Capítulo 3

Análisis de contenido

María C. Cañadas, Pedro Gómez y Andrés Pinzón

El análisis didáctico se ubica en el nivel de la planificación local dentro de la teoría curricular (Gómez, 2007, p. 20). Está compuesto por cuatro análisis: (a) análisis de contenido, (b) análisis cognitivo, (c) análisis de instrucción y (d) análisis de actuación. Cada uno de estos análisis se centra en una de las dimensiones del currículo y todos tienen un objetivo común: contribuir al diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas sobre fenómenos o temas concretos de las matemáticas escolares. En este capítulo, abordamos el análisis de contenido, que concierne a la dimensión conceptual de las matemáticas en el nivel de planificación local y proporciona herramientas para analizar los fenómenos y temas de las matemáticas escolares e identificar y organizar su multiplicidad de significados. Por tanto, este capítulo tiene como finalidad contribuir al conocimiento teórico y técnico de los profesores sobre el análisis de contenido.

Para preparar una clase sobre un tema de las matemáticas escolares, es importante profundizar en ciertas características matemáticas que son propias de las estructuras matemáticas. El primer paso es hacer una revisión de ese contenido matemático para conocer sus diferentes significados. No queremos decir que todos los significados identificados desde el análisis de contenido vayan a tratarse en el aula, pero es importante que se tenga en cuenta esa información y se seleccione los que se consideren convenientes. Abordaremos el análisis de contenido a través de tres conceptos pedagógicos: (a) estructura conceptual, (b) sistemas de representación y (c) fenomenología. Además, consideramos la historia como un cuarto concepto pedagógico, de tipo transversal, que debe aportar información a los conceptos pedagógicos de este análisis, así como a los otros análisis que conforman el análisis didáctico.

El grado de detalle con el que se especifican los contenidos de las matemáticas escolares puede variar según el contexto y el nivel en el que nos situemos. Por ello, dedicamos el primer apartado de este capítulo a describir diferentes niveles en el contenido de las matemáticas escolares y a presentar una clasificación cognitiva de los contenidos de las matemáticas escolares sobre la que apoyamos el análisis de contenido. Tras un apartado para introducir los tres conceptos pedagógicos que constituyen el análisis de contenido, nos centramos en cada uno de ellos.

1. Contenido de las matemáticas escolares

La expresión "contenido de las matemáticas escolares" no tiene un único significado. El contenido de las matemáticas escolares puede hacer referencia tanto a los contenidos que se identifican en el currículo oficial de un país como a los que recogen los libros de texto o a los que un profesor determina que va a trabajar con su clase sobre un tema determinado. Por lo tanto, conviene comenzar por la identificación de diferentes niveles en el contenido de las matemáticas escolares, especificando en el que centramos la atención con el análisis de contenido.

1.1. Niveles en el contenido de las matemáticas escolares

Seguimos el trabajo de Gómez (2007, pp. 37-40), para identificar seis niveles en el contenido de las matemáticas escolares, que presentamos desde el nivel más general al más específico.

Nivel 1. Contenido en el currículo global

Mesa, Gómez y Cheah (2013) consideran que las pruebas internacionales estandarizadas definen un currículo global, particularmente en las dimensiones conceptual y cognitiva del currículo. En este sentido, la prueba *Third International Mathematics and Science Study* (TIMSS) aborda el contenido desde una perspectiva estructural y establece seis dominios de contenido: números; medida; geometría; proporcionalidad; funciones, relaciones y ecuaciones; representación de datos, probabilidad y estadística; análisis elemental; y validación y estructura. Por su parte, la prueba PISA 2012 asume una visión funcional del contenido de las matemáticas escolares, lo organiza desde una perspectiva fenomenológica y establece cuatro categorías de contenido: cantidad, incertidumbre y datos, cambio y relaciones, y espacio y forma.

Nivel 2. Contenido del programa del currículo oficial

El contenido del programa del currículo oficial es publicado por el gobierno del país o por los organismos con esa competencia educativa. El currículo oficial establece los conceptos y procedimientos que deben constituir la formación matemática básica de los ciudadanos en la sociedad. En general, el contenido del programa hace referencia a estructuras matemáticas, y a la secuenciación y ordenación de los contenidos establecidos. Por ejemplo, en el caso de Colombia, los contenidos se abordan al determinar cinco tipos de pensamiento matemático (numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional) y establecer sus relaciones (Ministerio de Educación Nacional [men], 2006, pp. 56-70). Otros currículos nacionales pueden tener otras aproximaciones al contenido.

Nivel 3. Contenido matemático escolar

En este nivel, se recogen los contenidos de los programas en términos del conocimiento matemático escolar. Las fuentes que forman parte de este nivel presentan una amplia revisión de contenidos, significados, criterios teóricos para la selección de contenidos, ejemplos de prácticas, entre otros. Libros de texto, guías didácticas, documentos de profesores y de expertos en Educación Matemática son ejemplos de documentos en este nivel.

Nivel 4. Contenido propuesto para una asignatura

Profesores, expertos educativos o editoriales proponen el contenido del cuarto nivel (los contenidos que deben ser objeto de actividades enseñanza-aprendizaje de una asignatura, grado o grupo de grados) y establecen sus significados. Un ejemplo de este nivel son los planes de área de las instituciones educativas colombianas. Abordamos este tipo de documento en el capítulo 2 de este libro.

Nivel 5. Estructura matemática

El profesor es el responsable de seleccionar el contenido y desarrollar los documentos de este nivel. Para llevar a cabo este trabajo, debe identificar y organizar los significados de la estructura matemática en cuestión. Las estructuras matemáticas organizan el contenido de una asignatura. Por ejemplo, las isometrías, los polígonos o las ecuaciones lineales se pueden considerar estructuras de las matemáticas escolares. En el análisis de contenido estamos mirando al tema desde la perspectiva matemática, para identificar sus múltiples significados, sin restringirnos a un nivel educativo determinado.

Nivel 6. Tema

Los temas o focos de contenido son "agrupaciones específicas de conceptos, procedimientos y relaciones, que adquieren importancia especial, ya que expresan, organizan y resumen agrupamientos coherentes de los contenidos" (Lupiáñez, 2009, p. 43). Por ejemplo, las simetrías se pueden considerar un tema dentro de la estructura matemática de isometrías y los triángulos pueden serlo de los polígonos.

Dado el objetivo que se persigue, partimos de que el análisis de contenido se centra en este sexto y último nivel. Realizaremos el análisis de contenido sobre un fenómeno o un tema muy concreto de las matemáticas escolares.

2. Conceptos pedagógicos en el análisis de contenido

Como se mencionó en el capítulo 2, cada uno de los análisis que constituyen el análisis didáctico se articula alrededor de unos conceptos pedagógicos. La estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología son los conceptos pedagógicos que conforman el análisis de contenido y están estrechamente relacionados entre sí. En ocasiones, resulta difícil hacer mención de un concepto pedagógico sin hacer uso de otro. Esta dificultad es evidente en el caso de la estructura conceptual y los sistemas de representación. Por un lado, es difícil hablar de la estructura conceptual sin hacer referencia a su representación (es necesario hacer una representación para hablar de cualquier elemento de la estructura conceptual). Por otro lado, es difícil hablar de sistema de representación si no hay algo que representar. Por ejemplo, es difícil referirse al concepto de cuadrado sin tener en mente una representación gráfica de este, y viceversa. Es importante que la relación entre los tres conceptos pedagógicos, que se establece desde un punto de vista teórico, quede recogida en el trabajo que se lleva a cabo sobre un tema matemático específico.

El trabajo con cada uno de los conceptos pedagógicos contribuye a la riqueza del análisis de contenido. En la tabla 1, presentamos los objetivos de los conceptos pedagógicos del análisis de contenido.

Tabla 1
Objetivos de los conceptos pedagógicos del análisis de contenido

Concepto pedagógico	Objetivo
Estructura conceptual	Identificar los conceptos y procedimientos que caracterizan el tema y las relaciones entre ellos
Sistemas de representación	Establecer los sistemas de representación asociados al tema y las relaciones entre ellos
Fenomenología	Identificar los fenómenos que dan sentido al tema (o que se asocian con el fenómeno elegido), los contextos fenomenológicos y las subestructuras matemáticas respectivas, que organizan estos fenómenos

La historia es un concepto pedagógico transversal en el análisis didáctico en general y en el análisis de contenido, en particular. En el análisis de contenido, el objetivo de la historia es identificar elementos en el desarrollo histórico del tema que complementen los otros tres conceptos pedagógicos. Dedicaremos los siguientes apartados a cada uno de los tres conceptos pedagógicos. Seguiremos un orden que nos parece, según nuestra experiencia previa, más comprensible y motivador para los profesores, comenzando por la estructura conceptual, siguiendo por los sistemas de representación y terminando con la fenomenología.

3. De un fenómeno a un tema

A pesar de que es usual que las unidades didácticas se diseñen alrededor de un tema concreto del contenido, si asumimos una visión funcional de las matemáticas escolares, podemos también considerar la posibilidad de que la unidad didáctica se diseñe alrededor de un fenómeno (o conjunto de fenómenos). En este apartado, establecemos la relación entre el fenómeno como origen de la unidad didáctica y el contenido con el que está relacionada.

El procedimiento del análisis de contenido se realiza secuencialmente: se parte del análisis de la estructura conceptual, para después hacer el análisis de los sistemas de representación y, finalmente, realizar el análisis fenomenológico. Este procedimiento secuencial requiere que, al comienzo del procedimiento, se haya identificado y concretado un tema de las matemáticas escolares. ¿Cómo abordar el análisis de contenido si se desea centrar el diseño de la unidad didáctica en un fenómeno o conjunto de fenómenos?

Como se verá más adelante, en el apartado de análisis fenomenológico, todo fenómeno o conjunto de fenómenos está asociado a una estructura: es la estructura matemática que sirve de modelo para el fenómeno. Supongamos que se selecciona como centro de la unidad didáctica el fenómeno de caída libre que forma parte del conjunto de fenómenos de movimiento de cuerpos en un campo de fuerzas uniforme. Este conjunto de fenómenos está asociado a la estructura matemática $x = x_0 + v_0\left(t - t_0\right) + \frac{1}{2}a\left(t - t_0\right)^2$ que corresponde al tema de la función cuadrática. De la misma forma, el fenómeno del interés compuesto está asociado a las estructuras matemáticas $C_F = C_I(1 + r)^n$ y $r_T = (1 + r)^n - 1$ que corresponden al tema de la función exponencial.

Al seleccionar un fenómeno o conjunto de fenómenos como centro de una unidad didáctica, y antes de comenzar a abordar el análisis de contenido, es necesario establecer la estructura matemática que está asociada a ese conjunto de fenómenos. El análisis de contenido se realiza sobre el tema concreto al que pertenece esa estructura matemática y mantiene como guía el fenómeno seleccionado. Por ejemplo, si el fenómeno seleccionado es caída libre, el análisis de contenido se realizará sobre aquellos aspectos de la función cuadrática que modelizan ese conjunto de fenómenos. De la misma forma, si el conjunto de fenómenos tienen que ver con el interés compuesto, el análisis de contenido se realizará sobre aquellos aspectos de la función exponencial que modelizan ese conjunto de fenómenos. En este sentido, puede pensarse que, por ejemplo, la estructura conceptual se debe producir con base en los conceptos no matemáticos que caracterizan el fenómeno. En el caso del fenómeno del interés compuesto, se podrían incluir en la estructura conceptual elementos como dinero, tiempo o capital, entre otros. En este caso, lo adecuado es centrarse en los elementos de la función exponencial que modelizan el interés compuesto.

Una vez que se realice el análisis de la estructura conceptual y de los sistemas de representación del tema, en el análisis fenomenológico, se puede regresar al fenómeno o conjunto de fenómenos que se seleccionaron como centro de la unidad didáctica. El análisis con este concepto pedagógico permitirá afinar la relación entre el fenómeno y las matemáticas escolares y proporcionará la información adicional que se requiere para los procedimientos que se realizarán en los demás análisis del análisis didáctico.

4. Estructura conceptual

El concepto pedagógico estructura conceptual permite que el profesor responda a las siguientes cuestiones.

- ¿Cuáles son los conceptos que caracterizan el tema?
- ¿Qué procedimientos están implicados en el tema?
- ¿Cómo se relacionan esos conceptos entre sí?
- ¿Cómo se relacionan esos procedimientos entre sí?
- ¿Cómo se relacionan esos conceptos y esos procedimientos?

Los conceptos, los procedimientos y las relaciones entre ellos son las ideas clave de este concepto pedagógico. Una forma de dar respuesta al listado de preguntas anterior es comenzar por identificar elementos del campo conceptual del tema matemático que abordemos, al considerar tanto la estructura del propio concepto, como la estructura de la que el concepto forma parte. A partir de ellos, es posible detectar los procedimientos que se ejecutan sobre esos elementos del campo conceptual y las relaciones entre esos procedimientos. Por último, se pueden establecer las relaciones entre los conceptos y los procedimientos identificados. La estructura conceptual de un tema de las matemáticas escolares recoge y organiza estos elementos y relaciones.

4.1. Clasificación cognitiva de los contenidos

Atendemos a una clasificación cognitiva de los contenidos de las matemáticas escolares y consideramos una primera distinción entre el campo conceptual y el campo procedimental (Rico, 1997).

Campo conceptual

El campo conceptual hace referencia a la sustancia del conocimiento: qué lo compone. En él, se pueden identificar diferentes niveles, al considerar que se puede pasar de un nivel inferior a un nivel superior cuando se añaden otros elementos y relaciones: (a) hechos, (b) conceptos y (c) estructuras conceptuales (Rico, 1997). Los hechos son las unidades más pequeñas de información dentro de un tema matemático. Los conceptos son conjuntos de hechos y relaciones entre ellos. Estos conjuntos se presentan organizados en sistemas. Las estructuras conceptuales son sistemas de conceptos relacionados entre sí.

Campo procedimental

El campo procedimental incluye los procedimientos y modos de actuación con respecto al conocimiento. Rico (1997) distingue entre (a) destrezas, (b) razonamientos y (c) estrategias. Las destrezas se ejecutan procesando hechos: se produce una manipulación de símbolos y transformaciones. Los razonamientos se ejecutan sobre conceptos y las estrategias se ejecutan sobre estructuras conceptuales.

Distinción de tipos de elementos

No suele resultar complicado distinguir los elementos del campo conceptual de los del campo procedimental, por ser de diferente naturaleza. Sin embargo, el límite no es siempre claro entre los niveles de los elementos del mismo campo. Por ejemplo, por un lado, el teorema de Pitágoras es un hecho para el tema de trigonometría. Por otro lado, el teorema de Pitágoras se puede considerar un tema de las matemáticas escolares. En función de donde ubiquemos el contenido en el que nos vamos a centrar, el resto de los elementos se situará en uno u otro nivel.

Identificar los elementos de un tema es tan importante como distinguir cuáles no son elementos de un tema. Por ejemplo, $y = x^2 + 1$ no es una notación de una función afín y sí de una función cuadrática. Como se observa en los ejemplos propuestos en este apartado, la indagación sobre los elementos de los dos campos del conocimiento de un tema de las matemáticas escolares permite realizar una primera aproximación al contenido de ese tema.

4.2. Identificación de conceptos y procedimientos

Como primera aproximación a un tema, consideramos conveniente recurrir a diferentes fuentes que proporcionen al profesor la información más rica posible sobre el tema en diferentes contextos y desde diferentes perspectivas como son

- el propio conocimiento del profesor,
- documentos curriculares,
- libros de texto,
- Internet (Google constituye una primera aproximación para identificar fuentes de información en la red, o repositorios digitales como Funes: funes.uniandes.edu.co),
- literatura en Educación Matemática y
- libros de texto de matemática avanzada.

Aunque se podría describir un tema con el detalle de todos los niveles de los campos conceptual y procedimental, nos vamos a centrar en su descripción en términos de los conceptos y procedimientos que lo caracterizan. Por ejemplo, para los números naturales, podemos obtener un listado de conceptos y procedimientos como el siguiente: igual, mayor que, menor que; adición, sustracción, multiplicación, división; valor posicional de las cifras en un número; lectura y escritura de un número; colocación de términos para realizar operaciones aritméticas con números naturales; cada 10 unidades de un orden forman una unidad de orden superior; todo número n tiene un siguiente $n + 1$ y, excepto 0, un anterior $n - 1$; tablas de operaciones aritméticas; descomposición polinómica de un número; uso del paréntesis y jerarquía de las operaciones; algoritmos de las operaciones aritméticas con números naturales; recta numérica; sistema decimal de numeración; divisibilidad; propiedades de las operaciones numéricas; identificación de regularidades numéricas; argumentos para justificar propiedades numéricas; $(N, +)$ semigrupo conmutativo; y $(N, \times)$ semigrupo conmutativo.

La clasificación de los elementos según los campos conceptual y procedimental permite tener una descripción más sistemática y analítica del tema en términos de los elementos involucrados. A pesar de obtener una cantidad considerable de conceptos y procedimientos que puedan parecer, *a priori*, bastante completos, conviene no perder de vista que estos elementos se deben ir ampliando según vamos profundizando en el análisis de contenido del tema. Esta ampliación se debe ir haciendo conforme vayamos analizando el tema con otros conceptos pedagógicos del análisis de contenido y también cuando avancemos en los otros análisis del análisis didáctico. Recordemos que el análisis didáctico es un procedimiento cíclico y que todos los análisis se realimentan entre sí. El concepto pedagógico historia también puede ayudar a ampliar este listado de elementos.

Aunque la organización de los elementos según los campos y niveles considerados arroja claridad en la estructura del tema, destacamos el hecho de que el profesor no sepa cuándo debe dar por finalizado este proceso: ¿hasta dónde llegar?, ¿cuándo parar de identificar elementos?, ¿a qué grado de precisión debe llegar en cada campo? Además, independientemente de la cantidad de elementos identificados en cada campo, hay un problema común que hace referencia a cómo establecer relaciones entre los elementos de un campo con los elementos del otro. Pueden surgir otros inconvenientes pero consideramos que estos son suficientes para plantearse otra forma de presentar la información.

4.3. Utilización de los mapas conceptuales para representar la estructura conceptual

Los mapas conceptuales permiten representar visualmente la estructura de la información. En este sentido, los mapas conceptuales son un sistema de representación con normas sencillas: "los conceptos se representan por nodos a los que se les da una etiqueta por medio de una palabra o una frase corta que indica el concepto, las relaciones se representan por líneas (enlaces) que conectan los nodos" (Lanzing, 1998, p. 2).

Nuestra propuesta es utilizar los mapas conceptuales como herramienta para representar los elementos del campo conceptual y del campo procedimental. Esto evita los inconvenientes presentados para los listados de elementos. El mapa conceptual se puede elaborar a partir de los diferentes elementos identificados, al establecer relaciones entre los elementos del campo conceptual, entre los elementos del campo procedimental, y entre unos y otros. Además, este trabajo puede ayudar a identificar nuevos elementos relacionados con el tema con motivo del esfuerzo que se realiza para organizar la información. La descripción de una estructura conceptual en uno o más mapas conceptuales implica tomar decisiones sobre los elementos de los listados que se incluyen en él. Por razones de espacio, usualmente nos centramos en establecer los conceptos y procedimientos más relevantes y relacionarlos entre sí. Los hechos, al ser casos o aspectos particulares de los conceptos, no se representan usualmente dentro de los mapas conceptuales. En algunas ocasiones los incluimos como ejemplos de lo que queremos representar. Por otro lado, la representación de la estructura conceptual en los mapas conceptuales no debe restringirse únicamente a los conceptos y sus relaciones. Debemos identificar también los procedimientos, como representación de esas relaciones entre los conceptos.

A continuación presentamos dos ejemplos de la estructura conceptual de dos temas de las matemáticas escolares.

Estructura conceptual de los números naturales

En la figura 1, recogemos un ejemplo de mapa conceptual del sistema decimal de numeración, perteneciente a los números naturales. Anteriormente presentamos un listado de elementos de los números naturales. Este mapa conceptual representa, en realidad, una estructura matemática y en él se han establecido relaciones entre algunos de los elementos de los listados producidos anteriormente para una parcela de los números naturales, la del sistema decimal de numeración. Con el propósito de mantener un tamaño del mapa conceptual que se pueda presentar en unas proporciones considerables no se incluye la mayoría de los términos, notaciones y convenios propuestos. Al buscar representar el tema, este ejemplo de mapa conceptual se centra en los conceptos y en las relaciones entre los conceptos. Por esa misma razón, solamente aparecen algunos de los múltiples procedimientos que están involucrados en el tema.

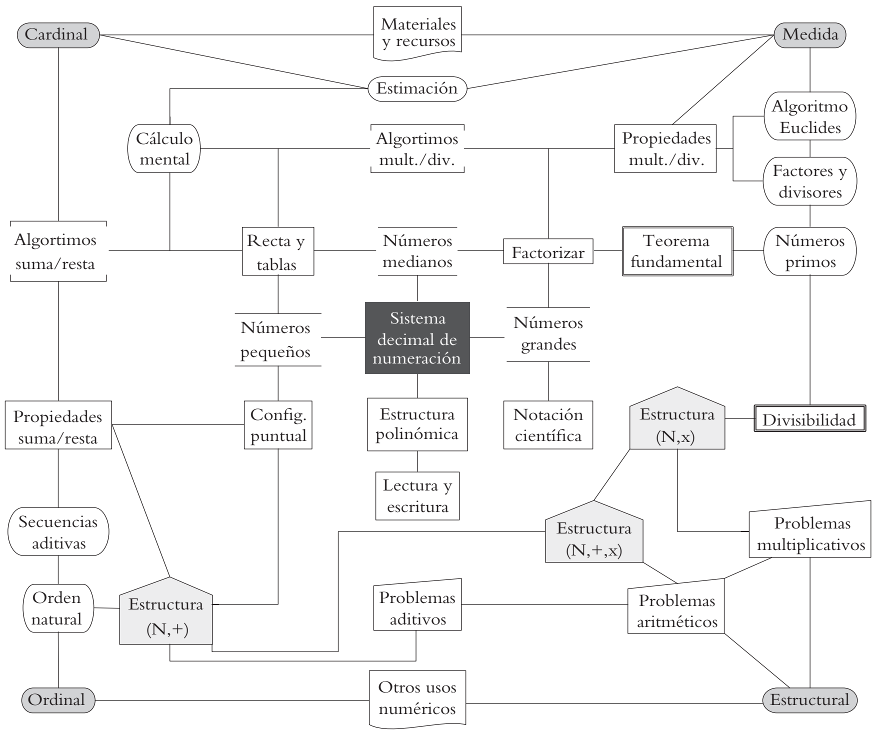


Figura 1. Mapa conceptual del sistema decimal de numeración (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008, p. 7)

Estructura conceptual del teorema de Pitágoras

A modo de ejemplo, recogemos en la figura 2 un mapa conceptual para el teorema de Pitágoras. Es frecuente que, en el esfuerzo por establecer relaciones entre elementos del campo conceptual, surjan nuevos elementos del campo procedimental. Esto hace que los autores hayan enriquecido la estructura conceptual del teorema de Pitágoras con motivo de las relaciones que han establecido entre los elementos para la elaboración del mapa conceptual. Marín

(2011) presenta otro mapa conceptual de la estructura conceptual del mismo tema. Podemos tener diferentes mapas conceptuales del mismo tema, a pesar de haber partido de un listado de elementos similar. Esto refleja la posibilidad de organizar de distintas formas válidas la información de la que se dispone. Lo importante es recoger los elementos (tanto del campo conceptual como del procedimental) que se consideren más relevantes para el tema y que se establezcan las relaciones entre ellos de forma adecuada.

Guardia, Montes, Páez y Schmidt-Kortenbusch (2009) recogen en un mapa conceptual (véase figura 2) la estructura conceptual del teorema de Pitágoras, con el nivel de detalle que permite el tamaño de la página. A medida que vayamos profundizando en el análisis del tema, tendremos la necesidad de incluir más información en el mapa conceptual. Este será el caso, por ejemplo, cuando busquemos ubicar más procedimientos o mayor detalle en la descripción de los conceptos. Se pueden utilizar varios mapas conceptuales para representar mayor cantidad de información que conectamos, de tal forma que podamos presentar la información en un documento. Se puede ver un ejemplo de este esquema de presentación en Gómez y Carulla (2001).

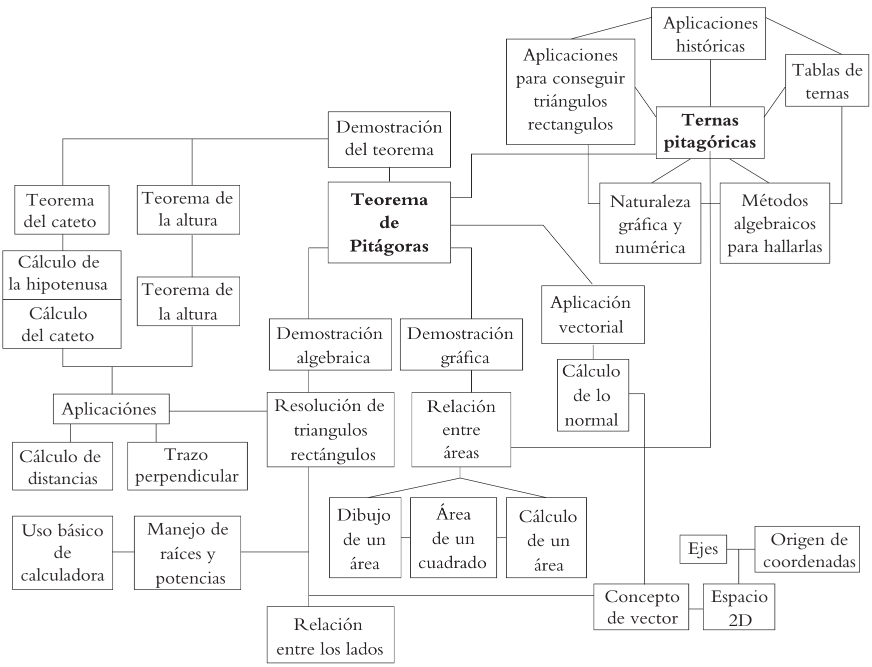


Figura 2. Mapa conceptual de la estructura conceptual del teorema de Pitágoras (Guardia et. al., 2009)

4.4. Procedimientos en la estructura conceptual

Los procedimientos son elementos tan importantes como los conceptos en la estructura conceptual. En ocasiones, los mapas conceptuales no permiten recoger todos los procedimientos que se identifican y que resultan relevantes para un tema de las matemáticas escolares. Es importante resaltar ciertos procedimientos por su trascendencia para el trabajo de un tema. Más adelante se verá que estos procedimientos son claves para otras componentes del análisis didáctico (por ejemplo, para el análisis cognitivo). Algunos de los procedimientos más importantes surgirán una vez que analicemos el tema desde la perspectiva de los sistemas de representación y la fenomenología. Por esa razón, es importante mejorar y complementar nuestra estructura conceptual original una vez que se hayan hecho los análisis con los otros conceptos pedagógicos del análisis de contenido.

En el ejemplo del teorema de Pitágoras, podemos considerar varios procedimientos que no aparecen en el mapa conceptual de la estructura conceptual (figura 2). Marín (2011) menciona, por ejemplo, el procedimiento para trazar perpendiculares (a partir de las ternas pitagóricas y en relación con la construcción de triángulos rectángulos), y el uso del teorema de Pitágoras para el cálculo de áreas, el cálculo de longitudes y volúmenes, o para la resolución de triángulos rectángulos.

4.5. Contraejemplos de elementos de la estructura conceptual

No es fácil determinar el campo al que pertenece un determinado elemento y el nivel dentro de ese campo en el que se debe ubicar. Presentamos a continuación un ejemplo de elementos del teorema de Pitágoras que algunos estudiantes que abordaron este tema no ubicaron en el lugar que les correspondía.

La construcción de ternas pitagóricas no es un concepto, debe ser parte del campo procedimental. Dado un número a, se puede construir la terna pitagórica al considerar $\frac{1}{2}\left(a^2-1\right)$ y $\frac{1}{2}\left(a^2+1\right)$ como segundo y tercer términos de la terna. Aunque la construcción de la terna se basa en las relaciones numéricas entre los elementos de la terna, es un elemento del campo procedimental. Igualmente, demostrar gráfica o algebraicamente diferentes propiedades asociadas al teorema de Pitágoras es parte del campo procedimental (razonamientos) y no del conceptual.

4.6. Identificación de temas

En el análisis de contenido se pueden dar dos situaciones: (a) que se haya identificado un tema desde un comienzo, en cuyo caso es importante comenzar por una descripción de la estructura matemática en la que se incluye, a través de una descripción de la estructura conceptual más general; o (b) que tengamos una estructura matemática, dentro de la que haya que identificar temas para realizar el análisis de contenido. En este subapartado, abordamos la primera situación; y, en el siguiente, la segunda situación.

Como identificamos al inicio de este capítulo, en los niveles del contenido de las matemáticas escolares, los temas constituyen el nivel más específico de los contenidos. Los definimos como agrupaciones de elementos de los campos conceptual y procedimental.

El análisis de contenido proporciona información útil para el diseño de unidades didácticas si se realiza sobre temas muy concretos. En algunas ocasiones, se realizan análisis de contenido de estructuras matemáticas, como es el caso de los números naturales, presentado anteriormente. En ese caso, la estructura conceptual corresponde a esa estructura matemática y, dentro de ella, se ubican los temas para los que podemos diseñar unidades didácticas. En este capítulo, nos centramos en el análisis de contenido de un tema.

La identificación de temas puede partir de considerar una estructura matemática amplia dentro de la que focalizamos la atención en alguna de sus parcelas. La concreción de un tema debe tener en cuenta el currículo del nivel educativo en el que se vaya a implementar la unidad didáctica. Esto hace que centremos la atención en los elementos de la estructura matemática que se han de considerar e identifiquemos aquellos que quedarán fuera del tratamiento que se hace del tema en ese nivel educativo.

A continuación, presentamos algunos ejemplos a los que se ha llegado a través de las dos aproximaciones presentadas: (a) a partir de la detección de núcleos importantes de relaciones en el mapa conceptual de la estructura matemática —números naturales y sistemas de ecuaciones con dos incógnitas— y (b) a través de los contenidos curriculares del nivel educativo en el que se va a implementar la unidad didáctica —teorema de Pitágoras—. Estas técnicas no son excluyentes, por lo que su consideración conjunta puede aportar riqueza al análisis y permitir justificar la toma de decisiones en la identificación de temas.

Ejemplo de los números naturales

En la figura 3, se delimitan, con diferentes tipos de líneas, diversos temas de los números naturales a partir del mapa conceptual de la figura 1. Por ejemplo, el sistema decimal de numeración se considera un tema de los números naturales porque agrupa elementos de los campos conceptual y procedimental relacionados entre sí, y constituye una parte coherente de la estructura matemática.

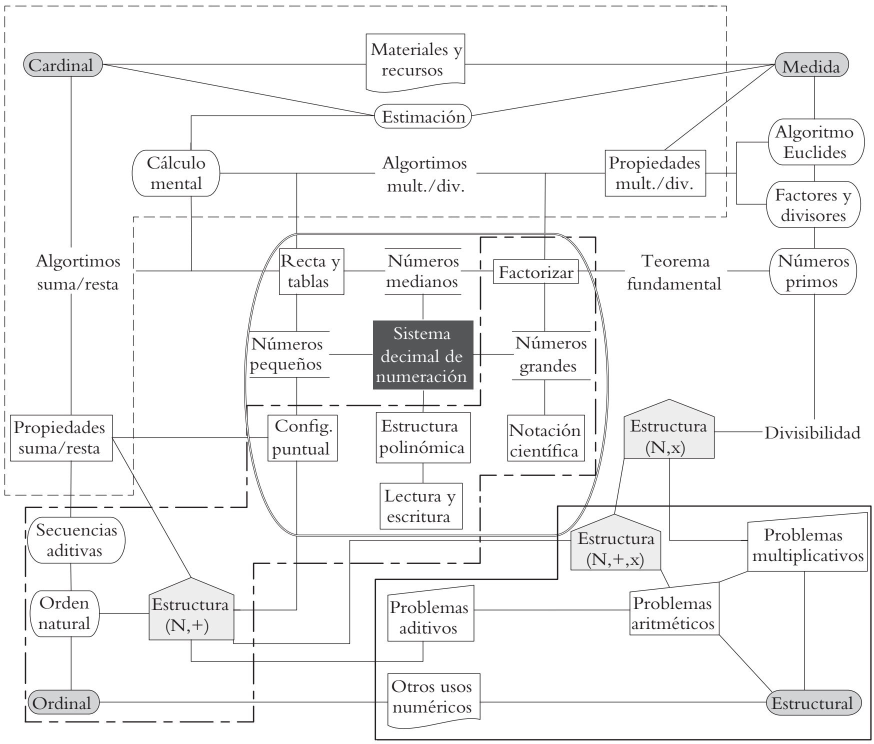


Figura 3. Temas de los números naturales

Ejemplo de los sistemas de ecuaciones con dos incógnitas

Bernal, Castro, Pinzón, Torres y Romero (2014) presentan un mapa conceptual de la estructura matemática —sistemas de ecuaciones con dos incógnitas— en la que se ubica el tema en el que se centran los autores—método gráfico para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos variables— (véase figura 4).

Los autores identifican diferentes temas de esta estructura matemática y abordan uno de ellos: el método gráfico para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos variables (véase figura 5).

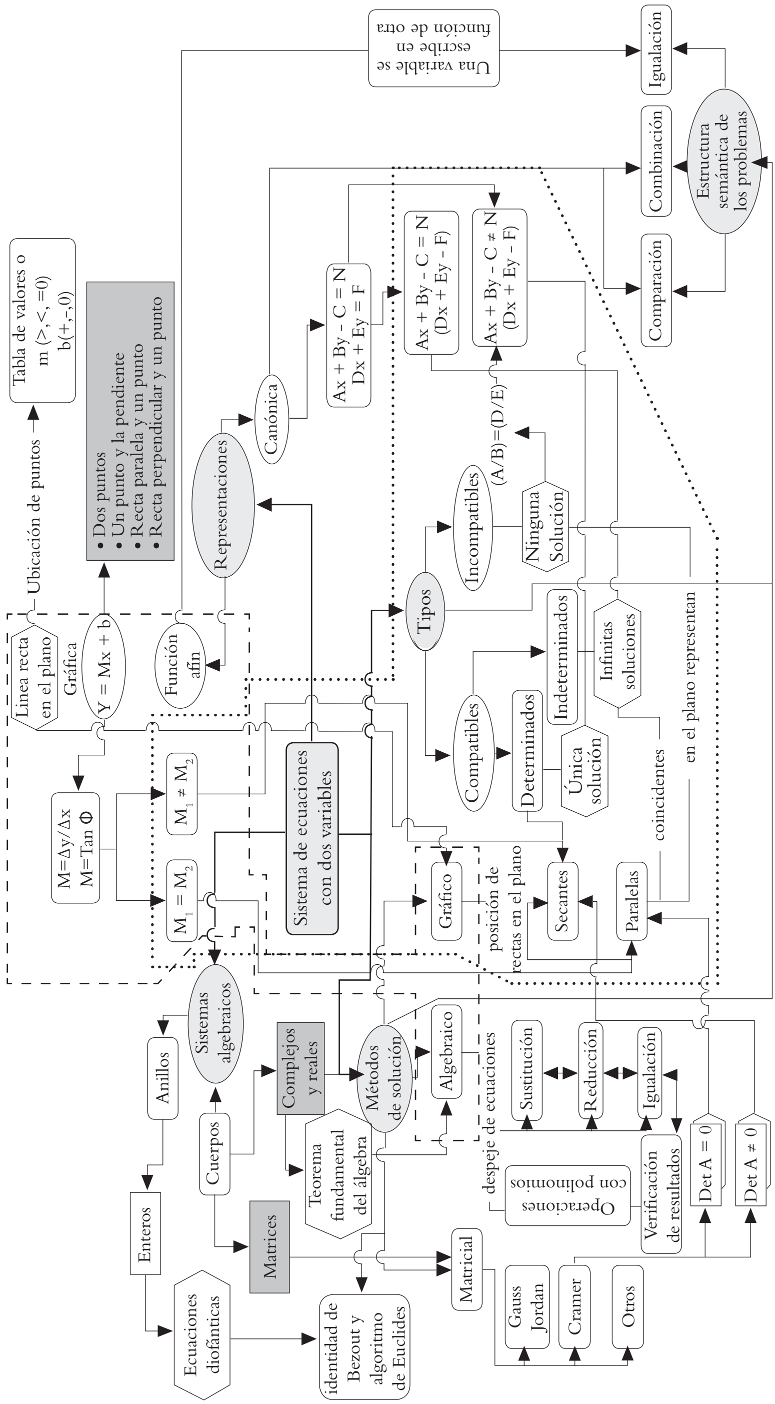


Figura 4. Mapa conceptual de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas

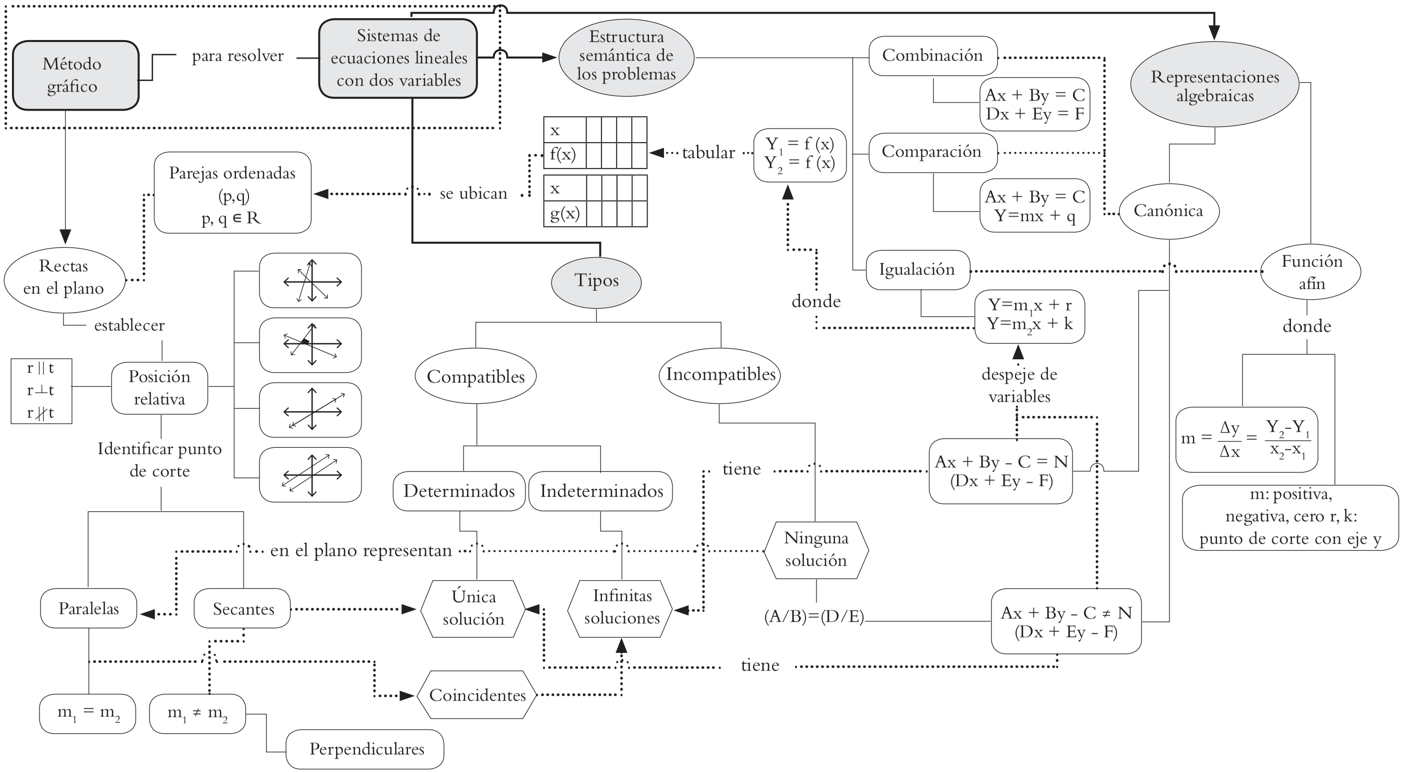


Figura 5. Mapa conceptual del método gráfico para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos variables

4.7. De un tema a la estructura matemática

Cuando abordamos el análisis de contenido partiendo de un tema, el análisis con el concepto pedagógico de la estructura conceptual implica los dos pasos que acabamos de presentar, pero en sentido inverso. Debemos (a) construir la estructura conceptual de la estructura matemática de la cual el tema forma parte y (b) construir la estructura conceptual del tema. Con la primera estructura conceptual, identificamos los principales conceptos involucrados y ubicamos el tema como parte coherente de la estructura matemática analizada. Esta primera estructura conceptual nos puede proporcionar información relevante, por ejemplo, de cara a identificar conocimientos previos de los estudiantes o conceptos y procedimientos para los que el tema será relevante posteriormente. En la segunda estructura conceptual, podremos describir con detalle los conceptos, procedimientos y sus relaciones con el tema, de cara a los análisis posteriores del análisis didáctico. En la figura 6, presentamos la estructura conceptual del tema función exponencial propuesta por Henao, Malagón, Melo, Rojas y Gómez (2014).

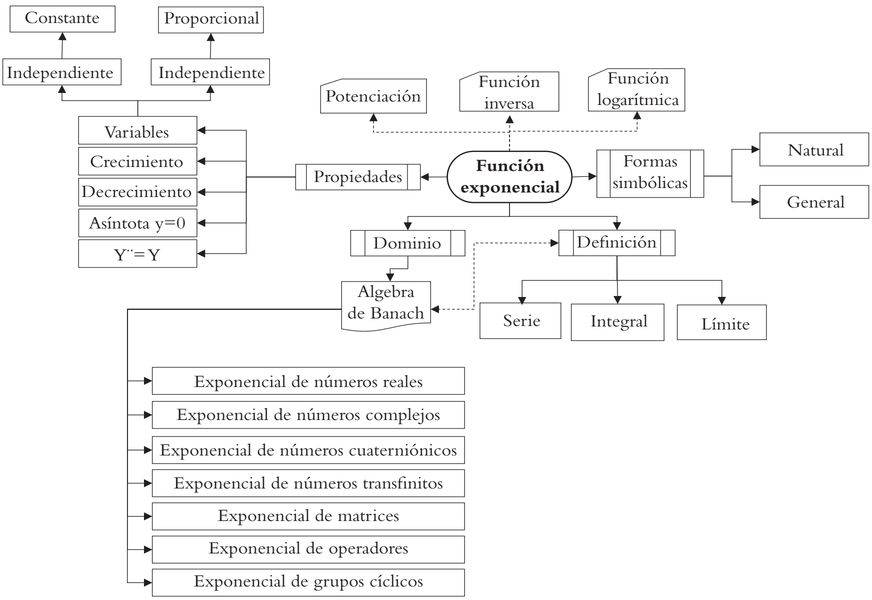


Figura 6. Estructura conceptual de la función exponencial

Y, en la figura 7, presentamos la estructura conceptual en la que se encuentra el tema de la función exponencial.

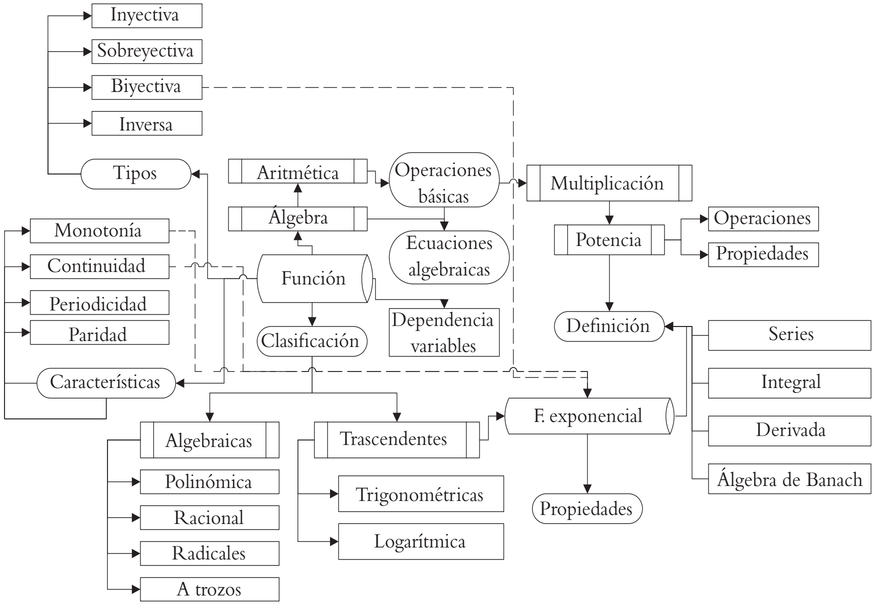


Figura 7. Estructura matemática en la que se ubica el tema función exponencial

Por último, vale la pena señalar que la estructura conceptual de un tema o fenómeno debe enfocarse en presentar los conceptos y procedimientos. En ocasiones, es común que se incluyan algunos sistemas de representación en ellos, perdiendo de vista cuáles son los conceptos que se relacionan en dichas representaciones. Por eso, nuestra recomendación es dedicar otro mapa conceptual para los sistemas de representación, independiente de la estructura conceptual, como describimos a continuación.

5. Sistemas de representación

Los sistemas de representación constituyen el segundo de los conceptos pedagógicos que vertebran el análisis de contenido. Una de las tradiciones en Educación Matemática es hablar de sistemas de representación para hacer referencia a los sistemas de signos que permiten designar un concepto. Seguimos el trabajo de Kaput (1992) y consideramos que un sistema de representación es "un sistema de reglas para (i) identificar o crear signos, (ii) operar sobre y con ellos y (iii) determinar relaciones entre ellos (especialmente relaciones de equivalencia)" (p. 523). Las reglas a las que hace referencia Kaput determinan (a) cómo crear un signo que pertenezca al sistema, (b) cómo reconocer si un signo dado pertenece a él y (c) cómo transformar unos signos en otros, estableciendo relaciones entre ellos.

La definición de Kaput subraya el carácter sistémico de la noción[1]. Un sistema de representación está compuesto por signos que se ciñen a unas reglas. Estas reglas determinan cómo crear un signo que pertenezca al sistema, cómo reconocer si un signo dado pertenece a él y cómo transformar unos signos en otros, estableciendo relaciones entre ellos. Para que las reglas y signos que caracterizan un sistema de representación adquieran un sentido concreto, deben referirse a una estructura matemática particular. Por ejemplo, podemos considerar el plano cartesiano como un sistema de representación. Su utilización implica unas reglas básicas que incluyen, por ejemplo, la disposición de unos ejes, la determinación de unas unidades de medida para ellos y el procedimiento para identificar y caracterizar un punto del plano en función de su posición con respecto a los ejes. Pero las reglas que determinan qué signos pertenecen a dicho sistema dependen de qué estructura matemática pretendamos representar en él, dado que nuestro propósito es representar los conceptos y procedimientos matemáticos que configuran dicha estructura matemática. Por lo tanto, el sistema de representación gráfico de las funciones en el plano cartesiano implica un conjunto de reglas (para la creación y operación de signos en él) que es diferente del sistema de representación gráfico de los números complejos en el plano cartesiano.

Dado que un mismo concepto o estructura matemática se puede representar en diferentes sistemas de representación, es posible agrupar y caracterizar, en tres categorías, las operaciones que se pueden realizar sobre los signos que pertenecen a esos sistemas de representación.

1. *Creación y presentación de signos o expresiones*. Esta operación permite determinar expresiones válidas e inválidas. Por ejemplo, las expresiones $f(x) = \mathrm{x}^2 + 2x + 1$ y $f(x) = (x + 1)^2$ son signos de una misma función dentro del sistema de representación simbólico, mientras que $(x)f = 3x^2 + 2$ es un ejemplo de una expresión inválida en el sistema de representación simbólico para las funciones. La creación de signos o expresiones es una

1 Los siguientes párrafos, hasta la figura 8, han sido tomados literalmente de Gómez (2007, pp. 43-44).

de las principales razones para considerar que, solo en muy contados casos, podemos incluir el lenguaje verbal como un sistema de representación. El lenguaje natural, en general, no tiene reglas (en el sentido de la definición de Kaput) para la creación de signos o expresiones de los temas concretos de las matemáticas escolares. Lo que sí existe, y no se debe confundir, son convenios de cómo se leen ciertas expresiones.

2. *Transformación sintáctica*. Esta operación se refiere a la transformación de un signo en otro, dentro de un mismo sistema de representación, sin que el concepto o procedimiento matemático designado por esos signos cambie. Es el caso, por ejemplo, de los procedimientos de completación de cuadrados, expansión y factorización que mostramos en la figura 9. Otro ejemplo es la representación tabular, en la que el proceso de ubicar las variables en dos filas o en dos columnas no modifica la función representada.
3. *Traducción entre sistemas de representación*. Esta operación se refiere al procedimiento en virtud del cual se establece la relación entre dos signos que designan un mismo objeto pero que pertenecen a diferentes sistemas de representación. Por ejemplo, $f(x) = (x + 1)^2$ y la representación de la figura 8 son representaciones del mismo concepto en diferentes sistemas de representación (simbólico y gráfico, respectivamente).

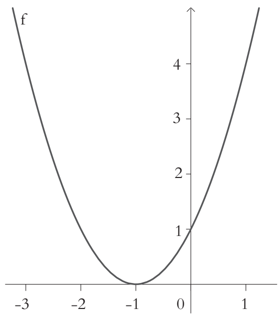


Figura 8. Representación gráfica de $f(x) = (x + 1)^2$

Las relaciones entre los parámetros de las formas simbólicas de la función cuadrática y sus representaciones gráficas en la parábola de la figura 9 ponen también de manifiesto esta tercera operación.

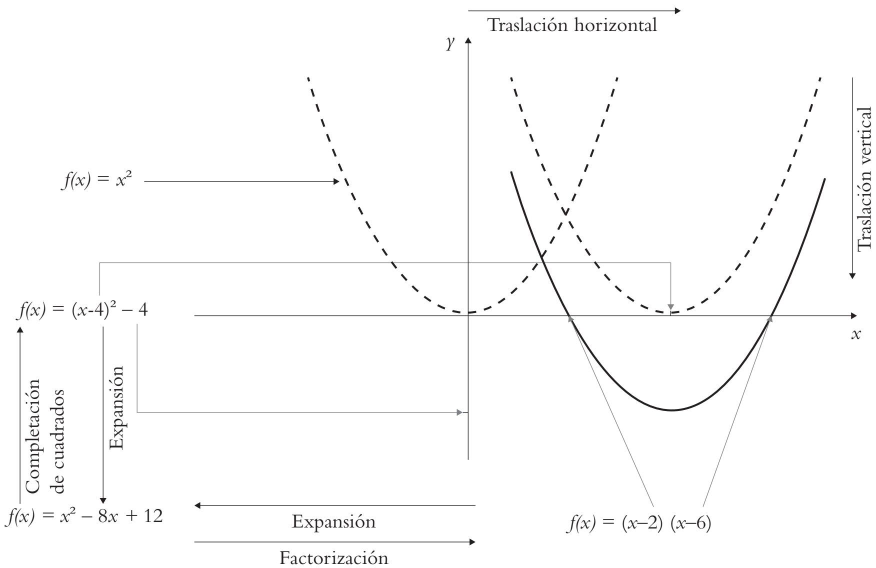


Figura 9. Operaciones en los sistemas de representación

5.1. Papel de los sistemas de representación en el análisis de contenido

Dentro del análisis de contenido, los sistemas de representación como concepto pedagógico permiten dar respuestas a las siguientes cuestiones.

- ¿Qué representaciones hay asociadas al tema?
- ¿Qué relaciones se pueden establecer entre esas representaciones?

Para dar respuestas a estas preguntas, el profesor puede

- determinar los diferentes sistemas de representación en los que se puede representar el tema e
- identificar las relaciones entre esos sistemas de representación (que, en algunos casos, serán procedimientos, y que por tanto, se relacionan estrechamente con el campo procedimental de la estructura conceptual).

Es importante indicar que en algunos casos lo que se quiere representar no son conceptos sino procedimientos, atributos, propiedades y/o parámetros. Por tanto, los sistemas de representación están condicionados por lo que se quiere representar. Por ejemplo, si el tema que se quiere analizar es el volumen de prismas, esto implicará que, por un lado, se deben representar los prismas y, por otra parte, su volumen como el atributo que se quiere medir.

Analizar cómo se expresan los elementos de la estructura conceptual y cuáles de esas formas de expresión constituyen sistemas de representación puede ayudar a conocer los significados del tema desde la perspectiva de los sistemas de representación. En los siguientes subapartados presentamos algunos ejemplos de los sistemas de representación de diferentes temas de las matemáticas escolares.

Aunque los sistemas de representación permiten "identificar los modos en que el concepto se presenta" (Gómez, 2007, p. 455), es importante ser cuidadosos al identificar los sistemas de representación de un tema de las matemáticas escolares porque cualquier modo de expresar un concepto o procedimiento no es un sistema de representación. Para los propósitos de este capítulo, se deben cumplir las condiciones indicadas anteriormente. Usualmente se consideran los siguientes sistemas de representación: (a) simbólico, (b) numérico, (c) tabular, (d) gráfico, (e) geométrico, (f) pictórico, (g) manipulativo, (h) tabular, (i) ejecutable (relacionado con las TIC) y, en muy contadas ocasiones, (j) verbal.

Dado que los temas matemáticos tienen sus propias características, no todos los sistemas de representación desempeñan el mismo papel en todos los temas. Por ejemplo, el sistema de representación gráfico cumple un papel importante en el tema de la función cuadrática (véase Gómez, 2002). Sin embargo, este sistema de representación no tiene la misma relevancia en temas como el teorema de Pitágoras. A continuación, presentamos algunos sistemas de representación utilizados para diferentes temas en los que tienen sentido.

5.2. Sistema de representación numérico

El sistema de numeración decimal está compuesto por los símbolos llamados números cuya representación numérica es 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Las expresiones 9, $3 + 4 + 2$, $\frac{27}{3}$, 3^2 o $\sqrt{81}$ son representaciones numéricas del mismo número.

Para el caso de las funciones, dando valores a la variable independiente, podemos obtener pares ordenados. Para la función $f(x) = (x + 1)^2$, (0,1), (1,4) o (3,16) son ejemplos de pares ordenados. En este caso, los signos son las parejas de valores numéricos que toman las variables (independiente y dependiente). Existe un convenio por el que el primer valor del par es el valor de la variable independiente y el segundo es el valor de la variable dependiente.

5.3. Sistema de representación simbólico

Las expresiones $f(x) = (x + 1)^2$ y $f(x) = x^2 + 2x + 1$ pertenecen al sistema de representación simbólico. Se puede considerar un sistema de representación específico porque tiene sus propios signos (números, letras y símbolos de las operaciones aritméticas), se puede operar con ellos y existe una relación entre ellos. Por ejemplo, se puede comprobar que las dos expresiones siguientes son equivalentes (representan la misma función) al utilizar transformaciones sintácticas: $(x + 1)^2 = (x + 1)(x + 1) = x^2 + x + x + 1 = x^2 + 2x + 1$.

5.4. Sistema de representación tabular

El sistema de representación tabular está estrechamente ligado al sistema de representación numérico pero tiene sus propios signos (por ejemplo, líneas horizontales y/o verticales) y reglas de combinación de estos mismos (posición de las líneas y de los números, por ejemplo). En la tabla 2, presentamos un ejemplo para algunos valores de la función expresada mediante simbolismo algebraico como $f(x) = y = (x + 1)^2$.

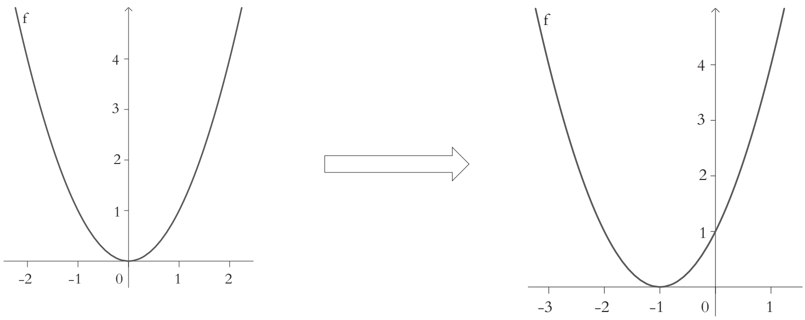
Tabla 2
Valores de $f(x) = (x + 1)^2$ en el sistema de representación tabular

x	$y = f(x)$
-3	4
-2	1
-1	0
0	1
1	4

Las variables (x e y) se sitúan como títulos de las columnas. La variable independiente se ubica a la izquierda. Los valores numéricos de ambas variables se ponen de forma que el valor de la variable independiente está en la misma fila del valor de la variable dependiente que se corresponde con él. Por tanto, la información que se presenta en las filas y las columnas de la tabla es clave y forma parte de las normas de este sistema de representación.

5.5. Sistema de representación gráfico

En la figura 8, hemos presentado una representación gráfica de la función $f(x) = (x + 1)^2$. En este caso —el sistema de representación gráfico cartesiano— los valores y las escalas empleadas en los ejes del diagrama y el trazado de la función constituyen los signos y existe una serie de reglas que permiten relacionarlos entre sí. Una forma de llegar a esa representación gráfica es dar valores en la propia función a la variable independiente (al pasar por el sistema de representación numérico o el sistema de representación tabular). Otra manera es partir de la representación gráfica de la parábola principal —$f(x) = x^2$— y, a partir de ella, aplicar las reglas para llegar a la representación gráfica de $f(x) = (x + 1)^2$, mediante una traslación horizontal de una unidad hacia la izquierda (figura 10).



$f(x) = x^2$ $\qquad$ $f(x) = (x + 1)^2$

Figura 10. Traslación horizontal de una parábola

5.6. Sistema de representación verbal

En el lenguaje natural, el sistema de numeración decimal tiene unas normas establecidas, tanto para los ordinales como para los cardinales. Por ejemplo, 20, 21 y 22 se expresan verbalmente como veinte, veintiuno y veintidós, respectivamente. Pero, para 11 y 12, su expresión verbal tiene otras reglas. Se expresan verbalmente como once y doce, respectivamente, y no como "dieciuno" y "diecidós". Lo mismo sucede con los ordinales. La posición 8 se expresa como octavo y la posición 18 se expresa como décimo octavo.

El sistema de representación verbal genera controversias porque no se reduce a la lectura literal de lo que se expresa de otro modo mediante otros sistemas de representación. Por ejemplo, las expresiones verbales "una cantidad por la mitad de esa cantidad" y "equis por equis medios" son equivalentes pero, sin embargo, ponen de manifiesto diferentes propiedades de los elementos matemáticos involucrados. En este caso, la segunda expresión se corresponde con la lectura literal de la expresión algebraica $x \cdot \frac{x}{2}$.

El sistema de representación verbal tiene sentido, por lo tanto, cuando el lenguaje nos permite referirnos a los conceptos y procedimientos matemáticos que queremos representar. Es el caso, por ejemplo, de los números naturales para los que el lenguaje natural incluye términos y convenios que nos permiten referirnos a ellos. Hay temas de las matemáticas escolares a los que no nos podemos referir con el lenguaje natural. Esta situación no debe confundirse con los convenios que se establecen para la lectura de ciertos símbolos.

En algunos temas como la probabilidad y movimientos en plano hemos identificado algunos elementos asociados a este sistema de representación. Por ejemplo, la probabilidad de un evento cuenta con signos en el lenguaje natural como evento seguro o evento imposible. Lo mismo sucede con movimientos como la rotación al referirnos a ella con "giros en el sentido de las manecillas del reloj" o con "giros en el sentido contrario de las manecillas" o sus equivalentes "giros horarios" y "giros antihorarios", respectivamente.

5.7. Sistema de representación geométrico

El sistema de representación geométrico es útil para representar la multiplicación de números naturales y su resultado. Por ejemplo, para representar la multiplicación de 4×3, se puede construir un rectángulo con cuatro unidades de largo y tres de ancho (véase figura 11), que representa cuatro veces tres. Al contar el número total de cuadrados, se tiene el resultado de la multiplicación.

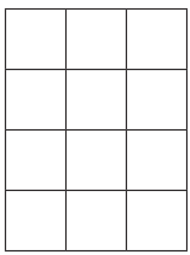


Figura 11. Representación geométrica para la multiplicación 4×3

5.8. Sistema de representación pictórico

En la figura 12, utilizamos el sistema de representación pictórico para expresar el cardinal de un número de elementos (círculos) y describir el uso que se hace de la agrupación para determinar la cardinalidad de un conjunto de 23 círculos. Cada círculo representa cada uno de los elementos del conjunto. Se hacen tantos grupos de diez como se pueda y finalmente se cuenta la cantidad de círculos sueltos y la cantidad de grupos de 10 círculos. En el ejemplo, serían 23 círculos.

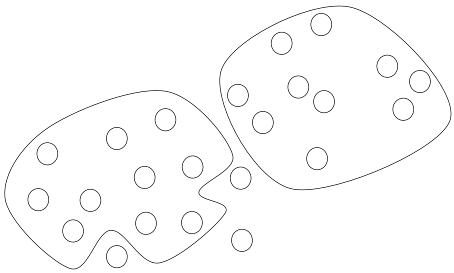


Figura 12. Determinar la cardinalidad por agrupación

Una forma de contar de cinco en cinco un determinado número de elementos es representar cada número por un segmento vertical y se hacen bloques de cinco mediante la representación de cuatro segmentos verticales y un quinto que los tacha. Finalmente, el cardinal del conjunto es la cantidad de bloques de cinco segmentos más los que haya sueltos. En la figura 13, representamos el número 13 (5*x*2 + 3) mediante esta representación pictórica.

Figura 13. Contar de cinco en cinco

En el caso de la probabilidad condicional, el diagrama de árbol es una representación muy usada en la solución de problemas que involucran situaciones aleatorias, pues permite hacer una lectura del problema en varios niveles. Por ejemplo, en el diagrama de árbol de la figura 14, si leemos de manera vertical, encontramos diferenciados los eventos. Por su parte, la lectura horizontal permite observar que el segundo evento está condicionado a la ocurrencia del primero (Díaz, López, Montes, Rodríguez y Mora, 2014).

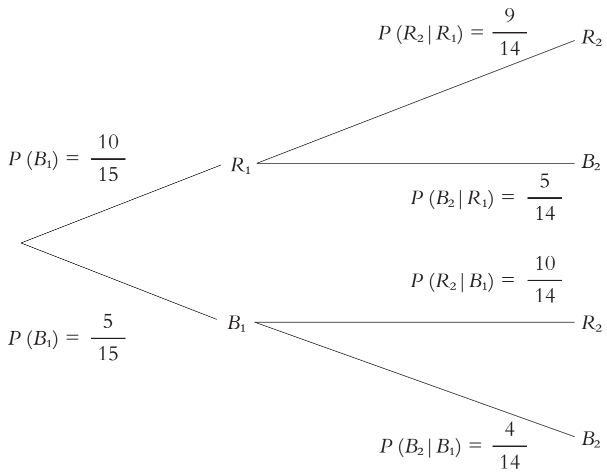


Figura 14. Representación pictórica de la probabilidad condicional

5.9. Sistema de representación manipulativo

El sistema de representación manipulativo presenta dificultades porque, en ocasiones, se confunde con los recursos o materiales didácticos que le dan sustento. Conviene ser cautos porque son pocos los recursos que se constituyen como verdaderos sistemas de representación manipulativos. Como siempre, debemos comprobar que cumplen las características para ser un sistema de representación. Por ejemplo, el ábaco vertical sí es un sistema de representación para los números naturales porque tiene sus propios elementos (bolitas y varillas) y sus propias reglas para la construcción de números. Estas reglas son diferentes de las del sistema de representación simbólico, porque, por ejemplo, el ábaco vertical es aditivo y posicional, pero no es multiplicativo.

5.10. Sistema de representación ejecutable (relacionado con las TIC)

El sistema de representación ejecutable está asociado a programas o *applets* que cumplen las características requeridas para cualquier sistema de representación para un tema determinado de las matemáticas escolares. Existen materiales virtuales que imitan a los materiales manipulativos. Si la virtualización cumple con la existencia de elementos específicos, con unas reglas para combinarlos y operar con ellos, se puede considerar un sistema de representación; no, en otro caso. Programas de geometría dinámica como el Cabri o el Geogebra se consideran sistemas de representación para diversos temas de la geometría o el álgebra porque tienen elementos propios y sus propias reglas para representar, combinar y operar con esos elementos. Por ejemplo, una representación gráfica en Geogebra de la función $f(x) = (x + 1)^2$ tiene sus propios elementos en el programa ($y = (x + 1)$^2) y, una vez conseguida esa representación gráfica, tiene unas características diferentes de las del sistema de representación gráfico, como lo es poder arrastrar la gráfica o hacer acercamientos (*zoom*). En la figura 15, presentamos la representación de la función señalada con Geogebra, como ejemplo de sistema de representación ejecutable.

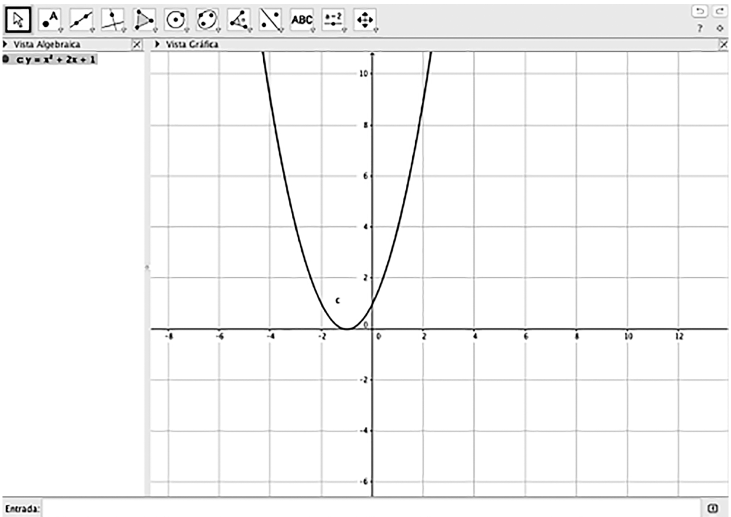


Figura 15. Representación de una parábola en el sistema de representación ejecutable con Geogebra

5.11. Sistemas de representación de los números naturales

Con base en el trabajo presentado en la estructura conceptual y en una revisión histórica (Ifrah, 1997), consideramos seis tipos de sistemas de representación para los números naturales: (a) numérico, (b) verbal, (c) pictórico, (d) tabular, (e) gráfico y (f) manipulativo.

Sistema de representación numérico

En la cultura occidental, los números naturales se representan mediante los signos del 0 al 9. Existen además unas reglas para combinar estos signos y para establecer relaciones entre ellos, por lo que podemos considerar que esa forma de representación constituye un sistema de representación. En nuestro sistema de numeración, el número representado se obtiene al multiplicar cada potencia de la base por el valor del símbolo que la precede y sumar los resultados junto con las unidades. Por ejemplo, $461 = 1 \times 10^0 + 6 \times 10^1 + 4 \times 10^2$. Por lo tanto, se trata de un sistema de numeración posicional, aditivo y multiplicativo. En otras culturas, como la egipcia, la romana, la babilónica o la china, los números naturales se representan de otro modo. No entraremos aquí en ese detalle. En general, se suele distinguir entre las siguientes características en los sistemas de numeración: simple, aditivo, multiplicativo y posicional.

El hecho de expresar un número natural como resultado de operaciones con otros números constituye otra forma de representar ese número y hace necesario mencionar las relaciones aritméticas entre números. En el caso de la estructura multiplicativa, el teorema fundamental de la aritmética asegura que existe una única forma de expresar un número en función de sus factores y algunas propiedades multiplicativas. Esto también requiere de una revisión de la estructura conceptual.

Sistema de representación verbal

En los números naturales, distinguimos la terminología que se emplea para representar los números naturales pequeños y las reglas que existen para combinar estos para formar números medianos y números grandes. Así, leemos 101 como "ciento uno" (y no de otras formas que se nos podrían ocurrir por la forma de descomponerse). Para números grandes, utilizamos términos como "billón", "trillón", "mega" o "tera". Al tener en cuenta las reglas que se establecen entre los cardinales y los ordinales, también se puede hablar de un sistema de representación verbal para el caso de los ordinales. Este sistema de representación hace que, por ejemplo, expresemos el lugar 42 como "cuadragésimosegundo".

Sistema de representación pictórico

Las configuraciones puntuales constituyen un ejemplo de sistema de representación pictórico para algunas relaciones entre números naturales. En la figura 16 recogemos los números poligonales de diferente orden.

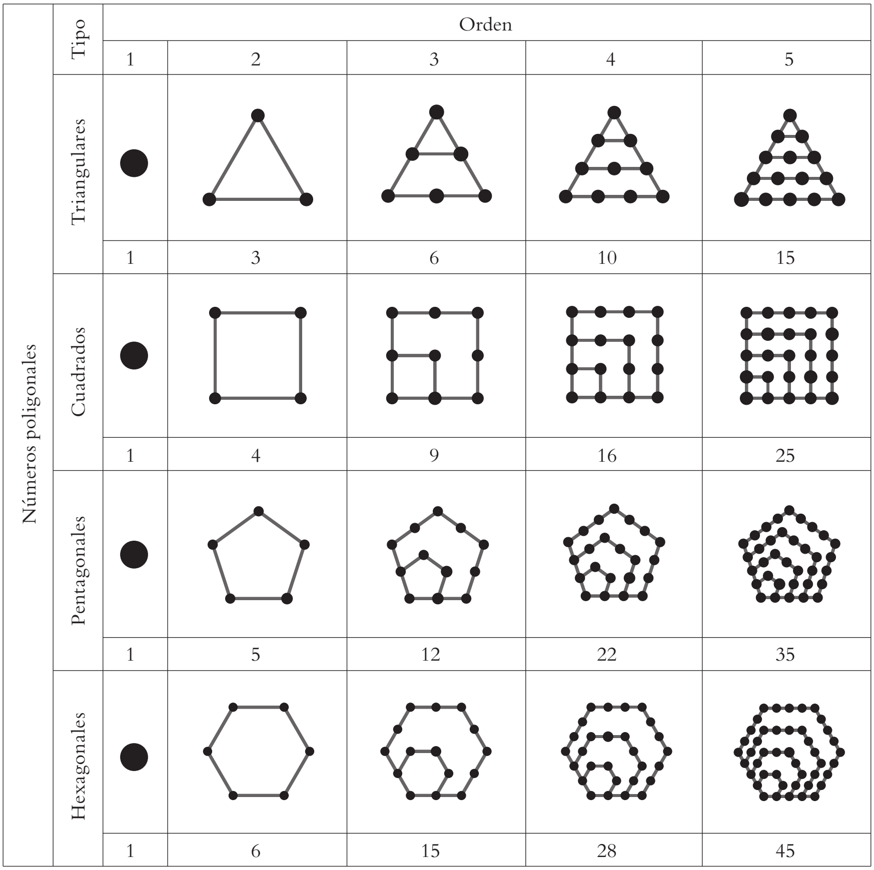


Figura 16. Números poligonales

Estas representaciones permiten observar propiedades que no son perceptibles en su expresión simbólica decimal. Por ejemplo, todo número cuadrado es suma de números impares consecutivos, o todo número triangular es la mitad del producto de números consecutivos. Estas propiedades se expresarían simbólicamente como $n + n + 1$ y $\frac{n(n+1)}{2}$, respectivamente. Para un estudio más detenido de los números poligonales, se pueden consultar los trabajos de la doctora Castro (Castro, 1995; Castro, Rico y Castro, 1995).

Sistema de representación tabular

La representación tabular permite establecer las relaciones numéricas que se observan en los números triangulares mostrados en la figura 16 (véase tabla 3).

Tabla 3
Números triangulares

n	Cantidad de puntos
1	1
2	3
3	6
4	10
…	…

Las tablas numéricas constituyen otro sistema de representación para los números naturales. Un ejemplo es la tabla 100 (figura 17). Esta tabla se puede usar desde los niveles más básicos, para observar la secuencia numérica y hacer operaciones aritméticas de diferente tipo, hasta para buscar regularidades no evidentes, como presentaremos más adelante.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 17. Tabla 100

Dentro de esa tabla, podemos trazar una serie de cuadrados y de otros polígonos que ponen de manifiesto diferentes propiedades aritméticas entre los números que hay en el interior de esos cuadrados. En la figura 18 mostramos un ejemplo.

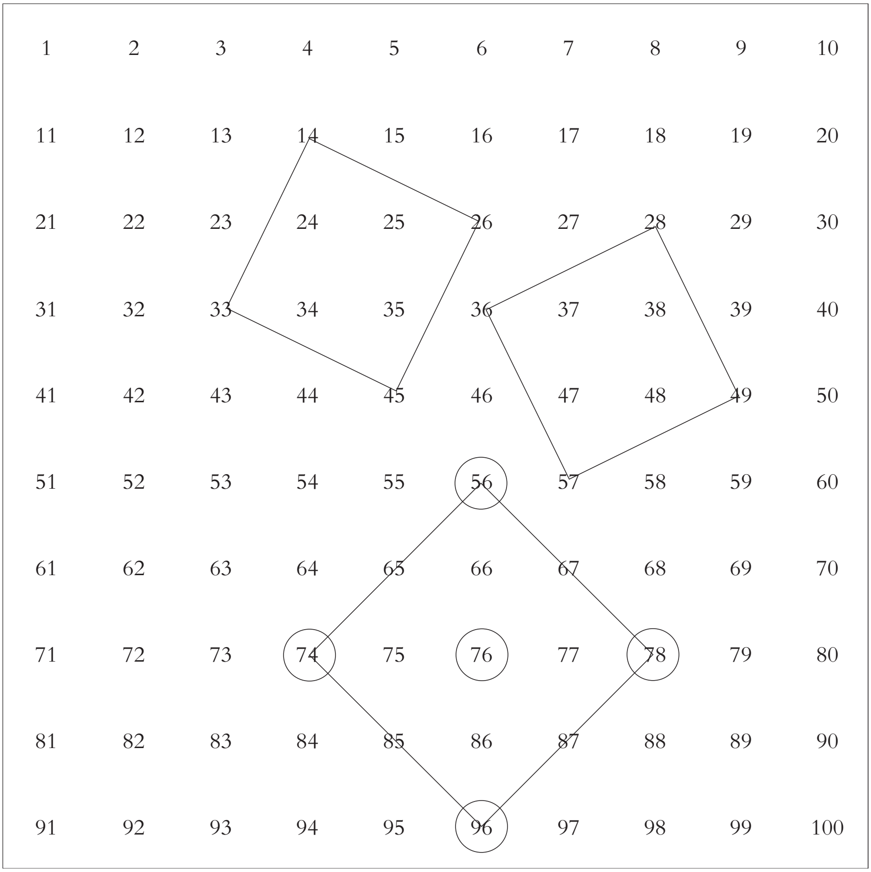


Figura 18. Cuadrados apoyados sobre un vértice en la tabla 100

En los cuadrados superiores de la figura 18, observamos que la suma de los números que se encuentran en la línea que delimita el polígono es igual a la suma de los números internos del polígono. En el cuadrado inferior, la suma de los números que hay en los vértices es igual a la suma de los números interiores excepto el central (56 + 78 + 96 + 74 = 66 + 75 + 77 + 86). Se trata de relaciones numéricas que se observan en la tabla 100 y que no se pueden constatar en el sistema decimal de numeración.

Sistema de representación gráfico

Los valores recogidos en la tabla 3 pueden ser expresados a través de un gráfico cartesiano, como se muestra en la figura 19.

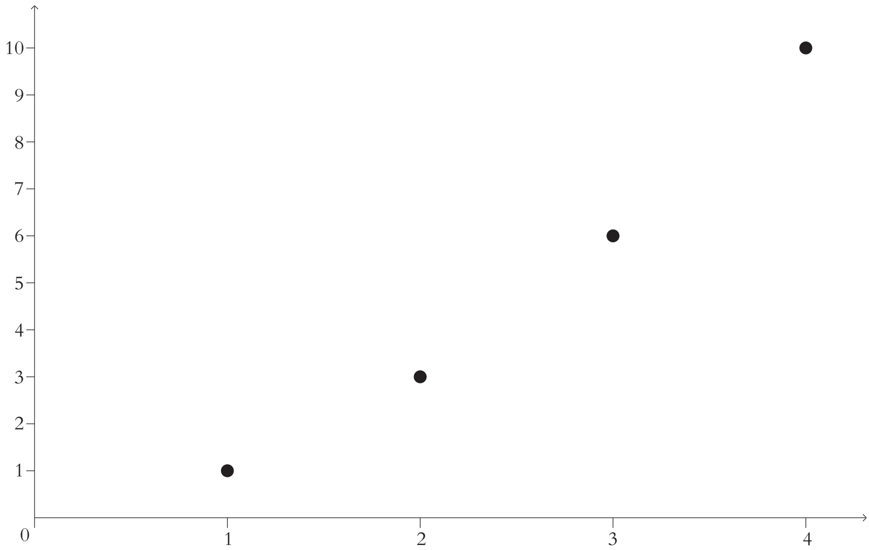


Figura 19. Representación gráfica de los primeros números triangulares

La recta numérica constituye un sistema de representación gráfico para los números naturales. Podemos partir de una semirrecta y un segmento unidad y, al tomar el extremo de la semirrecta como origen (O), por reiteración del segmento unidad, se pueden formar las representaciones de los restantes números naturales (figura 20).

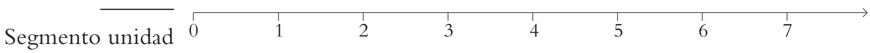


Figura 20. Recta numérica

La relación entre este sistema de representación y el simbólico es claro, ya que se puede deducir que el punto 3 resulta como consecuencia de haber unido por los extremos tres segmentos unidad. Simbólicamente, esto es equivalente a expresar $3 = 1 + 1 + 1$.

Sistema de representación manipulativo

Los siguientes son materiales que se pueden considerar sistemas de representación para los números naturales, porque cumplen con las condiciones establecidas por Kaput (1992).

- Ábaco
- Regletas Cuissenaire
- Material del sistema decimal de numeración y bloques multibase
- Plaquetas de Herbiniére-Lèbert

En el esquema de la figura 21, recogemos algunos de los diferentes sistemas de representación para los números naturales que hemos presentado en los subapartados previos.

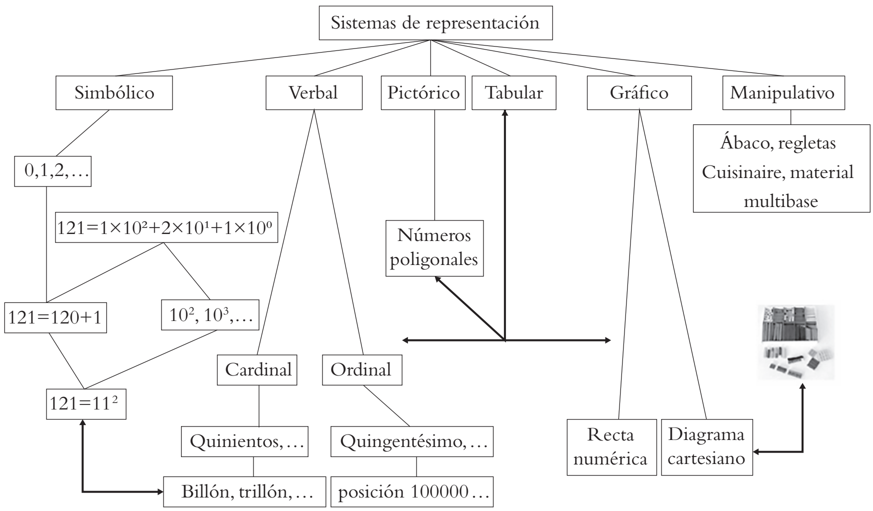


Figura 21. Sistemas de representación de los números naturales

5.12. Sistemas de representación del teorema de Pitágoras

Consideramos los sistemas de representación simbólico, tabular, ejecutable (TIC), geométrico y manipulativo.

Sistema de representación simbólico

Usualmente se suele distinguir entre los enunciados simbólico y geométrico del teorema de Pitágoras. En el sistema de representación simbólico, si a y b representan las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo y h su hipotenusa, se cumple que $a^2 + b^2 = h^2$. Con las relaciones entre a, b y h presentadas, (a, b, h) constituye una representación simbólica de las ternas pitagóricas. La generalización del teorema y su contra-recíproco también se suelen expresar simbólicamente.

Sistema de representación numérico

Los ejemplos de ternas pitagóricas se pueden expresar numéricamente: (1,3,10), (2,5,29) y (4,4,32) son algunas de ellas.

Sistema de representación tabular

Las ternas pitagóricas presentadas como ejemplos en el sistema de representación simbólico (numérico) se pueden expresar de forma tabular como mostramos en la tabla 4.

Tabla 4
Ejemplos de ternas pitagóricas en el sistema de representación tabular

a	b	h
1	3	10
2	5	29
4	4	32

Sistema de representación geométrico

La versión geométrica del teorema de Pitágoras queda expresada en el sistema de representación geométrico como mostramos en la figura 22.

Figura 22. Representación geométrica del teorema

El teorema de Pitágoras tiene muchas demostraciones. Algunas de ellas se expresan en el sistema de representación geométrico. Desde la matemática formal, algunas de estas argumentaciones no son consideradas demostraciones, por lo que podríamos hablar de justificaciones, ya que no se observa la posibilidad de generalizar el caso particular que representa el dibujo. En las imágenes de la figura 23, presentamos una de ellas.

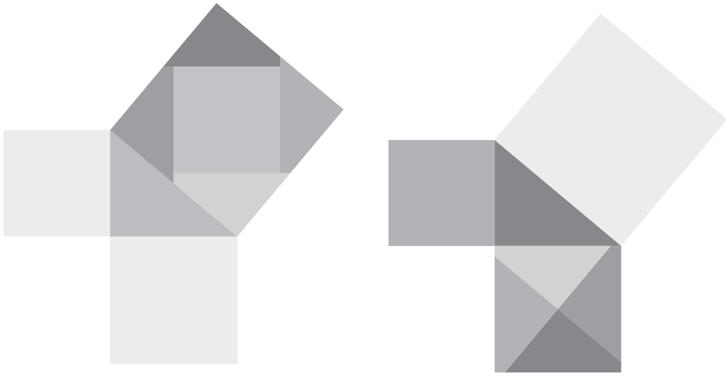


Figura 23. Demostración geométrica del teorema de Pitágoras

Sistemas de representación manipulativos

Las regletas Cuissenaire, los Geoplanos o los Tangrams son puzles que constituyen sistemas de representación específicos porque tienen sus elementos propios y sus reglas para su combinación. En la figura 24, mostramos un caso de expresión del teorema mediante el Tangram chino.

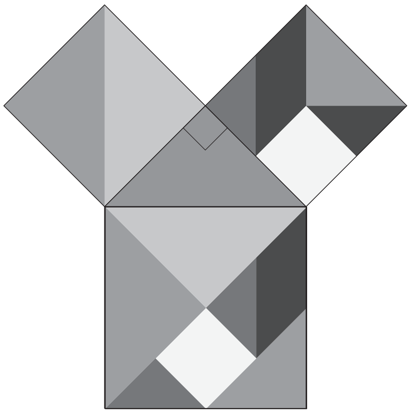


Figura 24. Justificación[2] con Tangram chino

---

2 En este caso, por las características del Tangram chino, esta justificación es válida para triángulos rectángulos isósceles.

Sistemas de representación ejecutables (TIC)

La representación en programas de geometría dinámica como el Cabri o el Geogebra de un triángulo rectángulo y de los cuadrados que se pueden construir sobre sus tres lados permite obtener una figura dinámica. Si fijamos los vértices de los cuadrados a los vértices del triángulo rectángulo, se observa que las relaciones entre las figuras se mantienen aunque se varíen las longitudes del triángulo rectángulo del que partimos. En la figura 25, presentamos un mapa conceptual general para los sistemas de representación del teorema de Pitágoras.

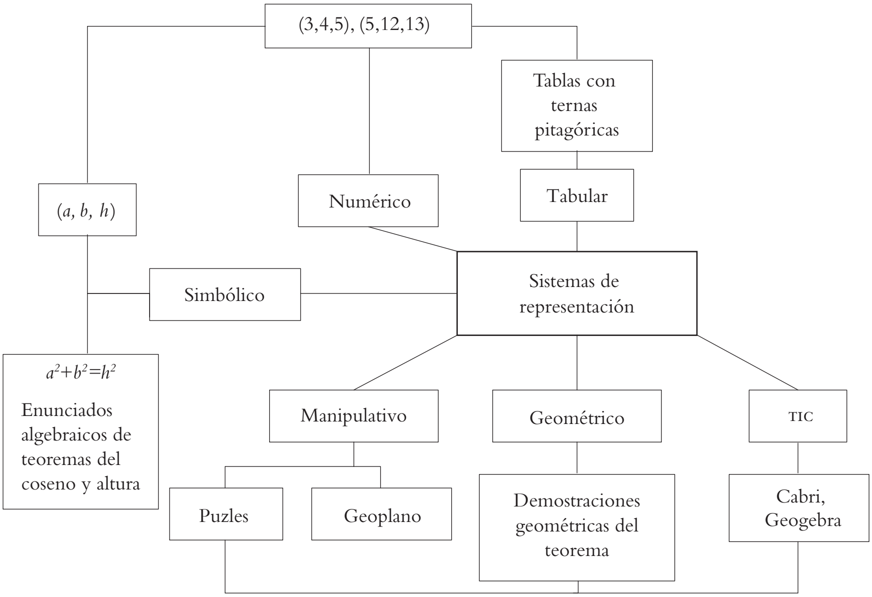


Figura 25. Sistemas de representación del teorema de Pitágoras

De nuevo, insistimos en la importancia de establecer relaciones entre las diferentes formas de expresar los elementos mostrados en los ejemplos en diferentes sistemas de representación. Aunque en la figura 25 no se han trazado todas las líneas que pueden relacionar los seis sistemas de representación considerados para el teorema de Pitágoras, están relacionados a mediante la caja central (sistemas de representación). Por ejemplo, se pueden expresar las ternas pitagóricas mediante el Geoplano. Estos procedimientos surgen de las relaciones que se establecen entre sistemas de representación. Es importante establecer las relaciones entre los diferentes sistemas de representación o las transformaciones dentro de un mismo sistema de representación porque pueden ayudar a enriquecer la estructura conceptual y poner de manifiesto o sacar a la luz elementos del campo procedimental. En el caso del teorema de Pitágoras, el cálculo de áreas implica, por un lado, procedimientos gráficos de transformación que permiten establecer los triángulos rectángulos implicados y las medidas de sus lados. Por el otro lado, también implica procedimientos de traducción entre sistemas de representación al expresar simbólicamente la relación entre esas medidas con base en el teorema de Pitágoras. Estas expresiones simbólicas se transforman dentro del sistema de representación simbólica de cara a obtener las medidas de las áreas.

5.13. Contraejemplos de sistemas de representación

Como hemos apuntado anteriormente, la distinción entre sistema de representación y el modo en que se expresa un determinado elemento genera dificultades. Presentamos a continuación algunos ejemplos de propuestas que no son sistemas de representación y, para ello, nos basamos en la definición de Kaput (1992) que sirve de referente de sistema de representación.

Editor de ecuaciones como sistema de representación de las ecuaciones lineales. El editor de ecuaciones no es un sistema de representación porque no existe un conjunto de reglas que establezcan cómo se transforman unos elementos en otros. La transformación de una expresión en otra equivalente en el editor de ecuaciones se rige por las reglas algebraicas, las mismas que seguimos cuando resolvemos una ecuación lineal con lápiz y papel. Por tanto, como no existen unas normas propias del editor de ecuaciones para estas transformaciones, no se puede considerar un sistema de representación.

Cinta métrica como sistema de representación de los números naturales. La cinta métrica no es un sistema de representación, pues se sirve de los elementos existentes en la recta numérica. En este caso, se trata de un instrumento para medir longitudes expresadas en números naturales, pero no de un sistema de representación.

Semicírculo graduado como sistema de representación de los ángulos. El semicírculo no es un sistema de representación, sino una herramienta para medir ángulos. Al igual que en los ejemplos anteriores, no existen unos elementos y unas reglas propias para la relación entre los elementos.

La lectura de teoremas o fórmulas. Hacer la lectura de un teorema, por ejemplo el teorema de Pitágoras, o expresar de manera verbal la fórmula matemática como "efe de equis igual a equis al cuadrado" no corresponden a un sistema de representación verbal. Estos no son sistemas de representación porque no hay reglas en el lenguaje natural para operar sobre ellos. No se debe confundir con los convenios que se establecen para la lectura de los símbolos.

El papel, el lápiz, la pizarra y la tiza no son sistemas de representación. Se trata de recursos y medios para representar determinados elementos. La representación de una tabla en el papel y en la pizarra no implica dos sistemas de representación diferentes. Es un solo sistema de representación, puesto que los elementos y las reglas de combinación son las mismas. Lo único que hacemos es variar el medio en el que la representamos.

5.14. Procedimientos relacionados con los sistemas de representación

En los ejemplos que hemos presentado en este apartado, hay casos en los que se observan transformaciones dentro de un mismo sistema de representación de un mismo elemento (transformaciones sintácticas) y traducciones que se producen entre diferentes sistemas de representación utilizados para representar un mismo elemento.

Por ejemplo, las transformaciones presentadas anteriormente para un mismo elemento expresado algebraicamente, $(x + 1)^2 = (x + 1)(x + 1) = x^2 + \mathrm{x} + \mathrm{x} + 1 = x^2 + 2x + 1$, se producen en el sistema de representación algebraico y se consideran transformaciones sintácticas. Por otro lado, si de la expresión $f(x) = (x + 1)^2$ pasamos a su representación gráfica (figura 8), estamos realizando una traducción entre dos sistemas de representación de un mismo elemento.

Es importante analizar las posibles transformaciones sintácticas en los diferentes sistemas de representación y las traducciones entre sistemas de representación para identificar procedimientos relacionados con el tema que estemos trabajando. Esta información se debe incluir en la estructura conceptual y se utilizará posteriormente, por ejemplo, en el análisis cognitivo.

6. Fenomenología

La fenomenología es el tercer concepto pedagógico del análisis de contenido. Este concepto pedagógico se apoya en la información proveniente de la estructura conceptual y los sistemas de representación. Podemos encontrar más información sobre este concepto pedagógico y sobre su aprendizaje por parte de profesores en formación en Gómez y Cañadas (2011, 2012, 2016).

En el análisis fenomenológico, se pueden dar dos situaciones: (a) que se haya identificado un tema desde un comienzo, en cuyo caso se deberán identificar los fenómenos que dan sentido al tema, las subestructuras, los contextos fenomenológicos y las situaciones según pisa; o (b) que tengamos un fenómeno dentro de las matemáticas escolares. En tal caso, se deberá identificar que otros fenómenos comparten características estructurales con el seleccionado y determinar la subestructura matemática que corresponde dentro de la estructura conceptual.

Diferentes países, entre los que se encuentra Colombia (men, 2006), están promoviendo una formación matemática en los escolares que desarrolle sus capacidades para enunciar y abordar problemas expuestos en contextos no matemáticos y resolverlos con el uso de las herramientas matemáticas que correspondan. Para ello, los profesores deben "diseñar, analizar y seleccionar tareas que necesiten el uso de conceptos y procedimientos de las matemáticas escolares como herramientas para resolver los problemas que se presentan en diferentes contextos y situaciones" (Gómez y Cañadas, 2011, p. 78). Utilizamos el trabajo de estos autores como base para el desarrollo de este concepto pedagógico.

En Educación Matemática, la noción de fenomenología adquirió una particular relevancia con motivo de los trabajos de Freudenthal (1973, 1983). No obstante, y como lo señala Puig (1997, pp. 62-63), la relación entre las ideas de Freudenthal y la tradición filosófica correspondiente es débil. Puig llama análisis fenomenológico, en el contexto del análisis didáctico de un concepto o estructura matemática, a la descripción de los fenómenos para los que es el medio de organización y de la relación que el concepto o la estructura tiene con esos fenómenos (p. 63). Consideramos que la fenomenología es un "elemento constitutivo del significado de un concepto [que surge] de una visión funcional del currículo, en virtud de la cual los sentidos en los que se usa un término conceptual matemático también incluyen los fenómenos que sustentan el concepto" (Gómez, 2007, p. 50). Por esta razón, la fenomenología y la visión funcional del currículo son elementos centrales de la noción de alfabetización matemática propuesta en pisa 2012 (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2013).

Desde la perspectiva de la planificación local en la que se sitúa este libro, el problema se centra en dar un sentido práctico al propósito de establecer una relación entre una estructura matemática y los grupos de fenómenos asociados a ella. Estas relaciones entre estructura matemática y fenómenos se expresan, por parte de los escolares y a la hora de abordar una tarea, en el proceso de modelización y en las destrezas, los razonamientos y las estrategias que ellos deben desarrollar para identificar el modelo matemático que corresponde a un fenómeno (o a un problema que se refiere a un fenómeno). Este procedimiento implica expresar ese fenómeno o problema en términos de uno o más sistemas de representación, resolver el problema o interpretar el fenómeno dentro de esos sistemas de representación, traducir la solución o la interpretación en términos del fenómeno, y verificar esa solución o interpretación (Gómez, 2007, pp. 87-88).

La fenomenología, como concepto pedagógico, permite dar respuesta a las siguientes cuestiones.

- ¿Qué fenómenos dan sentido a mi tema? (fenómenos)
- ¿Qué subestructuras permiten organizar los fenómenos que dan sentido a mi tema? (subestructuras)
- ¿Para qué se utiliza mi tema? ¿A qué problemas da respuesta? (contextos fenomenológicos)
- ¿Qué características comparten los fenómenos que dan sentido al tema? ¿Qué subestructuras se relacionan con qué contextos fenomenológicos? (características estructurales y relación entre subestructuras y contextos fenomenológicos)
- ¿En qué situaciones está presente mi tema? (contextos PISA 2012)

Como hemos recogido entre paréntesis, las subestructuras, los contextos fenomenológicos, las características estructurales y los contextos PISA 2012 se suman a los fenómenos como ideas clave de la fenomenología como concepto pedagógico. Introducimos estas ideas en los siguientes subapartados.

6.1. Fenómenos

La identificación de fenómenos adecuados para un tema constituye el primer paso del análisis fenomenológico. Suele resultar útil comenzar por la elaboración de un listado de fenómenos. En ocasiones, preguntarse sobre los usos del tema y los problemas en los que se utiliza el tema contribuye a la elaboración del listado. Estos fenómenos, a través del análisis fenomenológico, se podrán organizar según diferentes criterios: (a) contextos fenomenológicos, (b) subestructuras y (c) contextos (OECD, 2013).

6.2. Contextos fenomenológicos

Rico y sus colaboradores utilizan la noción de contexto matemático para referirse "al modo en que se usan los conceptos en una o varias situaciones" (Rico et al., 2008, p. 11). Con base en estas ideas y las de PISA (OECD, 2013), hablaremos de *contexto fenomenológico*. Nuestra propuesta para este término es una ampliación de la idea inicial de Rico et al., al incluir también la idea de organizar esos fenómenos a partir de una característica estructural.

Nuestra experiencia en formación de profesores muestra que puede ser útil abordar el análisis fenomenológico para dar respuesta a dos preguntas:

- ¿para qué se usa el tema matemático? y
- ¿a qué problemas da respuesta el tema?

Los fenómenos se agrupan de acuerdo con sus características estructurales —"aquellas características del fenómeno (o de una situación o cuestión relacionada con el fenómeno) que son relevantes desde el punto de vista matemático" (Gómez, 2007, p. 54)— y esas agrupaciones configuran los contextos fenomenológicos. Al abordar estas preguntas, se espera (a) identificar fenómenos asociados al tema en cuestión y (b) establecer relaciones entre esos fenómenos.

Una vez identificado un listado de fenómenos, el siguiente paso puede ser la identificación de contextos fenomenológicos. Entre un listado de fenómenos, encontraremos algunos de ellos que tienen características estructurales comunes. Extendemos la idea de contexto fenomenológico para referirnos a esos grupos de fenómenos. Usamos entonces el término contexto fenomenológico de un tema de las matemáticas escolares para referirnos a la agrupación de todos los fenómenos que comparten una misma característica estructural (Gómez, 2007, p. 55). Organizar los fenómenos asociados a un tema implica identificar lo que los relaciona y lo que los diferencia, desde la estructura conceptual del tema, y agruparlos de acuerdo con esas semejanzas y diferencias para establecer los contextos fenomenológicos correspondientes. Esta organización de los fenómenos no se da en función del campo de aplicación o disciplina en la que se enmarca. Como veremos en el ejemplo de los números naturales, fenómenos de áreas muy diversas pueden compartir características estructurales que permiten agruparlos en un mismo contexto fenomenológico.

En resumen, con la aproximación de identificación de contextos fenomenológicos esperamos organizar los fenómenos asociados por medio de contextos fenomenológicos de acuerdo con las características estructurales que comparten.

Ejemplo de identificación de contextos fenomenológicos en los números naturales

En su ejemplo sobre los números naturales, Rico et al. (2008, pp. 13-14) muestran cómo, al trabajar con los números naturales y pensar para qué se utiliza esta estructura matemática, es posible identificar una variedad de fenómenos asociados a ella. Contar lápices, expresar el número de pendientes, expresar el número de farolas, contar electrones, expresar el número de estudiantes, medir mi altura, contar camisetas, medir el peso atómico de un elemento en el laboratorio, decir cuál es mi lugar en la cola de la carnicería, en qué posición llegué en la carrera de atletismo, expresar la solución de 3+5, mi documento de identidad, medir el área de mi habitación o el código de barras de un cartón de leche son algunos de los fenómenos. No obstante, un listado de fenómenos no es suficiente, dado que el propósito del análisis fenomenológico es establecer de qué manera el tema organiza esos fenómenos. Los contextos fenomenológicos proporcionan una forma de organizar los fenómenos cuando exploramos las características estructurales que comparten entre ellos.

Por ejemplo, contar lápices y contar electrones comparten la misma característica estructural: son circunstancias en las que los números naturales se usan para contar. Lo mismo sucede con medir mi altura y medir el área de mi habitación. En este caso, los números naturales se usan para medir y comparten una misma característica estructural que es diferente de aquella en la que los números naturales se usan para contar. En la tabla 5, mostramos cómo los fenómenos asociados a los números naturales se organizan en diferentes contextos fenomenológicos, porque comparten características estructurales que se pueden identificar, en este caso, al estudiar los problemas a los que dan respuesta.

Tabla 5
Fenómenos, problemas y contextos fenomenológicos

Fenómenos	Problema al que responde	Contexto fenomenológico
Contar lápices, contar electrones, contar camisetas	Contar	Conteo
Expresar el número de farolas, expresar el número de estudiantes	¿Cuántos hay?	Cardinal
Medir mi altura, medir el peso atómico de un elemento en el laboratorio, medir el área de mi habitación	¿Cuánto mide?	Medida
Decir cuál es mi lugar en la cola del bus, en qué posición llegué en la carrera de atletismo	¿Qué lugar ocupa?	Ordinal
Expresar la solución de una operación aritmética	¿Cuál es el resultado?	Operacional
Mi documento de identidad, el código de barras de un cartón de leche	¿Cuál es el código?	Simbólico

Características estructurales

El análisis fenomenológico no consiste únicamente en identificar y enumerar fenómenos vinculados con un concepto, establecer la relación entre subestructuras y fenómenos y clasificar los fenómenos de acuerdo con las subestructuras con las que están relacionados. En el análisis fenomenológico, se debe también describir esas relaciones. En esta descripción, se deben caracterizar los aspectos relevantes del fenómeno (o del interrogante que da lugar a un problema cuya solución se puede obtener mediante el modelo) que pueden asociarse con elementos y propiedades específicas de la estructura matemática. Aunque hemos venido trabajando con los números naturales, ejemplificamos la idea de característica estructural con el tema de la función cuadrática. En el caso de los reflectores parabólicos, se pone en juego una propiedad de la parábola, por un lado, y un principio de la física, por el otro (véase figura 26). La propiedad de la parábola establece que la tangente en cualquier punto de la parábola forma ángulos iguales con el segmento que une el punto con el foco y con la recta que pasa por el punto y es paralela al eje de simetría de la parábola. El principio de la física afirma que cuando un rayo choca con una superficie reflectora, el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

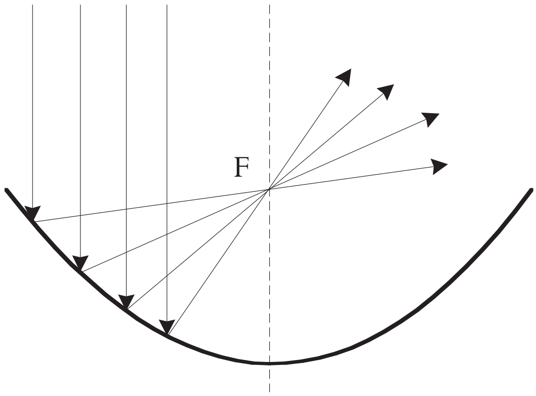


Figura 26. Propiedad óptica de la parábola y principio de la física

Por tanto, fenómenos como las antenas parabólicas, los lentes y las farolas de los carros, entre otros, pueden agruparse en mismo contexto fenomenológico de la función cuadrática al compartir la misma característica estructural de este principio físico.

En resumen, los contextos fenomenológicos deben dar cuenta de la característica estructural que organiza los fenómenos; es decir, de la cualidad o propiedad, no necesariamente restringida a las matemáticas, que define al conjunto de fenómenos.

6.3. Subestructuras

La segunda forma en la que el profesor puede aproximarse al análisis fenomenológico de un tema consiste en la identificación de subestructuras. La identificación de subestructuras consiste en considerar la estructura conceptual del tema, identificar subestructuras de esa estructura conceptual y explorar si algunas de esas subestructuras organizan grupos de fenómenos. Utilizamos el término subestructura de una manera informal, en contraste con la noción matemática formal de estructura matemática. Una subestructura puede ser una "porción" de la estructura conceptual que, a los ojos del profesor, tenga identidad propia. En algunos casos, estas subestructuras surgen de clasificaciones por tipos. Por ejemplo, los principales tipos de simetrías o los tipos de funciones o ecuaciones. En otros casos, pueden surgir por la identificación de propiedades de los conceptos involucrados en el tema —p. ej., propiedades del foco de la parábola o propiedades de las ternas pitagóricas—. En nuestra experiencia en formación de profesores de matemáticas, hemos visto que la estrategia de identificación de subestructuras es eficiente: ayuda a desbloquear la reflexión sobre qué fenómenos están relacionados con el tema y de qué manera ese tema organiza esos fenómenos.

Motivados por el trabajo de Arco, Ramírez, García y Nogales (2010) sobre transformaciones en el plano, utilizamos el tema de la simetría para ejemplificar esta aproximación. Podemos distinguir diferentes tipos de simetrías (p. ej., axial, de rotación, pentagonal o hexagonal). Los fenómenos asociados a la simetría se pueden organizar de acuerdo con los tipos de simetría. Por ejemplo, los terrenos de juego en los que participan dos equipos —como es el caso de los campos de fútbol, donde uno de los ejes de simetría es la línea de medio campo— pertenecen al grupo de fenómenos organizados por la simetría axial (figura 27).

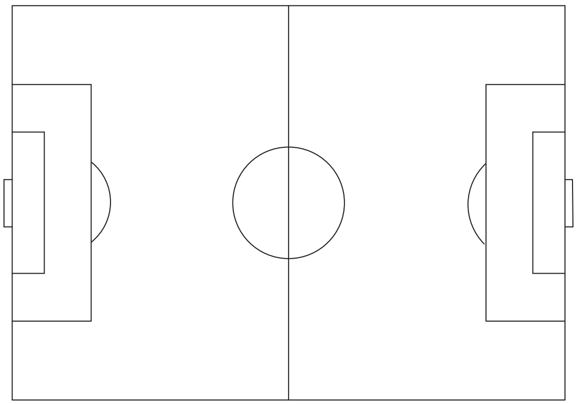


Figura 27. Campo de fútbol

Este mismo ejercicio se puede realizar con otros tipos de simetría: central —moléculas inorgánicas, cinturones de radiación—, pentagonal —estrellas de mar, algunas flores, carambolo— o hexagonal —agua congelada—.

6.4. Relación entre contextos fenomenológicos y subestructuras

En el ejemplo de la simetría, los profesores pueden producir un listado de fenómenos y establecer cómo esos fenómenos se agrupan en contextos fenomenológicos porque comparten las mismas características estructurales. Por otro lado, también pueden identificar las subestructuras del tema (los diferentes tipos de simetrías) y establecer a qué subestructura corresponde cada fenómeno. De esa manera, se establecen dos formas de organizar los fenómenos: por contextos fenomenológicos y subestructuras. Estas dos aproximaciones están relacionadas como se muestra en la figura 28.

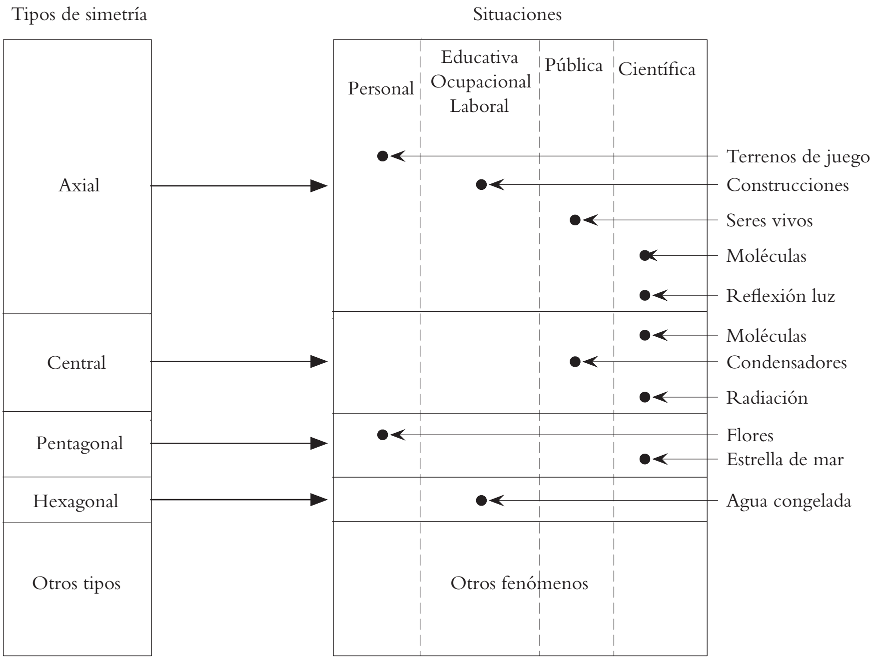


Figura 28. Fenómenos organizados por contextos fenomenológicos y subestructuras en las simetrías

Aunque presentamos las dos aproximaciones al análisis fenomenológico como complementarias (identificación de contextos fenomenológicos e identificación de subestructuras), una vez que se han intentado usar para un tema, es importante establecer su relación. Rico et al. (2008) describen con detalle esta relación entre subestructuras y contextos fenomenológicos para el caso de los números naturales.

En el caso de las simetrías, observamos que el campo de fútbol es un ejemplo del grupo de fenómenos relativos a deportes o juegos en los que hay dos equipos o personas y en los que la delimitación del terreno debe ser tal que las condiciones sean las mismas para los dos contrincantes. Esta característica estructural (tener el campo de juego dividido en dos partes iguales) la comparten los juegos y deportes en los que participan dos personas o dos equipos que defienden y atacan simultáneamente. En el caso de los espejos, la simetría axial surge de una característica estructural semejante: las propiedades de la reflexión de la luz. En este caso, el espejo "separa" en partes iguales la imagen y el objeto de tal forma que las dos partes en las que se separa el objeto son iguales (figura 29).

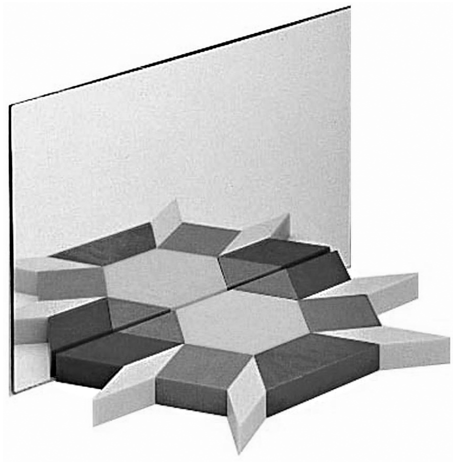
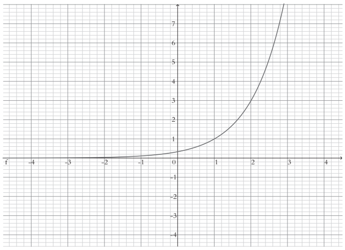
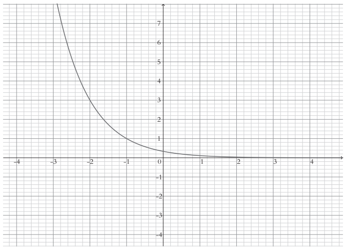
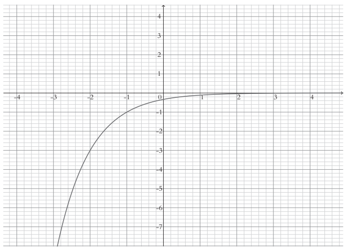
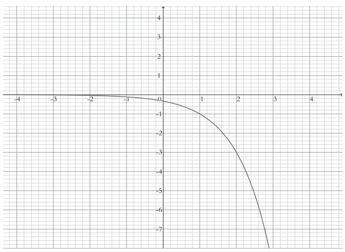


Figura 29. Simetría axial en espejos

Un razonamiento similar a los ejemplos de los juegos o deportes y al de los espejos permite identificar otros grupos de fenómenos que comparten características estructurales que generan la simetría axial (p. ej., en la morfología de los organismos vivos, los condensadores eléctricos, estructuras de reparto de cargas, moléculas orgánicas y arquitectura). Todos estos fenómenos se agrupan en un mismo contexto fenomenológico que corresponde a la subestructura que conocemos como simetría axial. Es posible realizar este mismo trabajo para los otros tipos de simetría: buscar las características que comparten los fenómenos, organizarlos en contextos fenomenológicos y establecer la relación de estos contextos fenomenológicos con las subestructuras que establecen los diferentes tipos de simetría (figura 28).

Otro ejemplo que nos puede ilustrar la relación entre subestructuras y contextos fenomenológicos es el trabajo realizado con el tema de función exponencial (Henao, Malagón, Melo, Rojas y Gómez, 2014, p. 7). En la tabla 6, podemos observar la correspondencia entre cuatro subestructuras y sus respectivos contextos fenomenológicos. Esta tabla incluye la descripción de los fenómenos que son organizados por la pareja subestructura-contexto fenomenológico y un ejemplo de un fenómeno específico para cada caso.

Tabla 6
Subestructuras, contextos fenomenológicos y fenómenos

Subestructura	Contexto fenomenológico	Fenómeno	Ejemplos
$f(x) = ka^{mx+n} + b$, $b \in \mathrm{R}$ 1. $k > 0$, $a > 1$, $m > 0$	Crecimiento al infinito	Acumulación de capital, escala Richter, ventas, interés continuo, curva de aprendizaje, población e intensidad del sonido	
$f(x) = ka^{mx+n}+b$, $b \in \mathrm{R}$ 2. $k > 0$, $a > 1$, $m < 0$	Decrecimiento acotado	Presión atmosférica, corriente eléctrica, carbono 14, escala pH, equilibrio de venta, depreciación, corriente en condensador de circuito RC y voltaje en el inductor de circuito RL	
$f(x) = ka^{mx+n}+b$, $b \in \mathrm{R}$ 3. $k < 0$, $a > 1$, $m < 0$	Crecimiento acotado	Difusión de un gas, aprendizaje de palabras, corriente en inductor circuito RL y voltaje en condensador de circuito RC	
$f(x) = ka^{mx+n}+b$, $b \in \mathrm{R}$ 4. $k < 0$, $a > 1$, $m > 0$	Decrecimiento al infinito	Deuda de dinero, consumo de sustrato por microorganismos	

Contextos fenomenológicos y subestructuras están relacionados y configuran la base con la que un tema matemático organiza los fenómenos asociados a él. Los contextos fenomenológicos se delimitan en virtud de principios naturales, sociales o matemáticos —situaciones equivalentes para los dos equipos en el caso de un campo de fútbol o las propiedades de la reflexión de la luz, para la simetría— y las subestructuras organizan los fenómenos en virtud de sus elementos, relaciones y propiedades matemáticas (figura 30).

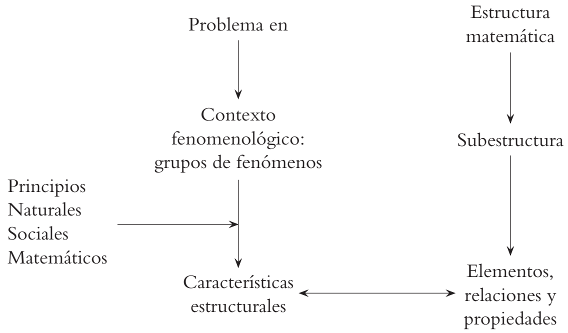


Figura 30. Análisis fenomenológico (Gómez, 2007, p. 55)

El análisis fenomenológico implica identificar el listado de fenómenos que se asocia al tema de las matemáticas escolares que estamos trabajando, indistintamente del campo de aplicación o área del conocimiento al que corresponda, y establecer cómo el tema organiza ese listado. La estructura matemática organiza los fenómenos de acuerdo con subestructuras que se relacionan biunívocamente con los contextos fenomenológicos en los que los fenómenos se agrupan porque comparten las mismas características estructurales. Las subestructuras son parte de la estructura conceptual del tema y cada una de ellas debe permitir organizar un determinado tipo de fenómenos. Cada contexto fenomenológico debe permitir organizar un tipo de fenómenos, de acuerdo con las características estructurales que comparten entre ellos. Estas características estructurales se corresponden con elementos, relaciones y propiedades de la subestructura correspondiente. Por tanto, cada contexto fenomenológico se debe corresponder con una única subestructura, y viceversa.

6.5. Contextos PISA 2012 y situaciones

A la hora de diseñar y seleccionar tareas para la instrucción, los profesores deben tener en cuenta los propósitos de esas tareas. En algunos casos, por ejemplo, se puede buscar motivar a los escolares mediante tareas cercanas a ellos o a su entorno. En otros casos, se puede buscar proponer tareas que relacionen las matemáticas con otras áreas científicas. Para estos propósitos, resulta relevante agrupar los fenómenos de acuerdo con otra clasificación: las situaciones. Por ejemplo, en versiones del estudio PISA previas a 2012, las situaciones se clasificaron en personales, educativas o laborales, públicas y científicas (OCDE, 2005, pp. 41-42). En la prueba PISA de 2012 se abandonó el concepto de situación para hablar exclusivamente de contextos, entendido como aquel aspecto del mundo del individuo en el cual se encuentran situados los problemas (Ministerio de Educación y Cultura, 2013, p. 23). Esta noción de contexto es diferente de la noción de contexto fenomenológico que presentamos en los apartados anteriores. La nueva clasificación de contextos corresponde a personales, profesionales, sociales y científicos.

En todo caso, el profesor puede decidir, con base en sus propósitos y de las tareas que pretenda proponer a los escolares, a qué tipo de situación pertenece un fenómeno dado. Por ejemplo, puede considerar las flores como un fenómeno personal, al presentarlo en un contexto de motivación; y considerar la estrella de mar en una situación científica, al introducirlo dentro de una tarea interdisciplinar con el área de biología. En la figura 31 (Gómez y Cañadas, 2011, p. 85), presentamos una forma de organizar los fenómenos relacionados con las simetrías en subestructuras y situaciones (versión PISA 2003).

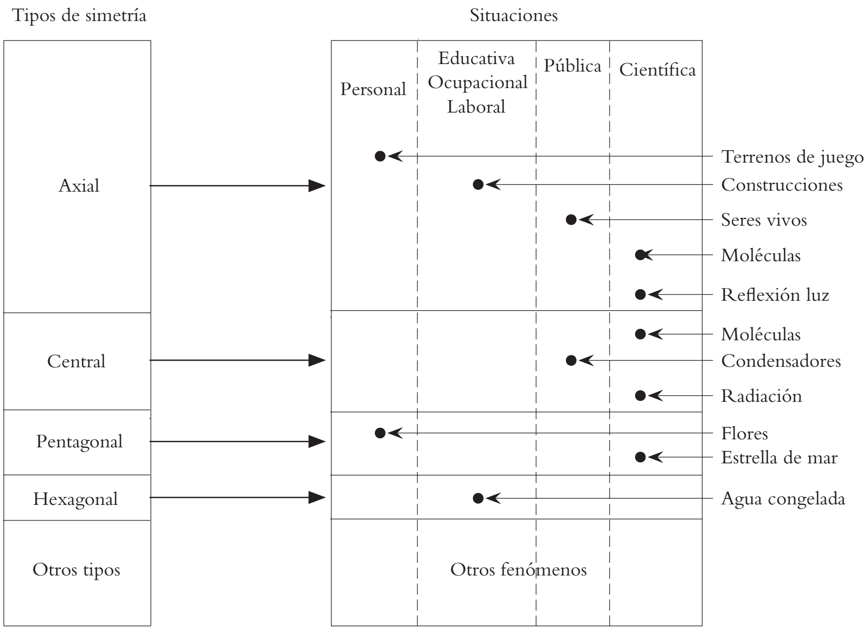


Figura 31. Fenómenos, contextos fenomenológicos, subestructuras y situaciones en las simetrías

6.6. Dificultades en el análisis fenomenológico

La fenomenología es el concepto pedagógico que usualmente genera más dificultades a los profesores en formación. En este apartado abordamos algunas de estas dificultades y los errores que se pueden presentar.

Relación con otros conceptos pedagógicos

El concepto pedagógico fenomenología se nutre de los conceptos pedagógicos estructura conceptual y sistemas de representación. No hacerlo así puede llevar a errores. Por ejemplo, para la determinación de subestructuras matemáticas de un tema es importante tener en cuenta la estructura conceptual. Encontramos que la identificación de las funciones y las sucesiones como subestructuras de un tema matemático (como se ha identificado en algunos trabajos de profesores en formación) es un error porque las sucesiones son un tipo específico de funciones.

Un error identificado en relación con la fenomenología puede ser confundir ideas relacionadas con los sistemas de representación. Por ejemplo un error en los trabajos de profesores en formación ha sido plantear las expresiones algebraicas como subestructura matemática. Esto no es adecuado porque hace referencia a un sistema de representación (simbolismo algebraico) del tema de las matemáticas escolares y no a una parte de la estructura conceptual.

Otro error muy común es asociar los contextos fenomenológicos con los campos de aplicación en los que se encuentran los fenómenos. Este lleva a que se agrupen de forma errada los fenómenos (en, por ejemplo, físicos, biológicos, arquitectónicos), sin que en realidad se haya identificado una característica estructural que los agrupe independiente del campo al que pertenecen.

Ideas clave

La fenomenología suele ser un concepto pedagógico difícil de abordar, tanto por la cantidad de ideas que comporta (fenómenos, subestructuras, contextos fenomenológicos, características estructurales y contextos, PISA, 2012) como por las relaciones que se deben establecer entre ellas (Gómez y Cañadas, 2012). En ocasiones, se pueden confundir los términos contextos (definidos en el marco PISA) y contextos fenomenológicos (como lo hemos definido aquí) debido al significado que tienen ambos en el lenguaje cotidiano. Por ello, es importante reconocer a qué hace referencia cada término. Las características estructurales permiten justificar las relaciones entre algunos fenómenos y permiten englobarlos dentro del mismo contexto fenomenológico.

En ocasiones, es una idea clave que cae en el olvido. Por ello, sugerimos que, cuando se etiquete un contexto fenomenológico, se haga referencia a la característica que los agrupa: contar, medir, ordenar… —en el caso de los números naturales—; crecimiento al infinito, crecimiento acotado… —en el caso de la función exponencial—.

Aunque hemos insistido en la relación biunívoca entre contextos fenomenológicos y subestructuras, en trabajos previos se identifican relaciones que no cumplen esta característica. Tanto subestructuras como contextos fenomenológicos deben permitir cubrir el tema matemático que se esté trabajando. Por ejemplo, en el tema principio de multiplicación, a partir del análisis fenomenológico, Ávila, Barreto, Olarte, Pachón y Becerra (2017, p. 8) identificaron las diferentes relaciones entre fenómenos, contextos fenomenológicos y subestructuras, al atender a las características de los cardinales y al número de conjuntos relacionados. En la figura 32, presentamos estas relaciones.

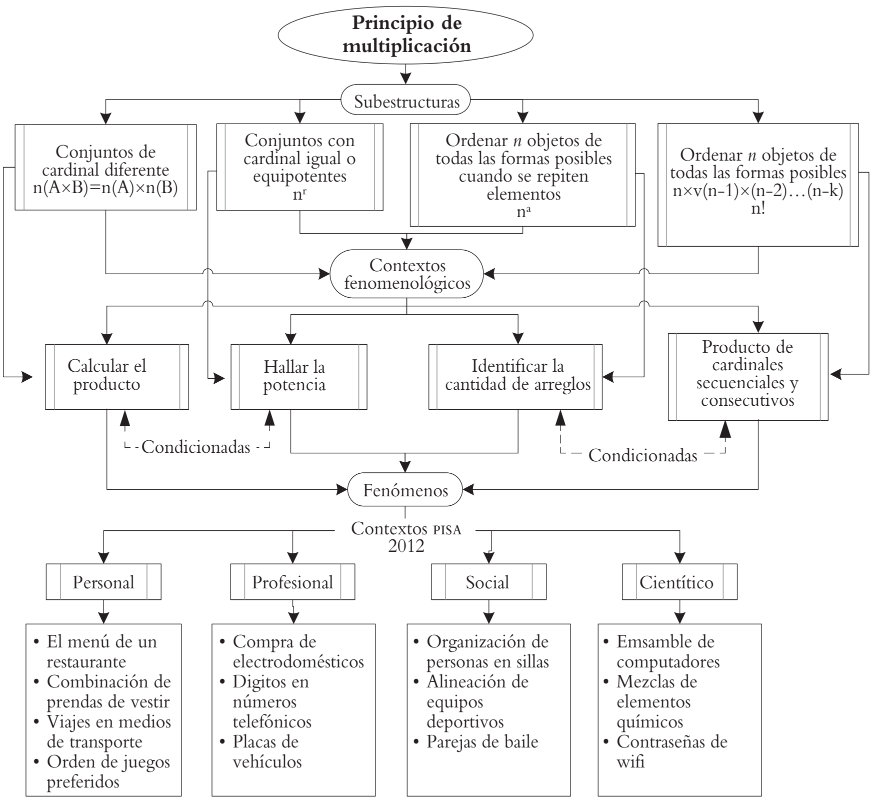


Figura 32. Análisis fenomenológico del principio de multiplicación

El mapa presentado en la figura 32 permite evidenciar dos subestructuras que están relacionadas con las características de los cardinales de los conjuntos y dos subestructuras que atienden a las relaciones de los elementos de un solo conjunto. Estas, a su vez, se relacionan, de forma biunívoca, con cuatro contextos fenomenológicos que se usan para dar solución a problemas particulares de conteo y que dan muestra de la característica estructural que los agrupa: calcular el producto, hallar la potencia, cantidad de arreglos y productos de cardinales consecutivos y secuenciales.

7. Historia

Como se indicó en la primera parte, la historia es transversal a los tres conceptos pedagógicos y su papel dentro del análisis de contenido es identificar elementos en el desarrollo histórico del tema que complementen la información para los otros tres conceptos pedagógicos. Al respecto, presentamos, como ejemplo, la síntesis histórica realizada para el tema función exponencial por Henao et al. (2014). En esta síntesis, los autores identifican algunos sistemas de representación y problemas a los que dio solución la función exponencial en la historia.

7.1. Síntesis histórica de la función exponencial

La estructura conceptual de la función exponencial empieza a construirse desde el siglo XVII, cuando, a la curva logarítmica, que relaciona progresiones aritméticas y geométricas, se le denominó exponencial. Así mismo, los sistemas de representación cobraron importancia a partir de Johan Bernoulli, a quien se le atribuye el cálculo exponencial, porque estudió tanto las curvas exponenciales simples $y = a^x$ como las exponenciales generales $y = x^x$.

Por otra parte, la fenomenología de la función exponencial se reconoce con Thomas Malthus (1798), quien afirma que la tasa de crecimiento poblacional aumenta de forma exponencial, $\frac{dP}{dt} = kP$. También, con la ley empírica de Newton sobre enfriamiento de los cuerpos, $\frac{dT}{dt} = -K(T - Tm)$.

8. Balance del análisis de contenido

Como hemos mencionado a lo largo de este capítulo, las relaciones entre los elementos dentro de un mismo concepto pedagógico (conceptos, procedimientos y relaciones entre ellos; sistemas de representación y relaciones entre ellos; e ideas clave de la fenomenología y relaciones entre ellas) y entre diferentes conceptos pedagógicos son importantes. Además, el concepto pedagógico historia debe aportar información a lo largo del análisis de contenido.

En los apartados anteriores, hemos hecho hincapié en las relaciones dentro de cada uno de los tres conceptos pedagógicos presentados y se espera que se explique el papel desempeñado por el concepto pedagógico historia. Sin embargo, para mostrar las relaciones y cómo un concepto pedagógico se relaciona con los otros, es necesario dar un paso más. Es necesario hacer un esfuerzo por sintetizar toda la información para el fenómeno o tema que estemos trabajando. Esto se puede hacer de diferentes formas. Una de ellas es mediante un conjunto de mapas conceptuales que den cuenta de la relación que se ha establecido para la información producida con los conceptos pedagógicos estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología. En Gómez y Carulla (2001), se encuentra un ejemplo de este tipo de mapas conceptuales para el caso de la función cuadrática.

Las relaciones entre la estructura conceptual y los sistemas de representación surgen de diferentes maneras. Cada concepto de la estructura conceptual puede representarse en diferentes sistemas de representación. Esta situación da lugar a la traducción entre sistemas de representación y sugiere un tipo de procedimiento que se debe incluir en la estructura conceptual. Por otro lado, las normas que rigen un sistema de representación dan lugar a que un elemento de la estructura conceptual tenga diferentes formas equivalentes de ser representado en un mismo sistema de representación (transformaciones sintácticas dentro de un sistema de representación). Estas transformaciones sintácticas dan lugar a otros tipos de procedimientos que también deben incluirse en la estructura conceptual. Por consiguiente, el análisis de la relación entre la estructura conceptual y los sistemas de representación es importante: da lugar a identificar buena parte de los procedimientos que deben incluirse en la estructura conceptual y permiten caracterizar con mayor detalle el papel de los sistemas de representación en la descripción del tema.

La relación entre la estructura conceptual y la fenomenología se describió con detalle en los apartados anteriores: hay una relación biunívoca entre subestructuras y contextos fenomenológicos. Los fenómenos se organizan en contextos fenomenológicos (al compartir características estructurales). Cada contexto fenomenológico se relaciona con una subestructura de la estructura conceptual porque se establece una relación entre los elementos, relaciones y propiedades de esa subestructura con las características estructurales que comparten los fenómenos que pertenecen al contexto fenomenológico.

Finalmente, la relación entre la fenomenología, los sistemas de representación y la estructura conceptual asume gran importancia a la hora de considerar los procesos de modelización que se estudiarán en el capítulo 3. En el análisis fenomenológico, se ha insinuado la idea de modelo como una relación biunívoca entre elementos y propiedades de una subestructura de la estructura matemática y características estructurales de los fenómenos. Estas relaciones entre estructura matemática y fenómenos se expresan en el proceso en virtud del cual se identifica el modelo matemático (la subestructura) que corresponde a un fenómeno (o a un problema que se refiere a un fenómeno). De esta forma, ese fenómeno o problema se expresa en términos de uno o más sistemas de representación (Gómez, 2007, pp. 87-88). En la figura 33 observamos un ejemplo del balance general del análisis de contenido para el tema de principio de multiplicación (Ávila et al., 2017).

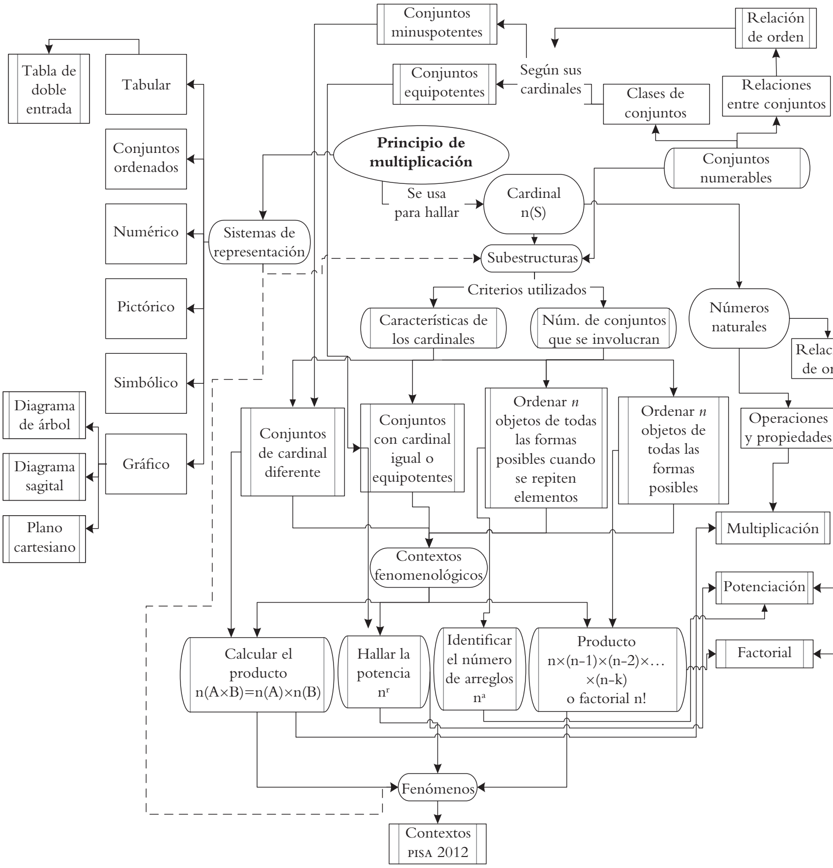


Figura 33. Balance general del tema principio de multiplicación

9. Referencias

Arco, M.T., Ramírez, J.J., García, A. y Nogales, M.J. (2010). *Análisis fenomenológico de la simetría. Trabajo realizado para el Máster Universitario de Profesorado de Secundaria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas (especialidad Matemáticas) de la Universidad de Granada*. Documento no publicado. Granada: Universidad de Granada.

Ávila, C., Barreto, H., Olarte, C., Pachón, Y. y Becerra, O. J. (2017). Principio de multiplicación. En P. Gómez (Ed.), *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas matemáticas en MAD 3* (pp. 1-56). Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/8706/.

Bernal, M. L., Castro, D. P., Pinzón, Á. A., Torres, Y. F. y Romero, I. (2014). Método gráfico para resolver sistemas de ecuaciones lineales 2×2. En P. Gómez (Ed.), *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MAD 1* (pp. 200-260). Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1893/.

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Granada: Comares.

Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización*. México: una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Holanda: Reidel.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holanda: Kluwer.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA, 7*(3), 251-293. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/375/.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/444/.

Gómez, P. y Cañadas, M. C. (2011). La fenomenología en la formación de profesores de matemáticas. *Voces y Silencios: Revista Latinoamericana de Educación, 2*(Especial), 78-89. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1916/.

Gómez, P. y Cañadas, M. C. (2012). Dificultades manifestadas por profesores en formación en el aprendizaje del análisis fenomenológico. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática VXI* (pp. 303-312). Baeza, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1882/.

Gómez, P. y Cañadas, M. C. (2016). Dificultades de los profesores de matemáticas en formación en el aprendizaje del análisis fenomenológico. *Relime*, *19*(3), 311-334. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/8661/.

Gómez, P. y Carulla, C. (2001). *Sistemas de representación y mapas conceptuales como herramientas para la construcción de modelos pedagógicos en matemáticas*. Bogotá: Grupo Editorial Gaia. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/345/.

Guardia, D., Montes, F., Páez, S. E. y Schmidt-Kortenbusch, T. (2009). *Unidad didáctica del teorema de Pitágoras. Trabajo realizado en el marco de la asignatura de Didáctica de la Matemática de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad de Granada*. Documento no publicado. Granada: Universidad de Granada.

Ifrah, G. (1997). *Historia universal de las cifras*. Madrid, España: Espasa Calpe.

Kaput, J. J. (1992). Technology and mathematics education. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515-556). Nueva York: Macmillan.

Lanzing, J. W. A. (1998). Everything you always wanted to know about… Concept mapping. Descargado de http://utto1031.to.utwente.nl/artikel1/.

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada, España: Universidad de Granada. Disponible en http://0-hera.ugr.es.adrastea.ugr.es/tesisugr/18504188.pdf.

Mesa, V. M., Gómez, P. y Cheah, U. H. (2013). Influence of international studies of student achievement on mathematics teaching and learning. En K. C., C. Keitel, A. Bishop, F. Leung y J. Kilpatrick (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 861-900). Dordrecht, Holanda: Kluwer.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2013). Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: matemáticas, lectura y ciencias. Descargado el 30/1/2014, de https://goo.gl/Xwmerl.

OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos) (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana*. Madrid, España: Santillana. Disponible en https://www.oecd.org/pisa/39732493.pdf

OECD (2013). PISA 2012 assessment and analytical framework. Mathematics, reading, science, problem solving and financial literacy. Descargado el 30/1/2014, de https://goo.gl/QSBfcC.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona, España: ICE-Horsori.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. M. Socas (Eds.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). Barcelona: ICE - Horsori.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Suma, 58*, 7-23. Disponible en https://revistasuma.es/IMG/pdf/58/007-023.pdf.