Encuentro Colombiano de matemática educativa

Función exponencial. Resultados de investigaciones al servicio de la planeación y gestión del trabajo de aula.

Jeannette Vargas Hernández Mario Ernesto Pérez Ruiz
jeannettevargash@gmail.com

Resumen

Se presenta un análisis de documentos que abordan la didáctica de la función exponencial. Si bien éstos poseen una riqueza inherente, se plantea la opción de indagar sobre los puntos centrales de estas propuestas, pensando en su planeación y gestión en el aula de clase. Se examina y argumenta con parámetros tomados desde la matemática, la historia y la epistemología de este concepto.

Presentación

Uno de los objetivos de la investigación en didáctica de la matemática es llegar a los docentes e impactar sus prácticas en el aula de clase; sin embargo, dado que esta situación no siempre se presenta, existe la necesidad de crear alternativas que ayuden en el logro de esta tarea, realizando selección de la literatura existente, buscando superar obstáculos como cierto tecnicismo, abundancia de literatura y acceso a ella, manejo de idioma extranjero, entre otros.

Con relación a la enseñanza y el aprendizaje de la función exponencial y su impacto en la función logarítmica, se han seleccionado algunos artículos a partir de los cuales se recogen valiosos elementos a la hora de la gestión y planeación de esta temática.

Documento uno

En el escrito: *An exponential function, is its description not problematic?*, su autor, Radley, Mahlobo (2004), plantea la dificultad de los estudiantes frente a la denominación de las funciones exponenciales y su impacto en relación con el desempeño al aplicar las leyes de los logaritmos y el contraste de esta denominación con la afirmación de que la función logarítmica es la inversa de la exponencial.

Radley argumenta que como usualmente se da nombre a una función según el conjunto imagen, de acuerdo a aquello que "produce" (pone el ejemplo de la función *Seno*, la cual es llamada así, no por el ángulo de entrada, variable independiente, sino por su imagen), cuando el estudiante se encuentra con la denominación *función exponencial,* él puede esperar que esta función produzca *exponentes*. Contrario a ello, la explicación que se le presenta es que esta función es llamada así por tener la variable independiente en el exponente.

Esta explicación no es consistente con la denominación de las funciones de la forma $y = x^b$, b constante, las cuales tienen la variable independiente en la base y a las cuales no se les llama *función base* sino *función potencia.* Las investigaciones relacionadas con el aprendizaje de principios y/o conceptos muestran la necesidad de consistencia en la presentación.

Se pregunta entonces Radley por las consecuencias que puede tener en los estudiantes el describir la función $y = a^x$ como una *función exponencial*:

- ¿Acaban los estudiantes viendo una función exponencial como una *función que produce exponentes*?
- Ya que un *logaritmo* es un *exponente*, ¿no se podría esperar que vieran una *función logarítmica* como una *función exponencial*?

Lo anterior entra en conflicto con la afirmación: "la función logarítmica es *la inversa* de la función exponencial", la cual sugiere que exponentes y logaritmos son conceptos diferentes. ¿Oscurece esta diferenciación la habilidad del estudiante de ver un logaritmo como un exponente? ¿Contribuye esta confusión al bajo desempeño de los estudiantes a la hora de aplicar las leyes de los logaritmos?

¿Cómo renombrar entonces a las que llamamos funciones exponenciales?

Propone el autor llamarlas con el mismo nombre que acostumbramos para las funciones de la forma x^b, b constante, es decir *funciones potencia*; para él esta denominación es consistente con el proceso de inversión. Por ejemplo en el diagrama:

Entrada	Coseno	Salida
0°	Cos 0°	1

Al aplicar el proceso de inversión, el estudiante obtiene: $\text{Cos}^{-1}(1) = 0°$

En el caso de los logaritmos:

Entrada	Logaritmo	Salida
100	Log100	2

Al realizar el proceso inverso en forma análoga, el estudiante llegará a 100 que corresponde a la potencia y no al exponente.

Elementos para la lectura

Un foco que el lector debe abordar está en la denominación y definición de la función exponencial y la definición de la función logarítmica como la función inversa de la exponencial. En este aspecto, recurriendo al desarrollo histórico y epistemológico de dichas funciones cabe anotar que al remontarse a Torricelli (1608-1647) quien se abocó a estudiar las características de una curva logarítmica; se observa que en realidad explora la curva que hoy conocemos como exponencial.

Eso se debe a que los matemáticos del siglo XVII denominaban genéricamente curva logarítmica a aquellas que relacionan progresiones aritméticas y geométricas, sin realizar la distinción que hoy utilizamos. (Ferrari, M., 2001: 103). "No existe una distinción clara entre las funciones exponenciales y logarítmicas, las cuales genéricamente eran tratadas como "logarítmicas" o "logísticas". (Ferrari, M., 2001: 132)

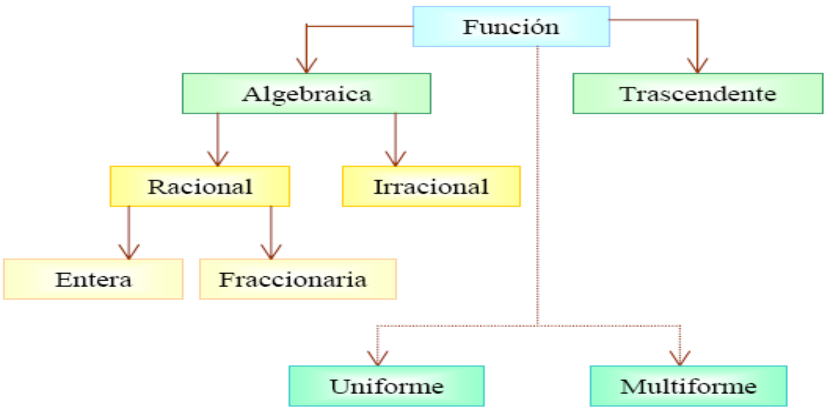
En coherencia con lo expuesto anteriormente, el enfoque dado a la noción de logaritmo en libros del siglo XVIII, tal como el de Agnesi, acorde con las ideas imperantes en la época, no hace una distinción explícita entre las funciones exponencial y logarítmica tal y como lo hacemos en la actualidad, sino que, presenta la "curva Logarítmica" como aquella en la que las coordenadas se hallan relacionadas por progresiones aritméticas y geométricas, es decir, aquella en la cual las abscisas se hallan en progresión aritmética en tanto que las ordenadas responden a una progresión geométrica. Esta definición corresponde actualmente a la función exponencial (Ferrari. 2001: 162)

Es importante tener en cuenta que Euler (1707-1783) fue el primero que vio en la logaritmación una de las dos operaciones inversas de la elevación de potencias, con lo cual se hizo posible aplicar a los logaritmos procedimientos algebraicos (Wieleitner, 1932).

Así mismo, Euler, definió las funciones polinómicas, las trigonométricas y las exponenciales; estas últimas como: Potencia de la cantidad constante a, que tiene por exponente la variable z[18] (Euler, p. 70).

Para añadir a continuación refiriéndose a las funciones exponenciales: dado un valor afirmativo cualquiera de y vendrá dado el valor de z conveniente para que sea $a^z = y$; este valor de z. contemplado en cuanto función de y, suele llamarse LOGARITMO de y. (Euler, p. 73)[19].

En su obra Euler introduce la función logarítmica como función inversa de la exponencial (González, M., Vargas, J. 2007:142). También presenta una detallada clasificación de las funciones que se resume en el siguiente esquema.



De lo anterior se desprende otro foco para la mirada del lector. Considerando las definiciones actuales, desde la matemática, es claro que las funciones potencia son funciones algebraicas, mientras que las funciones exponenciales y logarítmicas son funciones trascendentes.

La función exponencial se puede definir de distintas maneras; una, se hace en términos de la función exponencial fundamental e^x expresada como una serie infinita de potencias:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2.1} + \frac{x^3}{3.2.1} + \frac{x^4}{4.3.2.1} + \ldots = \sum_{r=o}^{\infty} \frac{x^r}{r!}$$

o como la inversa de la función logaritmo natural: $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$

o, en Hughes: *decimos que P es una función exponencial de t con base a si* $P = P_o a^t$, *donde* P_o *es la cantidad inicial (cuando t=0) y a es el factor por el cual P cambia cuando t se incrementa en 1.*

Si a>1, tenemos un crecimiento exponencial; 0<a<1, tenemos un decaimiento exponencial.

[18] Potestas quantitatis constantes a, Exponentem haben variabilem z.

[19] dato valorem quocunque afirmativo ipsius y, conveniens datibur valor pisius z, ut fit a^z=y; iste autem valor ipsius z, quatenud tanquam Functio ipsiys y spectatur, ocari solet LOGARITHMUS ipsius y.

Mientras que *Una función de potencia es aquella en la que la variable dependiente es proporcional a una potencia de la variable independiente. Una función potencia tiene la forma* $f(x) = kx^p$ *, donde k y p son constantes cualesquiera.* (Hughes-Hallett and Gleason, et al. 2000: 28).

Documento dos

Otra característica a considerar al estudiar la definición de función exponencial es la forma en que esta varía. Este aspecto es planteado en el artículo *Tasa de cambio de funciones exponenciales: una perspectiva desde el Precálculo* de Brian Bradie (1998), en el cual el autor afirma que está insatisfecho con las aplicaciones de las funciones exponenciales que se presentan en los cursos de precalculo, dado que en ellas se dan algunas fórmulas sin explicar cómo aparecen y se pide simplemente a los estudiantes que sustituyan en las fórmulas ciertos valores y hagan los cálculos correspondientes. De esta manera, asegura el autor, no se promueve en los estudiantes la habilidad para reconocer otros fenómenos en donde se usan las funciones exponenciales. De allí que su propuesta consiste en una planeación para introducir en clase unas funciones cuya tasa de cambio es proporcional al valor de la función.

Fenómenos como el crecimiento sin restricción de una población o el decaimiento de una sustancia radiactiva son modelados por funciones cuya razón de cambio es proporcional al valor de la función.

Su propuesta consiste en introducir en contextos de movimiento la explicación de nociones de tasa de cambio promedio y tasa de cambio instantáneo; luego propone a los estudiantes una serie de ejercicios con funciones representadas analíticamente, ejercicios que exigen la elaboración de tablas de datos y examinar dichas nociones de tasa de cambio. Al finalizar los ejercicios numéricos se espera que concluyan que la tasa de cambio de la función $f(x) = cb^x$, c y b constantes, en $x = x_o$, es proporcional a $f(x_o)$.

Finalmente presenta una hoja de aplicaciones en donde se le dice al alumno que el recíproco de la conclusión anterior también es cierto (si la tasa de cambio de f en $x = x_o$ es proporcional a $f(x_o)$, entonces f es de la forma $f(x) = cb^x$, para algún b y c).

Referentes teóricos

Al apelar a la historia de la matemática como un recurso en la mirada al desarrollo socio epistemológico de la función exponencial se hace uso de la pregunta planteada por Martínez (2000), ¿Cuál fue la relación de la noción de exponente no natural con la noción de función exponencial en la construcción social de ambas nociones? Como respuesta el autor presenta en su tesis doctoral (2003) lo que denomina mecanismos en el devenir del concepto de exponente y para ello distingue las siguientes etapas:

Semántica geométrica: sólo son tratadas las cantidades que representan una magnitud geométrica: longitud, área y volumen. Es por ello que no existe la noción de exponente mayor a 3 ni la de exponente.

Primera sintaxis algebraica: se deja de lado el significado geométrico quedando solo la herencia en la forma de nombrar algunos exponentes.

Segunda sintaxis algebraica: la aceptación del exponente cero y del exponente negativo.

Primera semántica de la cuadratura de las curvas: índice de las curvas de Wallis.

Segunda semántica de la cuadratura de las curvas: posición relativa del área.

El exponente como variable: la función exponencial.

En su informe Martínez (2000) expone que el resultado más importante de su análisis reside en que los exponentes no naturales emergieron como una convención o de consideraciones de tipo meta matemático en dos escenarios:

> "Al seno del pensamiento algebraico con el objetivo de dotar de uniformidad a las operaciones entre monomios y al seno del problema de cuadraturas, para dotar de uniformidad a las fórmulas de áreas de las curvas de la forma $x^n y^m = k$ o $x^p = ky^q$ (n, m, p, q enteros positivos). Aun cuando dentro de este problema se conoció, probablemente, la noción de exponentes no naturales que emergió dentro del álgebra, su uso requirió de convenciones adicionales, como por ejemplo, la idea de posición relativa de un área respecto a una ordenada hecha por Newton o la distinción de diferentes tipos de infinitos debida a Wallis.

A lo anterior de acuerdo con este investigador, le acompañó una etapa de ocasiones de uso dentro del pensamiento variacional que permitió la total aceptación de la noción de exponente no natural: cálculo de diferenciales y primitivas en el paradigma leibniziano, el cálculo de fluxiones y momentos en el paradigma newtoniano y la construcción del binomio de Newton. Estos factores ocasionaron que el universo de "curvas algebraicas" (con fórmula) tuviera su centro en expresiones de la forma $f(x)^{m/n}$ donde f(x) es un polinomio". (Martínez, 2000: IX)

En el sentido anterior su análisis epistemológico da cuenta de que la construcción de la noción de exponente no natural emergió como un símbolo alternativo y eficaz para representar la relación más general, en los momentos históricos en que sucedió tal construcción, existente entre dos variables; $x^n y^m = k$ o $x^p = ky^q$ (n, m, p, q enteros positivos) y que el uso de las convenciones dentro de la expresión $y=a^x$, sólo ocurrió cuando la función fue concebida como una fórmula en el sentido de Euler.

Etapas del desarrollo de la propuesta

Se parte de las inquietudes alrededor de la temática de funciones logarítmicas y exponenciales.

Se procede a la detección, obtención y consulta de la literatura sobre enseñanza y aprendizaje de dichas funciones.

Se seleccionan dos artículos cuyos énfasis se entrelazan y enriquecen.

Se plantean algunos elementos desde la matemática y el desarrollo histórico-epistemológico de los conceptos, como focos para lectura de los documentos y posterior uso en etapas de programación y puesta en escena de una clase de matemáticas.

Observaciones

El llamado sobre las dificultades que pueden ir inherentes en la forma de nombrar la función exponencial permite invitar al docente a indagar en el desarrollo de sus clases sobre este aspecto, o por lo menos tener presente en su preparación y gestión, que allí se está presentando un cambio en los convenios establecidos.

La intención de Bradie; promover en los estudiantes la habilidad para reconocer otros fenómenos en donde se usan las funciones exponenciales, no se desarrolla en su propuesta, mas bien se plantean pasos en donde desde lo algebraico se examinan funciones cuya razón de cambio tienen una característica especifica y luego se da un salto esperando que el estudiante pueda examinar los fenómenos con este conocimiento construido.

¿Es posible abordar la función exponencial como aquella función en donde si para cualquier sucesión x_n, que esté en progresión aritmética, los correspondientes y_n, están en progresión geométrica, entonces y es una función exponencial de x?

La comprensión de los estudiantes alrededor de la función lineal, en cuanto a la forma como la variación es proporcional puede generar habilidades en los estudiantes para luego explorar en la función exponencial la variación proporcional al valor funcional.

Bibliografia

Euler, L.: Introductio in Analysin infinitorum Lausanne: Marcum Michaelem Bousquet y socios, (Edición facsimil editada por SAEM: Thales y la Real Sociedad Matemática española), 1748.

Ferrari, M. 2001. Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logarítmica. Tesis de maestría inédita. México. Departamento de Matemática Educativa.

Hughes-Hallett, D. and Gleason, A. et al. 2000. Cálculo. Segunda Edición.

Martínez, G. (2000): *Hacia una explicación sistémica de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales*. Tesis de maestría inédita. México. Departamento de Matemática Educativa.

Martínez, G. (2003): *Caracterización de la convención matemática como un mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de su funcionamiento en los exponentes.* Tesis doctoral inédita. México. Departamento de Matemática Educativa.

González, M., Vargas, J. (2007). *Segmentos de la historia: la función logarítmica.* Matemáticas: Enseñanza Universitaria.

Wieleitner, H.: Historia de las Matemáticas, Editorial Labor, S.A., Barcelona, 193

Autores – ponentes

Jeannette Vargas Hernández. Aspirante al título de doctor en Educación Matemática. Universidad de Salamanca España. Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca

Mario Ernesto Pérez Ruiz. Magíster en Docencia de la Matemática. Universidad Pedagógica. Universidad Jorge Tadeo Lozano de Bogotá