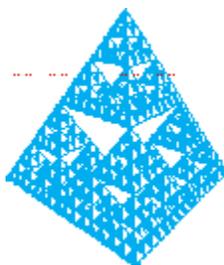


Figura 29. Intersección tetraedro de Sierpinsky y conjunto de Cantor. . Tomado de <http://classes.yale.edu/fractals/>.

Denotar el tetraedro de Sierpinski por T y el conjunto de Cantor por C .

Recordemos la fórmula intersección: para casi todas las colocaciones de T y C en el espacio E -dimensional,

$$\dim(T \cap C) = \dim(T) + \dim(C) - E$$

Para $E = 3$ esto se convierte

$$\dim(T \cap C) = \text{Log}(4) / \text{Log}(2) + \text{Log}(2) / \text{Log}(3) - 3 = \text{Log}(2) / \text{Log}(3) - 1 \approx -0.36907.$$

2.3 DIMENSIÓN DEL PRODUCTO

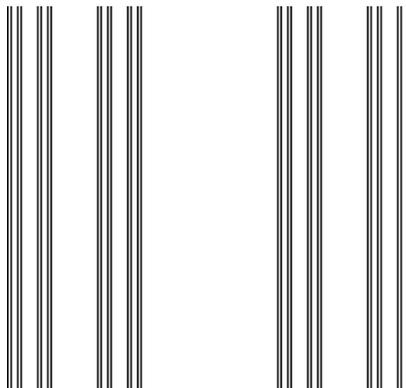


Figura 30. .Dimensión del conjunto de Cantor y Segmento de Línea. Tomado de <http://classes.yale.edu/fractals>.

El ejemplo del conjunto de Cantor y el segmento de línea sugiere una relación posible la cual es:

$$d_b(A \times B) = d_b(A) + d_b(B)$$

Aquí $A \times B$ denota el producto cartesiano de A y B . dónde:

$$A \times B = \{(a, b): a \text{ pertenece a } A \text{ y } b \text{ pertenece a } B\}$$

Por ejemplo, si A es un conjunto de Cantor que se encuentra en una recta y B es un segmento de línea que se encuentra en una recta, entonces $A \times B$ está en un plano, A en una dirección y B en otra dirección.

Prueba,

Supongamos que $N_A(r)$ es el número de cajas (segmentos de línea en este ejemplo) necesarios para cubrir a A , y $N_B(r)$ es el número de cajas (segmentos de línea) que se necesita para cubrir B .

Para cubrir $A \times B$, cajas de formularios elaborados a partir de las cajas que cubren A y las cajas que cubren B . En el ejemplo, formamos cuadrados a partir del producto de dos segmentos de línea, uno en la dirección x y uno en la dirección y .

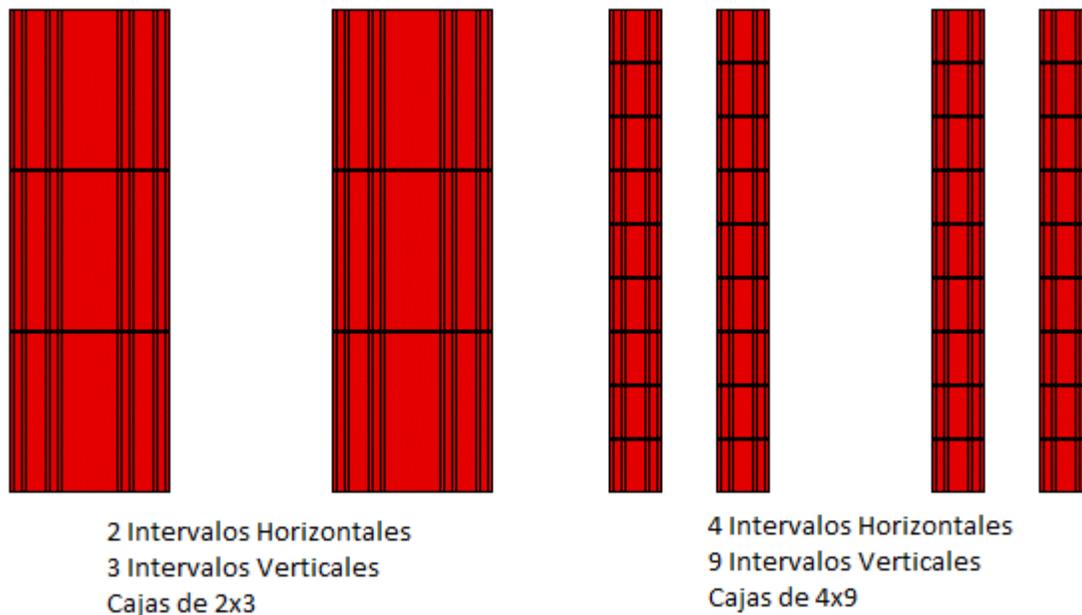


Figura 31. Ejemplo Dimensión por cajas Cantor-Segmento de Línea. Tomado de <http://classes.yale.edu/fractals>.

Entonces

$$N_{A \times B}(r) = N_A(r) \cdot N_B(r) \text{ y así}$$

$$\log(N_{A \times B}(r)) = \log(N_A(r) \cdot N_B(r)) = \log(N_A(r)) + \log(N_B(r))$$

En consecuencia,

$$\log(N_{A \times B}(r)) / \log(1/r) = \log(N_A(r)) / \log(1/r) + \log(N_B(r)) / \log(1/r)$$

Tomando el límite cuando $r \rightarrow 0$ da

$$d_b(A \times B) = d_b(A) + d_b(B)$$

Hemos hecho suposiciones simplificadas aquí, por ejemplo, que el mismo factor de escala r funciona tanto para A y B .

En un caso general, el resultado es

$$\dim(A \times B) \geq \dim(A) + \dim(B)$$

Aquí \dim se refiere a la *dimensión de Hausdorff*, matemáticamente más exigente, pero igual a d_s de formas exactamente auto-similares.

La fórmula Además se sostiene para los conjuntos de Cantor regulares¹⁰ (por ejemplo, que consiste en $N = 2$ piezas escaladas por un factor de $r < 1/2$). Así podemos calcular la dimensión de algunos conjuntos auto-afines¹¹.

Por ejemplo, el producto de los conjuntos de Cantor de dimensión $\log(2)/\log(3)$ y $\log(2)/\log(4)$ tiene dimensión $\log(2)/\log(3) + \log(2)/\log(4)$. (<http://classes.yale.edu/fractals/>, 6/09/2014)

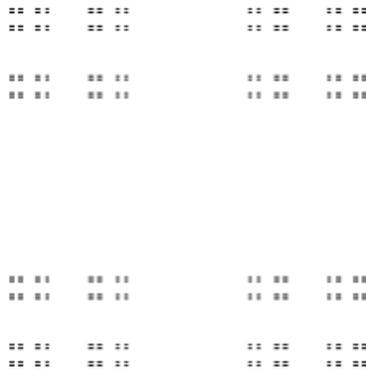


Figura 32. Dimensión del producto de conjuntos de Cantor Regulares. Tomado de <http://classes.yale.edu/fractals>.

2.3.1 Ejercicios de producto

1. Calcular la dimensión contando cuadros del producto de dos conjuntos de Cantor.

¿Qué cuadro de lado longitudes se debe utilizar? ¿Cuál es el patrón en relación $N(r)$ y r ?

¹⁰ Se parte de una figura inicial, se aplican reglas de transformación que generan varias nuevas figuras a partir de la inicial, a cada una de las nuevas figuras se le aplica de nuevo las reglas de transformación... y así hasta el infinito

¹¹ Un fractal es auto-afín cuando las piezas son escaladas por cantidades diferentes en dirección de X y en dirección de Y.

Seleccionamos los cuadrados de las longitudes laterales $1/3, 1/9, 1/27, 1/3^n, \dots, \dots$ tomando nota de la escala del conjunto de Cantor.

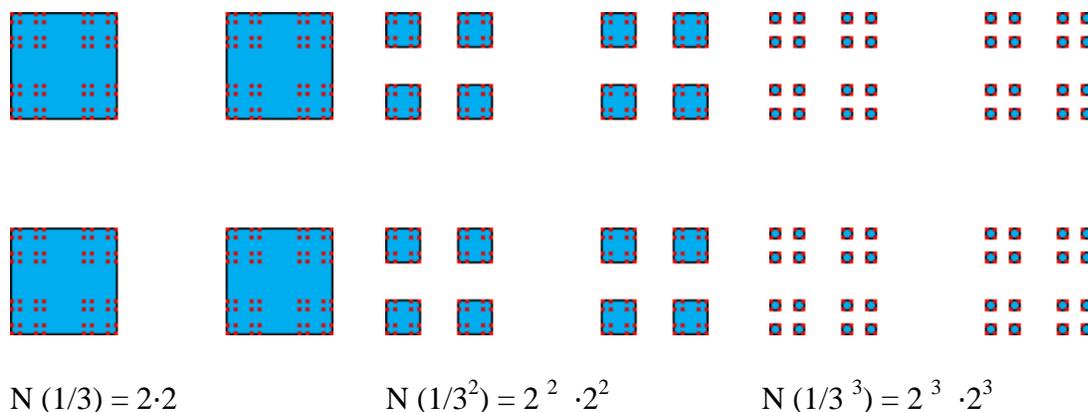


Figura 33. Producto de dos conjuntos de Cantor. . Tomado de <http://classes.yale.edu/fractals/>.

y, en general

$$N(1/3^n) = 2^n \cdot 2^n = 4^n$$

Conociendo $N(1/3^n)$ podemos calcular la dimensión contando cuadros:

$$\begin{aligned} d &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(N(1/3^n))}{\log(1/(1/3^n))} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(4^n)}{\log(3^n)} \\ &= \frac{\log(4)}{\log(3)} = \frac{2 \cdot \log(2)}{\log(3)} \end{aligned}$$

2. Calcular la dimensión contando cuadros del producto de un triángulo de Sierpinski y un segmento de línea.

¿Qué longitud de lado en el cubo se debe utilizar? ¿Cuál es el patrón en relación $N(r)$ y r ?

Seleccionamos cubos de longitudes de los lados $1/2, 1/4, 1/8, \dots, 1/2^n, \dots$ tomando nota de la escala del triángulo, cada cuadrado que cubre parte del triángulo es la cara superior del cubo que cubre parte del producto.

Para cubos de $1/2^n$ longitud de lado n , cada cubo cubre parte del triángulo de la cara superior y es la parte superior de una columna de 2^n cubos que cubren el producto.

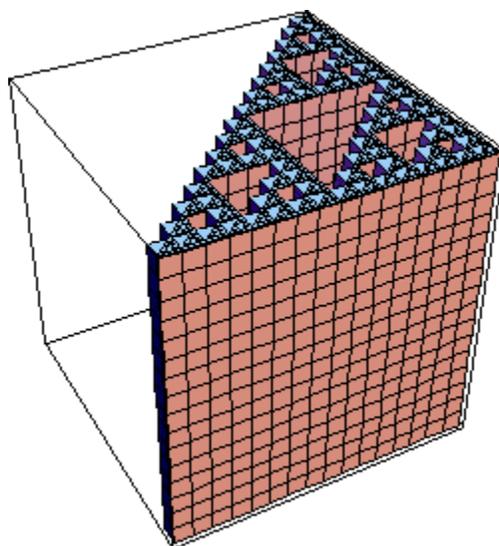


Figura 34. Producto triángulo de Sierpinsky y segmento de línea. Tomado de <http://classes.yale.edu/fractals/>.

Se necesitan 3^n cuadrados de lado $1/2^n$ para cubrir el triángulo y también $3^n \cdot 2^n$ cubos de longitud lateral $1/2^n$ para cubrir el producto. Es decir,

$$N(1/2^n) = 3^n \cdot 2^n$$

Conociendo $N(1/2^n)$ podemos calcular la dimensión contando cuadros:

$$\begin{aligned} d &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(N(1/2^n))}{\log(1/(1/2^n))} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(3^n \cdot 2^n)}{\log(2^n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{\log(3^n)}{\log(2^n)} + \frac{\log(2^n)}{\log(2^n)}) \\ &= (\log(3) / \log(2)) + 1 \end{aligned}$$

3. Calcular la dimensión contando cuadros del producto de triángulo Sierpinski y un conjunto de Cantor. El conjunto de Cantor es generado por el proceso de eliminación de la mitad central, dejando dos intervalos de tamaño de un cuarto de las originales.

¿Qué longitud debe tener de lado el cubo que se utiliza? ¿Cuál es el patrón en relación $N(r)$ y r ?

Seleccionamos cubos de lado longitudes de $1/4$, $1/16, \dots$, $1/4^n, \dots$ tomando nota de la escala de los tercios de las mitades del conjunto de Cantor.

Cada cuadrado que cubre parte del triángulo es la cara superior del cubo y que cubre parte del producto.

Para cubos de $1/4$ longitud del lado n , cada cubo cubriendo parte del triángulo de la cara superior es la parte superior de una columna de 2^n cubos que cubren el producto.

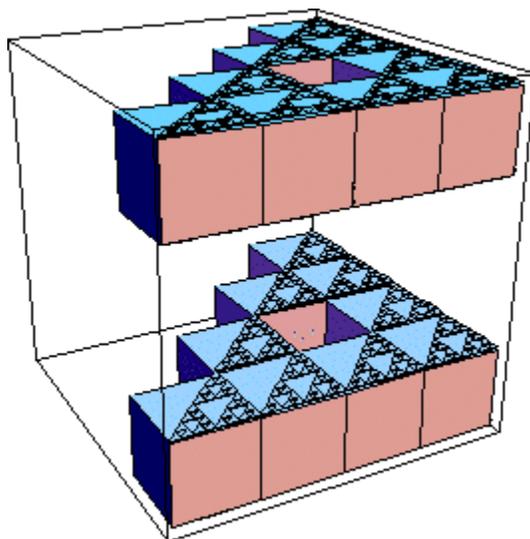


Figura 35. Producto triángulo de Sierpinky y un conjunto de Cantor. Tomado de <http://classes.yale.edu/fractals/>.

Porque necesitamos 9^n cuadrados de lado $1/4^n$ para cubrir el triángulo, necesitamos $9^n \cdot 2^n$ cubos de longitud de lado $1/4^n$ para cubrir el producto. Es decir,

$$N(1/4^n) = 9^n \cdot 2^n$$

Conociendo $N(1/4^n)$ podemos calcular la dimensión contando cuadros:

$$\begin{aligned} d &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(N(1/4^n))}{\log(1/(1/4^n))} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(9^n \cdot 2^n)}{\log(4^n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{\log(9^n)}{\log(4^n)} + \frac{\log(2^n)}{\log(4^n)}) \\ &= (\log(3) / \log(2)) + 1/2 \end{aligned}$$

2.4 DIMENSIÓN DE PROYECCIONES

¿Cómo es la dimensión de A relacionado con la dimensión de la proyección de A a B?

Se piensa en la proyección como la sombra de A que se arroja sobre B.

Para direcciones usuales de proyección, la dimensión de A es igual a la dimensión de la proyección de A más la dimensión de un subconjunto de A que se proyecta a un solo punto.

2.4.1 PROYECCIÓN DE OBJETOS EUCLIDIANOS

Algunas proyecciones típicas de objetos euclidianos.

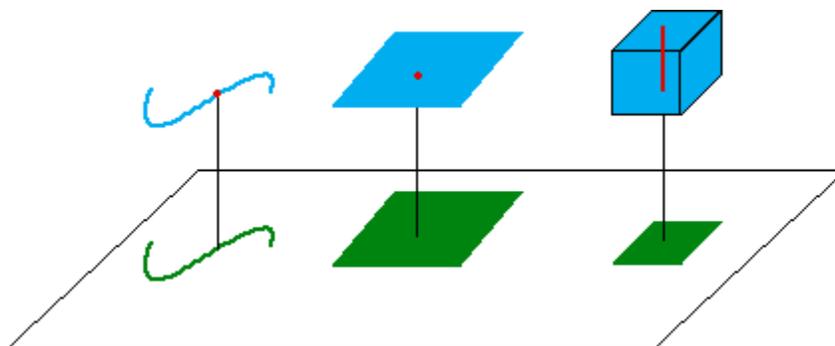


Figura 36. Proyecciones de Objetos Euclidianos. Tomado de <http://classes.yale.edu/fractals>.

Se consideran tres objetos euclidianos: una curva, un cuadrado y un cubo en el espacio tridimensional euclideo.

- Una curva en el espacio es una curva en el plano.
- Un cuadrado en el espacio proyecta un cuadrado en el plano.
- Un cubo en el espacio proyecta un cuadrado en el plano.

Un punto de la curva en el plano viene de un punto de la curva en el espacio. En cuanto a dimensiones, $1 + 0 = 1$.

Un punto característico del cuadrado en el plano viene de un punto en el cuadrado en el espacio. En términos de dimensiones, $2 + 0 = 2$.

Un punto típico del cuadrado en el plano proviene de un segmento de línea en el cubo en el espacio. En términos de dimensiones, $2 + 1 = 3$.

Algunas colocaciones especiales de las formas euclidianas pueden dar resultados diferentes. Por ejemplo, si un lado del cuadrado es perpendicular al plano, la proyección del cuadrado es una línea en el plano.

Un punto característico de la línea en el plano proviene de un segmento de línea en el cuadrado en el espacio. En cuanto a dimensiones, $1 + 1 = 2$.

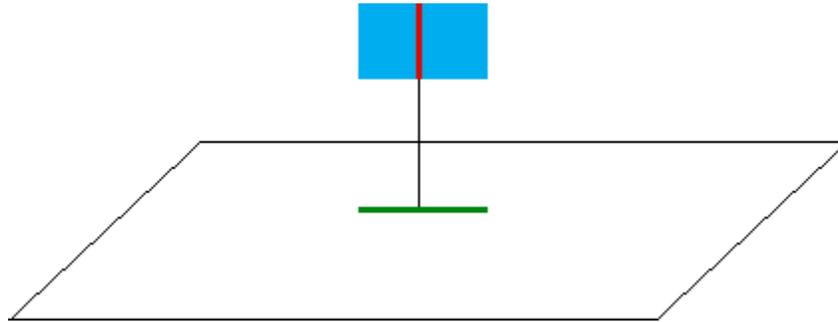


Figura 37. Conservación de la dimensión. Tomado de <http://classes.yale.edu/fractals>.

Observamos una *conservación de la dimensión*:

$$\dim(\text{proyección}) + \dim(\text{qué se proyecta a un punto}) = \dim(\text{objeto})$$

2.4.2 PROYECCIONES DE GRÁFICOS FRACTALES

Aquí se va a observar que la regla anterior es violada por algunas proyecciones de gráficos fractales.

Aquí vemos un gráfico de movimiento browniano unidimensional.

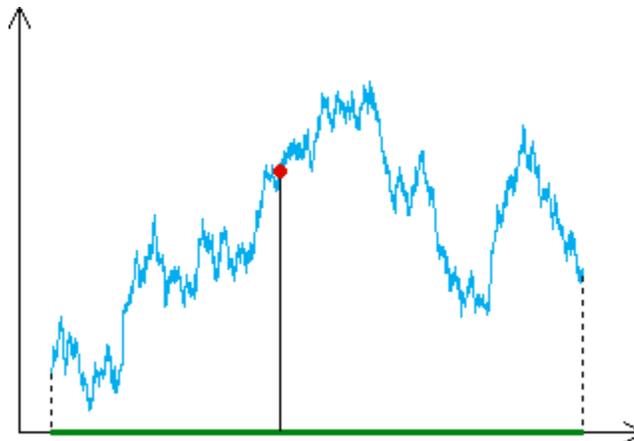


Figura 38. Movimiento Browniano unidimensional. Tomado de <http://classes.yale.edu/fractals>.

El término "unidimensional" se refiere al movimiento en una dimensión, el eje y en este caso. El gráfico es un registro de tiempo del movimiento vertical de una partícula al someterse a un paseo aleatorio en el eje y.

Este gráfico tiene dimensión $3/2$ y proyecta a un segmento de línea, de dimensión 1.

Debido a que es un gráfico, cualquier punto del segmento de línea viene de un punto de la gráfica.

En términos de dimensiones tenemos $1 + 0 < 3/2$, en contraste con la igualdad en el caso de la proyección de objetos euclidianos.

Se debe tener en cuenta que las proyecciones del gráfico a un segmento de línea en el eje Y, pero la mayoría de los puntos del segmento de línea vienen de un complicado conjunto de puntos.

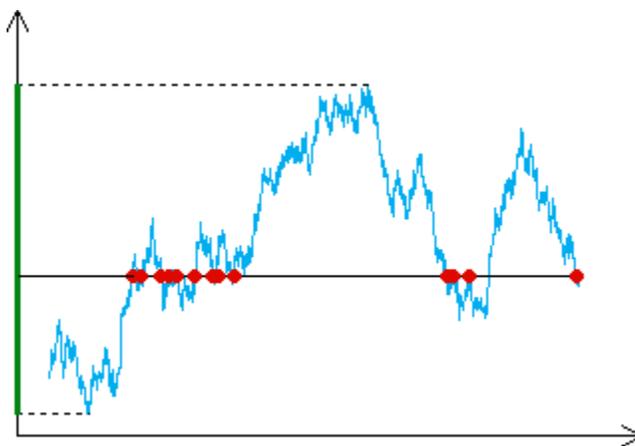


Figura 39. Proyección de un gráfico a un segmento de línea en el eje y. Tomado de <http://classes.yale.edu/fractals>.

2.4.3 PROYECCIONES DE LOS FRACTALES

Para ilustrar la gama de resultados, consideramos un ejemplo sencillo, el producto de 2 conjuntos Cantor establece.

Cada una está hecha de $N = 2$ piezas escalados por $r = 1/3$, por lo que la dimensión es $\log(2)/\log(3)$.

En consecuencia, el producto tiene dimensión $2 \times \log(2)/\log(3)$.

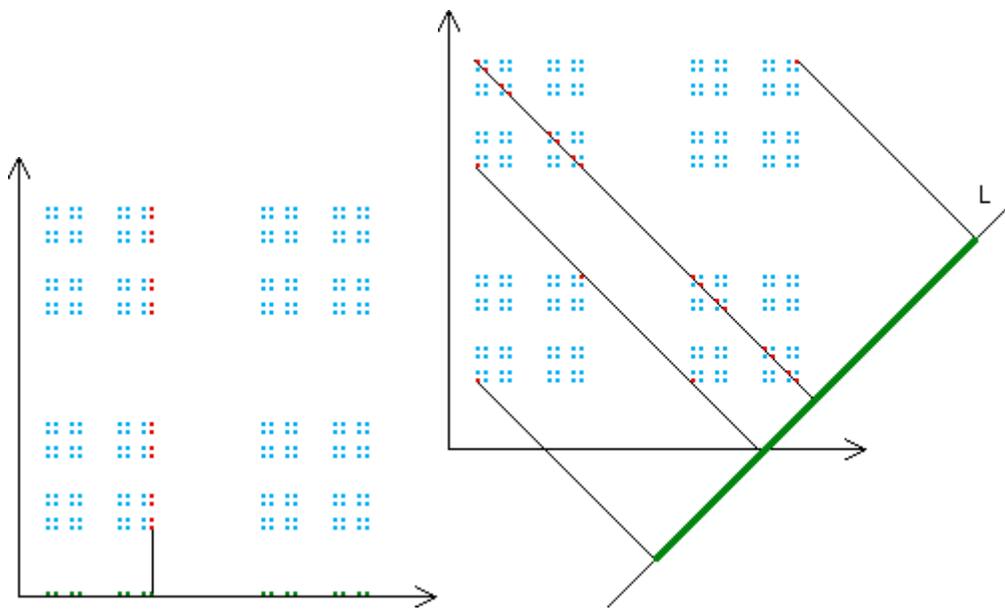


Figura 40. Proyecciones producto Conjunto de Cantor. Tomado de <http://classes.yale.edu/fractals>.

A la izquierda proyectamos el producto al eje x, de la obtención de dos conjuntos de Cantor.

Un punto típico en este conjunto de Cantor proviene de un conjunto de Cantor establecido en el producto.

En cuanto a dimensiones, $\text{Log}(2) / \text{Log}(3) + \text{log}(2) / \text{Log}(3) = 2 \cdot \text{Log}(2) / \text{Log}(3)$.

A la derecha proyectamos el producto a una línea diagonal, donde obtenemos un segmento de línea.

Algunos puntos de este segmento de línea provienen de puntos aislados en el producto, pero la mayoría provienen del conjunto de Cantor que establece el producto.

El conjunto de Cantor que se indica en el diagrama es un conjunto Cantor tercios-medios, por lo que en términos de dimensiones tenemos $1 + \text{log}(2) / \text{Log}(3) > 2 \cdot \text{Log}(2) / \text{Log}(3)$. (<http://classes.yale.edu/fractals/>, 6/09/2014)

3. CAPÍTULO 3

SOFTWARE

Existen diferentes software matemáticos que se utilizan para realizar, apoyar o ilustrar problemas matemáticos; en el mercado se encuentran tanto software libres como pagos.

Algunos software donde se pueden trabajar fractales son fractint, ultra fractal, geogebra, derive, fractal extreme, chaos pro.

Para este trabajo se ilustraran ejemplos realizados con geogebra.

3.1 GEOGEBRA

Es un software multiplataforma que ofrece la herramienta de vincular algebra y geometría dinámicamente con una visión concreta y conceptual, es capaz de representar figuras geométricas, gráficos de funciones y los modifica en tiempo real.

Además, GeoGebra brinda la posibilidad de insertar en un recuadro separado ecuaciones y fórmulas algebraicas relacionadas con la representación gráfica.

Una de las principales ventajas de Geogebra es su fácil instalación y es de descarga libre viene en versión para tabletas, escritorios y móviles, es un completo programa de geometría y álgebra, interfaz clara, sirve para una gran variedad de instrumentos de estudio.

Para graficar fractales se debe instalar la versión completa y no la de aplicación debido a que las de aplicación no traen todas las herramientas requeridas para graficar fractales.

El enlace donde se puede descargar cualquiera de las versiones es:
<http://www.geogebra.org/download>

El único prerequisite para instalar geogebra es tener instalado Java versión 1.4 o posterior, tiene un tamaño de 3,9MB

3.2 CONSTRUCCIÓN DE FRACTALES

Antes de generar las operaciones con fractales se realizara la construcción de ellos de manera individual, al tener estas estas herramientas permitirá realizar más fácil el proceso de las operaciones entre ellos.

- **Triángulo de Sierpinsky:**

Pasos a seguir



1. **Abrir Geogebra:** Hacer doble clic sobre el icono
2. **Definir un triángulo de lado el segmento AB:** Teclar en el campo entrada: $A=(6,0)$

Teclar en el campo entrada: $B=(0,6)$

Generar con la opción polígono el triángulo $T=(A,B,0)$, siendo 0 el origen

3. **Generamos los triángulos correspondientes a la etapa 1:** Elegimos la herramienta Punto Medio:



- Marcamos los puntos A y B. Se obtiene F.
- Marcamos los puntos A y C. Se obtiene D.
- Marcamos los puntos B y C. Se obtiene E.

Creamos el triángulo T1 cuyos vértices son los tres puntos obtenidos:

- Seleccionamos la herramienta triángulo
- Hacemos clic en los puntos D, E, F, D.

4. Crear una herramienta que sea Sierpinski para repetir el proceso sobre cualquier triángulo: Elegir del menú Herramientas la opción Creación de Herramientas Nueva.

En la pestaña Objetos de Salida incluir D,E,F,T1.

En la pestaña Objetos de Entrada incluir A y B.

En la pestaña Nombre e Icono elegir Sierpinski1.

Pulsar sobre el botón Concluido.

Generar el triángulo de Sierpinski de orden 2, 3 y 4

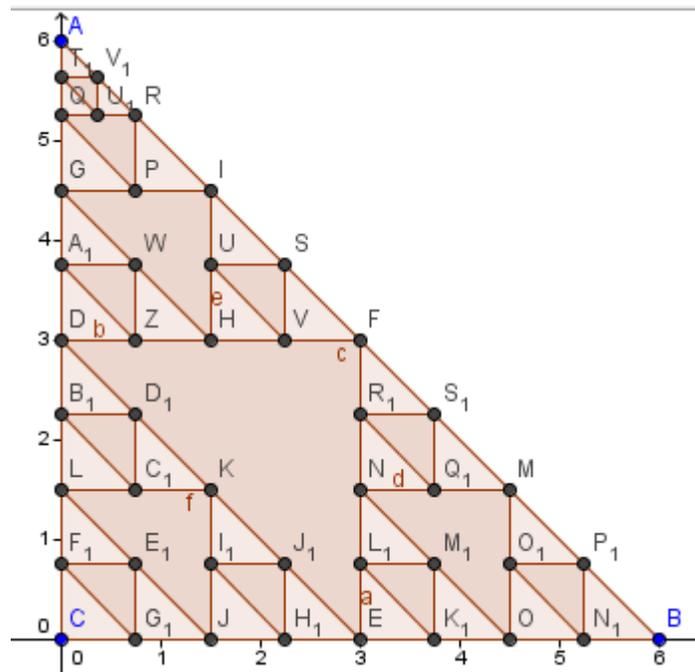


Figura 41. Construcción Triangulo de Sierpinsky.

- **Conjunto de Cantor**

Pasos a seguir



- 1. Abrir Geogebra:** Hacer doble clic sobre el icono
- 2. Para construir el conjunto de Cantor:**

Definir un segmento AB: Teclear en el campo entrada: $A=(-4,2)$
 Teclear en el campo entrada: $B=(4,2)$
 Crear el segmento $a=\text{Segmento } [A, B]$ con ayuda de la barra de herramientas
- 3. Generamos los segmentos de la etapa 1:** Tecleamos en el campo entrada:

$C=A$
 $D=A+1/3*(B-A)$
 $E=A+2/3*(B-A)$
 $F=B$
 $b=\text{Segmento } [C, D]$
 $c=\text{Segmento } [E, F]$
4. Definida esta etapa vamos a automatizar el proceso seguido definiendo una herramienta que permita realizar todos los pasos seguidos.
- 5. ACCIONES**
- 6. Creamos una herramienta que se llamará Cantor1:** Seleccionar del menú Herramientas la opción Creación de Herramientas nueva.

En la pestaña Objetos de Salida elegimos C, D, E, F, b, c
 En la pestaña Objetos de entrada dejamos los puntos A y B
 En la pestaña Nombre e Icono elegimos Cantor1
 Pulsamos sobre el botón Concluido.



Figura 42. Vista pantalla de herramienta construida Cantor.

Disponemos ya de una nueva herramienta que permite aplicar a dos puntos los pasos seguidos en la construcción de la etapa 1.

7. Para construir la etapa 2 basta:

Elegir los puntos C y D teniendo seleccionada la herramienta Cantor1 recientemente creada

Elegir los puntos E y F teniendo seleccionada la herramienta Cantor1 recientemente creada.

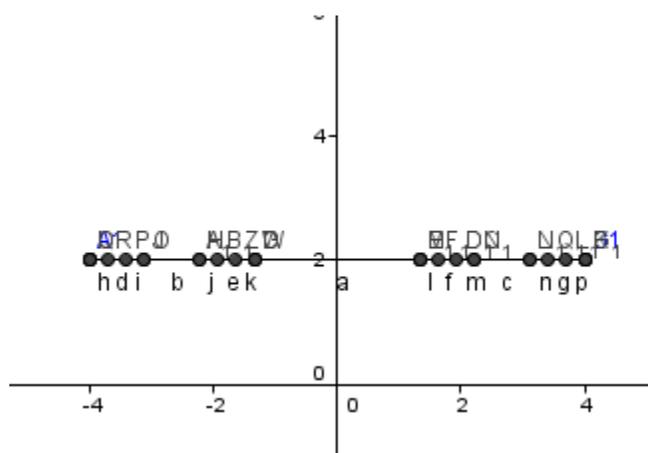


Figura 43 Construcción conjunto de cantor en geogebra.

8. Para construir la etapa 3 se repetiría el proceso para los segmentos GH, IJ, KL y MN.
9. Nota: Si se quiere eliminar los puntos y los nombres de los objetos utilizados basta con elegir el menú Edita y la opción Propiedades. Teniendo seleccionados todos los puntos desmarcar la opción Muestra Objeto y Muestra Rótulo y teniendo seleccionados todos los segmentos desmarcar únicamente la opción Muestra Rótulo.

- **Curva de Koch**

Pasos a seguir



1. Abrir Geogebra: Hacer doble clic sobre el icono

2. Modificar el aspecto de la vista gráfica:

Elegir Menú Edita. Desmarcar opción ejes

Elegir Menú Edita. Desmarcar opción cuadrícula.

3. Definir un segmento de lados A y B:

Teclear en el campo entrada: $A = (-3,0)$

Teclear en el campo entrada: $B = (0,3)$

Teclear en el campo entrada: $a = \text{Segmento } [A, B]$

4. Obtenemos el punto C:

$c = \text{Circulo de centro } A \text{ y radio } a/3$

C intersección de c y a.

Ocultamos el círculo c

5. Obtenemos el Punto D:

d=Círculo de centro B y radio $a/3$

D intersección de d y a.

Ocultamos el círculo d

6. Obtenemos el punto E y F:

e=Círculo de centro C y radio $a/3$

f=Círculo de centro D y radio $a/3$

Ocultar punto F.

Ocultar círculo e.

Ocultar círculo f.

Dibujamos segmento AC, CE, ED, DB

Dibujamos segmento CD de color blanco y grosor 7.

Creamos la herramienta que permite realizar los pasos sobre cualquier segmento

Elegimos en el menú Herramientas la opción Creación de nueva herramienta. Seleccionamos:

Objetos de salida: Puntos C, D, E y Segmentos b, g, h, i, j

Objetos de entrada: Segmento a. Eliminamos puntos A y B.

Dar un nombre a la herramienta.

Pulsar sobre el botón Concluir

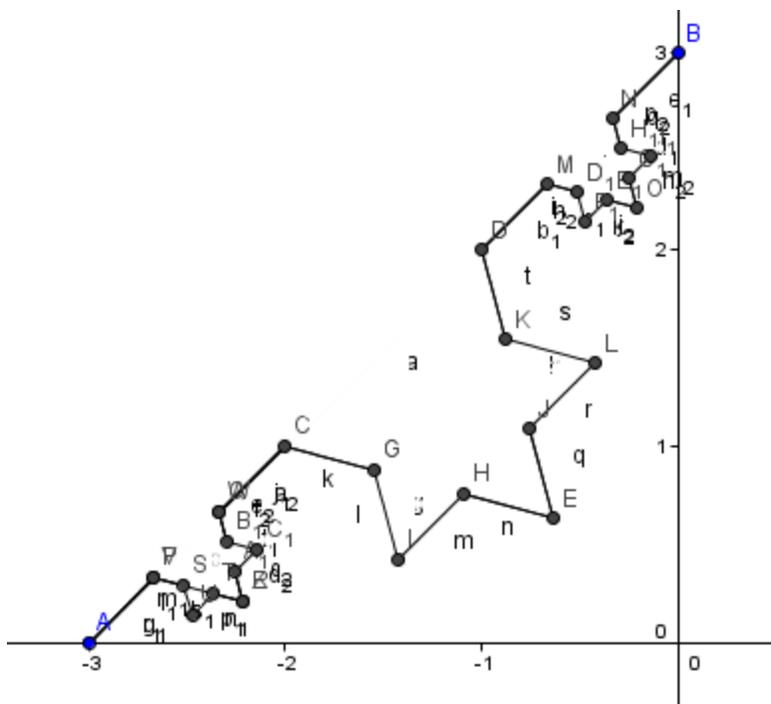


Figura 44. Construcción Curva de Koch

- Copo de nieve Koch

Pasos a seguir



1. **Abrir Geogebra:** Hacer doble clic sobre el icono

2. **Modificar el aspecto de la vista gráfica:**

Elegir Menú Edita. Desmarcar opción ejes

Elegir Menú Edita. Desmarcar opción cuadrícula.

3. **Definir un segmento de lados A y B:**

Teclear en el campo entrada: A= (-3,0)

Teclear en el campo entrada: B= (0,3)

Teclear en el campo entrada: a=Segmento [A, B]

4. Obtenemos el punto C:

c=Círculo de centro A y radio $a/3$

C intersección de c y a.

Ocultamos el círculo c

5. Obtenemos el Punto D:

d=Círculo de centro B y radio $a/3$

D intersección de d y a.

Ocultamos el círculo d

6. Obtenemos el punto E y F:

e=Círculo de centro C y radio $a/3$

f=Círculo de centro D y radio $a/3$

Ocultar punto F.

Ocultar círculo e.

Ocultar círculo f.

Dibujamos segmento AC, CE, ED, DB

Dibujamos segmento CD de color blanco y grosor 7.

Creamos la herramienta que permite realizar los pasos sobre cualquier segmento

Elegimos en el menú Herramientas la opción Creación de nueva herramienta. Seleccionamos:

Objetos de salida: Puntos C, D, E y Segmentos b, g, h, i, j

Objetos de entrada: Segmento a. Eliminamos puntos A y B.

Dar un nombre a la herramienta.

Pulsar sobre el botón Concluir

7. Construimos un triángulo equilátero a partir del segmento construido con los puntos A y B.
8. Con la herramienta que ya tenemos creada, la aplicamos en los segmentos del triángulo.
9. Y utilizando la herramienta repetidas veces se va construyendo el copo de nieve de Koch.

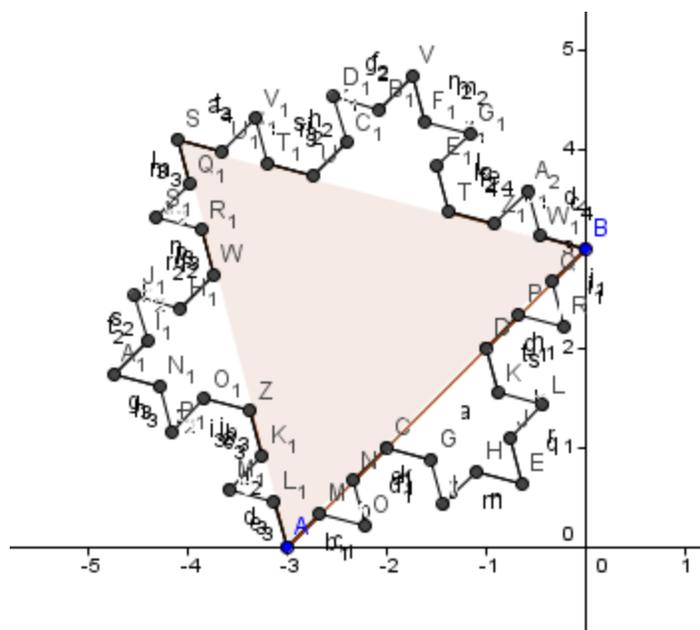


Figura 45. Construcción copo de nieve Koch

3.3 EJEMPLOS DE DIMENSIONES FRACTALES CON GEOGEBRA

Anteriormente se construyeron herramientas para construir los fractales las cuales ayudaran a realizar las construcciones de la unión, intersección, producto y proyección. Las herramientas construidas quedan en la barra de herramientas y se les puede dar el nombre que desea el usuario.

3.3.1 UNIÓN DE FRACTALES

Para realizar la unión entre dos fractales o entre un fractal y un objeto euclidiano no importa cual se construya primero el resultado es igual para $A \cup B$, como ya se tienen las herramientas construidas de algunos fractales esto nos hace la construcción de la unión mucho mas fácil, debido a que no se tiene que reconstruir todas las veces el fractal, únicamente se utiliza la herramienta que ya se ha construido y que se encuentran en las barra de herramientas. A continuación se realizara un ejemplo.

Dibujamos con Geogebra la unión entre el triángulo de Sierpinski y un segmento de línea.

Pasos a seguir



5. Abrir Geogebra: Hacer doble clic sobre el icono

6. Definir un triángulo de lado el segmento AB: Teclar en el campo entrada: $A=(6,0)$

Teclar en el campo entrada: $B=(0,6)$

Generar con la opción polígono el triángulo $T=(A, B, 0)$

7. Generamos los triángulos correspondientes a la etapa 1: Elegimos la herramienta Punto Medio:



- Marcamos los puntos A y B. Se obtiene F.
- Marcamos los puntos A y C. Se obtiene D.
- Marcamos los puntos B y C. Se obtiene E.

Creamos el triángulo t1 cuyos vértices son los tres puntos obtenidos:

- Seleccionamos la herramienta triángulo
- Hacemos clic en los puntos D, E, F, D.

8. Crear una herramienta que sea Sierpinski para repetir el proceso sobre cualquier triángulo: Elegir del menú Herramientas la opción Creación de Herramientas Nueva.

En la pestaña Objetos de Salida incluir D, E, F, T1.

En la pestaña Objetos de Entrada incluir A y B.

En la pestaña Nombre e Icono elegir Sierpinski1.

Pulsar sobre el botón Concluido.

Generar el triángulo de Sierpinski de orden 2, 3 y 4

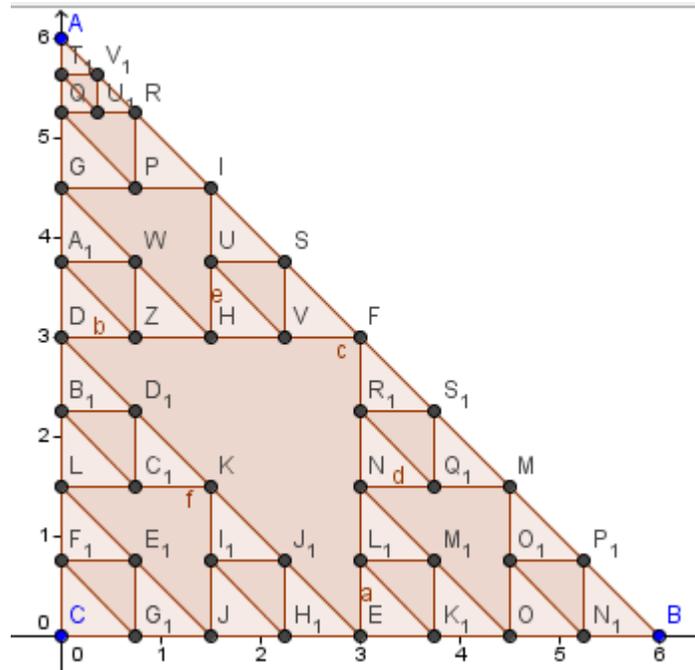


Figura 46. Construcción Triángulo de Sierpinsky.

Se debe recordar que al tener ya la herramienta construida la construcción se reduce a menos pasos.

9. Realizar el segmento:

Teclar en el campo entrada: segmento $[C, B + (10,0)]$

Para finalizar en vista grafica colocamos los ejes invisibles.

A continuación obtenemos la unión entre el triángulo de Sierpinsky y un segmento de línea.

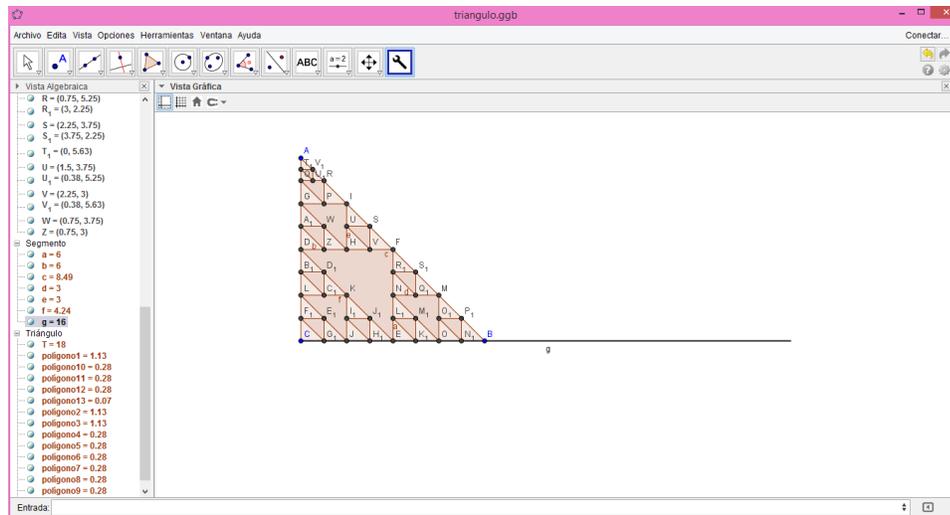


Figura 47. Vista de la Unión Triángulo de Sierpinsky segmento de línea.

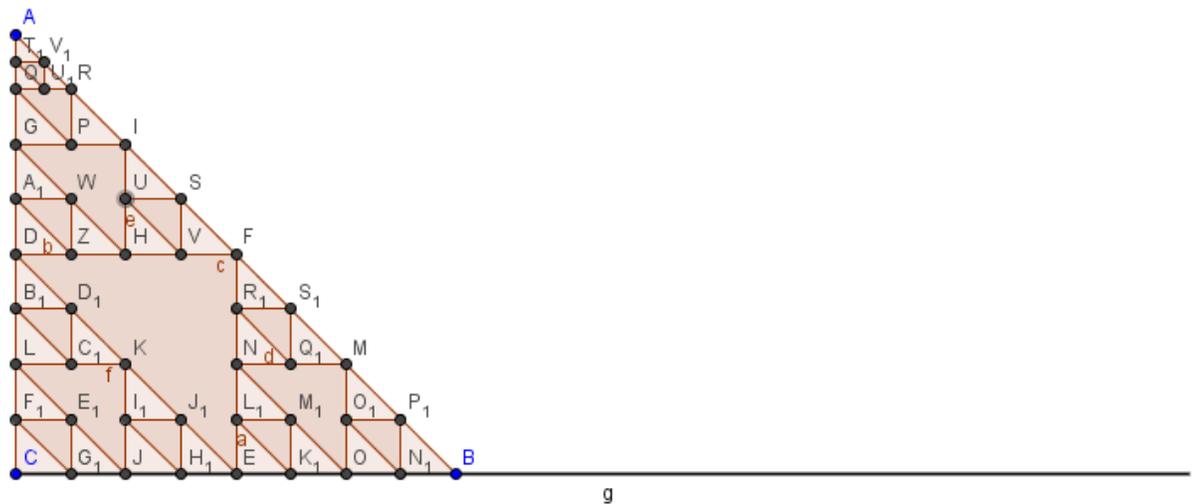


Figura 48 Unión entre triángulo de Sierpinsky y segmento de línea.

Nota: Con geogebra se pueden realizar todas las uniones entre fractales y objetos euclidianos.

3.2.2 INTERSECCIÓN DE FRACTALES

Para realizar la intersección entre dos fractales o entre un fractal y un objeto euclidiano no importa cual se construya primero el resultado es igual para $A \cap B$, como ya se tienen las herramientas construidas de algunos fractales esto nos hace la construcción de la intersección mucho más fácil, debido a que no se tiene que reconstruir todas las veces el fractal, únicamente se utiliza la herramienta que ya se ha construido y que se encuentran en las barra de herramientas. A continuación se realizará un ejemplo.

Dibujamos con Geogebra la intersección entre el triángulo de Sierpinski y el conjunto de cantor.

Pasos a seguir



1. **Abrir Geogebra:** Hacer doble clic sobre el icono
2. **Construir el conjunto de Cantor**
3. **Definir un segmento AB:** Teclear en el campo entrada: $A=(-4,2)$
 Teclear en el campo entrada: $B=(4,2)$
 Crear el segmento $a=\text{Segmento } [A, B]$ con ayuda de la barra de herramientas
4. **Generamos los segmentos de la etapa 1:** Tecleamos en el campo entrada:
 $C=A$
 $D=A+1/3*(B-A)$
 $E=A+2/3*(B-A)$
 $F=B$
 $b=\text{Segmento } [C, D]$
 $c=\text{Segmento } [E, F]$
5. Definida esta etapa vamos a automatizar el proceso seguido definiendo una herramienta que permita realizar todos los pasos seguidos.
6. **ACCIONES**
7. **Creamos una herramienta que se llamará Cantor1:** Seleccionar del menú Herramientas la opción Creación de Herramientas nueva.
 En la pestaña Objetos de Salida elegimos C, D, E, F, b, c

En la pestaña Objetos de entrada dejamos los puntos A y B

En la pestaña Nombre e Icono elegimos Cantor1

Pulsamos sobre el botón Concluido.



Figura 49. Vista pantalla de herramienta construida cantor.

Disponemos ya de una nueva herramienta que permite aplicar a dos puntos los pasos seguidos en la construcción de la etapa 1.

8. Para construir la etapa 2 basta:

Elegir los puntos C y D teniendo seleccionada la herramienta Cantor1 recientemente creada

Elegir los puntos E y F teniendo seleccionada la herramienta Cantor1 recientemente creada.

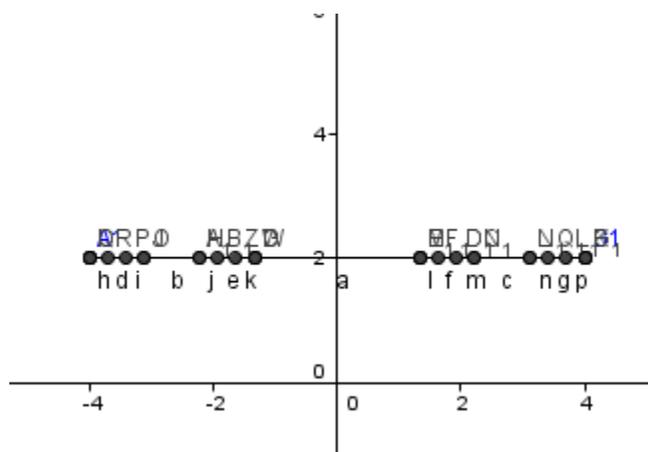


Figura 50 Construcción conjunto de Cantor en geogebra.

9. Para construir la etapa 3 se repetiría el proceso para los segmentos GH, IJ, KL y MN.
10. Nota: Si se quiere eliminar los puntos y los nombres de los objetos utilizados basta con elegir el menú Edita y la opción Propiedades. Teniendo seleccionados todos los puntos desmarcar la opción Muestra Objeto y Muestra Rótulo y teniendo seleccionados todos los segmentos desmarcar únicamente la opción Muestra Rótulo.

Se debe recordar que al tener ya la herramienta construida la construcción se reduce a menos pasos.

11. **Construir el triángulo de Sierpinsky:** Se deben seguir los pasos del 2 al 4 de la construcción de triángulo realizada en el ejemplo anterior; teniendo en cuenta que las etiquetas no se repitan.

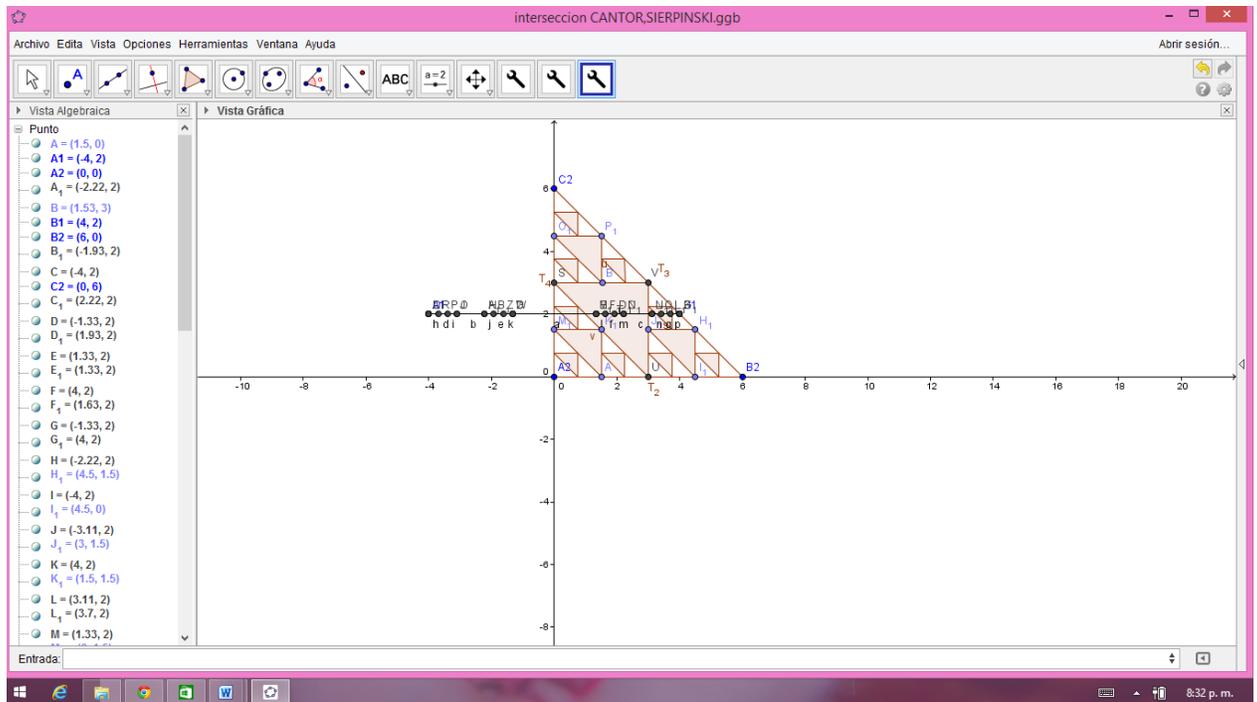


Figura 51. Vista Geogebra Intersección Conjunto de Cantor y Triangulo de Sierpinsky.

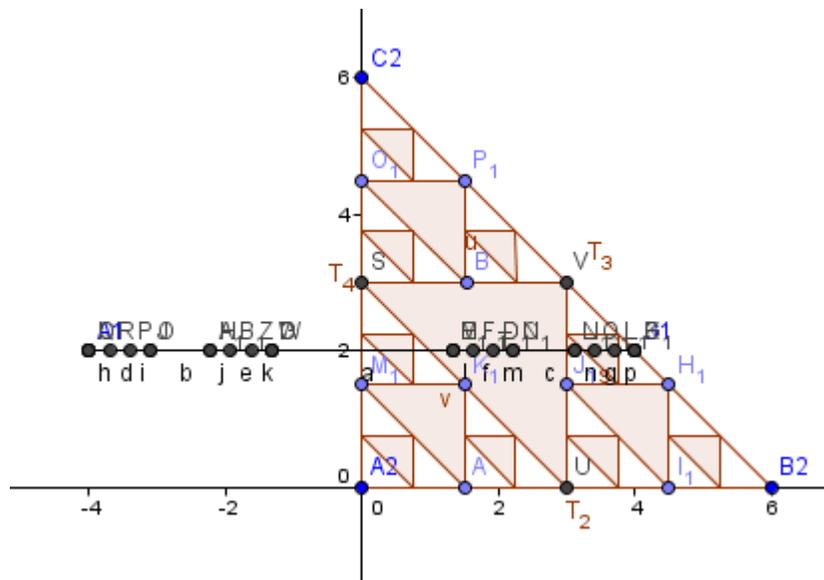


Figura 52. Intersección Conjunto de Cantor y triángulo de Sierpinsky.

Nota: Con geogebra se pueden realizar todas las intersecciones entre fractales y objetos euclidianos

3.2.3 PRODUCTO DE FRACTALES

Para realizar el producto entre dos fractales o entre un fractal y un objeto euclidiano se debe tener en cuenta cuál de ellos se quiere construir primero por comodidad del usuario, debido que se hace mas fácil la construcción dependiendo del fractal que escojamos primero. Como ya se tienen las herramientas construidas de algunos fractales esto nos hace la construcción del producto mucho mas fácil, debido a que no se tiene que reconstruir todas las veces el fractal, únicamente se utiliza la herramienta que ya se ha construido y que se encuentran en las barra de herramientas. A continuación se realizará un ejemplo.

Dibujamos con geogebra el producto del conjunto de Cantor y un segmento de línea vertical.

Pasos a seguir



1. **Abrir Geogebra:** Hacer doble clic sobre el icono
2. **Construir el conjunto de Cantor**
3. **Definir un segmento AB:** Teclear en el campo entrada: $A=(-4,0)$
 Teclear en el campo entrada: $B=(4,0)$
 Crear el segmento $a=\text{Segmento } [A, B]$ con ayuda de la barra de herramientas
4. **Generamos los segmentos de la etapa 1:** Tecleamos en el campo entrada:
 $C=A$
 $D=A+1/3*(B-A)$
 $E=A+2/3*(B-A)$
 $F=B$
 $b=\text{Segmento } [C, D]$
 $c=\text{Segmento } [E, F]$
5. **Creamos una herramienta que se llamará Cantor1:** Seleccionar del menú Herramientas la opción Creación de Herramientas nueva.

En la pestaña Objetos de Salida elegimos C, D, E, F, b, c

En la pestaña Objetos de entrada dejamos los puntos A y B

En la pestaña Nombre e Icono elegimos Cantor1

Pulsamos sobre el botón Concluido.

6. Para construir la etapa 2 basta:

Elegir los puntos C y D teniendo seleccionada la herramienta Cantor1 recientemente creada

Elegir los puntos E y F teniendo seleccionada la herramienta Cantor1 recientemente creada.

7. Para construir la etapa 3 se repetiría el proceso para los segmentos GH, IJ, KL y MN.

8. Construir el segmento vertical

9. Teclar en el campo entrada: $A2=(-4,4)$

Teclar en el campo entrada: $B2=(4,4)$

Crear el segmento $q=$ Segmento $[A, A2]$ con ayuda de la barra de herramientas.

Seleccionamos la herramienta Cantor de la barra de Herramientas y elegimos los puntos A y A1. Se repite el proceso con los segmentos creados a partir de A y A1.

10. Creamos una herramienta que se llamará Segmento: Seleccionar del menú Herramientas la opción Creación de Herramientas nueva.

En la pestaña Objetos de Salida elegimos q

En la pestaña Objetos de entrada dejamos los puntos A y A1

En la pestaña Nombre e Icono elegimos Segmento

Pulsamos sobre el botón Concluido.

11. Generamos los segmentos de la etapa 1:

12. Para construir la etapa 1 se repetiría el proceso para los puntos (P, P1), (Q, Q1), (R, R1)....

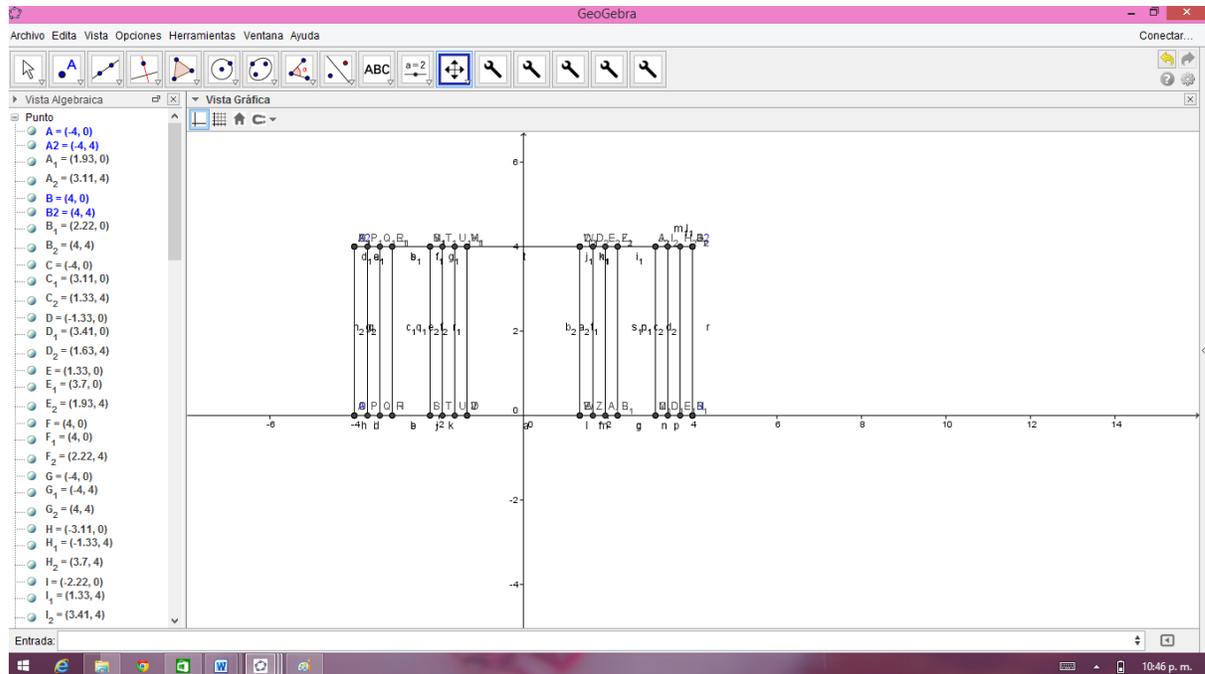


Figura 53. Vista geogebra producto conjunto de Cantor y Segmento vertical.

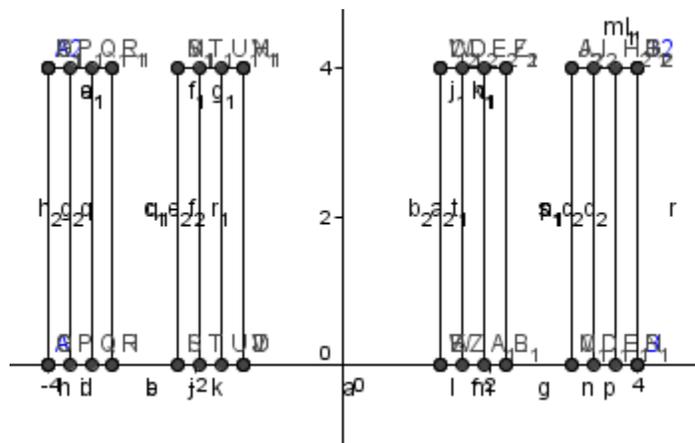


Figura 54. Producto conjunto de Cantor y segmento vertical.

Nota: Con geogebra se pueden realizar todos los productos de fractales y objetos euclidianos

3.2.4. PROYECCIÓN DE FRACTALES

Para realizar la proyección entre dos fractales o entre un fractal y un objeto euclidiano se debe tener en cuenta cuál de ellos se debe construir primero y en qué

dirección deseamos proyectarlos, como ya se tienen las herramientas construidas de algunos fractales esto nos hace la construcción de la proyección mucho más fácil, debido a que no se tiene que reconstruir todas las veces el fractal, únicamente se utiliza la herramienta que ya se ha construido y que se encuentran en la barra de herramientas. A continuación se realizará un ejemplo.

Dibujamos con geogebra la proyección del producto de un conjunto de Cantor sobre el eje X.

Pasos a seguir



1. **Abrir Geogebra:** Hacer doble clic sobre el icono
2. **Construir el producto del conjunto de Cantor sobre el eje Y y sobre el eje X**
Definir un segmento AB: Teclar en el campo entrada: $A=(1,0)$
 Teclar en el campo entrada: $B=(9,0)$
 Crear el segmento $a=\text{Segmento } [A, B]$ con ayuda de la barra de herramientas
3. **Generamos los segmentos de la etapa 1:** Teclamos en el campo entrada:
 $C=A$
 $D=A+1/3*(B-A)$
 $E=A+2/3*(B-A)$
 $F=B$
 $b=\text{Segmento } [C, D]$
 $c=\text{Segmento } [E, F]$
4. **Creamos una herramienta que se llamará Cantor1:** Seleccionar del menú Herramientas la opción Creación de Herramientas nueva.
 En la pestaña Objetos de Salida elegimos C, D, E, F, b, c
 En la pestaña Objetos de entrada dejamos los puntos A y B
 En la pestaña Nombre e Icono elegimos Cantor1
 Pulsamos sobre el botón Concluido.
5. Para construir la etapa 2 basta:
 Elegir los puntos C y D teniendo seleccionada la herramienta Cantor1 recientemente creada

Elegir los puntos E y F teniendo seleccionada la herramienta Cantor1 recientemente creada.

6. Para construir la etapa 3 se repetiría el proceso para los segmentos GH, IJ, KL y MN. Tenga en cuenta que al tener la herramienta de Cantor ya creada solo se debe aplicar al eje X y al eje Y y solo se construye el segmento inicial en cada eje.
7. Se va a realizar el producto del conjunto de Cantor trazando rectas perpendiculares por cada punto del conjunto.
8. Colocamos puntos en las intersecciones de las rectas y así se encuentran los puntos del producto del conjunto de Cantor. Ocultamos las rectas perpendiculares para observar solo los puntos creados.
9. **Creamos la proyección del producto del conjunto de Cantor al eje X.** Para proyectar los puntos al eje X trazamos una perpendicular por los puntos encontrados al eje X, si realizamos el proceso repetidas veces se observara que se va formando un segmento sobre el eje X y esa es la proyección de nuestro producto. (en este caso las rectas que utilizamos para realizar el producto son las mismas que se proyectaran al eje X)

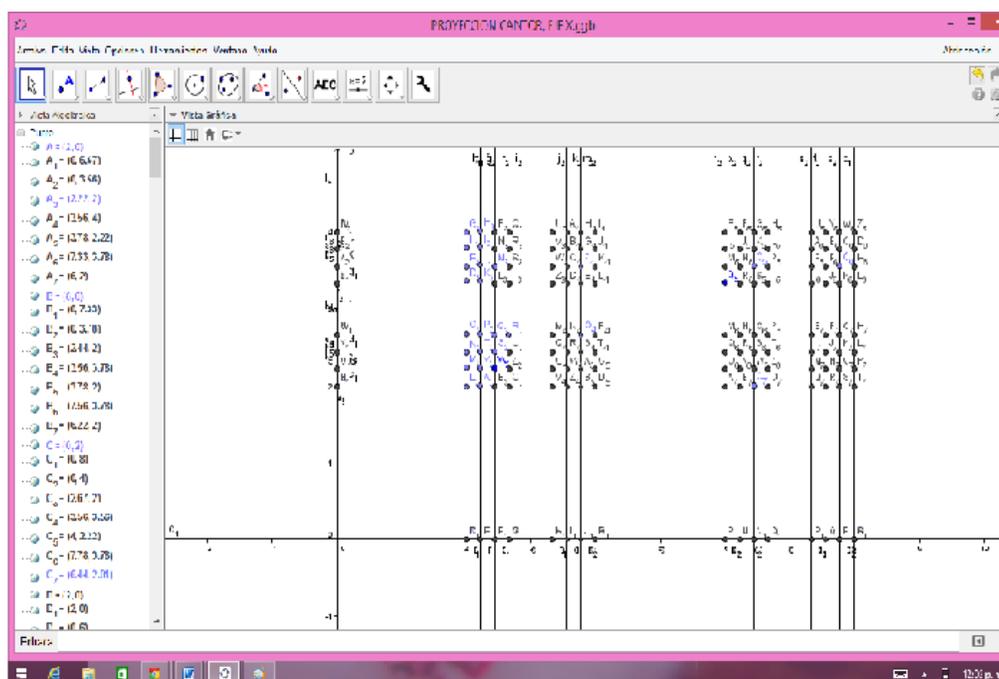


Figura 55. Vista geogebra proyección del producto del Conjunto de Cantor sobre el eje X.

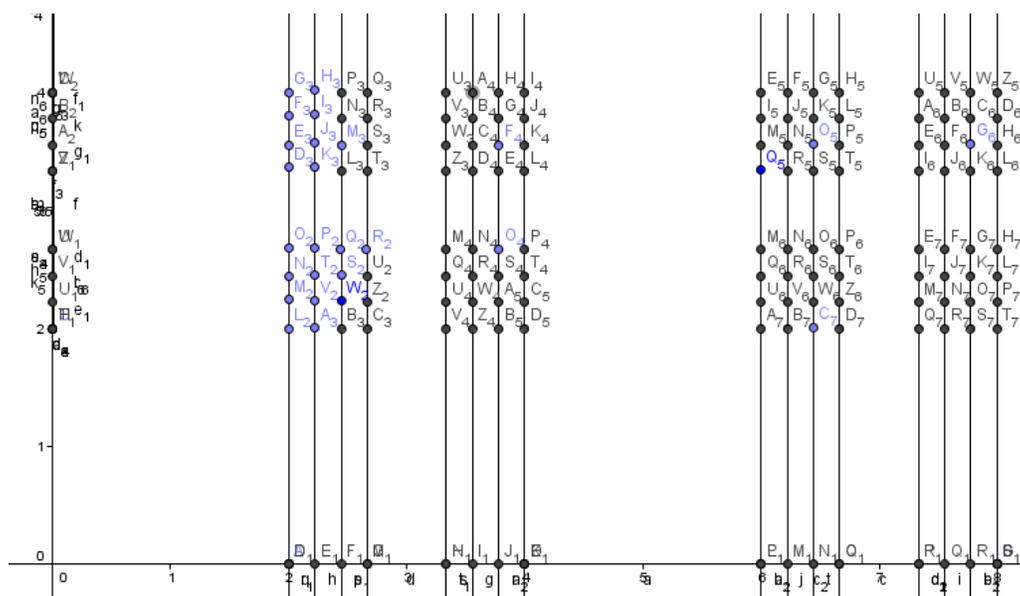


Figura 56. Proyección del producto del Conjunto de Cantor al eje X.

Con los ejemplos anteriores el usuario tiene las herramientas para poder construir fractales.

Para generar la unión o la intersección de dos conjuntos el usuario debe realizar la construcción en el mismo plano de los dos conjuntos, teniendo en cuenta las características de los mismos.

Para realizar el producto de dos conjuntos, se debe reproducir uno de los conjuntos repetidas veces.

Para realizar proyecciones se debe tener en cuenta a donde se quiere proyectar el conjunto y las características del conjunto a proyectar.

Nota: Todas las proyecciones entre un fractal y un objeto euclidiano se pueden realizar, pero no todas las proyecciones entre dos fractales se pueden realizar con geogebra debido a que faltan herramientas.

CONCLUSIONES

La elaboración de este trabajo tuvo como objetivo estudiar el álgebra de las dimensiones fractales como la unión, intersección, producto y proyección de objetos fractales.

Se mostró el trabajo con geogebra en la construcción de fractales, la unión, intersección, producto y proyección dejando como herramienta didáctica para trabajar fractales y la cual permite conocer una manera distinta del trabajo con geogebra.

Se encontró de manera analítica la dimensión fractal de la unión, la intersección y el producto de algunos fractales clásicos, como la proyección de unos sobre otros.

Las conclusiones que se derivan del trabajo de investigación que se presenta, me permite estudiar conceptos que no se abarcan durante el proceso de formación y a su vez llenar vacíos mediante la aclaración de estos conceptos y definiciones.

Este trabajó aporta a la formación mediante el estudio de nuevos conceptos y nuevas herramientas para desempeñar una mejor labor docente debido a que brinda una nueva mirada para trabajar con los estudiantes e incluirla en el proceso de aprendizaje en el aula.

Se deja el trabajo como aporte a la comunidad donde se muestra el estudio del algebra de las dimensiones fractales.

BIBLIOGRAFÍA

- BARNESLEY. (2012). *FRACTALS EVERYWHERE*. San Diego: Academic Press.
- BRUZUAL,R, D. (2005). *CALCULO INTEGRAL DE VARIAS VARIABLES*. Caracas.
- FALCONER. (1990). *FRACTAL GEOMETRY MATHEMATICAL FOUNDATIONS AND APPLICATIONS*. England: Typeset by thompson.
- FALCONER. (2002). *THE GEOMETRY OF FRACTAL SETS*. Cambridge: Universidad Cambridge.
- <http://classes.yale.edu/fractals/>. (s.f.). Recuperado el 22 de 06 de 2014
- <http://formasfractales.galeon.com/Autosi.htm>. (s.f.). Recuperado el 30 de 10 de 2014
- HUREWICZ. W, W. H. (1948). *DIMENSION THEORY*. London: Princeton University.
- ISRAEL, M. A. (2010). *TOPOLOGIA FRACTAL DE PAPEL ARRUGADO MANUALMENTE*. MEXICO D.F.
- L. PIETRONERO, E. T. (1986). *FRACTAL IN PHYSICS*. HOLANDA: ELEVIER SCIENCE PUBLISHERS.
- NAVARRO,J, G. G. (2003). *MATEMATICAS (VOLUMEN III)*. ESPAÑA: EDITORIAL MAD.
- ORJUELA, C. (2006). *DIMENSION: MAS QUE UNA IDEA INTUITIVA*. Bogota: Universidad Pedagogica Nacional.
- SALAZAR. O, V. G. (2011). INTRODUCCION A LA TEORIA GEOMETRICA DE GRUPOS. *REVISTA INTEGRACION*, 15-30.
- TUREGANO, P. (1993). *DE LA NOCION DE AREA A SU DEFINICION:INVESTIGACION HISTORICA SOBRE LAS TECNICAS, METODOS Y CONCEPTOS QUE CONDUJERON A LA TEORIA DE LA MEDIDA*. La mancha: Universidad de Castilla.

