

Lineamientos curriculares, demostración, uso de tecnologías y textos escolares en trigonometría

Jorge Enrique Fiallo Leal – EDUMAT-UIS
Universidad Industrial de Santander

Resumen

Presentamos un pequeño análisis de los planteamientos hechos en “Principios y Estándares” de National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), en los “Lineamientos Curriculares de Matemáticas” del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998) y en algunos textos escolares de matemáticas, acerca de la demostración, el uso de las nuevas tecnologías y la trigonometría. El análisis sugiere que existe poca claridad, coherencia y articulación entre las propuestas curriculares internacionales y nacionales, los textos escolares y la realidad del currículo escolar.

La demostración

Mariotti (2006) plantea la necesidad de investigaciones en relación a la actividad de producción de demostraciones por parte de los estudiantes con el objeto de diseñar contextos apropiados; en particular, el análisis de los procesos cognitivos involucrados en producir y demostrar conjeturas parece dar nuevas luces sobre las dificultades de los estudiantes así como también sobre los posibles orígenes de tales dificultades.

A pesar de que los fracasos y bajos niveles de comprensión de la demostración han llevado a que muchos profesores abandonen esta práctica, existe el consenso general entre los didactas de las matemáticas de que el desarrollo del sentido de la demostración constituye un objetivo importante de la educación matemática y se ve una tendencia general a incluir el aprendizaje de la demostración en el currículo de matemáticas (Mariotti, 2006).

En los “principios y estándares” de National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2003), se señala el razonamiento y la demostración como uno de los estándares para las matemáticas escolares desde preescolar al nivel 12 inclusive y se plantea, entre otras cosas, que:

El razonamiento y la demostración no son actividades especiales reservadas para momentos determinados o temas específicos del currículo, sino que deberían constituir una parte natural y continua de las discusiones en clase, no importa cuál sea el tema de estudio. En los ambientes de clase matemáticamente productivos, debería esperarse que los alumnos expliquen y justifiquen sus conclusiones. (NCTM, 2003, p. 348)

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 1998), dentro de los procesos generales³⁶ se menciona el razonamiento matemático como una actividad que debe estar presente en todo el trabajo matemático de los estudiantes y que tiene que ver con:

- Dar cuenta de cómo y del por qué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones.
- Justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas.

³⁶ Procesos generales que tienen que ver con el aprendizaje de las matemáticas, tales como el razonamiento, la resolución y el planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos (MEN, 1998, pág. 35).



- Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.
- Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.
- Utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar. (MEN, 1998, p. 77)

Hanna (2000) propone que el rol clave de la demostración debe ser la promoción de la comprensión matemática, y por eso hay que buscar formas de hacer más efectiva la demostración para este propósito. Las demostraciones son "vías para desplegar la maquinaria matemática para resolver problemas y justificar que una solución propuesta es realmente solución" (Rav, 1999, p.13).

Enseñanza de la trigonometría

Analizando las sugerencias sobre la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría en los "Lineamientos Curriculares de Matemáticas" del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 1998) y en los "Estándares Básicos de Matemáticas" del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 2003) encontramos que no existe mucha claridad en cuanto al enfoque dado para poder desarrollar procesos generales que tienen que ver con el aprendizaje de la trigonometría, ni de un enfoque que permita conectar las distintas formas de representación (geométrica, algebraica, analítica y funcional) de los conceptos trigonométricos como se puede deducir de los planteamientos hechos al respecto, inclusive pareciera que la trigonometría quedó relegada a un segundo plano.

En los lineamientos curriculares del MEN, en torno al aprendizaje y enseñanza de la trigonometría vemos que este contenido podría ser parte de los conocimientos básicos correspondientes al pensamiento espacial y sistemas geométricos y al pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, pero no se menciona específicamente la trigonometría.

En los estándares básicos de matemáticas para los grados 10 y 11 (MEN, 2003), se proponen los siguientes dos estándares básicos de competencias que involucran la trigonometría (Tabla 1):

Pensamiento espacial y sistemas geométricos	Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos
Describir y modelar fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas	Modelar situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas

Tabla 1. Estándares básicos de competencias en trigonometría

Respecto a la *demostración en trigonometría*, en los estándares del 2003 no se menciona algo, solamente en los estándares de NCTM (1991) se mencionaba que:

Los futuros universitarios deben tener igualmente la oportunidad de comprobar identidades trigonométricas básicas, como por ejemplo $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$, ya que esta actividad fortalece la comprensión de las propiedades trigonométricas, y proporciona un nuevo contexto para demostraciones deductivas. Sin embargo solo se debe dedicar una cantidad mínima de tiempo lectivo a la comprobación de este tipo de identidades, obviando por completo aquellas que son artificialmente complicadas, como $\csc^6 x - \cot^6 x = 1 + 3 \csc^2 x \cot^2 x$ (NCTM, 1991, p. 172)

En los lineamientos curriculares (MEN, 1998) dentro de los ejemplos del *tipo de razonamiento deductivo* se presenta el siguiente ejemplo de la demostración de una identidad trigonométrica,

paradójicamente, de manera similar a como se viene haciendo desde hace mucho tiempo en nuestro ámbito escolar y que no permite tener claridad sobre lo que es el razonamiento deductivo (MEN, 1998).

Verificar una identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen} x + \cos x \cot x = \operatorname{csc} x$$

$$\operatorname{sen} x + \cos x \cot x = \operatorname{sen} x + \cos x \frac{\operatorname{cos} x}{\operatorname{sen} x}$$

$$= \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{cos}^2 x}{\operatorname{sen} x}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x}{\operatorname{sen} x}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen} x} \rightarrow \operatorname{csc} x$$

El uso de la tecnología en la enseñanza de la trigonometría.

Respecto al uso de la tecnología, en los estándares del NCTM encontramos que éste es uno de los principios orientadores de dicha propuesta y al respecto se sugiere lo siguiente:

- La tecnología es fundamental en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y enriquece su aprendizaje.
- La tecnología apoya la enseñanza eficaz de las matemáticas.
- La tecnología influye en qué matemáticas se enseñan. (NCTM, 2003, Págs. 26-28)

En los lineamientos del MEN, en cuanto al impacto de las nuevas tecnologías en los procesos de aprendizaje y de enseñanza de las matemáticas, plantean que:

- El uso de los computadores en la educación matemática ha hecho más accesible e importante para los estudiantes temas de la geometría, la probabilidad, la estadística y el álgebra.
- Las nuevas tecnologías amplían el campo de indagación sobre el cual actúan las estructuras cognitivas que se tienen, enriquecen el currículo con las nuevas pragmáticas asociadas y lo llevan a evolucionar.
- El uso efectivo de las nuevas tecnologías aplicadas a la educación es un campo que requiere investigación, desarrollo y formación de los docentes (MEN, 1998, Pág. 34)

Posteriormente el Ministerio de Educación Nacional de Colombia planteó y ejecutó un proyecto de investigación del uso de la tecnología durante el periodo comprendido entre los años 1998 al 2003 y publicó una serie de documentos (MEN, 2004b) que dan cuenta de los aportes de la tecnología al aprendizaje de las matemáticas y a la transformación del quehacer cotidiano de los profesores. Dentro de este proyecto se publicó una serie de libros con diversas experiencias y aportes teóricos al uso de la tecnología en el aula; una de las experiencias desarrolladas tiene que ver con modelación de la función seno en Cabri, pero desde un enfoque funcional apuntando a sentar las bases del estudio analítico de las funciones trigonométricas y la realización de sus gráficas (MEN 2004a).



Shaffer (2006) presenta un libro de actividades de introducción básica a las funciones trigonométricas utilizando el software de geometría dinámica Sketchpad en donde los estudiantes hacen construcciones dinámicas de trigonometría y hacen modelos básicos de aplicaciones prácticas. Ven la relación entre el círculo unidad y las definiciones de las funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo, y crean un enlace dinámico del círculo unidad a las funciones periódicas. Este texto usa una metodología muy dirigista en la que los estudiantes sólo tienen que comprobar empíricamente que son ciertas las fórmulas o relaciones que plantean y no se pide ninguna justificación ni demostración.

Al realizar una búsqueda de publicaciones en internet hemos encontrado una gran pobreza de materiales tanto para el tema de trigonometría como para la promoción del desarrollo de las habilidades de demostración de los estudiantes. La mayoría de las páginas encontradas se han dedicado a copiar los contenidos de los textos, presentando las definiciones, ejemplos y demostraciones de igual manera a como vienen en ellos. En esta búsqueda se encontraron las páginas interactivas: Geometría Activa (mecd.es, 2005) que aunque es una página interactiva, tiene una metodología dirigista en la que los estudiantes mueven un punto o activan un applet para ver una relación, propiedad o aplicación, pero no se pide ninguna justificación, ni se profundiza en los conceptos involucrados y Descartes (mecd.es, 2001, 2003) que es muy completa e interactiva y en ella el estudiante lee, mueve, observa y comprueba empíricamente apoyado en datos numéricos la propiedad o relación estudiada, pero no se le piden justificaciones ni mucho menos demostraciones de las propiedades y relaciones estudiadas, llevando a que el estudiante se sienta satisfecho con lo observado y verificado y no sienta la necesidad de la demostración.

La realidad de la trigonometría en los textos escolares

Haciendo una revisión de algunos textos escolares colombianos actuales, se identifican dos enfoques para la presentación de los contenidos de trigonometría en el grado décimo de bachillerato.

Uno de estos enfoques parte del estudio de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo incluyendo los temas de ángulos y los sistemas de medición, las identidades trigonométricas fundamentales (realizan algunas demostraciones de ellas sin ningún tipo de explicación ni ilustración de su procedencia y utilizan una única forma de demostración que consiste en el reemplazo de identidades conocidas, manipulación algebraica y verificación de la relación de igualdad) y aplicaciones de las razones trigonométricas. En otro capítulo definen las funciones trigonométricas como una clase de las funciones circulares sin hacer demasiado énfasis en los conceptos de función y menos de función circular, presentan algunas identidades que involucran los ángulos cuadrantales (0° , 90° , 180° , 270° , 360°) y su ángulo de referencia, y las demuestran basándose en las propiedades de los triángulos congruentes y los valores absolutos y signos de las coordenadas de los ángulos. Estas demostraciones se apoyan en el dibujo de un ángulo en el primer cuadrante y su respectivo ángulo resultante de la suma o diferencia de un ángulo cuadrantal con . Posteriormente, en un capítulo aparte, presentan algunas identidades trigonométricas (algunas de ellas bien complicadas) y las demuestran realizando sustituciones por identidades conocidas, manipulaciones algebraicas y obtención de una igualdad; también se hacen algunas demostraciones de las identidades que involucran los ángulos cuadrantales a través de la visualización de la representaciones gráficas de las funciones respectivas (por ejemplo $\cos x$

y $\cos(x + \frac{\pi}{2})$); luego se presentan y se resuelven algunas ecuaciones trigonométricas y se plantean problemas de aplicación en donde se deben resolver dichas ecuaciones; finalmente se presentan y se demuestran las leyes del seno y del coseno como una aplicación a la solución de problemas de triángulos no rectángulos.

El otro enfoque empieza con los conceptos de ángulo y sus mediciones para después definir y analizar las funciones trigonométricas como las razones que se forman entre las coordenadas del punto $P(x, y)$ y la distancia del origen del plano coordenado al punto P ; presentan algunas identidades que involucran

los ángulos de referencia con los ángulos cuadrantales y las demuestran con propiedades de los valores absolutos y signos de las coordenadas de los ángulos, y se van proponiendo problemas de aplicación de las funciones trigonométricas. En otro capítulo definen las funciones trigonométricas sobre la circunferencia unitaria y realizan las representaciones y análisis de sus gráficas incluyendo las inversas. En un capítulo aparte se estudian las aplicaciones de las funciones trigonométricas en los triángulos rectángulos y se estudian las leyes de los senos y del coseno como una aplicación en la solución de problemas que involucran los triángulos no rectángulos. En otro capítulo se presentan las identidades y las ecuaciones trigonométricas de manera semejante a lo dicho en el primer enfoque.

Ibañez y Ortega (2004) realizan un análisis del tratamiento de la demostración matemática en los libros de texto de bachillerato, en particular las justificaciones que dan los textos de las relaciones fundamentales entre las razones trigonométricas, las razones trigonométricas de ángulos notables, las fórmulas trigonométricas para la suma y la diferencia de ángulos, el ángulo doble y el ángulo mitad, el teorema del seno y el teorema del coseno. Estos autores plantean como una de sus conclusiones la siguiente:

Se deduce que los autores de los textos se preocupan de demostrar los teoremas que enuncian para cumplir con un trámite obligado y no ser acusados de falta de rigor (paradoja de *inadaptación a la exactitud*, Brousseau 1998, página 74), pero emplean pocos recursos en hacer comprensibles esas demostraciones, en resaltar sus características, en detenerse en sus razonamientos, en reconocer sus técnicas, en destacar sus funciones, y en potenciar su utilización.

Conclusiones

Se evidencia la falta de claridad de los mismos documentos que sugieren el desarrollo del pensamiento matemático integrado que promueva las diferentes formas de representación y de comprensión de los conceptos trigonométricos y las diferentes formas y tipos de demostraciones.

En cuanto a los contenidos matemáticos con los que realizar la actividad de demostración, la mayoría de investigaciones en la agenda de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración se refieren a demostraciones de propiedades de geometría y análisis matemático. Muy pocas se han dedicado a la enseñanza de la demostración en trigonometría.

A pesar de que la tecnología está llamada a jugar un papel importante en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, vemos que en el tema de la trigonometría no se ha avanzado mucho.

En los textos escolares no se plantea el estudio de la trigonometría de una forma que se puedan comprender y conectar las diferentes representaciones y los diferentes significados de los conceptos involucrados. En algunos casos se dan por comprendidos conceptos mucho más complejos como el de función o se presentan de una manera muy superficial con una sola interpretación.

También se observa que existe un afán por abarcar demasiados contenidos sin establecer relaciones entre ellos y de abarcar a su vez diferentes procesos generales del aprendizaje de las matemáticas sin profundizar en ellos. En el caso de las demostraciones trigonométricas planteadas en los textos, podríamos estar de acuerdo con Ibañez, 2004, quien sustenta que los autores de texto, se preocupan de demostrar los teoremas que enuncian para cumplir con un trámite obligado y no ser acusados de falta de rigor, pero emplean pocos recursos en hacer comprensibles esas demostraciones, en resaltar sus características, en detenerse en sus razonamientos, en reconocer sus técnicas, en destacar sus funciones, y en potenciar su utilización.



A S O C O L M E

ASOCIACION COLOMBIANA DE MATEMATICA EDUCATIVA

Bibliografía

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5-23.

Ibañes, M., & Ortega, T. (2004). Un análisis del tratamiento de la demostración matemática en los libros de texto de bachillerato. *Número*, 5(7).

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 173-204). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

mecd.es. (2001). *Razones trigonométricas. Operaciones. Identidades y Operaciones*. Página web de http://descartes.cnice.mecd.es/Bach_CNST_1/razones_trigonometricas/indicetriz.htm

mecd.es. (2003). *Funciones Trigonómicas*. Página web de http://descartes.cnice.mecd.es/Analisis/Funciones_trigonometricas/

mecd.es. (2005). *Curso de Geometría ESO*. Página web de <http://mimosa.cnice.mecd.es/~clobog/geoweb/2eso.htm>

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Áreas obligatorias y fundamentales*. Colombia: M.E.N.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2003). *Estándares Básicos de Matemáticas*. Colombia: M.E.N.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2004a). *Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales*. Colombia: M.E.N.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2004b). *Tecnología informática: innovación en el currículo de matemáticas de la educación básica secundaria y media*. Colombia: M.E.N.

NCTM. (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

NCTM. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Shaffer, D. W. (2006). *Exploring trigonometry with the sketchpad*. Emerville, EE.UU.
