UN ESTUDIO ELEMENTAL DE LA TRANSFORMADA DE LEGENDRE

JOHN EDUARDO LÓPEZ HILARIÓN
JONATHAN JOSUE RUIZ PANTEVIS

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, COLOMBIA

UN ESTUDIO ELEMENTAL DE LA TRANSFORMADA DE LEGENDRE

JOHN EDUARDO LÓPEZ HILARIÓN
C.C. 1’019.030.218
Código: 2009240085

JONATHAN JOSUE RUIZ PANTEVIS
C.C. 1’.077.857175
Código: 2009240084

Monografía presentada como requisito parcial para optar el título de:
Licenciado en Matemáticas

Modalidad: Trabajo asociado al grupo de investigación del Álgebra.

Director:
Yeison Alexander Sánchez Rubio

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, COLOMBIA
2014

Agradecimientos

Al dar por finalizado este trabajo de grado de la Licenciatura, queremos expresar los más sinceros agradecimientos a los docentes del Departamento de Licenciaturas de Matemáticas y directivas, porque nos brindaron su apoyo y conocimientos en el trascurso de la carrera.

Un agradecimiento especialmente con el director del trabajo de grado profesor Yeison Alexander Sánchez Rubio, quien realizó aportes significativos no sólo durante el desarrollo del trabajo, sino durante el trascurso de la carrera.

Gracias a quienes de una u otra forma contribuyeron constantemente a culminar nuestra carrera.

Este trabajo de grado se la dedico en primer lugar a Dios, a mis padres
EUDOCIO RUIZ Y MARIA MIRALBA PANTEVIS
por su apoyo, consejos, comprensión, amor, ayuda en los momentos difíciles,
Me han dado todo lo que soy como persona, mis valores, mis principios,
mi carácter, mi empeño, mi perseverancia, mi coraje para conseguir mis objetivos.

JONATHAN JOSUÉ RUIZ PANTEVIS.

Esta tesis se la dedico a Dios, a mis queridos padres, a mi familia, en especial a
mi madre FLOR OYOLA *y mi hermana* ANDREA CAROLINA LÓPEZ,
que con su amor, apoyo y comprensión incondicional estuvieron siempre a lo largo
de esta etapa; a ellas que siempre tuvieron una palabra de aliento en los momentos
difíciles, para lograr culminar uno de mis objetivos.

JOHN EDUARDO LÓPEZ HILARIÓN.

Son muchas las personas especiales a las que nos gustaría agradecer su amistad, apoyo, ánimo y compañía en las diferentes etapas de nuestras vidas. Algunas están aquí con nosotros y otras en nuestros recuerdos y en nuestro corazón. Sin importar en donde estén o si alguna vez llegan a leer estas dedicatorias queremos darle las gracias por formar parte de nosotros, por todo lo que nos han brindado y por todas sus bendiciones.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL	**FORMATO**	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código:FOR020GIB		**Versión: 01**
Fecha de Aprobación: 10-10-2012		**Página I de 6**

1.Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado de pregrado.
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Titulo del documento	Un estudio elemental de la transformada de Legendre.
Autor(es)	LÓPEZ HILARIÓN, John Eduardo. RUIZ PANTEVIS, Jonathan Josué.
Director	SANCHEZ RUBIO, Yeison Alexander.
Publicación	Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, 2014. 85 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional.
Palabras Claves	Transformada de Legendre, Polinomio de Taylor, ecuaciones diferenciales.

2.Descripción
La transformada de Legendre fue propuesta por el matemático francés Adrien Marie Legendre, y ha sido aplicada entre otros campos a la física, principalmente a la termodinámica en el uso para la realización de transformaciones entre los diversos potenciales termodinámicos; esta transformada se asocia a las ecuaciones diferenciales, permitiendo la solución de algunas ecuaciones de orden superior.

El trabajo tiene como objetivo estudiar la transformada de Legendre de una forma elemental, analizando cómo se transforman funciones polinomiales reales de grado tres y a partir de su comportamiento determinar cómo aplicar la transformada de Legendre a funciones reales de clase $\boldsymbol{C^3}$, por medio de su aproximación por polinomio de Taylor; con el fin de establecer algunas propiedades ligadas a la inversibilidad de la tercera derivada de la función y a partir de esto determinar su aplicación para encontrar soluciones particulares de ecuaciones diferenciales de orden superior.

Por otro lado, se observa la transformación de funciones escalares cuya gráfica es un plano, se estudiaran las transformaciones de conjuntos de planos con determinadas características; con el fin de extender el estudio de la transformada de Legendre a funciones escalares de clase $\boldsymbol{C^2}$, por medio de sus planos tangentes, y ver gráficamente el comportamiento de la transformada.

3.Fuentes

Fuentes: Para realizar este trabajo se consultaron varias fuentes como libros y artículos encontrados en medios electrónicos. Los más importantes son:

Apostol, T (1967). Cálculo con funciones de varias variable y álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y a las probabilidades. Editorial Reverté, S.A.

Luque, C; Parada, H; Moreno, A. (1999). transformada de Legendre aplicada a la solución de ecuaciones diferenciales de orden superior.Colombia: Universidad Pedagogíca Nacional. (tésis).

Leithold, L.(1994). Cálculo. 7ª edición. Oxford University.

Diprima, R. Boyce, W (2000).Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la

Frontera. Editorial Limusa, S.A. de C.V.

Grossman. S. (2007). Algebra Lineal con Aplicaciones. Editorial Mc Graw Hill.

4.Contenidos

El presente trabajo está organizado en siete capítulos de la siguiente manera :

El **primer capítulo** presenta la justificación y describe los motivos principales que incentivaron a la realización de este trabajo, también contiene los objetivos trazados para el mismo.

El **segundo capítulo** expone el marco de referencia donde se presentan definiciones, teoremas del cálculo y álgebra lineal. También se plasman postulados de la geometría absoluta que son usados en los siguientes capítulos.

El **capítulo tres**, inicialmente se muestra una definición de la transformada de Legendre para funciones polinómicas de grado tres, la cual denominaremos "Transformada de Legendre de tercer grado". Después se muestra la transformada de Legendre para funciones reales de clase $\boldsymbol{C^3}$ por medio de su aproximación de Taylor de grado tres, y se presentan ejemplos y propiedades.

El **capítulo cuatro**, se presenta como puede ser utilizada o aplicada la transformada de Legendre para hallar soluciones particulares de algunas ecuaciones diferenciales de orden tres y de orden cuatro, por medio de dos métodos, reducción de orden e incremento de orden.

El **capítulo quinto** inicialmente muestra una definición de la Transformada de Legendre de primer grado en campos escalares. También se estudia la transformada de Legendre a ciertos conjuntos de planos de $\mathbb{R}^3$ y a funciones escalares de clase $\boldsymbol{C^2}$ para mirar gráficamente el comportamiento de la transformada.

El **capítulo seis**, presenta una comparación de los resultados de este trabajo con los resultados del trabajo de grado "transformada de Legendre aplicada a la solución de ecuaciones diferenciales de orden superior".

El **capítulo siete** expone las conclusiones articuladas con los objetivos propuestos. Además, se mencionan algunas reflexiones, acerca del trabajo realizado.

5.Metodología

La metodologia de este trabajo esta dividido en tres etapas.

La primera se enmarco en la consulta y en el estudio del trabajo de grado ‘transformada de Legendre aplicada a la solución de ecuaciones diferenciales de orden superior’ redactada en el año 1999, y establecer las maneras en que posiblemente se podría extender el estudio allí presentado sobre la transformada de Legendre.

Se considero que para ampliar el estudio de la transformada es posible optar por dos caminos: el primero ampliar el grado de la transformada a grado tres, ya que, en la tesis anteriormente mencionada se realizó para tranformada de grado uno y dos; el segundo camino ampliar la transformada de Legendre a funciones escalares de primer grado.

En la segunda etapa se opto por el primer camino y se inicio con el estudio de polinomios de grados tres por medio de ejemplos donde se observará el comportamiento al aplicarles la transformada de legendre. Luego se toman funciones reales de clase C^3 y se aplica la transformada de Legendre a su aproximacion por polinomio de Taylor de grado tres, mediante algunos ejemplos de funciones y se busco establcer algunas propiedades. Para realizar un trabajo similar al de la tesis mencionada.

Por último, en la etapa tres se estudió el segundo camino, por medio de ejemplos se eobservo que al subir de dimensión la transformada de Legendre para funciones escalares de primer grado, se podía establecer una nueva definicion, luego se realiza unos ejemplos de conjuntos de planos (planos que pasan por un punto, planos que contiene una recta, entre otros) del espacio, con el fin de mostrar el comportamiento de su transformada. Luego, se toman ejemplos de funciones escalares de clase C^2 con la intención de calcular su plano tangente en un punto y aplicar la transformada de Legendre y determinar algunos resultados gráficos, con relación a sus derivadas mixtas.

6.Conclusiones
1. La transformada L de Legendre de grado 3, se puede aplicar a ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior que tenga como soluciones particulares funciones de clase C^3. 2. Por medio de T_1 y T_2, construidas a partir de las propiedades de la transformada de Legendre, permiten transformar una ecuación diferencial en otra ecuación de orden mayor o de orden menor, según el grado de la transformada que se utilice; si es de grado dos salta un orden, es decir pasamos de orden 2 a orden 1 y de orden 2 a orden 3; si es de grado tres salta dos órdenes es decir de grado 3 a orden 1 y de orden 3 a orden 5 y en general la transformada de grado n, lleva orden n a orden 1 y orden n a $2n-1$. 3. La transformada L no siempre permite dar soluciones particulares de una ecuación diferencial de orden superior. 4. Al aplicar la transformada L por medio de T_1, la primera derivada de la solución particular de una ecuación diferencial, obtenida al aplicar el método reducción de orden debe ser invertible. 5. La definición de la transformada de Legendre de funciones reales, se puede ampliar a funciones escalares de primer orden.

Elaborado por:	LÓPEZ HILARIÓN, John Eduardo. RUIZ PANTEVIS, Jonathan Josué.
Revisado por:	SANCHEZ RUBIO, Yeison Alexander.

Fecha de elaboración del Resumen:	04	11	2014

TABLA DE CONTENIDO

Pág.

LISTA DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

La transformada de Legendre fue propuesta por el matemático francés Adrien Marie Legendre, quien realizó aportes importantes a la estadística, teoría de números, álgebra abstracta y análisis matemático. La transformada de Legendre en la matemática tiene como escenario principal las ecuaciones diferenciales. Sin embargo es posible realizar un estudio elemental de ella, como se evidencia en la tesis "*transformada de Legendre aplicada a la solución de ecuaciones diferenciales de orden superior "* realizado por los estudiantes Humberto Parada y Alfredo Moreno y dirigida por el docente Carlos Julio Luque Arías; donde en un primer momento la transformada de Legendre es vista como una función que transforma rectas del plano a puntos del mismo (la transformada de Legendre de primer grado[1]), luego usando estas, permite asociar a una función diferenciable otra función construida a partir de aplicar la trasnformada a cada una de las rectas tangentes en cada uno de sus puntos. En un segundo momento se puede ver la transformada de Legendre como una función que transforma funciones cuadráticas del plano en puntos del espacio (transformada de Legendre de segundo grado[2]), dando como resultado soluciones a algunas ecuaciones diferenciales de segundo orden mediante dos métodos, denominados por reducción de orden y por incremento de orden. De igual modo, permite dar solución a ecuaciones diferenciales de tercer orden por el método de reducción de orden.

Este trabajo de grado tiene como fin ampliar el estudio realizado en la tesis antes mencionada, de dos manera diferentes, la primera viendo la transformada de Legendre como una función que transforma planos del espacio en puntos del mismo, y la segunda ver la transformada de Legendre como una función que lleva funciones cubicas del plano en puntos del $\mathbb{R}^4$ (Hiperespacio), y ver si se pueden extender algunos de los resultados que se obtuvieron en el estudio anterior.

[1] Tomada de la tesis "transformada de Legendre aplicada a la soluciónde ecuaciones diferenciales de orden superior "(1999)
[2] Tomada de la tesis "transformada de Legendre aplicada a la soluciónde ecuaciones diferenciales de orden superior "(1999)

1. JUSTIFICACIÓN

Esta propuesta de trabajo de grado se encuentra en la modalidad de monografía asociada a un grupo de estudio o investigación, el grupo de estudio al cual se encuentra asociada es el grupo de álgebra de la Universidad Pedagógica Nacional. Nosotros como estudiantes, compartimos la visión del grupo de álgebra de que *“como maestros en formación y futuros docentes de matemáticas es indispensable el que hacer matemático, ya que nos permite desarrollar actividad matemática, en el sentido de ejercitar procesos de creación, discusión, proposición de algoritmos, manejo de teorías, formulación de conjeturas, formulación y demostración de teoremas. Expresión y comunicación de ideas matemáticas”. Luque. C, Mora. L, Torres. J (2006).*

Por otro lado, el hacer matemáticas es una actividad eminentemente humana e importante, ya que el “trabajo *de un matemático consiste en resolver problemas, descubrir y demostrar teoremas y enlazarlos en teorías. Para hacer esto no se requiere secretos de magia bien guardados, ni actividades intelectuales extrañas; por el contrario, el razonamiento matemático es una especialización del razonamiento general*[3]*”.*

Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente se pretende extender el estudio de la transformada de Legendre realizado en la tesis “*transformada de Legendre aplicada a la solucion de ecuaciones diferenciales de orden superior” para* la transformada de Legendre de primer grado a funciones escalares y la transformada de Legendre de tercer grado a funciones reales, ya que nos permite como estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas, utilizar y relacionar los conocimientos adquiridos para el desarrollo de actividad matemáticas, a través de la exploración, discusión, creación, con miras a fortalecer nuestras habilidades como futuros maestros.

[3]Tomado de documento digital: ¿es posible hacer matemáticas en el aula? Carlos Luque, Lyda Mora y Johana Torres.(2006)

El fin principal de esta propuesta de trabajo de grado, es proporcionar tanto a docentes como estudiantes, un material de consulta sobre la transformada de Legendre. Además, puede servir de base para desarrollar propuestas didácticas alrededor de esta temática.

1.1. OBJETIVOS

1.1.1. OBJETIVOGENERAL.

Continuar y ampliar el estudio realizado por Parada y Moreno en la tesis (*transformada de Legendre aplicada a la solución de ecuaciones diferenciales de orden superior*) en el año 1999; para algunas transformaciones de primer grado en campos escalares y funciones reales de tercer grado.

1.1.2. OBJETIVOS ESPECIFÍCOS.

- Estudiar la transformada de Legendre de tercer grado a funciones reales, aplicada a funciones de clase $\boldsymbol{C^3}$ a través de su aproximación por polinomio de Taylor de grado tres.
- Estudiar la imagen de conjuntos de planos con ciertas características (Paralelos, Planos que pasan por un punto, Planos que contienen una recta, entre otros), aplicando la transformada de Legendre de primer grado en campos escalares, con el fin de observar su comportamiento e intentar establecer propiedades.
- Estudiar la transformada de Legendre de primer grado aplicada a algunas superficies de $\mathbb{R}^3$ (Paraboloide, Elipsoide, entre otros) por medio de sus planos tangentes, con el propósito de intentar establecer algunas propiedades.
- Realizar una comparación de la información obtenida en este estudio de la transformada de Legendre con los trabajos anteriores al tema.

2. MARCO DE REFERENCIA

En este capítulo, se presentan algunos conceptos y teoremas que se utilizaran en los capítulos posteriores de este trabajo, estos permitirán el desarrollo de este estudio y están ligados al Álgebra Lineal, Geometría Euclidiana, Geometría Analítica y Cálculo.

2.1. Conceptos y teoremas del álgebra lineal.

- **Espacio vectorial Real.**

Es un conjunto de objetos, denominados vectores, junto con dos operaciones llamadas adición y multiplicación por un escalar, que satisfacen los siguientes axiomas.

Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en V y si λ es un número real, entonces la suma de $\mathbf{x}$y $\mathbf{y}$ se representa por $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ y el producto de $\mathbf{x}$ por el escalar λ se representa por $\lambda\mathbf{x}$.

Axiomas**:**

I. Si $\mathbf{x} \in V$ y $\mathbf{y} \in V$ **,** entonces $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in V$
II. Si $\mathbf{x}$ **,** $\mathbf{y}$ y $\boldsymbol{z}$ son elementos de V, entonces $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$
III. Existe un vector $\mathbf{0} \in V$ tal que para todo $\mathbf{x} \in V$**,** $\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}$
IV. Si $\mathbf{x} \in V$**,** existe un vector $-\mathbf{x} \in V$ tal que $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0}$
V. Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y} \in V$, entonces $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$
VI. Si $\mathbf{x} \in V$ y λ es un escalar, entonces $\lambda\mathbf{x} \in V$
VII. Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y} \in V$ y λ es un escalar, entonces $\lambda(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}$
VIII. Si $\mathbf{x} \in V$ y λ y β son escalares, entonces $(\lambda+\beta)\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}+\beta\mathbf{x}$
IX. Si $\mathbf{x} \in V$ y λ y β son escalares, entonces $\lambda(\beta\mathbf{x})=(\lambda\beta)\mathbf{x}$
X. Para todo vector $\mathbf{x} \in V$, $1\mathbf{x}=\mathbf{x}$

- **Base de un espacio vectorial.**

Un conjunto de vectores $\{\mathbf{v_1},\ \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}\}$ es una base del espacio vectorial V si

I. $\{\mathbf{v_1},\ \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}\}$ es linealmente independiente
II. $\{\mathbf{v_1},\ \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}\}$ genera V

- **Dimensión de un espacio vectorial**

Si es espacio vectorial V tiene una base finita, entonces la dimensión de V es el número de vectores que tiene cualquiera de las bases de V, y este recibe el nombre de espacio vectorial de dimensión finita. En cualquier otro caso se dice que V es un espacio vectorial de dimensión infinita. Si $V = \{0\}$, se dice que V es de dimensión cero.

- **Transformación lineal**

Sean V y W espacios vectoriales. Una transformación lineal T de V en W es una función que asigna a cada vector $v \in V$ un vector único y que satisface, para cualquier u y $v \in V$ y todo escalar λ.

I. $T(u + v) = Tu + Tv$
II. $T(\lambda v) = \lambda Tv$

- **Núcleo y recorrido de una transformación lineal**

Sean V y W espacios vectoriales y $T: V \to W$ una transformación lineal. Entonces

I. El núcleo de T, denotado por nu T, esta dado por nu $T = \{v \in V: Tv = \mathbf{0}\}$
II. El recorrido de T, denotado por recorrido T, esta dado por: recorrido $T = \{ w \in W: Tv = w$ para algún $v \in V \}$.

- **Teorema 2.1**

Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Entonces T es uno a uno si y solo si nu $T = \{\mathbf{0}\}$

- **Teorema 2.2**

Sea $T: V \to W$ una transformación lineal, supóngase además que dim $V =$dim W.

I. Si T es uno a uno, entonces T es sobreyectiva
II. Si T es sobreyectiva, entonces T es uno a uno.

- **Isomorfismo**

Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Entonces T es un isomorfismo si T es uno a uno y sobreyectiva.

2.2. Conceptos y teoremas de la geometría absoluta.

- Axioma A1: Por cada par de puntos distintos P y Q pasa una única recta, que representaremos por $\overleftrightarrow{PQ}$.
- Axioma A2: Toda recta pasa al menos por dos puntos.
- Teorema: Dados dos planos distintos, entonces o bien no tienen puntos comunes o bien su intersección es una recta.

2.3. Conceptos de la geometría analítica.

- **Rectas en el espacio n-dimensional:** sea P un punto dado yAun vector no nulo dado. El conjunto de todos los puntos de la forma $P + tA$, en donde t recorre todos los números reales, es una recta que pasa por P y es paralela a A. Se designa esa recta con el símbolo $L(P;\ A)$*;* el punto Pescrito en primer lugar está en la recta, ya que corresponde a $\mathrm{t} = 0$, el segundo punto, A, se llama vector dirección de la recta. Se representa de la siguiente forma:

$$L(P;\ A) = \{P + tA \,|\, t \in \mathbb{R}\}$$

- **Planos en el espacio euclideo n-dimensional:** un conjunto M de puntos de $\mathbb{R}^n$ es un plano si existen un punto P y dos vectores linealmente independientes A y B tales que $M = \{P + sA + tB \mid s,t \in \mathbb{R}\}$.
- **Planos paralelos:** dos planos son paralelos si sus vectores normales son paralelos.
- **Superficies Cuádricas:** es la gráfica de una ecuación de segundo grado en tres variables x, y y z. La forma general de una ecuación de este tipo es

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

en donde $A, B, C, \dots, J$ son constantes, pero por traslación y rotación la ecuación se puede llevar a una de las dos formas canonícas siguientes:

$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0$ o $Ax^2 + By^2 + Iz = 0$.

Las superficies cuádricas son las análogas en tres dimensiones de las secciones cónicas en el plano.

2.4. Conceptos del cálculo.

- **Función de clase $\boldsymbol{C_k}$.** una función f, se dice que es de clase C^ksi tiene todas las derivadas k-ésimas continuas en D. Esta se escribe $f \in C^k$.

2.5. Conceptos de Ecuaciones diferenciales.

- **Ecuación Diferencial:** Una ecuación diferencial contiene una función desconocida y una o más de sus derivadas.
- El **orden** de una ecuación diferencial es el correspondiente a la derivada de orden más alto que se tenga en la ecuación.
- Se dice que una función $\boldsymbol{f}$ es una solución de una ecuación diferencial si esta se satisface cuando se sustituyen $y = f(x)$ y sus derivadas en ella.

3. LA TRANSFORMADA DE LEGENDRE DE TERCER GRADO

En este capítulo, se define y se estudia la transformada de Legendre de tercer grado y sus propiedades, y se explicita como puede ser aplicada a funciones de clase $\boldsymbol{C}^3$.

Definición:

Una función polinomial de grado $n \leq 3$ es:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Con a, b, c y $d \in \mathbb{R}$.

Sea $\boldsymbol{P_3} = \{\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} | f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con a, b, c, $d \in \mathbb{R}\}$, $\boldsymbol{P_3}$ es un espacio vectorial de dimensión cuatro sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(af)(x) = af(x)$$

para todo $a, x \in \mathbb{R}$ y $f, g \in \boldsymbol{P_3}$.

La **transformada de Legendre de tercer grado**, se define como:

$$L: \boldsymbol{P_3} \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \mapsto (6a, 2b, c, d)$$

Como $\boldsymbol{P_3}$ y $\mathbb{R}^4$ son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$, se probará que L es una transformación lineal.

Teorema 3.1: L es una transformación lineal

Dem//: Sean $f_i(x)$, $f_j(x)$ elementos de $\boldsymbol{P_3}$**.**

I. $$L\left((f_i + f_j)(x)\right) = \left((6a_i + 6a_j), (2b_i + 2b_j), (c_i + c_j), (d_i + d_j)\right)$$
$$= (6a_i, 2b_i, c_i, d_i) + \left(6a_j, 2b_j, c_j, d_j\right)$$
$$= L(f_i(x)) + L\left(f_j(x)\right)$$

II. $$kL(f_i) = k(6a_i, 2b_i, c_i, d_i)$$
$$= (6ka_i, 2kb_i, cka_i, dka_i)$$
$$= L(kf_i)$$

L es una transformación lineal.

Teorema 3.2: L es una transformación uno a uno.

Dem//: Por el teorema 3.1, L es una transformación lineal, suponga que $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{P_3}) = \boldsymbol{L}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$, entonces por definición de L se tiene que $a = b = c = d = 0$, es decir que nu $L = \{\mathbf{0}\}$**.** Luego, por el teorema 2.1, L es una transformación lineal uno a uno.

Como $\dim(\boldsymbol{P_3}) = \dim(\mathbb{R}^{\mathbf{4}})$**,** por el teorema 2.2.1 se puede concluir que L es sobreyectiva,

De lo anterior, se concluye que L es un **isomorfismo** lineal.

La función inversa de L esta dada por:

$$L^{-1}: \mathbb{R}^4 \to \boldsymbol{P_3}$$

$$(x_0, y_0, z_o, t_0) \mapsto b(a) = \frac{x_0 a^3}{6} + \frac{y_0 a^2}{2} + z_0 a + t_0$$

Para ilustrar lo anterior, veamos el siguiente ejemplo:

- Sea el conjunto de polinomios de grado tres, donde una de sus raíces es $x = 1$.

  $$f(x) = ax^3 + x^2(b-a) + x(c-b) - c$$

  entonces, aplicando la transformada de Legendre, se tiene:

  $$L\big(f(x)\big) = (6a, 2(b-a), (c-b), -c)$$

  que es un punto de $\mathbb{R}^{\mathbf{4}}$.

3.1 La transformada de Legendre para funciones de clase $\boldsymbol{C^3}$

En esta sección, se estudia la transformada de Legendre aplicada a funciones reales de clase $\boldsymbol{C^3}$, por medio de su aproximación de Taylor de grado tres.

Sea g una función real de clase $\boldsymbol{C^3}$ en un punto x_0, su aproximación de orden tres está dada por el polinomio de Taylor:

$$\boldsymbol{P}_{g(x_0)}(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + \frac{g''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{g'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3$$

como $\boldsymbol{P}_{g(x_0)}(x) \in \boldsymbol{P_3}$, la transformada L de $\boldsymbol{P}_{g(x_0)}(x)$ es un punto de $\mathbb{R}^{\mathbf{4}}$.

Sea $\boldsymbol{H} = \{\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^I : \boldsymbol{f} \in C^3$ con I un intervalo de $\mathbb{R}\}$, consideremos una función M del conjunto $\boldsymbol{H}$ a $\boldsymbol{P_3}$. Para observar la relación entre los conjuntos $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{P_3}$ y $\mathbb{R}^{\mathbf{4}}$, se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{H} \arrow[r, "M"] \arrow[dr, "L \circ M"'] & \boldsymbol{P_3} \arrow[d, shift left, "L"] \\ & \mathbb{R}^{\mathbf{4}} \arrow[u, shift left, "L^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Ejemplo:

- Sea $g(x) = x^4$, con $x_0 = \frac{1}{2}$ que pertenece a $I = (0,1)$.

Su aproximación por el polinomio de Taylor es:

$$\boldsymbol{P}_{g\left(\frac{1}{2}\right)}(x) = \frac{4}{2}x^3 - \frac{12}{8}x^2 + \frac{4}{8}x - \frac{2}{32}$$

Aplicando L a $\boldsymbol{P}_{g\left(\frac{1}{2}\right)}(x)$**,** se tiene**:**

$$L\left(\boldsymbol{P}_{g\left(\frac{1}{2}\right)}(x)\right) = \left(\frac{24}{2}, -\frac{12}{2^2}, \frac{4}{2^3}, -\frac{1}{2^4}\right)$$

ahora, con $x_0 = \frac{1}{9}$

$$L\left(\boldsymbol{P}_{g\left(\frac{1}{9}\right)}(x)\right) = \left(\frac{24}{9}, -\frac{6}{9^2}, \frac{4}{9^3}, \frac{1}{9^4}\right)$$

con un $x_0 \in I$, se tiene

$$L\left(\boldsymbol{P}_{g(x_0)}(x)\right) = (24x_0, -12x_0^2, 4x_0^3, -x_0^4)$$

Se observa de manera general los siguientes ejemplos:

- Sea $h(x) = x^4 + 2x^2 + 3$, con $x_0 \in I$.

$$\boldsymbol{P}_{h(x_0)}(x) = 4x_0x^3 + (2 - 6x_0^2)x^2 + 4x_0^3x + 4x_0^2 - x_0^4 + 3$$

Por lo tanto

$$L\left(\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{h(x_0)}}(x)\right) = (24x_0, (4 - 12x_0^2), 4x_0^3, 4x_0^2 - x_0^4 + 3)$$

- La transformada L para cualquier función polinómica.

  Sea $f(x) = n_p x^p + n_{p_1} x^{p_1} + n_{p_2} x^{p_2} + \cdots + n_3 x^3 + n_2 x^2 + n_1 x + n_0$ y un punto $x_0 \in (a,b)$, con f de clase $\boldsymbol{C^3}$ en (a,b). Utilizando la aproximación por polinomio de Taylor de grado tres y aplicando la transformada $L(P(f(x_0))$ se tiene que:

$$a = \frac{\left[\left((p-2)(p-1)pn_p\right)x_0{}^{p-3}+\left((p_1-2)(p_1-1)p_1\right)x_0{}^{p_1-3}+\left((p_2-2)(p_2-1)p_2\right)x_0{}^{p-3}+\cdots+6n_3\right]}{6},$$

$$b = \frac{\left[(p-1)pn_p x_0^{p-2}(1-(p-2))+(p_1-1)p_1 n_{p_1} x_0^{p_1-2}(1-(p_1-2))+(p_2-1)p_2 n_{p_2} x_0^{p_2-2}(1-(p_2-2))+\cdots+2n_2\right]}{2},$$

$$c = \left[pn_p x_0^{p-1}\left(1-(p-1)+\frac{(p-2)(p-1)}{2}\right)+p_1 n_{p_1} x_0^{p_1-1}\left(1-(p_1-1)+\frac{(p_1-2)(p_1-1)}{2}\right)+p_2 n_{p_2} x_0^{p_2-1}\left(1-(p_2-1)+\frac{(p_2-2)(p_2-1)}{2}\right)+\cdots+n_1\right],$$

$$d = \left[n_p x_0^{p}\left(1-p+\frac{(p-1)p}{2}-\frac{(p-2)(p-1)p}{6}\right)+n_{p_1} x_0^{p_1}\left(1-p_1+\frac{(p_1-1)p_1}{2}-\frac{(p_1-2)(p_1-1)p_1}{6}\right)+n_{p_2} x_0^{p_2}\left(1-p_2+\frac{(p_2-1)p_2}{2}-\frac{(p_2-2)(p_2-1)p_2}{6}\right)+\cdots+(-2)n_3 x_0^3+n_2 x_0^2+n_0\right]$$

Transformada L a una función trigonométrica:

- $h(x) = \cos x,\ x \in I$

la aproximación de la función $h(x)$ por el polinomio de Taylor en $x_0 = \frac{\pi}{6}$, es:

$$\boldsymbol{P}_{h(x_0)}(x) = \cos(x_0) + (-sen\, x_0)(x-x_0) + \left(-\frac{\cos x_0}{2}\right)(x-x_0)^2 + \left(\frac{sen\, x_0}{6}\right)(x-x_0)^3$$

sustituyendo:

$$\boldsymbol{P}_{h\left(\frac{\pi}{6}\right)}(x) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \left(-sen\ \frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{6}\right) + \left(-\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2 + \left(\frac{sen\ \frac{\pi}{6}}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3$$

$$\boldsymbol{P}_{h\left(\frac{\pi}{6}\right)}(x) = \frac{x^3}{12} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{24}\right)x^2 + \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{12}\pi+\frac{\pi^2}{144}\right)x + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{144}\pi^2-\frac{\pi^3}{2592}\right)$$

aplicando la transformada $L\left(\boldsymbol{P}_{h\left(\frac{\pi}{6}\right)}(x)\right)$ se tiene $a = \frac{1}{2}$, $b = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{12}\right)$, $c = \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{12}\pi+\frac{\pi^2}{144}\right)$, $d = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{144}\pi^2-\frac{\pi^3}{2592}\right)$.

de manera general para un $x_0 \in I$, I un intervalo, se obtiene:

$$L\left(\boldsymbol{P}_{h(x_0)}(x)\right) = \left(\left(sen(x_0)\right), -\left(\cos(x_0) + x_0 sen(x_0)\right), \left(\frac{x_0^2}{2} sen(x_0) + x_0 \cos(x_0) - sen(x_0)\right), \left(\cos(x_0) + x_0 sen(x_0) - \frac{x_0^2}{2}\cos(x_0) - \frac{x_0^3}{6} sen(x_0)\right)\right).$$

La transformada L para las siguientes funciones:

- $g(x) = \ln(x)$

$$L\left(\boldsymbol{P}_{g(x_0)}(x)\right) = \left(\frac{1}{x_0^3}, -\frac{2}{x_0^2}, \frac{5}{2x_0}, \ln(x_0) - \frac{5}{3}\right)$$

- $f(x) = e^x$

$$L\left(\boldsymbol{P}_{f(x_0)}(x)\right) = \left(e^{x_0}, e^{x_0}(1 - x_0), e^{x_0}\left(1 - x_0 + \frac{1}{2}x_0^2\right), e^{x_0}\left(1 - x_0 + \frac{1}{2}x_0^2 - \frac{1}{6}x_0^3\right)\right)$$

Partiendo de lo realizado anteriormente, se puede llegar a generalizar que para cada función g de clase $\boldsymbol{C^3}$ con tercera derivada diferente de cero y con su aproximación por polinomios de Taylor en un punto $(x_0, g(x_0))$ de la gráfica de la función, se puede obtener un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^4$ al aplicar la transformada.

Sea la aproximación de Taylor de la función $g(x)$ en $\boldsymbol{x_0}$:

$$\boldsymbol{P}_{g(x_0)}(x) = \frac{g'''(x_0)}{6}x^3 + \left[\frac{g''(x_0)}{2} - \frac{g'''(x_0)}{2}x_0\right]x^2 + \left[g'(x_0) - g''(x_0)x_0 + \frac{g'''(x_0)}{2}{x_0}^2\right]x + \left[g(x_0) - g'(x_0)x_0 + \frac{g''(x_0)}{2}{x_0}^2 - \frac{g'''(x_0)}{6}{x_0}^3\right]$$

Aplicando L, tenemos que: $L\left(\boldsymbol{P}_{g(x_0)}(x)\right)$ = $(6a, 2b, c, d)$; donde

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}'''(\boldsymbol{x_0})$**,**

$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{g}''(\boldsymbol{x_0}) - \boldsymbol{g}'''(\boldsymbol{x_0})\boldsymbol{x_0}$,

$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x_0}) - \boldsymbol{g}''(\boldsymbol{x_0})\boldsymbol{x_0} + \frac{g'''(x_0)}{2}{\boldsymbol{x_0}}^2$, **y**

$$\boldsymbol{d} = g(x_0) - g'(x_0)x_0 + \frac{g''(x_0)}{2}{x_0}^2 - \frac{g'''(x_0)}{6}{x_0}^3$$

Obsérvese, que para cada punto x_0 del dominio de $g(x)$ le corresponde un punto de $\mathbb{R}^4$, al aplicar L a su aproximación.

3.1.1. La transformada L para funciones de clase C^3 Con tercera derivada invertible.

Para esta parte, se trabajara con funciones de clase $\boldsymbol{C^3}$ cuya tercera derivada sea invertible, con el fin, de poder expresar la transformada L en términos de un parámetro, ya que esto permite observar su comportamiento de manera gráfica.

Cuando $g'''(x)$ es invertible para cada $x_0 \in I$ se tiene:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g'''(x_0)}$$

por lo tanto

$$\boldsymbol{x_0} = (\boldsymbol{g'''})^{-1}(\boldsymbol{a}) \qquad (1)$$

luego

$$b = g''(x_0) - g'''(x_0)x_0 \qquad (2)$$

sustituyendo 1 en 2, se obtiene:

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{g''}[(\boldsymbol{g'''})^{-1}(\boldsymbol{a})] - \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{g'''})^{-1}(\boldsymbol{a}) \qquad (3)$$

- Sustituyendo (1) en la componente:

$$c = g'(x_0) - g''(x_0)x_0 + \frac{g'''(x_0)}{2}x_0^2$$

se obtiene:

$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{g'}[(\boldsymbol{g'''})^{-1}(\boldsymbol{a})] - \boldsymbol{g''}[(\boldsymbol{g'''})^{-1}(\boldsymbol{a})](\boldsymbol{g'''})^{-1}(\boldsymbol{a}) + \frac{\boldsymbol{a}}{2}[(\boldsymbol{g'''})^{-1}(\boldsymbol{a})]^2 \qquad (4)$$

además, nótese que c también se puede expresar en términos de a y b:

$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{g}'[(\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a})] - (\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a})\left[\boldsymbol{g}''\Big((\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a})\Big) - \boldsymbol{g}'''\Big((\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a})\Big)(\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a})\right] - \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{2}}[(\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a})]^{\boldsymbol{2}}$$

Teniendo en cuenta (3), se tiene:

$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{g}'[(\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a})] - \boldsymbol{b}(\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a}) + \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{2}}[(\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a})]^{\boldsymbol{2}}$$

- Sustituyendo (1) en la componente

$$d = g(x_0) - g'(x_0)x_0 + \frac{g''(x_0)}{2}x_0^2 - \frac{g'''(x_0)}{6}x_0^3$$

se tiene que:

$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{g}[(\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a})] - \boldsymbol{g}'[(\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a})](\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a}) + \frac{\boldsymbol{g}''[(\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a})]}{\boldsymbol{2}}[(\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a})]^{\boldsymbol{2}} - \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{6}}[(\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a})]^{\boldsymbol{3}} \qquad (5)$$

$\boldsymbol{d}$ expresado en términos de a, b y c:

$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{g}[(\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a})] - [(\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a})]\{\boldsymbol{g}'[(\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a})] - \boldsymbol{g}''[(\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a})][(\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a})] + \frac{\boldsymbol{g}''[(\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a})]}{\boldsymbol{2}}[(\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a})]^{\boldsymbol{2}}\} - \frac{\boldsymbol{g}''[(\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a})]}{\boldsymbol{2}}[(\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a})]^{\boldsymbol{2}} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3}}\boldsymbol{g}'''[(\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a})][(\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a})]^{\boldsymbol{3}}$$

por tanto:

$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{g}[(\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a})] - \boldsymbol{c}[(\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a})] - \frac{\boldsymbol{g}''[(\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a})][(\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a})]^{\boldsymbol{2}}}{\boldsymbol{2}} + \frac{\boldsymbol{g}'''[(\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a})][(\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a})]^{\boldsymbol{3}}}{\boldsymbol{3}}$$

igualmente, se puede expresar a d en términos de a y b:

$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{g}[(\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a})] - [\boldsymbol{g}'[(\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a})] - \boldsymbol{b}(\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a}) + \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{2}}[(\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a})]^{\boldsymbol{2}}[(\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a})] - \frac{\boldsymbol{g}''[(\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a})][(\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a})]^{\boldsymbol{2}}}{\boldsymbol{2}} + \frac{\boldsymbol{g}'''[(\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a})][(\boldsymbol{g}''')^{-1}(\boldsymbol{a})]^{\boldsymbol{3}}}{\boldsymbol{3}}$$

Al expresar tanto c como d en términos de otras variables no cambia la idea que se está trabajando en función de una sola variable, ya que las variables dependen de a.

Ejemplo:

- sea

$$f(x) = x^4$$

$$f'(x) = 4x^3$$

$$f''(x) = 12x^2$$

$$f'''(x) = 24x$$

aplicando la transformada L se tiene que:

$$\boldsymbol{a = 24x_0}$$

$$x_0 = \frac{a}{24}$$

$$b(a) = 12\left(\frac{a}{24}\right)^2 - \frac{a^2}{48}$$

$$\boldsymbol{b(a) = -\frac{a^2}{48}}$$

$$c(a) = 4\left(\frac{a}{24}\right)^3 - 12\left(\frac{a}{24}\right)^2 \frac{a}{24} + \frac{a}{2}\left(\frac{a}{24}\right)^2$$

$$\boldsymbol{c(a) = \frac{4a^3}{24^3}}$$

$$d(a) = \left(\frac{a}{24}\right)^4 - 4\left(\frac{a}{24}\right)^3 \frac{a}{24} + 6\left(\frac{a}{24}\right)^2 \left(\frac{a}{24}\right)^2 - \frac{a}{6}\left(\frac{a}{24}\right)^3$$

$$\boldsymbol{d(a) = -\frac{a^4}{24^4}}$$

se expresa la transformada L en términos de la variable a. Esto con la intención de representarla por medio de una gráfica en $\mathbb{R}^3$.

los puntos con parámetro a son

$$\left(\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{d}(\boldsymbol{a})\right)$$

$$\left(-\frac{\boldsymbol{a}^2}{\mathbf{48}}, \frac{\mathbf{4}\boldsymbol{a}^3}{\mathbf{24}^3}, -\frac{\boldsymbol{a}^4}{\mathbf{24}^4}\right)$$

gráficamente:

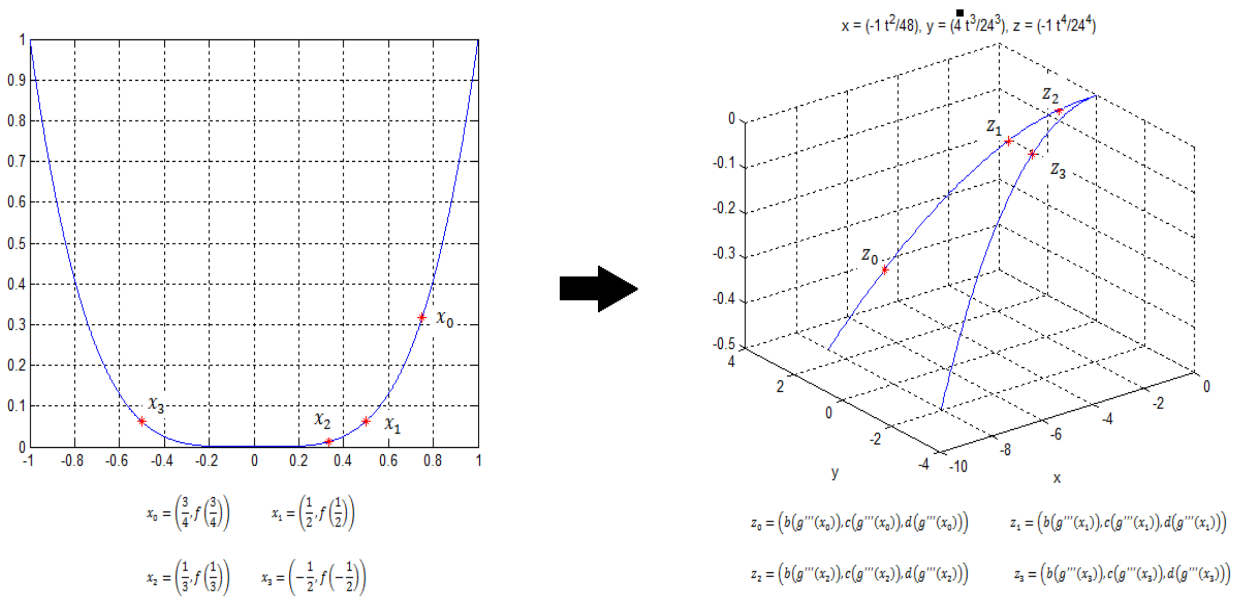


Figura 1. $f(x) = x^4$ y su transformada de Legendre parametrizada.

Ejemplo:

- Sea

$$f(x) = \frac{3}{4}x^4 + 2x^2 + 2$$

$$f^{'}(x) = 3x^3 + 4x$$

$$f^{''}(x) = 9x^2 + 4$$

$$f^{'''}(x) = 18x$$

aplicando la transformada L se tiene que:

$$\boldsymbol{a = 18x_0}$$

$$x_0 = \frac{a}{18}$$

$$\boldsymbol{b(a) = \frac{9a^2}{18^2} + 4}$$

$$\boldsymbol{c(a) = \frac{3a^3}{18^3} + \frac{4a}{18}}$$

$$\boldsymbol{d(a) = \frac{3a^4}{4(18^4)} + \frac{2a^2}{18^2} + 2}$$

los puntos con parámetro a son:

$$\big(b(a), c(a), d(a)\big)$$

$$\left(\frac{9a^2}{18^2} + 4, \frac{3a^3}{18^3} + \frac{4a}{18}, \frac{3a^4}{4(18^4)} + \frac{2a^2}{18^2} + 2\right)$$

sea $f(x)$ en el intervalo $(0, +\infty)$, donde $f(x)$ es inyectiva, gráficamente se tiene:

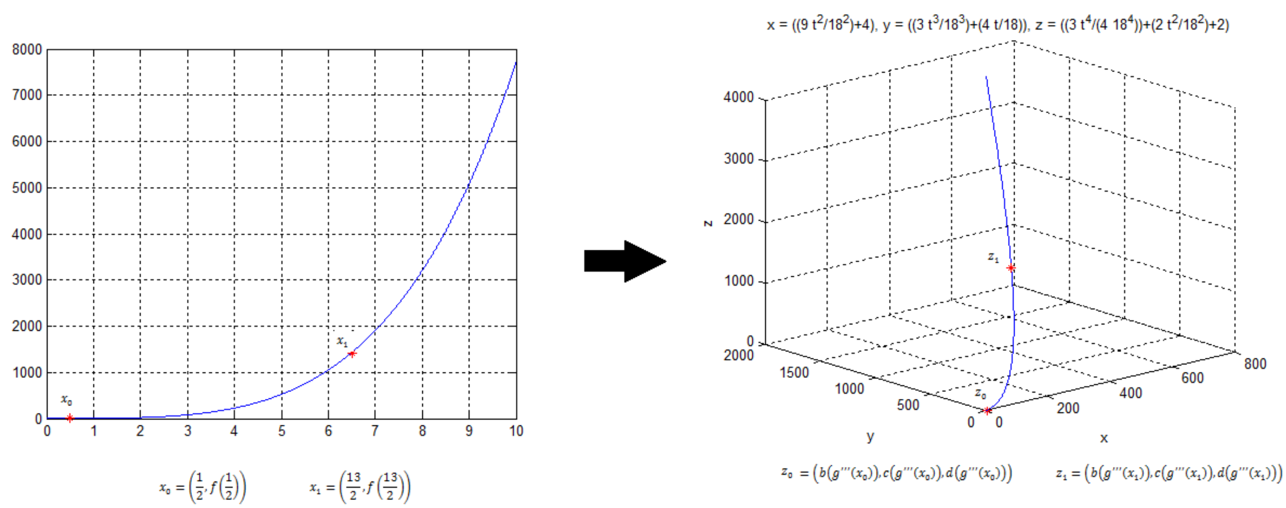


Figura 2. $f(x)$ en el intervalo $(0, +\infty)$ y su transformada de Legendre parametrizada.

3.1.2. La transformada L para funciones de clase C^3 con tercera derivada no invertible.

Cuando $g'''(x)$ no es invertible en un intervalo I, se divide el intervalo I en subintervalos $\{I_0, I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ cuyos extremos son los puntos donde cambia el sentido de la concavidad de $g''(x)$, con la condición de que $g'''(x)$ tenga inversa en cada subintervalos de la forma I_p con $p = 0, 1, 2, \ldots, n$.

En cada subintervalos I_p se define a la componente d en términos de la componente a, para así construir el conjunto

$$\vartheta(a) = \{d_0(a), d_1(a), \ldots, d_n(a)\}$$

el cual se llamará **conjunto Dual de Legendre de tercer grado** para la función $g(x)$ y cada $d_p(a)$ será una rama del conjunto.

Ejemplos:

- Sea $g(x) = sen(x)$ en el intervalo $I = (0, \infty)$, se calcula $d(a)$ en cada subintervalo I_p.

$$I_p = (p\pi, p\pi + \pi) \text{ con } p = 0, 1, 2, \ldots, n$$

derivando $g(x)$:

$$g'(x) = \cos(x)$$
$$g''(x) = -sen(x)$$
$$g'''(x) = -\cos(x)$$

como $a = g'''(x)$ entonces para cada subintervalo I_p se tiene:

$$a_p = -\cos(x)$$
$$-a_p = \cos(x)$$
$$x = arcos(-a_p)$$

de esta manera:

$$\vartheta(a) = \{d_p(a) | d_p(a) = sen(\arccos(-a_p)) - a_p \cos(\arccos(-a_p)) - \frac{(\arccos(-a_p))^2}{2} sen(\arccos(-a_p)) - \frac{a_p(\arccos(-a_p))^3}{6}\}$$

- Sea $g(x) = cos(x)$ en el intervalo $I = (0, \infty)$, se calcula $d(a)$ en cada subintervalo I_p.

$$I_p = \left(\frac{\pi}{2} + p\pi,\ \frac{3\pi}{2} + p\pi\right) \text{ con } p = 0, 1, 2, \dots, n$$

para cada subintervalo I_p se tiene,

$$a_p = sen(x)$$
$$x = arcsen(a_p)$$

por lo tanto:

$$\vartheta(a) = \{d_p(a) | d_p(a) = cos(\text{arcsen}(a)) + a(\text{arcsen}(a)) - \frac{(\text{arcsen}(a))^2}{2} cos(\text{arcsen}(a)) - \frac{a(\text{arcsen}(a))^3}{6}\}$$

A continuación, se establece algunas propiedades de la transformada de Legendre.

3.2. Propiedades de la transformada $\boldsymbol{L}$ aplicada a funciones de clase $\boldsymbol{C^3}$

En las secciones anteriores se estudió la transformada L para funciones de clase $\boldsymbol{C^3}$; con base en esto, se establecerán propiedades de la transformada L.

Sea g una función de clase C^3 y sea d, c una función de clase C^3 y C^2 respectivamente, con g''', d' derivables e invertibles en cada intervalo I_k, con $k = 1, 2, \dots, n$ de I.

1. $g^{iv}(x)\frac{dx}{da} = 1$

Dem// Como $a = g'''(x)$ se tiene:

$$g^{iv}(x)\frac{dx}{da} = 1$$

1.1. $\frac{dx}{da} = \frac{1}{g^{iv}(x)}$ con $g^{iv}(x) \neq 0$

Dem// por la propiedad 1.

2. $\frac{dd}{da} = -\frac{\left(g'''^{-1}(a)\right)^3}{6} = -\frac{x^3}{6}$

Dem//

$d(x) = g(x) - g'(x)x + \frac{g''(x)}{2}x^2 - \frac{g'''(x)}{6}x^3$

$\frac{dd}{dx} = g'(x) - g''(x)x - g'(x) + xg''(x) + \frac{x^2}{2}g'''(x) - \frac{g'''(x)}{2}x^2 - \frac{g^{iv}(x)}{6}x^3$

$\frac{dd}{dx} = -\frac{x^3}{6}g^{iv}(x);$

utilizando regla de la cadena

$$\frac{dd}{da} = \frac{dd}{dx}\frac{dx}{da}$$

por las propiedades 1 y 1.1. se obtiene

$$\frac{dd}{da} = -\frac{x^3}{6}.$$

Ejemplo:

- Sea $f(x) = \cos(x)$, $f'''(x) = sen(x)$ y $x = Arcsen(a)$, entonces:

$d(a) = \cos\left(Arcsen(a)\right) + aArcsen(a) - \frac{[arcsen(a)]^2}{2}\cos\left(Arcsen(a)\right) - a\frac{[arcsen(a)]^3}{6}$

$$\frac{dd}{da} = -\frac{[arcsen(a)]^3}{6}$$

Por hipótesis se tiene que:

$$\frac{dd}{da} = -\frac{x^3}{6}.$$

3. $c' = \frac{\left(g'''^{-1}(a)\right)^2}{2} = \frac{x^2}{2}$

Dem//

$c(x) = \ g^{'}(x) - g^{''}(x)x + \frac{g^{'''}(x)}{2}x^2$

$\frac{dc}{dx} = g''(x) - g'''(x)x - g''(x) + xg'''(x) + \frac{x^2}{2}g^{iv}(x)$

$\frac{dc}{dx} = \frac{x^2}{2}g^{iv}(x)$

utilizando regla de la cadena

$$\frac{dc}{da} = \frac{dc}{dx}\frac{dx}{da}$$

por las propiedades 1 y 1.1. Se obtiene

$$\frac{dc}{da} = \frac{x^2}{2}.$$

Ejemplo:

- Sea $f(x) = \cos(x)$, $f'''(x) = sen(x)$ y $x = Arcsen(a)$, entonces:

$$c(a) = -a + Arcsen(a)\cos(Arc\,cos(a)) + \frac{a[Arcsen(a)]^2}{2}$$

$$\frac{dc}{da} = \frac{[Arcsen(a)]^2}{2}$$

Por hipótesis se tiene que:

$$\frac{dc}{da} = \frac{x^2}{2}.$$

4. $\frac{db}{da} = \ -x$

Dem//

$b(x) = g''(x) - g'''(x)x$

$\frac{db}{dx} = g'''(x) - g'''(x) - xg^{iv}(x)$

$\frac{db}{dx} = -xg^{iv}(x)$

utilizando regla de la cadena

$$\frac{db}{da} = \frac{db}{dx}\frac{dx}{da}$$

por las propiedades 1 y 1.1. Se obtiene

$$\frac{db}{da} = -x$$

5. $\frac{d^2d}{da^2} = -\frac{x^2}{2g^{iv}(x)}$

por la propiedad 2 y derivando nuevamente:

$\frac{d^2d}{da^2} = -\frac{x^2}{2}\frac{dx}{da}$

por la propiedad 1.1:

$\frac{d^2d}{da^2} = -\frac{x^2}{2g^{iv}(x)}$

6. $\frac{d^2c}{da^2} = \frac{x}{g^{iv}(x)}$

por la propiedad 3 y derivando nuevamente:

$\frac{d^2c}{da^2} = x\frac{dx}{da}$

por la propiedad 1.1, se tiene:

$$\frac{d^2c}{da^2} = \frac{x}{g^{iv}(x)}$$

7. $\frac{dc}{da} = \frac{1}{2}\left[\frac{db}{da}\right]^2$

por la propiedad 4

8. $\frac{dd}{da} = \frac{\left[\frac{db}{da}\right]^3}{6}$

por la propiedad 4.

4. APLICACIÓN A ECUACIONES DIFERENCIALES DE TERCER ORDEN.

En este capítulo se encontrará la solución de algunas ecuaciones diferenciales de tercer orden, mediante transformaciones derivadas de las propiedades de la función L estudiada en el capítulo anterior, por medio de dos métodos (reducción de orden e incremento de orden) basadas en el trabajo de grado “transformada de Legendre aplicada a la solución de ecuaciones diferenciales de orden superior”[4].

Para realizar este estudio, se partirá de una ecuación diferencial

$$H\left(x, y, y', y'', y''', y^{iv}, y^{v}\right) = 0 \text{ (1)}$$

donde x es la variable independiente, y una función de x y y', y'' , y''' , y^{iv} primera, segunda, tercera y cuarta derivada respectivamente.

Se define T_1 como:

$$T_1\begin{cases} x = \sqrt[3]{-6d'} \\ y = -ad' + \dfrac{b}{2}\left(\sqrt[3]{-6d'}\right)^2 + C\left(\sqrt[3]{-6d'}\right) + d \\ y' = \dfrac{a}{2}\left(\sqrt[3]{-6d'}\right)^2 + b\left(\sqrt[3]{-6d'}\right) + C \\ y'' = a\left(\sqrt[3]{-6d'}\right) + b \\ y''' = a \\ y^{iv} = \dfrac{-\left(\sqrt[3]{-6d'}\right)^2}{2d''} \\ y^{v} = \dfrac{\sqrt[3]{-6d'}}{d''}\left(\dfrac{3d'''d'}{2(d'')^2} - 1\right) \end{cases}$$

lo que permite construir una ecuación diferencial

$$F(a, d, d', d'', d''') = 0 \quad \text{(2)}$$

donde la variable independiente es a, d una función de a y d', d'', d''' primera, segunda y tercera derivada de d respectivamente, a partir de una ecuación diferencial (1).

[4] Tesis “transformada de Legendre aplicada a la solucióndе ecuaciones diferenciales de orden superior ”(1999)

Las soluciones de la ecuación obtenida mediante T_1 forman el conjunto ϑ de aquellas soluciones de la ecuación original (1) a las que se les puede aplicar la transformada L.

Utilizando T_1 y las propiedades de L, es posible encontrar soluciones de la ecuación (1), por medio de T_2:

$$T_2\begin{cases} a = y''' \\ b = y'' - y'''x \\ C = y' - xy'' + \dfrac{x^2}{2}y''' \\ d = y - y'x + \dfrac{x^2}{2}y'' - \dfrac{x^3}{6}y''' \\ d' = -\dfrac{x^3}{6} \\ d'' = -\dfrac{x^2}{2y^{iv}} \\ d''' = -\dfrac{x}{(y^{iv})^2} + \dfrac{x^2y^v}{2(y^{iv})^3} \end{cases}$$

Mediante T_2, es posible encontrar una ecuación diferencial de la forma (1), por medio de una ecuación diferencial de la forma (2). Solucionando la ecuación de la forma (2), que puede ser transformada mediante las propiedades de L, es posible encontrar soluciones de la ecuación (1).

Posteriormente, se estudiará la aplicación de T_1, T_2 y las características de las ecuaciones diferenciales trabajadas, sin centrarse en los procesos de solución utilizados. Cabe resaltar que las ecuaciones diferenciales encontradas se reducen en dos órdenes o se incrementa en dos órdenes.

4.1. Método de reducción de orden.

Este método será abordado para dar soluciones particulares a ecuaciones diferenciales de orden tres. Ya que, por medio de T_1 y T_2 se obtiene una ecuación diferencial de orden uno, la cual es útil para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial de orden tres.

El método funciona de la siguiente manera, se forma una aplicación W del conjunto de ecuaciones diferenciales $H(x, y, y', y'', y''') = 0$ al conjunto de ecuaciones diferenciales $F(a, d, d') = 0$ y W^{-1} la aplicación inversa de W.

Del mismo modo, se genera las aplicaciones B y B^{-1} las cuales están definidas en el conjunto de soluciones de las ecuaciones diferenciales $H(x, y, y', y'', y''') = 0$ al conjunto de soluciones de las ecuaciones diferenciales $F(a, d, d') = 0$, B^{-1} es la aplicación inversa de B.

De manera general, se tiene:

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}\text{Ecuación diferencial} \\ H(x, y, y', y'', y''') = 0\end{array} \arrow[r, shift left, "W"] \arrow[d] & \begin{array}{c}\text{Ecuación diferencial} \\ F(a, d, d') = 0\end{array} \arrow[l, shift left, "W^{-1}"] \arrow[d] \\
\begin{array}{c}\text{Solución particular de} \\ H(x, y, y', y'', y''') = 0\end{array} \arrow[r, shift left, "B"] & \begin{array}{c}\text{Solución particular de} \\ F(a, d, d') = 0\end{array} \arrow[l, shift left, "B^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

Ejemplos:

- En la ecuación diferencial de tercer orden

$$\frac{x^3}{6}(1 + y''') - y + y'x - \frac{x^2}{2}y'' = 0 \qquad (3)$$

Utilizando las propiedades de L y sustituyendo x, y, y', y'', y''' por sus equivalentes en T_1, se obtiene la ecuación diferencial de primer orden.

$$d' + d = 0$$

con solución particular

$$d(a) = e^{-a} \qquad (4)$$

que es el conjunto dual de alguna solución y de la ecuación (3). Para encontrar tal solución, se aplica T_2 y las propiedades de L.

derivando (4)

$$d'(a) = -\, e^{-a}$$

por la propiedad 2, se tiene

$$-\, e^{-a} = -\frac{x^3}{6}$$

de lo cual

$$x = \sqrt[3]{6\, e^{-a}} \quad \text{y} \quad a = -\ln\left(\frac{x^3}{6}\right)$$

por las propiedades 3 y 4

$$b'(a) = -\sqrt[3]{6\, e^{-a}} \quad \text{y} \quad c'(a) = \frac{(\sqrt[3]{6})^2}{2}(e^{-a})^{\frac{2}{3}}$$

se obtiene respectivamente

$$b(a) = 3\sqrt[3]{6}\,(e)^{\frac{-a}{3}} \quad \text{y} \quad c(a) = -\frac{3(\sqrt[3]{6})^2}{4}e^{\frac{-2a}{3}}$$

sustituyendo a, b, c, d en y de T_1, se obtiene:

$$y = -\frac{x^3}{6}\ln\left(\frac{x^3}{6}\right) + \frac{3}{2}\sqrt[3]{6}\,(e)^{\frac{-a}{3}}x^2 - \frac{3(\sqrt[3]{6})^2}{4}e^{\frac{-2a}{3}}\,x + e^{-a}$$

$$y = x^3\left(\frac{1}{6}\ln(6) - \frac{1}{2}\ln(x) + \frac{11}{12}\right)$$

que es solución particular de la ecuación diferencial (3).

- En la ecuación diferencial de tercer orden

$$-\frac{2x^3}{3}y''' - 4y + 4y'x - 2x^2y'' = 0 \qquad (5)$$

Utilizando las propiedades de L y sustituyendo x, y, y', y'', y''' por sus equivalentes en T_1, se obtiene:

$$8ad' - 4d = 0$$

que es una ecuación diferencial de primer orden, con solución particular

$$d(a) = -\sqrt{a} \qquad (6)$$

que es el conjunto $\boldsymbol{\vartheta}$ de alguna solución y de la ecuación (5). Para encontrar tal solución, se aplica T_2 y las propiedades de L.

derivando (6)

$$d'(a) = -\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

por la propiedad 2, se tiene

$$-\frac{x^3}{6} = -\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

donde se obtiene que

$$x = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[6]{a}} \quad \text{y} \quad a = \frac{9}{x^6}$$

por las propiedades 3 y 4.

$$b'(a) = -\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[6]{a}} \quad \text{y} \quad c'(a) = \frac{(\sqrt[3]{3})^2}{2a^{\frac{1}{3}}}$$

se obtiene respectivamente

$$b(a) = -\frac{6}{5}\sqrt[3]{3}\,a^{\frac{5}{6}} \quad \text{y} \quad c(a) = \frac{3(\sqrt[3]{3})^2}{4}a^{\frac{2}{3}}$$

sustituyendo a, b, c, d en y de T_1, se obtiene

$$y = -\frac{9}{x^6}\left(-\frac{x^3}{6}\right) - \frac{\left(\frac{6}{5}\sqrt[3]{3}\,a^{\frac{5}{6}}\right)}{2}x^2 + \left(\frac{3\left(\sqrt[3]{3}\right)^2}{4}a^{\frac{2}{3}}\right)x - \sqrt{a}$$

$$y = -\frac{9}{x^6}\left(-\frac{x^3}{6}\right) - \frac{\left(\frac{6}{5}\sqrt[3]{3}\left(\frac{9}{x^6}\right)^{\frac{5}{6}}\right)}{2}x^2 + \left(\frac{3\left(\sqrt[3]{3}\right)^2}{4}\left(\frac{9}{x^6}\right)^{\frac{2}{3}}\right)x - \sqrt{\left(\frac{9}{x^6}\right)}$$

$$y = -\frac{3}{20x^3}$$

que es una solución particular de la ecuación diferencial (5).

- En la ecuación diferencial de tercer orden

$$\frac{x^2}{2}\left(y'' - \frac{x}{3}y'''\right) + y = \frac{x^3}{3} + y'x \qquad (7)$$

Utilizando las propiedades de L y sustituyendo x, y, y', y'', y''' por sus equivalentes en T_1, se obtiene:

$$2d' + d = 0$$

que es una ecuación diferencial de primer orden, con solución particular

$$d(a) = e^{-\frac{a}{2}} \qquad (8)$$

que es el conjunto $\boldsymbol{\vartheta}$ de alguna solución y de la ecuación (7). Para encontrar tal solución, se aplica T_2 y las propiedades de L.

derivando (8)

$$d'(a) = -\frac{e^{-\frac{a}{2}}}{2}$$

por la propiedad 2, se tiene

$$-\frac{x^3}{6} = -\frac{e^{-\frac{a}{2}}}{2}$$

donde se obtiene que

$$x = \sqrt[3]{3e^{-\frac{a}{2}}} \qquad \text{y} \qquad a = -2\ln\left(\frac{x^3}{3}\right)$$

por las propiedades 3 y 4.

$$b'(a) = -\sqrt[3]{3e^{-\frac{a}{2}}} \quad \text{y} \quad c'(a) = \frac{\left(\sqrt[3]{3e^{-\frac{a}{2}}}\right)^2}{2}$$

se obtiene respectivamente

$$b(a) = 6\sqrt[3]{3}e^{-\frac{a}{6}} \qquad \text{y} \quad c(a) = -\frac{3(\sqrt[3]{3})^2}{2}e^{-\frac{a}{3}}$$

sustituyendo a, b, c, d en y de T_1, se tiene

$$y = -\frac{x^3}{3}\ln(x^3) + \frac{x^3}{3}\ln(3) + \frac{11}{6}x^3$$

que es una solución particular de la ecuación diferencial (7).

- la ecuación diferencial de tercer orden

$$\frac{x^6}{36}(y''')^2 - \frac{x^5}{6}y''y''' + x^4\left[\frac{(y'')^2}{4} + \frac{y'y'''}{3}\right] - x^3\left[y'y'' + \frac{y''y}{6}\right] + x^2[yy'' - (y')^2] - y(2xy' - y) = -\frac{x^3}{6} \qquad (9)$$

Aplicando T_1, se obtiene la ecuación diferencial de primer orden

$$d' - d^2 = 0$$

cuya solución general es:

$$d(a) = -\frac{1}{a+k} \qquad (10)$$

con $k = 0$ y derivando (10)

$$d'(a) = \frac{1}{a^2}$$

por la propiedad 2, se tiene

$$-\frac{x^3}{6} = \frac{1}{a^2}$$

donde se obtiene que

$$x = \sqrt[3]{-\frac{6}{a^2}} \qquad \text{y} \qquad a = \pm\sqrt[2]{-\frac{6}{x^3}}$$

i. Caso

$$a = \sqrt[2]{-\frac{6}{x^3}} \text{ con } x \in (-\infty, 0) \qquad \text{y} \qquad x = \sqrt[3]{-\frac{6}{a^2}}$$

por las propiedades 3 y 4.

$$b'(a) = -\sqrt[3]{-\frac{6}{a^2}} \quad \text{y} \quad c'(a) = \frac{\left(\sqrt[3]{-\frac{6}{a^2}}\right)^2}{2}$$

se obtiene respectivamente

$$b(a) = -3\sqrt[3]{-6}a^{1/3} \qquad \text{y} \quad c(a) = -\frac{3\left(\sqrt[3]{-6}\right)^2}{2}a^{\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

sustituyendo a, b, c, d en y de T_1, se tiene

$$y = -\frac{8}{3}\sqrt[2]{-6x^3}$$

que es una solución particular de la ecuación diferencial (9).

ii. Caso

$$a = -\sqrt[2]{-\frac{6}{x^3}} \text{ con } x \in (-\infty, 0) \quad \text{y} \quad x = \sqrt[3]{-\frac{6}{a^2}}$$

por las propiedades 3 y 4.

$$b'(a) = -\sqrt[3]{-\frac{6}{a^2}} \quad \text{y} \quad c'(a) = \frac{\left(\sqrt[3]{-\frac{6}{a^2}}\right)^2}{2}$$

se obtiene respectivamente

$$b(a) = -3\sqrt[3]{-6}a^{1/3} \quad \text{y} \quad c(a) = -\frac{3\left(\sqrt[3]{-6}\right)^2}{2}a^{\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

sustituyendo a, b, c, d en y de T_1, se tiene

$$y = \frac{8}{3}\sqrt[2]{-6x^3}$$

que es otra solución particular de la ecuación diferencial (9).

Sin embargo, para algunas ecuaciones diferenciales de tercer orden no es posible dar su solución por medio de la transformada L, por ejemplo, si en la ecuación diferencial

$$-\frac{x^3}{6}[1 + y'''sen(y''')] + sen(y''')\left[y - y'x + \frac{x^2}{2}y'''\right] = 0$$

Se aplica T_1, se obtiene la ecuación diferencial de primer orden

$$d' - dsen(a) = 0$$

Cuya solución es:

$$d(a) = \frac{3}{2}e^{(\cos(a)-1)} \qquad (11)$$

Por lo tanto, no es posible determinar la solución a la ecuación diferencial de tercer orden, ya que, la primera derivada de (11) no es invertible.

Para encontrar soluciones particulares de ecuaciones diferenciales de orden tres, por medio de la transformada L, se debe tener presente las siguientes condiciones:

- $d'(a)$ sea invertible.
- La solución de la ecuación diferencial de orden tres exista.
- La solución sea de clase C^3.
- La tercera derivada de la solución sea invertible e diferenciable.

4.2. Método de incremento de orden.

Este método será abordado para dar soluciones particulares a ecuaciones diferenciales de orden tres que presenten una apariencia complicada, por medio de T_1 y T_2, con la idea de obtener una ecuación diferencial de orden cinco sencilla de resolver.

Mediante T_2, se forma una aplicación V del conjunto de ecuaciones diferenciales $F(a,d,d',d'',d''')=0$ al conjunto de ecuaciones diferenciales $H\left(x,y,y',y'',y''',y^{iv},y^{v}\right)=0$, V^{-1} es la aplicación inversa de V.

Del mismo modo, se genera las aplicaciones B y B^{-1} las cuales están definidas en el conjunto de soluciones de las ecuaciones diferenciales $F(a,d,d',d'',d''')=0$ al conjunto de soluciones de las ecuaciones diferenciales $H\left(x,y,y',y'',y''',y^{iv},y^{v}\right)=0$, B^{-1} es la aplicación inversa de B. De manera general, se tiene:

$$\begin{tikzcd} \begin{array}{c}\text{Ecuación diferencial}\\ F(a,d,d',d'',d''')=0\end{array} \arrow[r, shift left, "V"] \arrow[d] & \begin{array}{c}\text{Ecuación diferencial}\\ H(x,y,y',y'',y''',y^{iv},y^{v})=0\end{array} \arrow[l, shift left, "V^{-1}"] \arrow[d] \\ \begin{array}{c}\text{Solución particular de}\\ F(a,d,d',d'',d''')=0\end{array} \arrow[r, shift left, "B"] & \begin{array}{c}\text{Solución particular de}\\ H(x,y,y',y'',y''',y^{iv},y^{v})=0\end{array} \arrow[l, shift left, "B^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Ejemplo:

- En la ecuación diferencial de tercer orden

$$(-d''')\sqrt[3]{(-6d')^4} - 4\sqrt[3]{-6d'}(d'')^2 - 4a(d'')^3 = 0 \qquad (12)$$

Utilizando propiedades de L y sustituyendo d'', d''', d' y a por sus equivalentes en T_2, se obtiene la ecuación diferencial de quinto orden.

$$y^v - y''' = 0$$

con solución particular

$$y = e^x \qquad (13)$$

derivando tres veces a (13).

$$y''' = e^x \qquad (14)$$

por definición se tiene que: $a = y'''$, sustituyendo en (14)

$$a = e^x$$

despejando x

$$x = \ln(a)$$

sustituyendo en $d(a)$, se obtiene:

$$d(a) = a - aln(a) + \frac{a}{2}(\ln(a))^2 - \frac{a}{6}(\ln(a))^3$$

que es una solución particular de la ecuación diferencial (12).

4.3. Aplicación de L a algunas ecuaciones diferenciales de cuarto orden.

En este apartado, se encontrarán algunas soluciones particulares de ecuaciones diferenciales de cuarto orden.

T_1 y T_2 permiten encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales de cuarto orden, por medio del método reducción de orden, definido como:

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}\text{Ecuación diferencial}\\ H(x,y,y',y'',y''',y^{iv})=0\end{array} \arrow[r, shift left, "M"] \arrow[d] & \begin{array}{c}\text{Ecuación diferencial}\\ F(a,d,d',d'')=0\end{array} \arrow[l, shift left, "M^{-1}"] \arrow[d] \\
\begin{array}{c}\text{Solución particular de}\\ H(x,y,y',y'',y''',y^{iv})=0\end{array} \arrow[r, shift left, "B"] & \begin{array}{c}\text{Solución particular de}\\ F(a,d,d',d'')=0\end{array} \arrow[l, shift left, "B^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

Ejemplos:

- En la ecuación diferencial de cuarto orden

$$2(xy'-y)-x^2y''+\tfrac{1}{3}x^3y'''=(y''')^2\tfrac{x^2}{2}(y'^{V})^{-1}+y'''\tfrac{x^3}{3} \qquad (15)$$

Utilizando las propiedades de L y sustituyendo x,y,y',y'',y''' por sus equivalentes en T_1, se obtiene la ecuación diferencial de segundo orden.

$$a^2d''+2ad'-2d=0$$

con solución particular

$$d(a)=\tfrac{1}{6a^2} \qquad (16)$$

que es el conjunto dual de alguna solución y de la ecuación (15). Para encontrar tal solución, se aplica T_2 y las propiedades de L.

derivando (16)

$$d'(a) = -\frac{1}{3a^3}$$

por la propiedad 2, se tiene

$$-\frac{1}{3a^3} = -\frac{x^3}{6}$$

de lo cual

$$x = \frac{\sqrt[3]{2}}{a} \qquad \text{y} \qquad a = \frac{\sqrt[3]{2}}{x}$$

por las propiedades 3 y 4

$$b'(a) = -\frac{\sqrt[3]{2}}{a} \qquad \text{y} \qquad c'(a) = \frac{(\sqrt[3]{2})^2}{2a^2}$$

se obtiene respectivamente

$$b(a) = -\sqrt[3]{2}\ln(a) \quad \text{y} \quad c(a) = -\frac{(\sqrt[3]{2})^2}{2a}$$

sustituyendo a, b, c, d en y de T_1, se tiene:

$$y = -\frac{\sqrt[3]{2}}{x}\left(-\frac{x^3}{6}\right) - \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\ln\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{x}\right)x^2 - \frac{(\sqrt[3]{2})^2}{2\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{x}\right)}x + \frac{1}{6\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{x}\right)^2}$$

$$y = x^2\left(-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\ln\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{x}\right) - \frac{1}{2\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}\right)$$

que es una solución particular de la ecuación diferencial (15).

- En la ecuación diferencial de cuarto orden

$$\frac{x^2}{2}+3yy^{iv}-3y'xy^{iv}+\frac{3}{2}x^2y''y^{iv}-\frac{1}{2}x^3y'''y^{iv}=-\frac{x^3}{3}y^{iv} \tag{17}$$

Utilizando las propiedades de L y sustituyendo $x, y, y', y'', y''', y^{iv}$ por sus equivalentes en T_1, se obtiene la ecuación diferencial de segundo orden.

$$d''+2d'-3d=0$$

Con las soluciones particulares

$$d(a)=e^{a} \text{ y } d(a)=e^{-3a}$$

i. Caso.

$$d(a)=e^{-3a} \tag{18}$$

derivando (18)

$$d'(a)=-3e^{-3a}$$

por la propiedad 2, se tiene

$$-3e^{-3a}=-\frac{x^3}{6}$$

de lo cual

$$x=\sqrt[3]{18}\sqrt[3]{e^{-3a}} \qquad \text{y} \qquad a=-\frac{1}{3}\ln\left(\frac{x^3}{18}\right)$$

Por las propiedades 3 y 4

$$b'(a)=-\sqrt[3]{18}\sqrt[3]{e^{-3a}} \quad \text{y} \quad c'(a)=\frac{\left(\sqrt[3]{18}\sqrt[3]{e^{-3a}}\right)^2}{2}$$

se obtiene respectivamente

$$b(a) = \sqrt[3]{18}e^{-a} \quad \text{y} \quad c(a) = -\frac{\left(\sqrt[3]{18}\right)^2}{4}e^{-2a}$$

sustituyendo a, b, c, d en y de T_1, se tiene

$$y = x^3\left(-\frac{1}{18}\ln\left(\frac{x^3}{18}\right) + \frac{11}{36}\right)$$

que es solución particular de la ecuación diferencial (17).

ii. Caso.

$$d(a) = e^a \qquad (19)$$

derivando (19)

$$d'(a) = e^a$$

por la propiedad 2, se tiene

$$e^a = -\frac{x^3}{6} \text{ con } x \in (-\infty, 0).$$

de lo cual

$$x = \sqrt[3]{-6}\sqrt[3]{e^a} \qquad \text{y} \qquad a = \ln\left(-\frac{x^3}{6}\right)$$

por las propiedades 3 y 4

$$b'(a) = -\sqrt[3]{-6}\sqrt[3]{e^a} \quad \text{y} \quad c'(a) = \frac{\left(\sqrt[3]{-6}\sqrt[3]{e^a}\right)^2}{2}$$

se obtiene respectivamente

$$b(a) = -3\sqrt[3]{-6}e^{\frac{a}{3}} \quad \text{y} \quad c(a) = \frac{3\left(\sqrt[3]{-6}\right)^2}{4}e^{\frac{2}{3}a}$$

sustituyendo a, b, c, d en y de T_1, se tiene

$$y = x^3 \left(\frac{1}{6} \ln \left(-\frac{x^3}{6} \right) - \frac{11}{12} \right)$$

que es otra solución particular de la ecuación diferencial (17).

5. LA TRANSFORMADA DE LEGENDRE DE PRIMER GRADO EN CAMPOS ESCALARES.

En el capítulo tres se estudió la transformada de Legendre para funciones reales de clase $\boldsymbol{C^3}$; ahora se estudiará la transformada de Legendre de primer grado a campos escalares, para esto, se da una definición de la Transformada de Legendre, también se analizará el comportamiento de ciertos conjuntos de planos de $\mathbb{R}^3$ y se mostrarán algunos ejemplos de funciones escalares de clase $\boldsymbol{C^2}$ teniendo presentes sus derivadas mixtas.

5.1. Definición

Sea $\boldsymbol{F}$ el conjunto de funciones escalares f, tal que:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto f(x, y) = ax + by + c$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$\boldsymbol{F}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones:

$$(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$$

$$(\alpha f)(x, y) = \alpha f(x, y)$$

$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}$ y $f, g\ \in F$

$\boldsymbol{F}$ es el conjunto de funciones escalares que depende de los parámetros a, b y c. Esto permite inferir que existe una correspondencia del espacio vectorial $\boldsymbol{F}$ y el espacio $\mathbb{R}^3$. Esta correspondencia se define como **Transformada de Legendre de primer grado en campos escalares**, donde es una función biyectiva, con dominio el espacio vectorial $\boldsymbol{F}$ e imagen en el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Dicho de otra manera:

$$L: \boldsymbol{F} \to \mathbb{R}^3$$

$$f(x, y) = ax + by + c \quad \longmapsto \quad (a, b, c)$$

Sea (a,b,c) un punto de $\mathbb{R}^3$ y B el subconjunto de $\boldsymbol{F}$ cuya gráfica es un plano, es decir:

$$B = \{f \in \boldsymbol{F} |\, f(x,y) = ax + by + c \text{ con } a,b,c \in \mathbb{R}\}.$$

esto permite definir una nueva correspondencia L^{-1}, así:

$$L^{-1}: \mathbb{R}^3 \to \boldsymbol{F}$$

$$f(x,y) = (a,b,c) \longmapsto ax + by + c$$

La ecuación cartesiana de un plano es de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$, con A, B, C y $D \in \mathbb{R}$ y su vector normal es $\vec{N} = (A, B, C)$. Cuando $C \neq 0$ se expresa la variable z en función de las variables x y y.

$$z = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C}$$

donde $a = \left(-\frac{A}{C}\right)$, $b = \left(-\frac{B}{C}\right)$ y $c = \left(-\frac{D}{C}\right)$ obteniendo:

$$f(x,y) = ax + by + c$$

Ejemplo:

- Sea $3x + 2y + 7z = 12$ la ecuación de un plano, donde se tiene:

$$7z = -3x - 2y + 12$$

$$z = -\frac{3}{7}x - \frac{2}{7}y + \frac{12}{7}$$

$$f(x,y) = -\frac{3}{7}x - \frac{2}{7}y + \frac{12}{7}$$

aplicando la transformada $L\big(f(x,y)\big)$ se obtiene el punto $\left(-\frac{3}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{12}{7}\right) \in \mathbb{R}^3$.

5.2. La transformada de Legendre de algunos conjuntos de planos.

En este sección, se trabajará con algunos conjuntos de planos de $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ con ciertas características, como, los planos que pasan por un punto, los planos que contienen una recta, los planos paralelos; con el fin de aplicar la transformada de Legendre y establecer algunos comportamientos y propiedades.

5.2.1. Planos que pasan por un punto dado:

Para este ítem, se realizará un estudio similar al de la tesis '*transformada de Legendre aplicada a la solución de ecuaciones diferenciales de orden superior*', ya que toman un conjunto de rectas de $\mathbb{R}^2$ que pasan por un punto y su transformada es una recta en $\mathbb{R}^2$; partiendo de esta idea, se toma el conjunto de planos de $\mathbb{R}^3$ que pasan por un punto.

Sea el conjunto de planos $Ax + By + Cz + D = 0$ con $C \neq 0$ que pasan por el punto $\left(\frac{1}{2}, 3, \frac{5}{2}\right)$

se tiene:

$$f(x,y) = ax + by + \left(-\frac{a}{2} - 3b + \frac{5}{2}\right) \text{ con } a, b \in \mathbb{R}$$

aplicando la transformada L a $f(x,y)$, se tiene:

$$L(f(x,y)) = \left(a, b, -\frac{a}{2} - 3b + \frac{5}{2}\right)$$

expresando $\left(a, b, -\frac{a}{2} - 3b + \frac{5}{2}\right)$ como:

$$\left(a, b, -\frac{a}{2} - 3b + \frac{5}{2}\right) = \left(a, 0, -\frac{a}{2}\right) + (0, b, -3b) + \left(0, 0, \frac{5}{2}\right)$$

$$\left(a, b, -\frac{a}{2} - 3b + \frac{5}{2}\right) = a\left(1,0, -\frac{1}{2}\right) + b(0, 1, -3) + \left(0, 0, \frac{5}{2}\right)$$

se genera un plano ρ:

$$\rho = a\hat{A} + b\hat{B} + \left(0, 0, \frac{5}{2}\right)$$

donde $\hat{A} = \left(1,0,-\frac{1}{2}\right)$,$\hat{B} = (0, 1, -3)$.

La ecuación cartesiana del plano es: $\frac{1}{2}x + 3y + z - \frac{5}{2} = 0$ con vector normal $\left(\frac{1}{2}, 3, 1\right)$.

gráficamente:

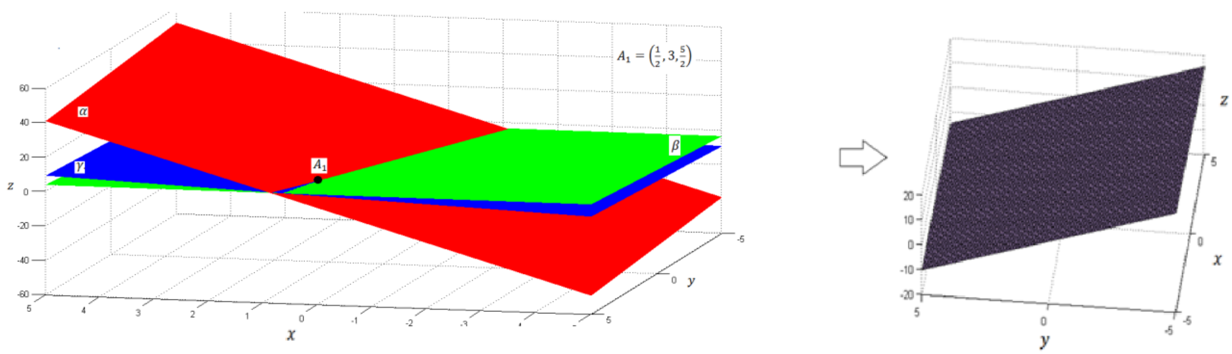


Figura 3. Planos que pasan por un punto y su transformada.

De manera general, se toma todos los planos de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$ con $C \neq 0$ que pasan por un punto arbitrario (m, n, t).

Sea $M = \{f \in \boldsymbol{F} | (m, n, t) \in Graf(f)\}$ es decir el conjunto de todos los planos de f que pasan por el punto (m, n, t).

$$f(x, y) = ax + by + c \qquad (1)$$

como $(m, n, t) \in graf(f)$, se tiene:

$$am + bn + c = t$$

luego: $$c = t - am - bn$$

sustituyendo c en la ecuación (1):

$$f(x,y) = ax + by + (t - am - bn)$$

aplicando la transformada L a $f(x,y)$:

$$L(f(x,y)) = (a, b, t - am - bn)$$

Es decir que $L(M) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = t - mx - ny\}$, donde $L(M)$ es un plano que tiene vector normal $(m, n, 1)$.

Por lo tanto. Para los planos que pasen por un punto y aplicando la transformada L, se genera un plano.

5.2.2. Planos que contienen una recta dada:

Sea la ecuación paramétrica de la recta $X(t) = P + t\vec{A}$, donde P es un punto de la recta y $\vec{A}$ su vector director.

$$M = \{f \in \boldsymbol{F} |\ X(t) \in Graf(f) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}$$

sean A y B dos puntos que pertenecen a la recta. Los conjuntos de planos que contienen a tales puntos son:

$$M_A = \{f \in \boldsymbol{F} | A \in Graf(f)\} \text{ y } M_B = \{f \in \boldsymbol{F} | B \in Graf(f)\}$$

para garantizar planos $f(x,y)$ que contienen la recta $X(t)$, basta con tomar el conjunto de las intersecciones de M_A y M_B. Esto se puede argumentar por el axioma de incidencia de la geometría absoluta, el cual indica que por cada par de puntos distinto P y Q pasa una única recta que los contienen. Es decir

$$M_A \cap M_B = M$$

como L es una función inyectiva y la imagen bajo la transformada L para cada conjunto de planos M_A y M_B es un plano de la forma $z = t - mx - ny$ con vector normal $(m, n, 1)$. Por ende:

$$(M_A \cap M_B) \mapsto L(M_A \cap M_B) = L(M_A) \cap L(M_B) = L(M)$$

Entonces $L(M_A) \cap L(M_B)$ es lo que se genera al aplicar la transformada L a planos que contienen una recta, tal intersección es una recta en el espacio $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo:

- Sea la recta $X(t) = (5, 1, 3) + t(1,2,-1)$ y los punto $A = (5, 1, 3)$, $B = (7, 5, 1)$ que pertenecen a $X(t)$.

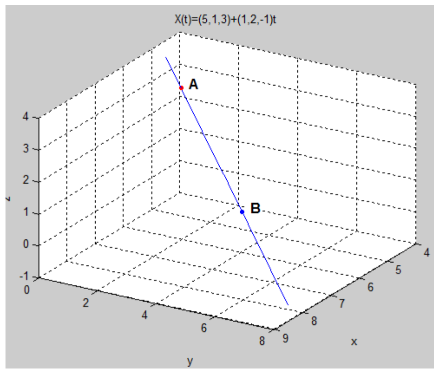


Figura 4. Recta $X(t)$.

Los conjuntos de planos que contienen a tales puntos, son:

$$M_A = \{f \in \boldsymbol{F} | A \in Graf(f)\} \text{ y } M_B = \{f \in \boldsymbol{F} | B \in Graf(f)\}$$

al aplicar la transformada de Legendre se tiene:

$L(M_A)$ es igual a $z = 3 - 5x - y$ y $L(M_B)$ igual a $z = 1 - 7x - 5y$,

por tanto $L(M_A) \cap L(M_B)$ es una recta en el espacio $\mathbb{R}^3$, cuya ecuación vectorial es $X(t) = \left(\frac{7}{9}, -\frac{8}{9}, 0\right) + t\left(-\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, 1\right)$.

Gráficamente:

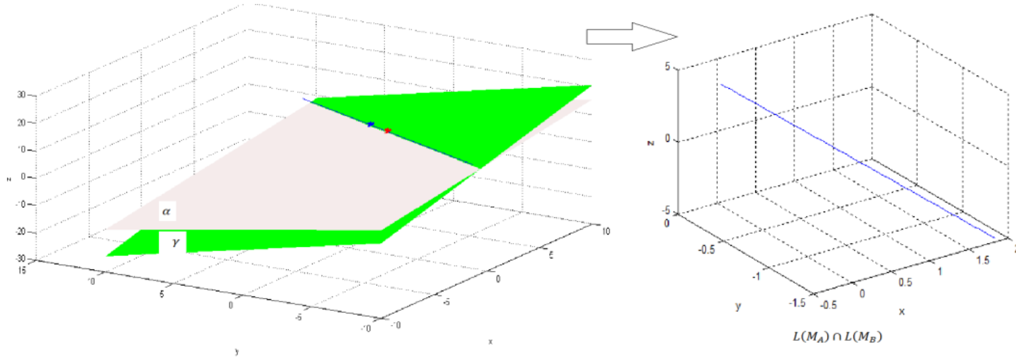


Figura 5. Planos que contienen una recta dada y su transformada L.

Para este ejemplo, los puntos $A = (5, 1, 3)$ y $B = (7, 5, 1)$ no pertenecen a la recta $X(t) = \left(\frac{7}{9}, -\frac{8}{9}, 0\right) + t\left(-\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, 1\right)$.

5.2.3. Planos Paralelos.

Debido a los resultados obtenidos en los estudio de la '*transformada de Legendre de segundo orden'* , se sabe que el conjunto de rectas paralelas en $\mathbb{R}^2$ tiene como transformada una recta vertical en $\mathbb{R}^2$, por esto, se estudiará la transformada de Legendre a conjuntos de planos paralelos de $\mathbb{R}^3$.

Sea el conjunto de todos los planos paralelos, a un plano $Ax + By + Cz = D$,

$$\alpha Ax + \alpha By + \alpha Cz = E \text{ donde } \alpha \in \mathbb{R} \quad (2)$$

despejando la variable z de la ecuación (2):

$$f(x, y) = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y + \frac{E}{\alpha C}$$

aplicando la transformada L se tiene

$$L\big(f(x, y)\big) = \left(-\frac{A}{C}, -\frac{B}{C}, \frac{E}{\alpha C}\right)$$

Ejemplo:

- Sean $f(x,y) = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$, $g(x,y) = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{7}{4}$ y $h(x,y) = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{10}{6}$; un conjunto de planos paralelos.

aplicando L a cada plano se obtiene los puntos:

$$L(f(x,y)) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$L(g(x,y)) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right)$$

$$L(h(x,y)) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{3}\right)$$

los cuales pertenecen a $\mathbb{R}^3$.

Tales puntos en el espacio $\mathbb{R}^3$ describen una recta perpendicular al plano xy.

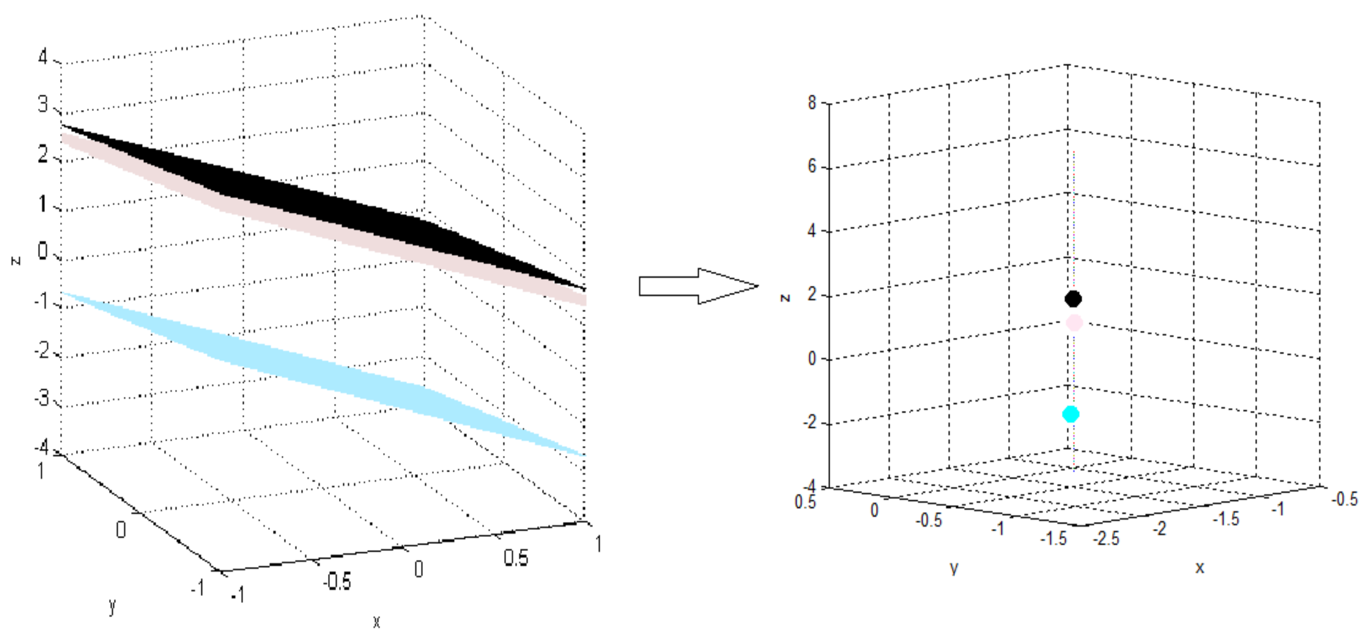


Figura 6. Planos paralelos y su transformada de Legendre

5.2.4. Planos con variación de sus coeficientes.

Con los resultados del numeral anterior, los puntos de $\mathbb{R}^3$ obtenidos al aplicar la transformada de Legendre, tienen sus primeras componentes fijas, y la última variando. Es por ello que en este apartado se trabajará con funciones escalares donde varíen sus coeficientes.

Sea el conjunto de funciones escalares de la forma $f(x, y) = ax + by + c$ donde $a, b,$ y $c \in \mathbb{R}$. Además se establecerá dos coeficientes fijos y el otro variante. Es decir:

$H = \{f \in \boldsymbol{F} \mid f$ tiene a y b fijos, c variante con $a, b, c \in \mathbb{R}\}$

- Por ejemplo, sean:

$$z = \frac{3}{2}x + 2y + 5$$

$$z = \frac{3}{2}x + 2y + 1$$

$$\vdots$$

$$z = \frac{3}{2}x + 2y + k$$

aplicando L a cada función escalar, se obtiene los puntos $\left(\frac{3}{2}, 2, 5\right)$, $\left(\frac{3}{2}, 2, 1\right)$,…, $\left(\frac{3}{2}, 2, k\right)$ donde $k \in \mathbb{R}$.

Se puede observar que el vector dirección $\vec{A}$ de la recta tiene igual dirección al vector unitario $(0,0,1)$. Por tanto, la ecuación vectorial de la recta es:

$$X, (t) = \left(\frac{3}{2}, 2, 5\right) + t(0,0,1)$$

$$X(t) = \left(\frac{3}{2}\ , 2\ , 5 + t\right)$$

$$Z = 5 + t$$

en este ejemplo se genera una recta perpendicular al plano xy.

Partiendo de lo anterior, se presente tres caso, de los cuales quedaran por desarrollar dos casos: cuando a y c fijos, b variante con $a, b, c \in \mathbb{R}$, y cuando b y c fijos, a variante. Es evidente al desarrollar estos dos casos que al aplicar la transformada Lse obtiene una recta perpendicular al plano xz y una recta perpendicular al plano yz respectivamente.

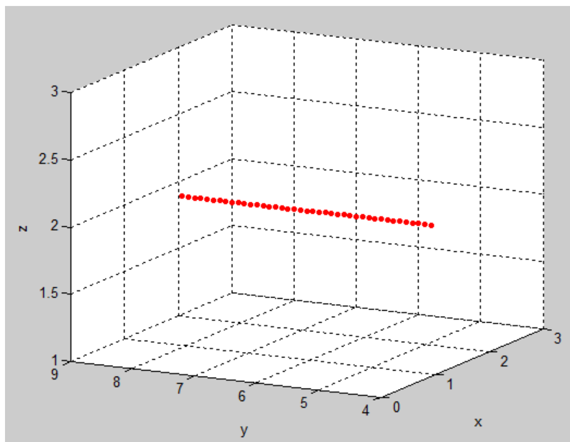


Figura 7. Recta perpendicular al plano xz

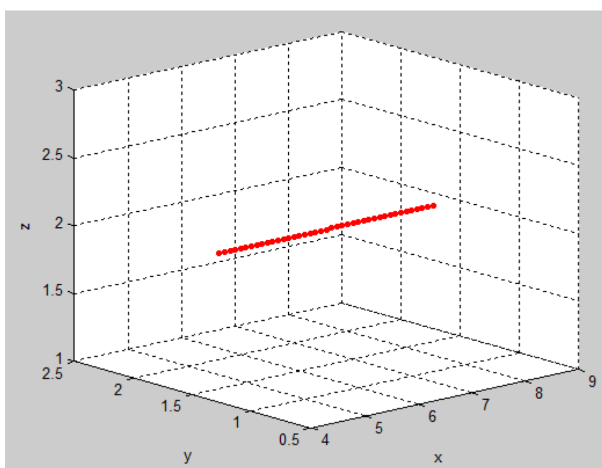


Figura 8. Recta perpendicular al plano yz

En las secciones anteriores, se desarrolló el estudio de algunos conjuntos de planos bajo la transformada de Legendre. Tal estudio permite abarcar uno de los objetivos, el cual es lograr caracterizar algunas funciones escalares por medio de sus planos tangentes.

5.3. Aplicación de la transformada de Legendre para algunas funciones escalares por medio de sus planos tangentes.

En esta sección, se trabajará con funciones escalares diferenciables de clase $\boldsymbol{C^2}$, garantizando su plano tangente en un punto (x_0, y_0, z_0) de la superficie, tal plano, no debe tener su vector normal contenido en el plano xy. Para con ello, poder aplicar la transformada L de legendre a los planos tangentes de la superficie.

Sea $f(x, y) = z$ una función escalar de clase C^2, la diferencial dz se define como:

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy$$

la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0, z_0) es:

$$g_{(x_0,y_0)}(x, y) = \frac{df}{dx}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{df}{dy}(x_0, y_0)(y - y_0) + z_0$$

aplicando la transformada L, se obtiene

$$L\left(g_{(x_0,y_0)}(x, y)\right) = (a, b, c)$$

donde $a = \frac{df}{dx}(x_0, y_0)$, $b = \frac{df}{dy}(x_0, y_0)$ y $c = z_0 - \frac{df}{dx}(x_0, y_0)x_0 - \frac{df}{dy}(x_0, y_0)y_0$

Sea $\boldsymbol{H} = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}^2} \middle| f \in C^2\right\}$ se considera una función W del conjunto $\boldsymbol{H}$ al conjunto $\boldsymbol{F}$ entonces se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{H} \arrow[r, "W"] \arrow[dr, "L \circ W"'] & \boldsymbol{F} \arrow[d, shift left, "L"] \\
 & \mathbb{R}^{\boldsymbol{3}} \arrow[u, shift left, "L^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

Ejemplos:

- Sea $f(x,y) = x^2 + xy$, con dominio $I = [0,1] \times [0,1]$.

derivando parcialmente a $f(x,y)$ se tiene:

$$\frac{df}{dx} = 2x + y \text{ y } \frac{df}{dy} = x$$

la ecuación del plano tangente en un punto (x_0, y_0, z_0) de la superficie $f(x,y)$, es:

$$h_{(x_0,y_0)}(x,y) = x(2x_0 + y_0) + x_0 y - x_0(1 + y_0)$$

aplicando L.

$$L\left(h_{(x_0,y_0)}(x,y)\right) = \left(2x_0 + y_0, x_0, -x_0(1 + y_0)\right)$$

se obtiene un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$ que depende de x_0 y y_0, con $0 \leq x_0 \leq 1$ y $0 \leq y_0 \leq 1$.

- Sea $f(x,y) = e^{x+y}$. con dominio $I = [a,b] \times [c,d]$.

derivando parcialmente a $f(x,y)$ se tiene:

$$\frac{df}{dx} = e^{x+y} \text{ y } \frac{df}{dy} = e^{x+y}$$

la ecuación del plano tangente en un punto (x_0, y_0, z_0) de la superficie $f(x,y)$ es:

$$g_{(x_0,y_0)}(x,y) = xe^{x_0+y_0} - x_0 e^{x_0+y_0} + ye^{x_0+y_0} - y_0 e^{x_0+y_0} + e^{x_0+y_0}$$

aplicando L:

$$L\left(g_{(x_0,y_0)}(x,y)\right) = \left(e^{x_0+y_0}, e^{x_0+y_0}, e^{x_0+y_0}(1 - x_0 - y_0)\right)$$

genera un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$ que depende de x_0 y y_0. con $a \leq x_0 \leq b$ y $c \leq y_0 \leq d$.

5.3.1. Campos escalares con derivadas mixtas nulas.

En esta sección, se realizará un tratamiento similar al capítulo 3 de este trabajo, en el cual, se busca que las derivadas parciales de una función escalar, sean invertibles. Si las derivadas parciales mixtas son nulas, se tiene que las derivadas parciales dependen de una sola variable, lo que permite hablar de inversibilidad.

Ejemplos:

- Sea

$$f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \qquad (2)$$

derivando $f(x,y)$ se tiene:

$$\frac{df}{dx} = \frac{2x}{a^2} \text{ y } \frac{df}{dy} = \frac{2y}{b^2} \qquad (3)$$

luego, $\nabla f(x,y)$ en el punto (x_0,y_0) es:

$$\nabla f(x_0,y_0) = \frac{2x_0}{a^2}\hat{\imath} + \frac{2y_0}{b^2}\hat{\jmath}$$

el plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto (x_0,y_0,z_0) es:

$$g_{(x_0,y_0)}(x,y) = \frac{2x_0x}{a^2} + \frac{2y_0y}{b^2} - \frac{{x_0}^2}{a^2} - \frac{{y_0}^2}{b^2}$$

aplicando L se obtiene:

$$L\left(g_{(x_0,y_0)}(x,y)\right) = \left(\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2,}, -\frac{{x_0}^2}{a^2} - \frac{{y_0}^2}{b^2}\right)$$

como la primera y segunda componente de $L\left(g_{(x_0,y_0)}(x,y)\right)$, dependen de una sola variable, se realiza la siguiente sustitución:

$$u = \frac{2x_0}{a^2} \qquad (5)$$

$$v = \frac{2y_0}{b^2} \qquad (6)$$

despejando x_0 y y_0 de (5) y (6)

$$x_0 = \frac{ua^2}{2} \qquad (7)$$

$$y_0 = \frac{vb^2}{2} \qquad (8)$$

sustituyendo (7) y (8), en la tercera componente de $L\left(g_{(x_0,y_0)}(x,y)\right)$, se obtiene:

$$w = -\frac{u^2a^2}{4} - \frac{v^2b^2}{4}$$

Que es un paraboloide equivalente a la transformada de Legendre de $f(x,y)$. (Superficie de color azul).

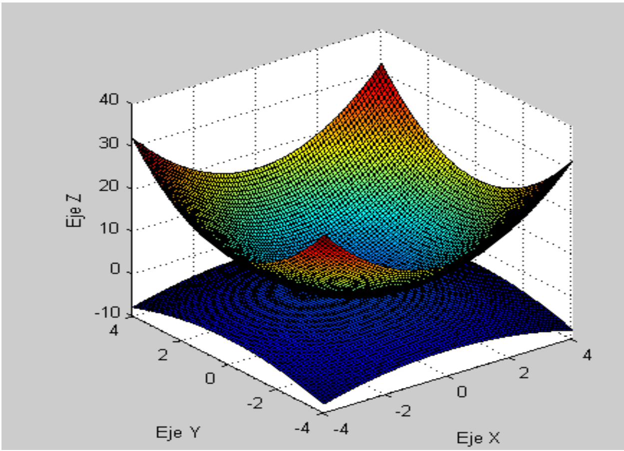
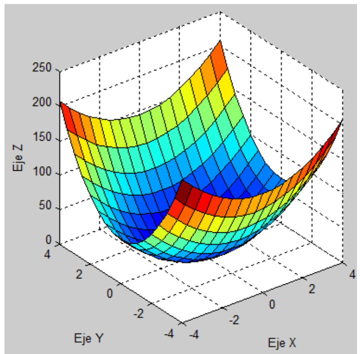
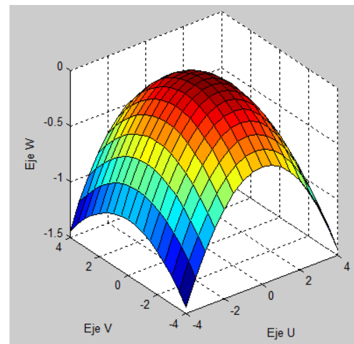


Figura 9. Paraboloide $f(x,y)$ y su transformada de Legendre.

Observemos el comportamiento del paraboloide elíptico y su transformada bajo una condición dada.

Condición	$f(x,y)$	$w(u,v)$
$0 < a < 1$ Y $0 < b < 1$	$f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ 	$w(u,v) = -\frac{a^2u^2}{4} - \frac{b^2v^2}{4}$ 

En conclusión, al aplicar la transformada L a un paraboloide elíptico, se obtendrá un paraboloide elíptico con signos contrarios al original, es decir negativos.

- Sea el paraboloide hiperbólico

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad (9)$$

con

$$\nabla f(x_0, y_0) = \frac{2cx_0}{a^2}\hat{\imath} - \frac{2cy_0}{b^2}\hat{\jmath}$$

la ecuación del plano tangente a la superficie $f(x,y)$ en el punto (x_0, y_0, z_0) es:

$$g_{(x_0,y_0)}(x,y) = \frac{2cx_0x}{a^2} - \frac{2cy_0y}{b^2} - \frac{c{x_0}^2}{a^2} + \frac{c{y_0}^2}{b^2}$$

aplicando L, se obtiene:

$$L\left(g_{(x_0,y_0)}(x,y)\right) = \left(\frac{2cx_0}{a^2}, -\frac{2cy_0}{b^2,}, -\frac{c{x_0}^2}{a^2} + \frac{c{y_0}^2}{b^2}\right)$$

sustituyendo

$$u = \frac{2cx_0}{a^2} \qquad (10)$$

$$v = -\frac{2cy_0}{b^2} \qquad (11)$$

despejando x_0 y y_0 de (10) y (11), respectivamente se obtiene:

$$x_0 = \frac{ua^2}{2c} \quad (12)$$

$$y_0 = -\frac{vb^2}{2c} \quad (13)$$

sustituyendo (12) y (13) en la tercera componente de $L\left(g_{(x_0,y_0)}(x,y)\right)$, se tiene el hiperboloide:

$$w = -\frac{u^2a^2}{4c} + \frac{v^2b^2}{4c}$$

que es la transformada de $f(x,y)$. (Superficie de color rojo)

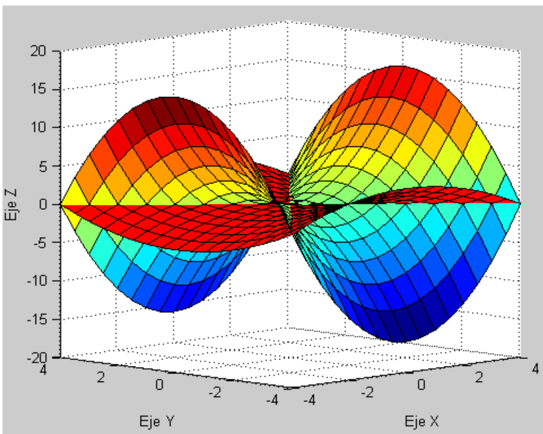
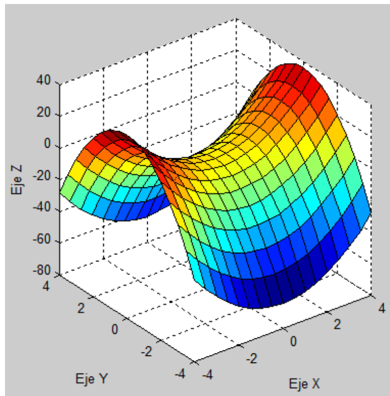
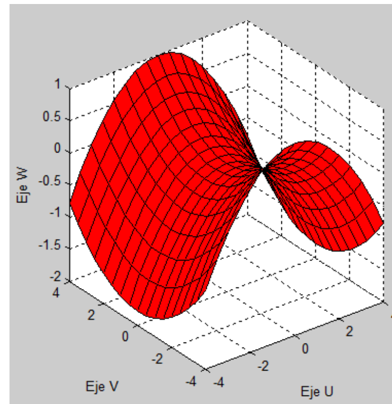


Figura 10. Hiperboloide $f(x,y)$ y su transformada de Legendre

Hiperboloide y su transformada L, bajo una condición.

<table>
<tr><td>Condición</td><td>$f(x,y)$</td><td>$w(u,v)$</td></tr>
<tr><td>$0 < a < 1$
Y
$0 < b < 1$
Y
$0 < c < 1$</td><td>$\frac{f(x,y)}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

</td><td>$w = -\frac{u^2a^2}{4c} + \frac{v^2b^2}{4c}$

</td></tr>
</table>

Se puede evidenciar que si se toma un hiperboloide y se aplica la transformada L se obtiene un Hiperboloide donde los signos cambian respecto al original.

5.3.2. Campos escalares con derivadas mixtas no nulas.

Para abordar el estudio de algunas superficies cuyas derivadas mixtas no son nulas, no se puede de la misma manera que se realizó en la sección anterior, ya que no se obtiene una forma explícita de la transformada L al ser aplicada a los planos tangentes de la superficie.

Es por ello, que se aplica la transformada L por medio de cortes de planos horizontales $z = k$ con la superficie. Es decir, se aplica la transformada $\boldsymbol{L}$ a los planos tangentes en los puntos (x, y, z) que forman la traza de la gráfica en el plano $z = k$, donde k es una constante diferente de cero.

A continuación se muestran algunos ejemplos:

- sea la superficie

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

conocida como Elipsoide. Tomando $a=b=c=1$, se obtiene un caso particular:

$$x^2+y^2+z^2=1$$

sea

$$f(x,y)=\pm\sqrt{1-x^2-y^2}$$

con

$$\nabla f(x_0,y_0)=\left(-\frac{x_0}{\sqrt{1-{x_0}^2-{y_0}^2}},-\frac{y_0}{\sqrt{1-{x_0}^2-{y_0}^2}}\right)$$

la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto (x_0,y_0,z_0) es:

$$g_{(x_0,y_0)}(x,y)= \quad -\frac{x_0}{\sqrt{1-{x_0}^2-{y_0}^2}}x-\frac{y_0}{\sqrt{1-{x_0}^2-{y_0}^2}}y+\frac{x_0^2}{\sqrt{1-{x_0}^2-{y_0}^2}}$$
$$+\frac{y_0^2}{\sqrt{1-{x_0}^2-{y_0}^2}}+\sqrt{1-{x_0}^2-{y_0}^2}$$

aplicando la transformada L a $g_{(x_0,y_0)}(x,y)$ se obtiene:

$$L\left(g_{(x_0,y_0)}(x,y)\right)=\left(-\frac{x_0}{\sqrt{1-{x_0}^2-{y_0}^2}},-\frac{y_0}{\sqrt{1-{x_0}^2-{y_0}^2}},\frac{x_0^2}{\sqrt{1-{x_0}^2-{y_0}^2}}+\frac{y_0^2}{\sqrt{1-{x_0}^2-{y_0}^2}}\right.$$
$$\left.+\sqrt{1-{x_0}^2-{y_0}^2}\right)$$

como $f(x_0,y_0)=z_0$, se tiene:

$$L\left(g_{(x_0,y_0)}(x,y)\right)=\left(-\frac{x_0}{z_0},-\frac{y_0}{z_0},\frac{1}{z_0}\right) \text{ con } z_0\neq 0$$

Como cada término de $L\left(g_{(x_0,y_0)}(x,y)\right)$ depende de tres variables, es por ello que se trabajará fijando la variable $z = k$ y variando las demás variables respecto a un intervalo I.

Para este caso, se utiliza el software Matlab (ver anexo1) para observar el comportamiento de $L\left(g_{(x_0,y_0)}(x,y)\right)$ respecto a $f(x,y)$.

por ejemplo tomando $z = \frac{1}{2}$ se tiene con ayuda del software lo siguiente

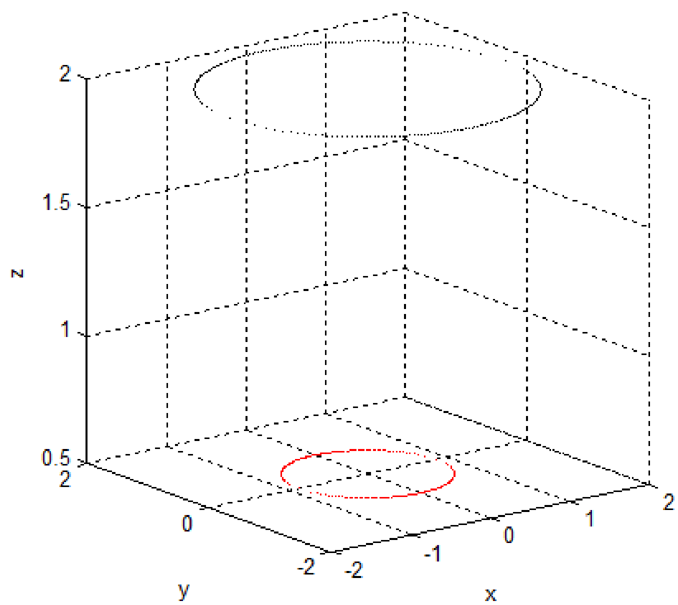


Figura 11. Corte de la esfera con el plano $z = \frac{1}{2}$ *y su transformada* L

La circunferencia de color rojo, es el conjunto de puntos (x,y,z) que se obtiene al cortar la esfera con el plano $z = \frac{1}{2}$. Al aplicar la transformada L se genera la circunferencia de color negro sobre el plano $z = 2$.

Si la figura 11, se centra en el plano xy, se observa que la circunferencia roja con centro en el origen, tiene como ecuación

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

y la circunferencia negra generada al aplicar la transformada L , tiene ecuación

$$x^2 + y^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2$$

Gráficamente:

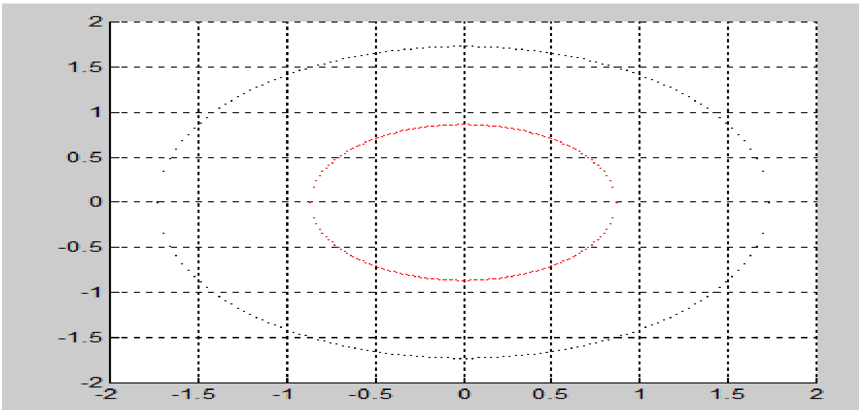


Figura 12. Circunferencias en el plano xy.

la transformada L aplicada a $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ es:

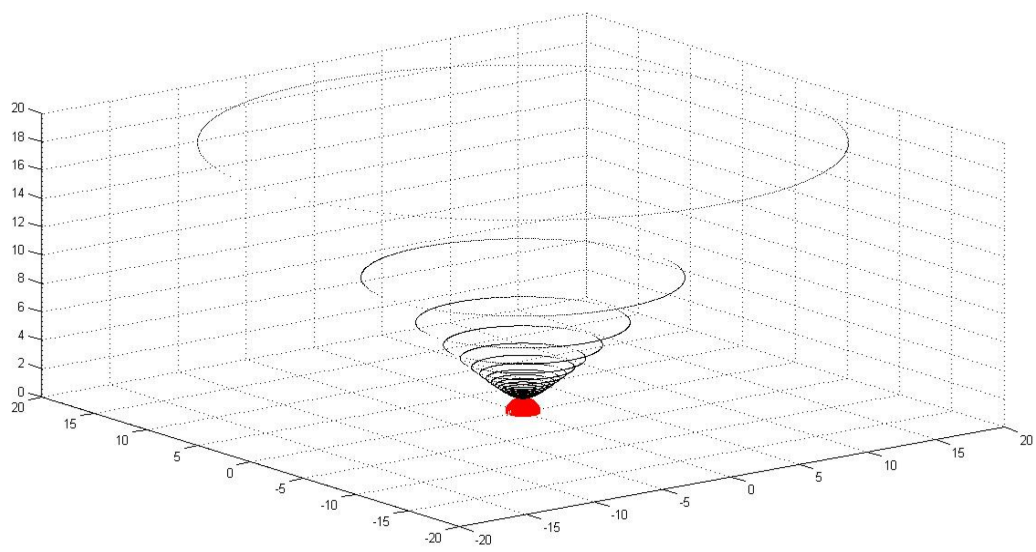


Figura 13. $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y su transformada L

Análogamente, se calcula y se gráfica la transformada L para $f(x,y) = -\sqrt{1-x^2-y^2}$

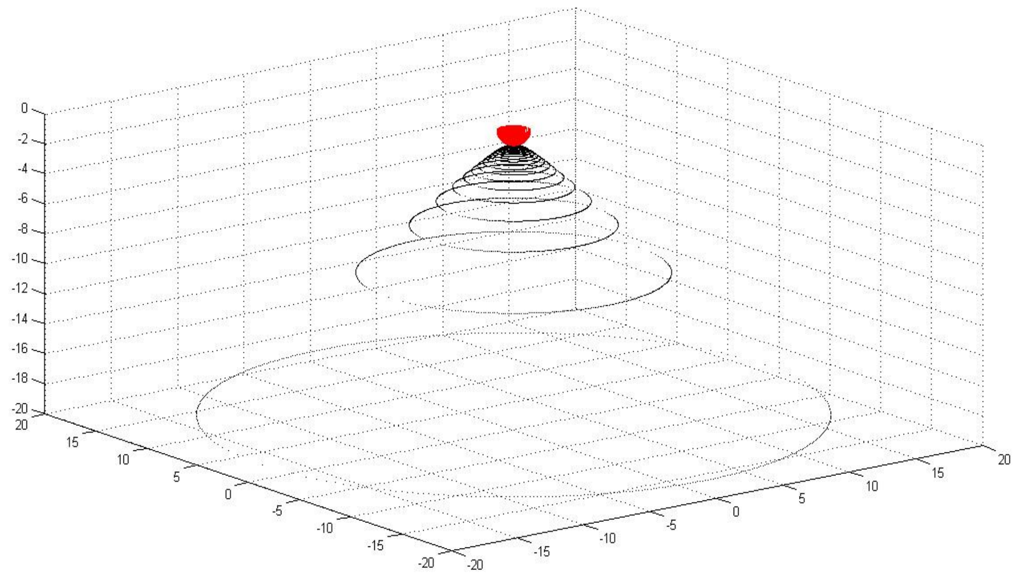


Figura 14.. $f(x,y) = -\sqrt{1-x^2-y^2}$ *y su transformada* L

Finalmente, realizando los mismos cálculos para infinitos valores de z y teniendo presente el intervalo de trabajo, se obtiene la transformada L aplicada a la esfera.

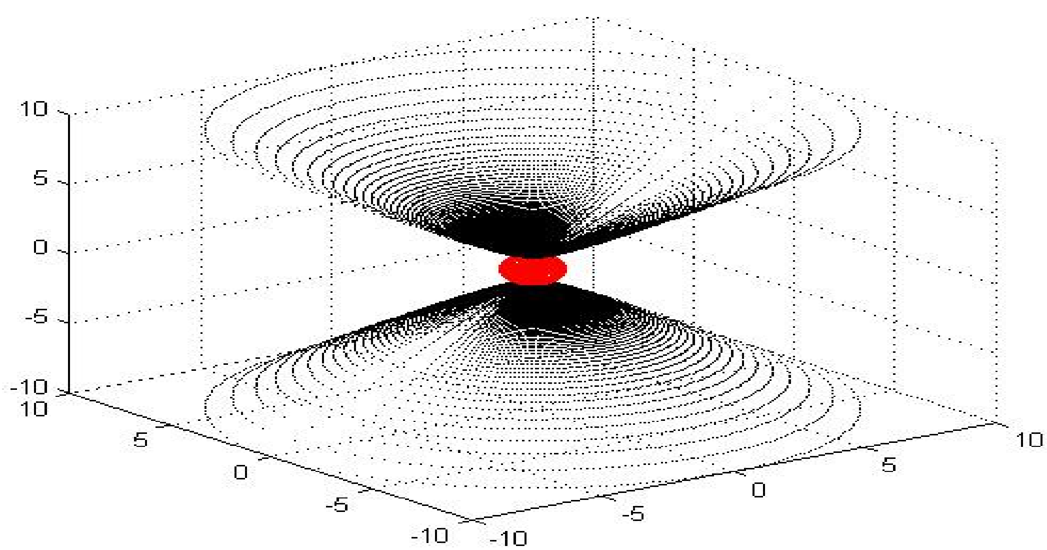


Figura 15.Esfera y su transformada L

donde la figura negra equivale a la transformada L de la esfera de color rojo.

- De manera general

$$f(x,y) = \pm\sqrt{c^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2 - \frac{c^2}{b^2}y^2}$$

donde a, b y c son las longitudes de los semiejes.

i. caso:

$$f(x,y) = \sqrt{c^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2 - \frac{c^2}{b^2}y^2}$$

el plano tangente a la superficie en el punto (x_0, y_0, z_0) es:

$$g_{(x_0,y_0)}(x,y) = \quad -\frac{c^2 x_0}{a^2 z_0}x - \frac{c^2 y_0}{b^2 z_0}y + \frac{c^2 {x_0}^2}{a^2 z_0} + \frac{c^2 {y_0}^2}{b^2 z_0} + z_0$$

aplicando la transformada L a $g_{(x_0,y_0)}(x,y)$ se obtiene:

$$L\left(g_{(x_0,y_0)}(x,y)\right) = \left(-\frac{c^2 x_0}{a^2 z_0}, -\frac{c^2 y_0}{b^2 z_0}, \frac{c^2}{z_0}\right), \text{ con } z_0 \neq 0$$

Utilizando el software Matlab, (ver anexo 2) se evidencia el comportamiento de $L\left(g_{(x_0,y_0)}(x,y)\right)$ respecto a $f(x,y)$.

Sea $z = -\frac{1}{5}$, $a = 2$, $b = 3$ y $c = 4$ se tiene

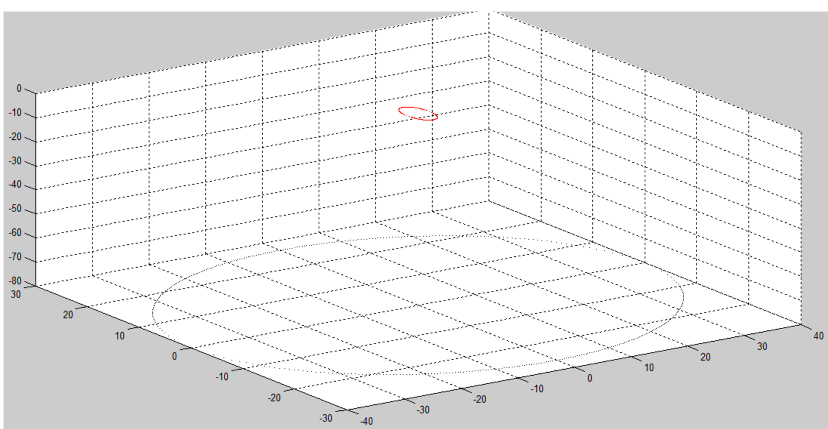


Figura 16.Corte del elipsoide con el plano $z=-\frac{1}{5}$ *y su transformada* L.

La Elipse de color rojo, es el conjunto de puntos (x, y, z) que se obtiene al cortar la superficie con el plano $z = -\frac{1}{5}$. Al aplicar la transformada L se genera la elipse de color negro sobre el plano $z = -80$.

Si en la figura 16, nos centramos en el plano xy, se observa que la elipse roja centrada en el origen, con eje principal el eje y, tiene como ecuación

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

y la elipse negra generada al aplicar la transformada L , tiene eje principal el eje x con ecuación

$$\frac{x^2}{(40)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{80}{3}\right)^2} = 1$$

Gráficamente.

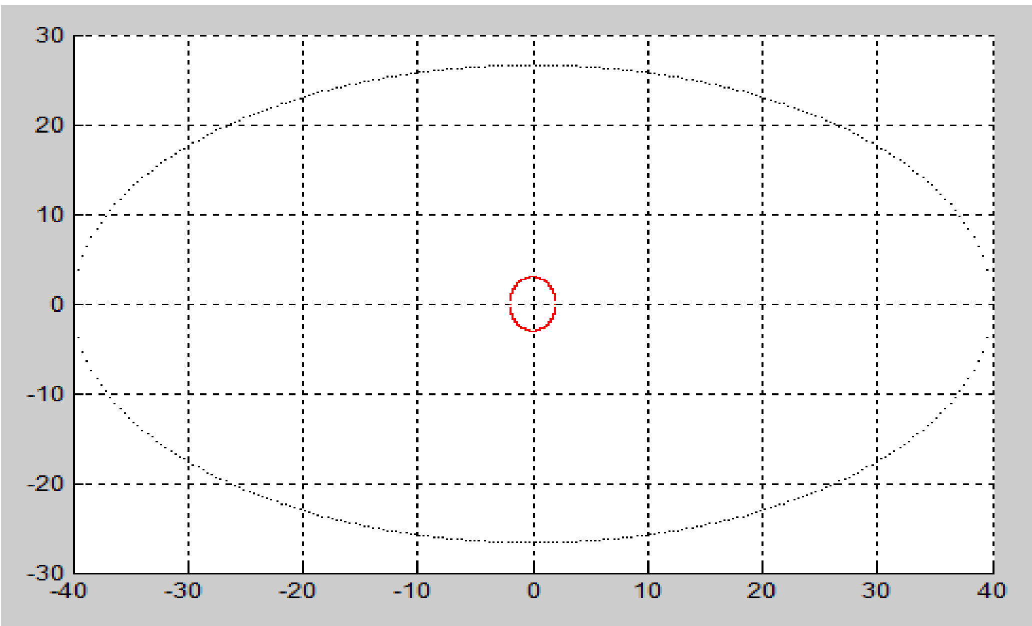


Figura 17. Elipses en el plano xy.

Un detalle de las elipses mostradas en la figura 17, es que tienen la misma excentricidad.

$$e = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

ii. caso.

$$f(x,y) = -\sqrt{c^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2 - \frac{c^2}{b^2}y^2}$$

su transformada L es

$$L\left(g_{(x_0,y_0)}(x,y)\right) = \left(\frac{c^2 x_0}{a^2 z_0}, \frac{c^2 y_0}{b^2 z_0}, -\frac{c^2}{z_0}\right)$$

Por último, teniendo en cuenta las condiciones iniciales del elipsoide es posible obtener con ayuda del software la transformada L de tal superficie, la cual se evidencia en la siguiente grafica.

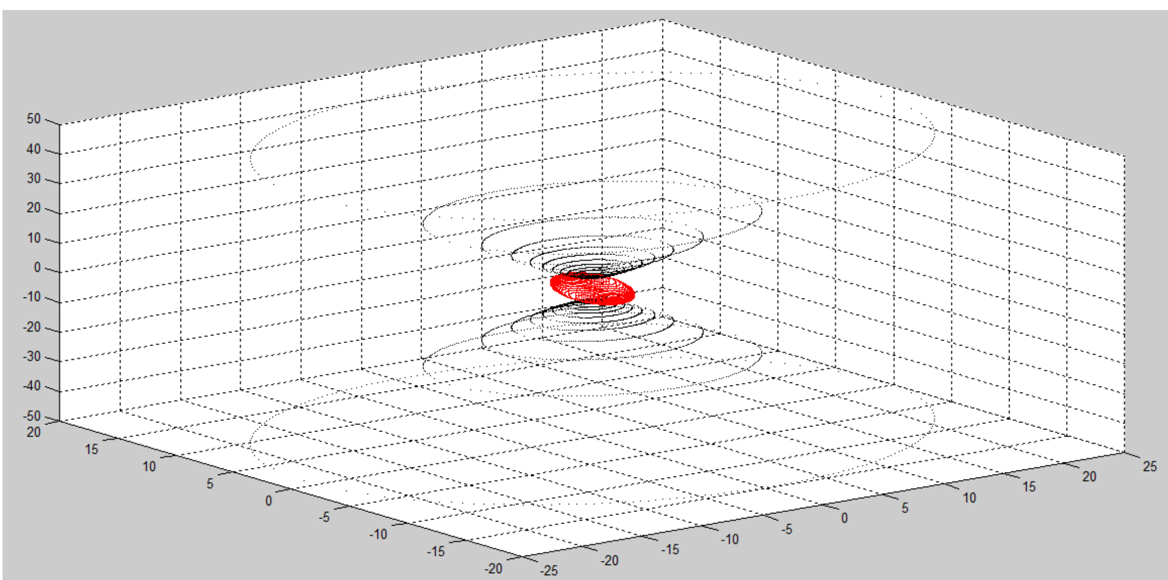


Figura.18. Elipsoide y su transformada L.

la figura negra equivale a la transformada L del elipsoide.

6. COMPARACIÓN DE RESULTADOS

En este capítulo, se realizará una comparación de los resultados obtenidos en este trabajo de grado con los resultados obtenidos en la tesis "*transformada de Legendre aplicada a la solución de ecuaciones diferenciales de orden superior*", con el fin de observar cuales de estos resultados son similares o fueron extendidos.

6.1. Sobre La Transformada de Legendre de grado 3 de funciones reales

En el trabajo mencionado, se da una definición de trasformada de Legendre de segundo grado, se establece como puede ser aplicada a funciones de clase $\boldsymbol{C}^2$, se estudian propiedades y se logra encontrar la solución de algunas ecuaciones diferenciales de orden 2 y orden 3; en este trabajo se observa que al definir la transformada de Legendre de grado tres se pudo establecer como ser aplicada a funciones de clase $\boldsymbol{C}^3$, se establecieron propiedades muy similares y se logro dar soluciones particulares de algunas ecuaciones diferenciales de orden 3 y 4.

El método de reducción de orden, empleado en estos dos trabajos, permite solucionar algunas ecuaciones diferenciales. En el trabajo mencionado, pasan de ecuaciones diferenciales de orden 2 a ecuaciones diferenciales de orden 1, y en este trabajo se pasa de ecuaciones diferenciales de orden 3 a ecuaciones diferenciales de orden 1. De igual manera, se observó sin hacer mucho énfasis en los cálculos, que al definir la transformada de Legendre de cuarto grado y realizar el mismo tratamiento de la tesis mencionada y de este trabajo, permite solucionar ecuaciones diferenciales de orden 4, reduciéndolas a ecuaciones diferenciales de orden 1; esto permite inferir, sin entrar en detalles en los cálculos, que a ecuaciones diferenciales de orden n se reducen a ecuaciones diferencial de orden 1.

El método de incremento de orden, empleado en la tesis mencionada incrementa ecuaciones diferenciales de orden 2 a orden 3, para este trabajo incrementa ecuaciones diferenciales de orden 3 a ecuaciones diferenciales de orden 5.

Por otro lado, se evidencia que algunas propiedades de la transformada de Legendre de grado 1 y 2, están contenidas en las propiedades de este trabajo. Sin embargo, la propiedad generada a partir de la última componente de la transformada de Legendre de cada trabajo, son diferentes.

Una condición que se observa en este trabajo, es que se pide que la función sea de clase $\boldsymbol{C}^3$ para realizar el polinomio de extensión, aumentando un grado con respecto al trabajo de grado mencionado.

6.2. Sobre La Transformada de Legendre de grado n de funciones reales

Aunque en este trabajo, no se estudió, ni se definió la transformada de Legendre de grado n en detalle, pero teniendo en cuenta algunas condiciones, como que la función sea de clase $\boldsymbol{C}^n$, se puede realizar un trabajo similar a estos dos trabajos. Un pequeño aporte es tomando las funciones polinomiales de grado n y definiendo la transformada de Legendre como:

$$L: \boldsymbol{P_n} \to \mathbb{R}^{n+1}$$

$$L(P_n) = a_k x^k + a_{k_1} x^{k_1} + a_{k_2} x^{k_2} + \cdots + a_1 x + a_0 \mapsto \left(n!\, a_k, (n-1)!\, a_{k_1}, \ldots, a_1, a_0\right)$$

De igual manera, se puede ampliar a funciones g de clase $\boldsymbol{C^n}$ con n-ésima derivada diferente de cero y con su aproximación por polinomios de Taylor en un punto $(x_0, g(x_0))$ de la gráfica de la función, obteniendo puntos en el espacio $\mathbb{R}^{n+1}$ al aplicar la transformada de Legendre.

La aproximación de Taylor de grado n para la función $g(x)$ en x_0 es:

$$P_{g(x_0)}(x) = P_n g(x_0) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \frac{g''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{g^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

aplicando la transformada L se tiene que:

$$L\left(P_{g(x_0)}(x)\right) = \left(n!\,a_k, (n-1)!\,a_{k_1}, \ldots, a_1, a_0\right) \text{ donde}$$

$\boldsymbol{a_k = g^n(x_0),}$

$\boldsymbol{a_{k_1} = g^{(n-1)}(x_0) - g^n(x_0)x_0,}$

$\boldsymbol{a_{k_2} = g^{(n-2)}(x_0) - g^{(n-1)}(x_0)x_0 + \frac{g^n(x_0)}{2!}{x_0}^2}$

$\boldsymbol{a_{k_3} = g^{(n-3)}(x_0) - g^{(n-2)}(x_0)x_0 + \frac{g^{(n-1)}(x_0)}{2!}{x_0}^2 - \frac{g^n(x_0)}{3!}{x_0}^3}$

.

.

.

$\boldsymbol{a_1 = g'(x_0) - g''(x_0)x_0 + \frac{g'''(x_0)}{2!}x_0^2 - \frac{g^{iv}(x_0)}{3!}x_0^3 + \cdots + \frac{g^n(x_0)}{n!}{x_0}^n}$

$\boldsymbol{a_0 = g(x_0) - g'(x_0)x_0 - \frac{g''(x_0)}{2!}x_0^2 + \frac{g'''(x_0)}{3!}x_0^3 - \frac{g^{iv}(x_0)}{4!}x_0^4 + \cdots + \frac{g^n(x_0)}{n!}{x_0}^n}$

Por otro lado, se espera que las propiedades de la transformada de Legendre para funciones de clases C^n contengan algunas propiedades de funciones de clase C^{n-1}, ya que para las funciones de clases C^2, hay algunas propiedades que se encuentran contenidas en las propiedades de las funciones de clases C^3. Esto nos permite inferir que para las funciones de clase C^n con ciertas condiciones sus primeras propiedades son:

1. $g^{(n+1)}(x)\left(\frac{dx}{da}\right) = 1$, supongamos que $g^{(n+1)}(x) \neq 0$ se tiene: $\frac{dx}{da} = \frac{1}{g^{(n+1)}(x)}$.
2. $\frac{da_0}{da} = \frac{(-1)^n x^n}{n!}$ donde n es el grado de la función polinomial.
3. $\frac{da_1}{da} = \frac{x^{(n-1)}}{(n-1)!}$

Partiendo de lo anterior, se puede observar que muy seguramente se puede aplicar la transformada de Legendre para solucionar algunas ecuaciones diferenciales de orden n.

6.3. Sobre La Transformada de Legendre de grado 1 a funciones escalares.

Una comparación que se puede apreciar, es que la transformada de Legendre se puede extender a funciones escalares de primer grado, donde envía funciones cuya grafica es un plano de $\mathbb{R}^3$ a puntos del mismo espacio. Manteniendo una similitud con la transformada de Legendre de funciones reales de primer grado, debido a que, esta envía funciones cuya grafica es una recta en $\mathbb{R}^2$ a puntos del mismo espacio. Otra similitud, es cuando se toma el conjunto de rectas de $\mathbb{R}^2$ que pasan por un punto y su transformada es una recta en $\mathbb{R}^2$; en nuestro trabajo el conjunto de planos de $\mathbb{R}^3$ que pasan por un punto, su transformada es un plano en el espacio $\mathbb{R}^3$, esto quiere decir que a conjuntos de funciones reales y escalares de primer grado, al aplicarles la transformada de Legendre los resultados está en el mismo espacio con respecto al conjunto dado.

Por limitaciones de tiempo, no se alcanzó a realizar un trabajo sobre ecuaciones diferenciales parciales. Ya que, en un primer momento se encontró un obstáculo a cerca de la inyectividad de campos escalares. Esto condiciono a trabajar con las derivadas parciales mixtas nulas, que en este caso, permite trabajar en términos de una sola variable. Por otro lado, cuando las derivadas mixtas no son nulas, se enfoca el estudio en el comportamiento de la transformada de Legendre por medio gráfico, en el caso del elipsoide y hiperboloide su transformada Legendre pertenece al mismo espacio, donde en el primero de estos, se observa el comportamiento de la transformada gráficamente y en el segundo se observa de manera analítica y gráfica.

7. CONCLUSIONES Y REFLEXIONES

7.1. Conclusiones sobre el estudio de la transformada de Legendre.

1. La transformada L de Legendre de grado 3, se puede aplicar a ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior que tenga como soluciones particulares funciones de clase C^3.
2. Por medio de T_1 y T_2, construidas a partir de las propiedades de la transformada de Legendre, permiten transformar una ecuación diferencial en otra ecuación de orden mayor o de orden menor, según el grado de la transformada que se utilice; si es de grado dos salta un orden, es decir pasamos de orden 2 a orden 1 y de orden 2 a orden 3; si es de grado tres salta dos órdenes es decir de grado 3 a orden 1 y de orden 3 a orden 5 y en general la transformada de grado n, lleva orden n a orden 1 y orden n a $2n-1$.
3. La transformada L no siempre permite dar soluciones particulares de una ecuación diferencial de orden superior.
4. Al aplicar la transformada L por medio de T_1, la primera derivada de la solución particular de una ecuación diferencial, obtenida al aplicar el método reducción de orden debe ser invertible.
5. La definición de la transformada de Legendre de funciones reales, se puede ampliar a funciones escalares de primer orden.

7.2. Reflexiones Sobre el trabajo Realizado.

1. Este trabajo de grado permitió a los autores reforzar ciertos vacíos conceptuales que se tenían durante el transcurso de la carrera, ya que se estudió de manera constante conceptos matemáticos para la realización de este.

2. La elaboración de este trabajo de grado, nos permitió fortalecer algunas falencias en relación con la comprensión de lectura y escritura de documentos .
3. Al estudiar la transformada de Legendre de manera elemental, permitió establecer y comparar información obtenida en trabajos anteriormente desarrollados.
4. El estudio de la transformada de Legendre está relacionado a las ecuaciones diferenciales, las cuales se estudian en cursos avanzados del cálculo. Sin embargo, es posible estudiar esta transformada en cursos básicos del cálculo, por medio de derivadas y gráficas.

BIBLIOGRAFÍA

Apostol, T (1967). Cálculo con funciones de una variable,con una introducción al álgebra lineal. Editorial Reverté, S.A.

Apostol, T (1967). Cálculo con funciones de varias variable y álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y a las probabilidades. Editorial Reverté, S.A.

Luque, C; Parada, H; Moreno, A. (1999). transformada de Legendre aplicada a la solución de ecuaciones diferenciales de orden superior.Colombia: Universidad Pedagogíca Nacional. (tésis).

Luque, C; Mora, L; Torres, J.(2006) ¿es posible hacer matemáticas en el aula? Universidad Pedagogíca Nacional. (Documento digital).

Leithold, L.(1994). Cálculo. 7ª edición. Oxford University.

Solans, X. (1997). Introducció als diagrames de fases. Barcelona. Edicions de la Universitat de Barcelona.

Apostol, T (1967). Cálculo con funciones de varias variable y álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y a las probabilidades. Editorial Reverté, S.A.

Diprima, R. Boyce, W (2000).Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera. Editorial Limusa, S.A. de C.V.

ANEXOS

Anexo 1.ESFERA

```
function esfera(z)
%UNTITLED Summary of this function goes here
%   Detailed explanation goes here

x_0=linspace(-sqrt(1-z^2),sqrt(1-z^2),100); %genera los puntos del eje x,
en este caso son 100
%w=zeros(1,length(x_0)); %vector de la transformada del eje y
y_0=sqrt(abs(1-(z^2)-(x_0.^2))); %genera la coordenada en y
z_0=z; %el valor de z (fibra)
for i=1:length(x_0)

%punto_orig=[x_0(i) y_0(i) z_0]
w(i)=-y_0(i)/z_0;
L=[-x_0(i)/z_0 -y_0(i)/z_0 1/z_0]; %transformada en cada punto de la
parte positiva de la circunferencia
plot3(L(1),L(2),L(3),'k'); %gráfica de la transformada
hold on;
plot3(x_0(i),y_0(i),z,'r');%gráfica original
hold on;
end
y_1=-y_0;
for j=1:length(x_0)

%punto_orig=[x_0(j) y_0(j) z_0]
L=[-x_0(j)/z_0 -y_1(j)/z_0 1/z_0];%transformada en cada punto de la parte
negativa de la circunferencia
plot3(L(1),L(2),L(3),'k');%gráfica de la transformada
hold on;
plot3(x_0(j),y_1(j),z,'r');%gráfica original
hold on
end
%max(abs(w));
%max(abs(w))/max(y_0);
grid on;
axis square;


    drawnow;

%drawnow;
end
```

Anexo 2. Elipsoide

```
function [L] = elipsoide(z,a,b,c)
%UNTITLED Summary of this function goes here
%   Detailed explanation goes here
x_0=linspace(-sqrt(a^2*(1-(z^2/c^2))),sqrt(a^2*(1-
(z^2/c^2))),100); %genera los puntos del eje x, en este caso son
100
%w=zeros(1,length(x_0)); %vector de la transformada del eje y
y_0=sqrt(b^2*abs(1-(z^2/c^2)-(x_0.^2/a^2))); %genera la coordenada
en y
z_0=z; %el valor de z (fibra)
for i=1:length(x_0)
%w(i)=-y_0(i)/z_0;
L=[-(c^2*x_0(i))/(a^2*z_0) -(c^2*y_0(i))/(b^2*z_0) c^2/z_0];
%transformada en cada punto de la parte positiva de la
circunferencia
plot3(L(1),L(2),L(3),'k'); %gráfica de la transformada
%title(sprintf('%s , z=%0.2f L(z)=%0.2f','fibra del elipsoide
con',z_0,c^2/z_0))
%hold on;
plot3(x_0(i),y_0(i),z,'r');%gráfica original
hold on;
end
y_1=-y_0;
for i=1:length(x_0)
L=[-(c^2*x_0(i))/(a^2*z_0) -(c^2*y_1(i))/(b^2*z_0)
c^2/z_0];%transformada en cada punto de la parte negativa de la
circunferencia
plot3(L(1),L(2),L(3),'k');%gráfica de la transformada
%title(sprintf('%s , z=%0.2f L(z)=%0.2f','fibra del elipsoide
con',z_0,c^2/z_0))
hold on;
plot3(x_0(i),y_1(i),z,'r');%gráfica original
hold on
end
%max(abs(w));
%max(abs(w))/max(y_0);
grid on;


    drawnow;

   %drawnow;
end
```