¿CÓMO SE PRESENTAN LOS CONCEPTOS DE ANÁLISIS COMBINATORIO EN LOS LIBROS DE TEXTO ESCOLARES EN COLOMBIA?”

IVÁN EDUARDO MARTÍNEZ OTÁLORA

CÓD.: 2006240038

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SANTA FÉ DE BOGOTÁ
2013

¿CÓMO SE PRESENTAN LOS CONCEPTOS DE ANÁLISIS COMBINATORIO EN LOS LIBROS DE TEXTO ESCOLARES EN COLOMBIA?"

IVÁN EDUARDO MARTÍNEZ OTÁLORA
CÓD.: 2006240038

Monografía para optar al título de:
Licenciado en Matemáticas

Asesor del trabajo:
FELIPE FERNÁNDEZ

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SANTA FÉ DE BOGOTÁ
2013

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN

1.Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado.
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Titulo del documento	¿Cómo se presentan los conceptos de análisis combinatorio en los libros de texto escolares en Colombia?
Autor(es)	MARTÍNEZ OTÁLORA; IVÁN EDUARDO.
Director	FELIPE FERNÁNDEZ
Publicación	Bogotá, 2013, 62 páginas.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional.
Palabras Claves	• Elementos de significación • Análisis de textos • Conceptos de análisis combinatorio

2. Descripción
En el presente trabajo se realiza un estudio de los elementos de significado de la combinatoria identificados en dos textos escolares. Primero se presenta un marco conceptual que revisa el posicionamiento de los temas de combinatoria en la escuela, y luego, desde una perspectiva ontosemiótica, se caracterizan los aspectos de la combinatoria que se pueden tener en cuenta para el análisis de los textos. Así, con base en este marco de conceptual se procede a identificar los aspectos que se favorecen en cada uno de los textos considerados.

3. Fuentes
Los principales documentos consultados para la elaboración del presente trabajo se relacionan a continuación: • Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de tendencia central. UNO, pp. 25, 41 – 58. • Batanero, C. Godino, J., Navarro-Pelayo, V. (1994). Razonamiento combinatorio. SINTESIS, pp. 24 – 42, 49 - 54, 89 – 92, 109 – 113 • Wilhelmi, M. (2004). Combinatoria y probabilidad. UNIVERSIDAD DE GRANADA, pp. 45 – 57.

4. Contenidos
En este documento se encontrará un marco teórico construido en torno a los elementos de significación del análisis combinatorio tomando como referentes a Batanero, Godino y Navarro-Pelayo (1994). Los capítulos que conforman este documento son: 1. Presentación del trabajo (Introducción, objetivos y metodología desarrollada). 2. Marco conceptual (Estándares curriculares colombianos y elementos de significado de los tópicos del análisis combinatorio) 3. Análisis de textos entorno a los elementos de significación de los tópicos del análisis combinatorio 4. Conclusiones

5. Metodología
Para el desarrollo de esta tesis de grado se siguieron los siguientes pasos: elaboración de un marco conceptual, que asume una postura ontosemiótica para abordar el análisis de textos escolares. Con base en este marco se explicitan las categorías que se tienen en cuenta para los análisis. Luego de consolidar y poner a prueba las categorías con base en unos análisis preliminares para hacer una ajuste de las mismas, los pasos siguientes fueron: 1) selección de los libros a revisar, 2) análisis de los textos, (confrontación de lo visto en los textos con lo presentado en el marco conceptual), 3) sistematización de los resultados y 4) formulación de conclusiones.

6. Conclusiones
Con el trabajo realizado se pudo establecer que los elementos de significación encontrados en el análisis de textos, son realmente escasos, ya que propiedades, definiciones y tipos de problemas propuestos, entre otros, se contemplan de manera insuficiente. En el marco conceptual presentado los elementos contemplados desde la perspectiva ontosemiótica se perciben como abundantes y por lo tanto sugieren que la combinatoria a nivel escolar ocupe un lugar más importante. De hecho, luego de haber realizado un análisis de los estándares colombianos, respecto a este tema, solo se identifica dos estándares que hacen alusión al tema tratado. Además, su aparición se relega al pensamiento aleatorio, siendo la combinatoria un tema que se puede abordar de manera transversal en el currículo escolar. Por otra parte, como resultado de los análisis de los textos seleccionados, se evidencia que los temas de la combinatoria son poco contemplados. Además, cuando se identifican, ellos se posicionan principalmente como adjuntos a temas de la probabilidad. En consecuencia, es pertinente motivar en los docentes, realizar una reflexión acerca de la manera como se presentan los temas de combinatoria en los currículos escolares de nuestro país, para generar un cuestionamiento que obligue ver la necesidad de cambiar la manera en la que se presentan los mismos en textos, ya que ellos se constituyen en modelos de referencia para su enseñanza. Por ejemplo, se identifica como una debilidad, la poca atención que se presta al uso de representaciones gráficas en los ejercicios planteados y para la solución de problemas.

Elaborado por:	IVÁN EDUARDO MARTÍNEZ OTÁLORA
Revisado por:	

Fecha de elaboración del Resumen:	26	02	2013

TABLA DE CONTENIDO

CAPITULO 1. PRESENTACIÓN DEL TRABAJO

1.1 INTRODUCCIÓN

Siendo la probabilidad uno de los campos de estudio de las matemáticas, el cual ha tenido un auge importante en los últimos años en el campo escolar, esto debido a su inclusión dentro del currículo escolar colombiano, lo cual ha permitido que su uso se intensifique en diversas esferas de la vida académica, pues muchas carreras universitarias incluyen a la estadística y a la probabilidad dentro de sus estudios, por eso es importante que se realicen estudios referentes a conceptos probabilísticos como el análisis combinatorio. Siendo el análisis combinatorio una herramienta de gran alcance dentro de la vida científica de una sociedad ya que a través de él, se incursiona en amplios sectores de la ciencia y la tecnología.

El papel que ha desempeñado la probabilidad dentro de los libros de texto en matemáticas, ha ido creciendo, pero su crecimiento ha sido lento, lo cual ha evitado un desarrollo más progresivo; esto se evidencia en la bibliografía relacionada con la didáctica de la estadística y la probabilidad, pues es poco el material que se ha escrito sobre este tema, reduciendo la posibilidad de ayudas didácticas para el docente.

Al identificar los significados que favorecen los libros de texto en secundaria al hablar de análisis combinatorio se podrá mostrar una relación entre los significados disponibles en los textos escolares relacionados con todos los encontrados en el marco teórico, con el fin de comparar y verificar cuales son los significados más favorecidos y en cuales hay que hacer hincapié, con el propósito de generar herramientas que complementen el proceso de trasposición didáctica propuesto por Chevalard (1991) donde muestra al libro de texto como un factor clave para adaptar al “saber matemático” en “saber a enseñar”.

Este proyecto pretende mostrar las distintas maneras en las cuales se presentan los conceptos en los libros de texto de estadística y su relación con los estándares curriculares planteados por el Ministerio de Educación Nacional. Lo anterior se logrará a través de la comparación de las situaciones didácticas planteadas por los diversos libros con los estándares curriculares ya mencionados.

Primero se hace mención a los elementos preliminares donde se mostraran la justificación, los objetivos y la metodología aplicada en el desarrollo del trabajo donde se mostrara su razón de ser. Más adelante se dan a conocer los objetivos del mismo, donde se muestra el propósito general, y los propósitos específicos del trabajo. Posteriormente como segundo capítulo se encuentra el marco conceptual que en primera medida muestra el marco curricular empleado en este análisis, así mismo dentro del marco conceptual se encuentra el marco de referencia el cual muestra los significados descritos por Batanero (2000) para el estudio de un concepto matemático, dentro de este marco se encuentran abundantes significados relacionados con el análisis combinatorio.

En el capítulo 3 se realiza el análisis de dos textos teniendo como parámetro los significados encontrados en el marco conceptual, este análisis se realiza de forma cualitativa y de forma cuantitativa. Para finalizar el documento se encuentran las conclusiones (Capitulo 4) que son los hallazgos encontrados en el análisis de los textos. Para finalizar se muestran los recursos usados para la elaboración de este trabajo.

1.2 JUSTIFICACIÓN

Los libros de texto, así como los profesores y demás dispositivos didácticos tienen como función entre otras la de vincular el saber matemático con la resolución de problemas de la vida diaria, evitando que este saber se quede solo en el papel. Esto depende en su gran mayoría de como sean presentados los conceptos al estudiante, una herramienta fundamental son los libros de texto, ya que este es uno de los agentes más importantes en medio del proceso de aprendizaje de las matemáticas.

Debido a la falta de material relacionado con la enseñanza de la Probabilidad y quizás la poca importancia que se le da al Análisis Combinatorio (hablando en términos de cantidad de páginas) en los libros de texto de bachillerato, surge el interés por conocer las formas de presentar los conceptos del análisis combinatorio a jóvenes de educación secundaria.

El análisis combinatorio es el tema escogido debido a que es un tema que ha sido "Marginado" por el sistema educativo colombiano, ya que solo se llega a mencionar directamente en dos ocasiones en los lineamientos curriculares lo cual evita el desarrollo de medios y actividades para la enseñanza de este valioso tema en el aula de clases, de lo anterior la importancia de caracterizar y catalogar las formas en las cuales se representan estos conceptos en los libros de texto.

1.3.1 OBJETIVO GENERAL

- Describir la forma como se presentan temas de análisis combinatorio en dos textos escolares de secundaria.

1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Proponer un marco conceptual para la revisión de temas de recuento combinatorio en textos escolares.
- Revisar los lineamientos curriculares respecto a la manera como se sugiere el tratamiento de nociones del análisis combinatorio elemental en la escuela.
- Identificar los principales elementos de significado que configuran los temas de recuento combinatorio en dos textos escolares.

1.4 METODOLOGÍA

En la construcción de este estudio se realizaron los siguientes procesos, los cuales se describen a continuación:

1. Fundamentación teórica sobre los elementos de significación que componen el análisis combinatorio.
2. Construcción del marco conceptual conforme a los elementos de significación establecidos entorno del análisis combinatorio.
3. Documentación acerca de los referentes teóricos relacionados con el análisis combinatorio.
4. Comparación de los referentes teóricos con los elementos de significación establecidos en el marco teórico.
5. Análisis de los textos entorno a las a los elementos que componen el análisis combinatorio conforme al marco conceptual y elementos de significación establecidos.
6. Conclusiones del estudio realizado.

CAPITULO 2. MARCO CONCEPTUAL

2.1 MARCO CURRICULAR

Basado en el trabajo hecho por Echeverry y Vergel (2004), se realizará un recuento sobre el seguimiento de los conceptos de estadística y probabilidad en los documentos estatales, en especial los relacionados con el análisis combinatorio. Inicialmente en 1983 en los objetivos curriculares de los "Programas de la renovación curricular" se encuentran los siguientes relativos al análisis combinatorio:

Objetivos	Grados
• Efectuar algunos arreglos de objetos	1, 3 y 5
• Resolver problemas sencillos de análisis combinatorio	2
• Efectuar permutaciones y combinaciones y hallar la frecuencia y la moda	4
• Hallar las combinaciones de m elementos tomados de un conjunto de n elementos.	7
• Relacionar los arreglos donde importa el orden con parejas ordenadas, cuaternas ordenadas, etc. de elementos diferentes de un conjunto de n elementos y desarrollar un procedimiento para hallar el número de permutaciones de m elementos tomados en un conjunto de n elementos.	8

Más adelante en los "Indicadores de logro de estadística y probabilidad" de los documentos derivados de la Resolución 2346 de 1996, no se presentan indicadores relacionados con el análisis combinatorio.

En el año 2003 en los estándares de estadística y probabilidad presentados por el MEN (2003), hacen las siguientes menciones relacionadas con el análisis combinatorio:

Estándares recomendados	Grados
• Uso modelos (diagramas de árbol, por ejemplo) para discutir y predecir posibilidad de ocurrencia de un evento.	6 y 7
• Calcular la probabilidad de calcular eventos simples usando métodos diversos. (Listados, diagramas de árbol técnicas de conteo).	8 y 9
• Plantear y resolver problemas usando conceptos básicos de conteo y probabilidad (combinaciones, permutaciones, espacio muestral, muestreo aleatorio, muestreo con reemplazamiento)	10 y 11

Siendo los estándares en matemáticas tan extensos cabe notar que a lo largo de los últimos 30 años el papel del análisis combinatorio dentro del currículo escolar colombiano en matemáticas es poco relevante, primeramente en 1983 existe una secuencia desde grado primero hasta grado octavo, pero de grado noveno en adelante no se vuelven a mencionar temas relacionados con el análisis combinatorio.

El Ministerio de Educación Nacional (MEN) en el año 2003 publico los Estándares Básicos en Competencias en Matemáticas, los cuales han sido el referente curricular del sistema educativo colombiano hasta la fecha. En este texto se evidencia que el análisis combinatorio aparece desde grado sexto hasta grado once, haciendo énfasis en la resolución de problemas aplicando conceptos básicos del análisis combinatorio. Y a su vez se observa que el análisis combinatorio tiene poco posicionamiento dentro de los documentos públicos, pues su aparición es muy exigua y sucinta en estos.

2.2 MARCO DE REFERENCIA

El proceso de enseñanza de un objeto matemático se compone de cinco aspectos fundamentales los cuales dan forma y definen un concepto. Batanero (2000) muestra que para comprender un concepto no solo es necesario conocer las definiciones y propiedades sino que también se hace necesario reconocer los problemas donde se aplica el concepto, su simbología, notaciones, además de poseer una habilidad para desarrollar los algoritmos propios de cada concepto. A continuación se enumeran los cinco aspectos básicos que menciona Batanero (2000):

- **Elementos intensivos**: Las definiciones y propiedades características y sus relaciones con otros conceptos.
- **Elementos extensivos**: El campo de problemas de donde surge el objeto.
- **Elementos actuativos**: Las prácticas empleadas en la solución de problemas.
- **Elementos ostensivos**: Las notaciones, gráficos, palabras y en general todas las representaciones del objeto abstracto.
- **Elementos validativos**: Las demostraciones que empleamos para probar las propiedades del concepto y que llegan a formar parte de su significado y los argumentos que empleamos para mostrar a otras personas la solución de los problemas.

A continuación se presentan estos aspectos relacionados con los temas de análisis combinatorio, como lo son las reglas básicas del cálculo combinatorio producto, suma y cociente además variaciones, permutaciones y combinaciones.

2.2.1 Elementos Intensivos

Dentro de los elementos intensivos se encuentran las definiciones. A continuación se muestran aquellas relacionados con el análisis combinatorio, esto con el fin de dar un panorama sobre las distintas definiciones que se pueden tener en cuenta al hablar de análisis combinatorio en un texto.

2.2.1.1Definiciones

En el estudio de las definiciones se inicia con principios o reglas básicas del cálculo combinatorio, como son la del producto, la suma y el cociente, las cuales que se describen a continuación. Posteriormente se presentan los métodos gráficos usados en el análisis combinatorio como son la teoría de grafos y el diagrama de árbol y por último se presentaran los métodos de conteo como son las variaciones, permutaciones y combinaciones.

2.2.1.1.1 Principios Básicos

Las siguientes demostraciones son tomadas de Batanero, Navarro-Pelayo (1994). Usando los principios básicos del algebra de conjuntos, se formulan las tres reglas básicas del análisis básico elemental: la regla de la suma, del producto y del cociente, que se pueden enunciar del siguiente modo.

Regla de la suma:

Si S es un conjunto finito y $S = \bigcup_{i \in I} A_i$ donde A_i es un subconjunto de S para todo $i \in I$, se verifica:

$$Card\ (S) \leq \sum_{i \in I} card\ (A_i)$$

En el caso de que todos los conjuntos sean disjuntos, se verifica la igualdad de la relación presentada.

Regla del Producto:

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos finitos, el cardinal del producto cartesiano de los mismos verifica:

$$card\ (A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = \prod_{i=I}^{n} card\ (A_i)$$

Regla del Cociente:

Si S es un conjunto finito de cardinal n, en el que existe una relación de equivalencia cuyas clases de equivalencia tienen todas el mismo cardinal r, el número de clases de equivalencia es n/r. Esta es la regla subyacente en el cálculo de las combinaciones como cociente del número de variaciones y el de permutaciones.

Los procedimientos pueden variar en el recuento simple combinatorio ya que esto depende del tipo de problema que se esté buscando abordar, a continuación se presenta el tipo de procedimientos existentes en el recuento simple combinatorio.

Los procedimientos de aplicación de combinatoria se pueden clasificar según los siguientes parámetros:

- Métodos gráficos
- Métodos de conteo

2.2.1.1.2 MÉTODOS GRÁFICOS

Teoría de Grafos:

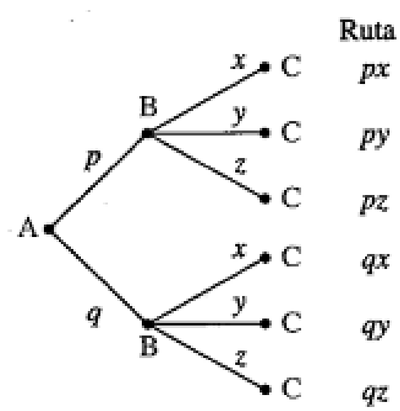
La teoría de grafos se refiere a la parte de la teoría de Conjuntos relativa a las operaciones binarias de un conjunto numerable consigo mismo. Al contrario de otras ramas de las matemáticas se conoce con precisión el origen de esta teoría: el conocido problema de “los siete puentes de Kronoberg” resuelto por Euler en1736.

Dado un conjunto discreto V no vacio y siendo $E \subset (V \times V)$, se llama grafo dirigido al par (V, E), donde V se denomina conjunto de vértices y E conjunto de ejes del grafo. Se suele representar gráficamente, mediante un conjunto de puntos que representan los vértices del grafo y unos arcos orientados de (a hasta b) que unen cada par ordenado de valores (a, b), donde $(a, b) \in E$. El número de ejes que incide en un vértice se llama grado del vértice y la suma de los grados de todos los vértices es el doble del número total de ejes, si se cuentan dos veces los ejes que acaban e inician en el mismo punto.

Diagramas de Árbol

Una clase especial de grafos son los llamados *arboles* o *diagramas de árbol,* empleados para representar estructuras jerárquicas de manera organizada. Fueron estudiados por primera vez por Kirchoff en 1847 en relación con los circuitos eléctricos y posteriormente por Cayley, quien les dio ese nombre, como medio de enumeración de los isómeros de los hidrocarburos saturados.

Los arboles son los grafos no dirigidos, estos grafos permiten visualizar de forma sencilla hechos o relaciones, como la indicada en la siguiente figura:



El árbol se lee de izquierda a derecha, aunque en otros casos es preferible una lectura de derecha a izquierda para una mejor comprensión. En el ejemplo hay dos y tres grados de ramificación, En cada nudo puede haber el mismo número de ramas o bien distintos nudos pueden tener diferente numero de ramificaciones.

En los problemas combinatorios el diagrama de árbol es una representación que ayuda a comprender mejor las situaciones de enumeración y a encontrar con sencillez la regla del producto. Por ejemplo, si un árbol tiene dos niveles de ramificación, en el primer lugar hay n_i ramas y cada una de estas ramas se divide a su vez en n_2 nuevas ramas en el segundo nivel, el número total de ramas es $n_1 \times n_2$.

2.2.1.1.3 Métodos de Conteo

En diferentes casos se tomará de algún conjunto, parte de sus elementos o todos ellos, para formar diferentes agrupaciones, que se van a distinguir por el orden de sus elementos o por la naturaleza de algunos de ellos. Si los elementos que forman una agrupación son diferentes entre sí, serán llamados agrupaciones sin repetición y si algunos de ellos son iguales se dirá que son agrupaciones con repetición.

Entre los métodos de conteo más conocidos se tienen: Permutación, Variación y Combinación

A continuación se muestran las definiciones tomadas de Wilhelmi (2004) relacionadas con el análisis combinatorio

Permutación

Definición 1: Genéricamente, permutar es: “variar la disposición u orden en que estaban dos o más cosas”

Definición 2 Es un arreglo de todos o parte de un conjunto de objetos considerando el orden en su ubicación.

Definición 3. **Permutaciones ordinarias o sin repetición** El número de ordenaciones posibles que se pueden obtener con $n(n \geq 2)$ objetos distintos es el producto de los n primeros terminos. Este producto se denota por $n!$, que se lee: "factorial de n".

Definición 4 (Factorial de un número) El factorial de un número entero no negativo n, se denota $n!$, es igual a:

$$n! = \begin{cases} n(n-1)! & \text{si } n > 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Definición 5 (Permutaciones ordinarias o sin repetición) Se llaman permutaciones ordinarias o sin repetición de n elementos, denotaremos P_n, a los distintos grupos que se pueden formar, de tal manera que en cada grupo entren los n elementos y que un grupo se diferencie de los demás en el orden de colocación de los elementos. Además se tiene que: $P_n = n!$

Definición 6 (Permutaciones con repetición) Se llaman permutaciones con repetición de n elementos, distribuidos en k grupos de $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k$ elementos indistinguibles, respectivamente, de tal forma que $a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + a_k = n$, a las distintas configuraciones que se pueden formar con los n elementos, de tal forma que cada una de ellas se diferencie de las demás en el orden de colocación de sus elementos, excluyendo las reordenaciones de elementos indistinguibles (esto es, que pertenecen a un mismo grupo). Si se denota por $PR_n^{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k}$ a este número, se tiene que:

$$PR_n^{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k} = \frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_{k-1}! \cdot a_k!}$$

Definición 7 (Permutaciones circulares (sin repetición)) Se llaman permutaciones circulares (sin repetición) de n elementos, denotaremos PC_n, a los distintos grupos que se pueden formar, de tal manera que en cada grupo entren los n elementos y que un grupo se diferencie de los demás en la posición relativa de los elementos unos respecto a los otros. Además se tiene que:

$$PC_n = (n-1)!$$

Variación

Definición 8. Variación En matemáticas, la palabra variación tiene una acepción mucho más precisa; brevemente, una variación de una familia de elementos es una modificación de alguno de sus elementos o del orden en que se presentan.

Definición 9 (Variaciones ordinarias o sin repetición) Se llaman variaciones ordinarias o sin repetición de n elementos, tomados de k en k, se denota $Vn,k,$ a los distintos grupos que se pueden formar con los n elementos, de tal forma que en cada grupo entren k elementos distintos y que un grupo se diferencie de los demás, bien en alguno de sus elementos, bien en su orden de colocación. Se tiene:

$$V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Definición 10 (Variaciones con repetición) Se llaman variaciones con repetición de n elementos, tomados de k en k, denotaremos, $V_{n,k}$ a los distintos grupos que se pueden formar con los n elementos, de tal manera que en cada grupo entren k elementos iguales o distintos y que un grupo se diferencie de los demás, bien en algún elemento, bien en su orden de colocación. Se tiene:

$$V_{n,k} = n^k$$

Definiciones relacionadas con combinaciones

Definición 11. Combinación Es el número de conjuntos de un determinado número de elementos que se pueden formar con un universo de objetos, sin importar el orden de selección, sino qué elementos se toman.

Definición 12 (Combinaciones sin repetición) Se llaman combinaciones ordinarias o sin repetición de n elementos, tomados de k en k, denotaremos $C_{n,k}$, a los diferentes conjuntos de k elementos distintos, esto es, un conjunto se diferencie de los demás en, al menos, un elemento (no importa el orden de colocación o selección). Se tiene:

$$C_{n,k} = \frac{V_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!.k!}$$

Definición 13 (Combinaciones con repetición de dos en dos) Se llaman combinaciones con repetición de n elementos, tomados de 2 en 2, denotaremos $CR_{n,2}$ a las distintas agrupaciones de 2 elementos (no necesariamente distintos), esto es, un conjunto se diferencia de los demás en, al menos, un elemento (no importa el orden de colocación o selección). Se tiene:

$$CR_{n,2} = n + C_{n,2}$$

Definicion 14 (Combinaciones con repetición) Se llaman combinaciones con repetición de n elementos, tomados de k en k, se denota $CRn,k,$ a las diferentes agrupaciones de k elementos (indistinguibles o no), de tal forma que una agrupación se diferencie de las demás en, al menos, un elemento (no importa el orden de colocación o selección). Se tiene:

$$\begin{cases} CR_{n,k} = CR_{n-1,k} + CR_{n,k-1} \quad si \quad k \neq 1, n \neq 1 \\ CR_{1,k} = 1 \quad y \quad CR_{n,1} = n \end{cases}$$

2.2.2 Elementos Extensivos

Los campos de problemas relacionados con combinatoria que se presentan a continuación son sugeridos por Batanero, Godino, Navarro-Pelayo (1994), inicialmente se muestran para dar un panorama sobre todos los campos existentes, más adelante se describe detalladamente la clase de problemas de recuento sobre la cual se realizara gran parte del análisis de los textos, debido a la pertinencia de los mismos y a su ubicación dentro de los estándares curriculares.

P1. Problemas de Existencia: En ellos se plantea probar la existencia (o no existencia) de un determinado tipo de estructura discreta. A continuación se muestra un tipo de problema:

Una Profesora saca a pasear a un grupo de 15 niñas; las forma en 5 filas de 3 niñas cada una; se quiere organizar las ternas de tal modo que en el transcurso de 7 días cada alumna se encuentre con todas las demás una sola vez.

P2. Problemas de enumeración: En este tipo de problemas se muestra la necesidad de enumerar o listar los elementos que poseen las cualidades pedidas en el enunciado del problema. El ejemplo que sigue es la construcción de cuadrados mágicos hecho por Pascal:

'Teniendo un cuadrado con un número de celdas par o impar:

Habiéndolo completado con cifras, o según el orden natural de los números: 1, 2, 3, 4, etc., o cualquier otra progresión aritmética. Disponer todas estas cifras según otro cuadrado de celdas semejante a aquel, de forma que todas las cifras de cada hilera, incluso las dos diagonales tengan la misma suma.

P3. **Problemas de Clasificación:** Si el recuento da números demasiado elevados, se renuncia a esta enumeración para realizar una clasificación mediante relaciones apropiadas. Este problema típicamente combinatorio se traduce en la búsqueda y contenido del número de tales subconjuntos que definen la clasificación. *Un ejemplo de este caso son las cadenas de Markov.*

P4. **Problemas de Optimización:** En Ocasiones, el conjunto de soluciones es tal que se le puede asignar una función de valor, la cual induce en el conjunto un orden total, y considerar entonces las nociones de máximo y mínimo.

P5. **Problemas de Recuento:** Se trata de determinar el número de elementos de un conjunto finito que posee una propiedad o una colección de propiedades. Dubois (1984), trabaja los problemas de recuento simple combinatorio, proponiendo cuatro categorías que se relacionan entre sí:

a. Selección de una muestra a partir de una colocación de objetos
b. Colocación de objetos en casillas (cajas, celdas o urnas)
c. Partición en subconjuntos de un conjunto de objetos
d. Descomposición de un numero natural en sumandos

Ya que al última categoría es un caso particular de la tercera, se mostraran las tres primeras categorías, esta clasificación permite distinguir un mayor campo de aplicación de la combinatoria en bachillerato.

P5*.1* ***Selección de una muestra a partir de un conjunto de objetos.***

El primer tipo de problemas es el de muestreo de objetos de un conjunto dado, el cual tiene una gran importancia en estadística.

Un ejemplo, al preguntar cuales son los meses de cumpleaños de tres personas A, B, C, se tendrá una muestra de tres meses del año tomado de doce posibles. Como se puede dar el caso de que algunas personas celebren su cumpleaños el mismo mes, se supone que es posible repetir algún elemento en la muestra formada. Si se distingue entre las tres personas, debe ser tenido en cuenta el orden de los elementos. El número de posibilidades diferentes para el cumpleaños es de 12^3 ya que para cada persona es de 12 posibilidades.

En general, dado un conjunto de n objetos distintos $a_1,\ a_2, \dots,\ a_n$ de los cuales seleccionamos r, se necesitan dos condiciones:

1. ¿Es necesario tener en cuenta el orden de los elementos para distinguir dos muestras? Es decir, ¿se trata de una muestra ordenada o una muestra no ordenada?
2. ¿Podemos repetir los elementos?, es decir ¿es un muestreo con o sin reemplazamiento?

Al cruzar cada una de las respuestas posibles se obtienen las cuatro operaciones básicas se obtiene la figura 2.1:

(*) Representación simbólica estándar:
$V_{n,r}$: *Variaciones ordinarias de n objetos tomados de r en r.*
$VR_{n.r}$: *Variaciones con repetición de n objetos tomados de r en r.*
$C_{n,r}$: *Combinaciones de n objetos tomados de r en r.*
$CR_{n,r}$: *Combinaciones con repetición de n objetos tomados de r en r*

Figura 2.1 Operaciones Básicas de Selección

A estas cuatro operaciones se le añade el caso particular $V_{n,n} = P_n$ o permutaciones de n elementos. Que puede ser incluida dentro de las variaciones.

P5.2 Colocación de r objetos en n casillas

Se tienen las bolas numeradas con los dígitos 1, 2 y 3 y se quieren colocar en dos cajas de distinto color (verde y azul) ¿de cuantas maneras se pueden colocar las bolas en las cajas? (no importa el orden en el que se colocan las bolas dentro de las cajas)

Este modelo tiene un vasto campo de acción ya que puede ser aplicado en Biología, genética, configuración de polímeros. Según se considere el orden de los objetos dentro de las cajas debe o no tenerse en cuenta y que las cajas y los objetos sean iguales o diferentes se pueden obtener seis tipos básicos de colocaciones, ya que no tiene sentido ordenar los objetos cuando son iguales. Según se considere que el orden de los objetos dentro de las cajas debe o no tenerse en cuenta y que las cajas y los objetos sean iguales o diferentes se pueden obtener 6 tipos de colocaciones, ya que no tiene sentido ordenar los objetos cuando son iguales. A partir de estos seis tipos definidos se distinguen cuatro subtipos al agregar las siguientes condiciones:

1. Colocaciones inyectivas con a lo sumo un objeto por caja $(r \leq n)$
2. Colocaciones sobreyectivas colocaciones con al menos un objeto por caja $(r \geq n)$
3. Colocaciones biyectivas: colocaciones de un objeto por caja $(n = r)$
4. Colocaciones cualesquiera. Se puede colocar el número de objetos que se desee en cada casilla o dejar una vacía.

En la siguiente página se hace un recuento de las 24 operaciones posibles al cambiar las condiciones para cada una de las situaciones.

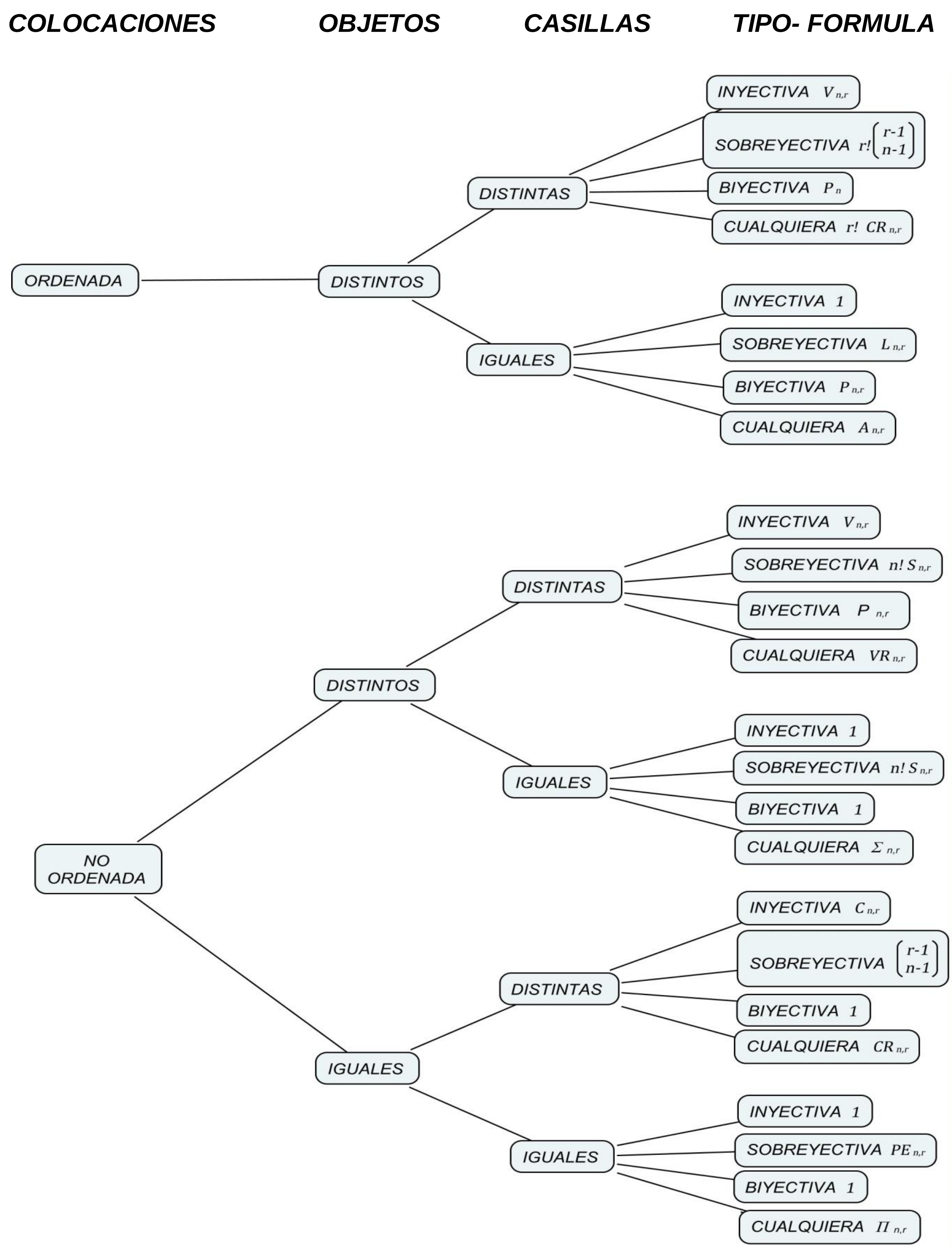


Figura 2.2 Modelo de Colocaciones Simples

P 5.3 Partición en subconjuntos de un conjunto de datos: Se consideran las colocaciones ordenadas de r objetos distintos en n cajas distintas, al olvidar las cajas y hacer énfasis en los subconjuntos de objetos que estos contienen, se obtienen conjuntos ordenados. Se permiten también los conjuntos vacios.

Cada colocación define una y solo una partición ordenada de objetos distinguibles en subconjuntos ordenados (vacios o no) y recíprocamente.

2.2.3 Elementos Actuativos

A continuación se muestra una clasificación de los diversos procedimientos necesarios para solucionar problemas de análisis combinatorio, esta fue realizada por Batanero-Pelayo (1994).

PR1) Enumeración sistemática: Mostrar todos los elementos que cumplen con las condiciones dadas para la realización del problema.

Ejemplo: Escribe todos los números de dos cifras con los dígitos 1, 4 y 5 ¿Cuántos números distintos se pueden lograr?

PR2) Relación entre los diagramas de árbol y el principio de multiplicación: A partir del diagrama de árbol resolver situaciones que requieran aplicar el principio multiplicativo o viceversa.

Ejemplo: En una prisión hay solo seis celdas individuales, escribe todas las formas en que se pueden distribuir 2 prisioneros en las celdas. Trata de ayudarte con un grafico.

PR3) Aplicación de la regla de la suma a partir de grafos: A partir de situaciones con grafos sencillos se realizan enumeraciones y recuentos de las trayectorias de los mismos.

Ejemplo: Un trayecto de tren tiene 5 estaciones ¿Cuántos billetes diferentes debe imprimir la compañía? Representa mediante un grafo todos los posibles recorridos y calcula el número de ellos.

PR4) Modelo de colocaciones. Caso de objetos distinguibles: son situaciones combinatorias simples que pueden modelarse mediante la colocación de r elementos en n urnas, con valores particulares de n y r.

Ejemplo: El ascensor de un edificio de 5 pisos se pone en marcha con tres pasajeros. ¿De cuantos modos distintos se pueden distribuir los pasajeros entre los pisos?

PR5) Modelo de colocaciones Caso de Objetos indistinguibles: se calcula el número de colocaciones de objetos iguales en urnas distintas con las condiciones dadas.

Ejemplo: ¿De cuantas maneras se puede repartir tres plátanos entre cuatro niños? (cada niño puede recibir 0, 1, 2 o 3 plátanos)

PR6) Variaciones: Se identifican situaciones de muestreo donde es necesario tener en cuenta el orden de extracción de las muestras para la formación de configuraciones distintas.

Ejemplo: En un trayecto de tren hay ocho estaciones. ¿Cuántos son los precios distintos que aparecen en los billetes que pueden tomarse a lo largo de este recorrido?

PR7) Permutaciones (Números factoriales): son situaciones que requieren formar o contar todas las ordenaciones posibles de un conjunto de datos.

Ejemplo: Calcula el numero de permutaciones de las letras DDDDDAAA.

PR8) Muestras no ordenadas: identificar las situaciones de muestreo en las que no es necesario diferenciar el orden de selección de los objetos para distinguir dos configuraciones como distintas.

Ejemplo: Como sabes, por dos puntos pasa una sola recta ¿Podrías indicar cuantas rectas pasan por 5 puntos entre los cuales no hay tres alineados?

PR9) Colocación y distribución de objetos: Se aplica la colocación de objetos en urnas, considerando las diferentes variables que pueden afectar el problema.

Ejemplo: Un ascensor lleva 5 pasajeros y se detiene en cinco pisos ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos pasajeros se bajen en el mismo piso?

PR10) Subpoblaciones y particiones: a partir del modelo de particiones, aplicando los coeficientes binomiales se resuelven situaciones en las cuales las permutaciones y combinaciones simples no bastan para su resolución.

Ejemplo: ¿De cuantas formas distintas se pueden colocar en m urnas diferentes n bolas blancas, n bolas negras y n bolas azules?

2.2.4 Elementos Ostensivos

Las notaciones, gráficos, palabras y en general todas las representaciones del objeto abstracto.

2.2.4.1 Términos y expresiones verbales

Son todas las palabras y frases que se usan para describir los conceptos, sus operaciones y transformaciones. Están clasificadas en tres aspectos distintos:

a. ***OT1:*** *Palabras específicas de las matemáticas que normalmente no forman parte del lenguaje cotidiano*. En esta categoría se encuentran palabras como: Factorial, binomial, grafo.

b. ***OT2****: Palabras que aparecen en las matemáticas y el lenguaje ordinario, aunque no siempre con el mismo significado en los dos contextos.* En esta clase se ubican palabras como: Árbol, diagrama, permutación, combinación, variación.

c. ***OT3:*** *Palabras que tienen significados iguales o muy próximos en ambos contextos.* En esta categoría se ubican palabras como: Urna, caja, balota, reparto.

2.2.4.1 Notaciones y símbolos

Las notaciones no solo se emplean para representar los conceptos sino para realizar operaciones con los mismos y constituyen una forma abreviada y precisa para denotar conceptos o proposiciones. En análisis combinatorio se hace uso de las siguientes notaciones:

- Para las permutaciones la notación del numero factorial es la siguiente: $$n!$$
- Para las permutaciones sin repetición se tiene la siguiente: P_n
- Para las permutaciones con repetición $PR_n^{a_1,a_2,\ldots a_{k-1},a_k}$
- Las permutaciones circulares se denotan de la siguiente manera: ${}_P C_n$
- Las variaciones se denotan de la siguiente manera: $V_{n,k}$
- Las variaciones con repetición: $VR_{n,k} = n^k$
- Las combinaciones se denotan $C_{n,k}$, ${}_n C_k$, $\binom{n}{k}$
- Las combinaciones con repetición 2 a 2 $CR_{n,2}$
- Las combinaciones con repetición $CR_{n,k}$
- Representaciones gráficas y demás.

En el caso del análisis combinatorio se conocen los grafos, y los diagramas de árbol que son un caso particular de grafo, estas dos son las representaciones graficas de elementos de conteo más usados.

2.2.5 Elementos Validativos

Todas las definiciones, propiedades, problemas y algoritmos se ligan entre sí mediante argumentos o razonamientos que se usan para comprobar las soluciones de los problemas o demostrar las propiedades y relaciones. Se han encontrado los siguientes tipos de argumentos:

- *V1:* Comprobación de casos particulares y contraejemplos.
- *V2:* Uso de gráficos cuando la argumentación verbal o simbólica se apoya en las propiedades visuales de un gráfico auxiliar.
- *V3:* Razonamientos algebraicos deductivos.
- *V4:* Razonamientos verbales deductivos, basados en propiedades previas.

CAPITULO 3. ANÁLISIS DE LOS TEXTOS

En el presente capítulo se abordan el análisis de dos textos escolares tomando como referencia el marco teórico construido en el capítulo 2. En la primera parte se muestran los resultados de la revisión de los textos desde el marco teórico. Específicamente, se plantea un análisis cualitativo de los elementos identificados en el texto que son ilustrados con ejemplos tomados de cada libro. Posteriormente se hace un análisis cuantitativo de los resultados obtenidos. De esta manera se pretende describir las tendencias encontradas en cada libro analizado con el fin de detectar los énfasis en los elementos de significado que contienen cada uno de ellos.

Los resultados se organizan en forma de tablas y gráficos a manera de resumen buscando una mejor representación del contraste hecho entre el marco teórico trazado y los casos estudiados.

3.1 ANÁLISIS CUALITATIVO DE LOS CASOS ESTUDIADOS

A continuación se presentan los elementos de significado asociados al análisis combinatorio en los casos contemplados:

3.1.1 Caso1

El libro 1 es el libro Hipertexto 11 de Editorial Santillana, publicado en el año 2010, en Bogotá cuyos autores son: Julián Cifuentes Robayo y Francia Leonora Salazar Suarez. Este libro contiene 320 páginas, está organizado en 8 capítulos dentro de los cuales los siete primeros hablan sobre la introducción al Cálculo y sus aplicaciones. Haciendo gran énfasis en la parte de límites, integrales y derivadas, sólo en el ultimo capitulo se encuentra, la sección de Estadística y Probabilidad. Esta sección del texto está dividida en dos bloques, en el primero se habla de estadística, sobre algunos conceptos básicos y sobre la caracterización de variables y datos no agrupados, mas adelante en el segundo bloque se encuentra la parte de probabilidad que inicia hablando sobre las generalidades y conceptos básicos, después habla de cómo calcular probabilidades así como de “Técnicas de Conteo y probabilidad”, posteriormente se abordan las Permutaciones y Combinaciones para culminar hablando de probabilidad condicional. En este libro se evidencian algunos estándares y lineamientos propuestos por el Ministerio de Educación Nacional en torno al contenido del mismo sobre Probabilidad y en especial sobre combinatoria para grado once.

3.1.1.1 Elementos Intensivos

Entendiendo los elementos intensivos como todas las definiciones, propiedades y características de un objeto matemático, se puede determinar que los elementos intensivos encontrados en este primer caso son:

Definiciones

La primera definición encontrada en este libro se refiere a una variación ordinaria o sin repetición (definición 9 presentada en los elementos intensivos).Se observa en este texto de la siguiente manera:

Permutaciones

Una **permutación** es una técnica de conteo en la cual es importante el orden en el que se escriben los elementos de cada punto muestral, pero no hay repetición.

Si de un grupo de N elementos se desea elegir cierta cantidad n de ellos, donde importa el orden, la cantidad de permutaciones posibles está dada por:

$${}_NP_n = \frac{N!}{(N-n)!}$$

Donde $N! = (N) \times (N-1) \times (N-2) \times \ldots \times 2 \times 1$ y $0! = 1$

Figura 3.1 Definición 9

La segunda definición encontrada en este libro se refiere a una combinación sin repetición (definición 12 presentada en los elementos intensivos).Se evidencia en el texto de la siguiente manera:

Combinaciones

Una **combinación** es una técnica de conteo en la cual *no importa el orden y no hay repetición* en los elementos de un punto muestral.

Si de un grupo de N elementos se desea elegir cierta cantidad n de ellas, la cantidad de combinaciones posibles o elementos del espacio muestral está dada por:

$$ {}_{N}C_{n} = \binom{N}{n} = \frac{N!}{(N-n)!n!} $$

Figura 3.1 Definición 12

.

3.1.1.2 Elementos Extensivos

Dado que los elementos extensivos se describen como los campos de problemas que se relacionan con el objeto matemático, se pueden identificar los siguientes campos en los ejercicios planteados por el texto:

La primera categoría de tipos de problemas identificada en este texto es la de Problemas de enumeración (P2), a continuación un ejemplo de ello:

8 En Colombia los números telefónicos de los celulares se componen de 10 dígitos.

a. Si las compañías de celulares deben tener los primeros tres números fijos, ¿cuántos números telefónicos puede tener cada compañía?

Figura 3.3 Ejemplo de problemas de enumeración

En segundo lugar se identifican problemas de Selección de una muestra a partir de un conjunto de objetos P 5.1, como en el ejemplo siguiente:

> De un grupo de 5 médicos y 7 enfermeras, se conforma un comité de 2 médicos y 3 enfermeras. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto si una enfermera determinada debe pertenecer al comité?

Figura 3.4 Ejemplo problema de selección

Más adelante se identifican problemas de Colocación de r objetos en n casillas de una muestra a partir de un conjunto de objetos P 5.2, como en el ejemplo siguiente:

> 11 En la lotería de una ciudad se sacan seis balotas de una urna que contiene 49, todas con la misma probabilidad de salir. Calcula la probabilidad que tiene una persona de acertar los seis números del sorteo de esa lotería.

Figura 3.5 Ejemplo Problemas de colocación

3.1.1.3 Elementos Ostensivos

En este apartado se muestran las representaciones más utilizadas por los textos para presentar el análisis combinatorio. Entendiendo como elementos ostensivos todo tipo de representación de un objeto matemático, los elementos de representación presentados por los autores del texto son:

Términos

Los términos encontrados en este análisis son los siguientes

- *OT1: Palabras específicas de las matemáticas que normalmente no forman parte del lenguaje cotidiano*.

En este caso los términos usados en el libro de texto: Técnicas de conteo, espacio muestral y punto muestral.

Combinaciones

Una **combinación** es una técnica de conteo en la cual *no importa el orden y no hay repetición* en los elementos de un punto muestral.

Si de un grupo de N elementos se desea elegir cierta cantidad n de ellas, la cantidad de combinaciones posibles o elementos del espacio muestral está dada por:

$$ {}_N C_n = \binom{N}{n} = \frac{N!}{(N-n)!n!} $$

Figura 3.5 Ejemplo de términos ostensivos nivel 1

- *OT2: Palabras que aparecen en las matemáticas y el lenguaje ordinario, aunque no siempre con el mismo significado en los dos contextos.*

Se puede establecer que del lenguaje utilizado por el texto, los términos que corresponden a esta categoría son: Selección, permutación, combinación, agrupación, orden.

La diferencia entre una permutación y una combinación es que en la primera el interés recae en contar todas las posibles selecciones y todos los arreglos de estas, mientras que en la segunda el interés se centra en contar el número de selecciones diferentes.

Figura 3.6 Ejemplo de términos ostensivos nivel 2

- *OT3: Palabras que tienen significados iguales o muy próximos en ambos contextos.*

Las palabras utilizadas por el libro respecto a este ítem son: valor, conjunto, fases, experimento, evento, par, entre otros.

(2) **Con los dígitos** primos **se quiere formar números de 3 cifras. ¿Cuál es la probabilidad de que el número formado sea par?**

Para establecer la probabilidad, primero hay que determinar la cantidad de puntos muestrales del espacio muestral, es decir, la cantidad de números distintos de tres cifras que es posible formar. Los dígitos primos son: 2, 3, 5 y 7, luego $N = 4$, y como se quiere formar de tres cifras, así $n = 3$, entonces $\#S$ está dado por:

Figura 3.7 Ejemplo de términos ostensivos nivel 3

a. Notaciones y símbolos

Las notaciones utilizadas en el texto son las siguientes:

Para Permutación

$$_{N}P_{n} = \frac{N!}{(N-n)!}$$

Donde $N! = (N) \times (N-1) \times (N-2) \times \ldots \times 2 \times 1$ y $0! = 1$

Figura 3.8 Notación de Permutación, en Caso1

Para Combinación:

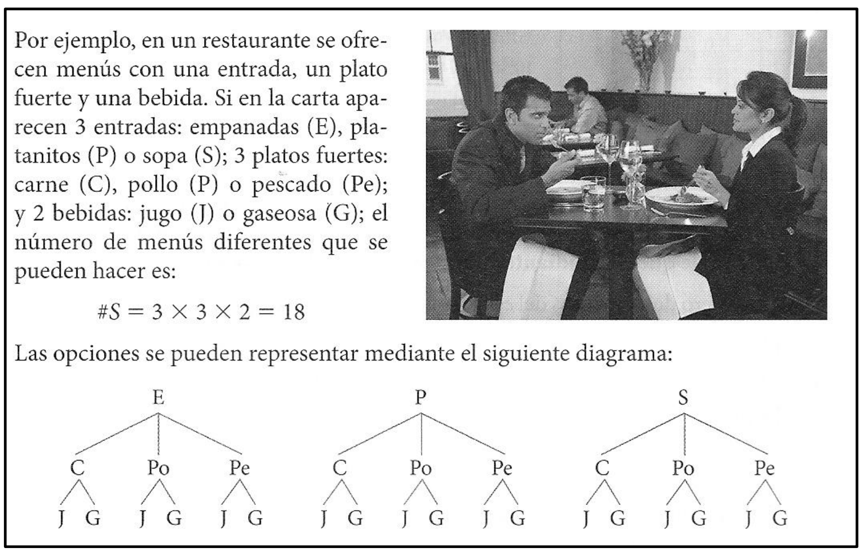
$$_{N}C_{n} = \binom{N}{n} = \frac{N!}{(N-n)!n!}$$

Figura 3.9 Notacion de combinacion, en caso 1

Cabe resaltar que en ambos casos la notación utilizada $({}_{N}Pn \; y \; {}_{N}Cn)$ es muy parecida a la usada por las calculadoras de bolsillo, pero que emplea la N para el conjunto grande y n para el conjunto de partes que se toman, generando confusión cuando se exprese oralmente. Además en el caso de las combinaciones se emplea notación entre paréntesis.

b. Gráficos

Dentro del texto al iniciar la sección de técnicas de conteo se da un ejercicio resuelto como aplicación de los diagramas de árbol (Pág. 303), esto se hizo con el propósito de ser una introducción para hablar acerca de las técnicas de conteo.


Por ejemplo, en un restaurante se ofrecen menús con una entrada, un plato fuerte y una bebida. Si en la carta aparecen 3 entradas: empanadas (E), platanitos (P) o sopa (S); 3 platos fuertes: carne (C), pollo (P) o pescado (Pe); y 2 bebidas: jugo (J) o gaseosa (G); el número de menús diferentes que se pueden hacer es:

$$\#S = 3 \times 3 \times 2 = 18$$

Las opciones se pueden representar mediante el siguiente diagrama:

Figura 3.10 Uso del Diagrama de Árbol en caso 1

3.1.1.4 Elementos Actuativos

Los elementos actuativos hacen referencia a todos los procesos hechos con el fin de dar solución a un problema, a continuación se muestran los procedimientos que se favorecen dentro del texto.

La Primera categoría es la de Modelo de colocaciones (PR2). Caso de objetos distinguibles: son situaciones combinatorias simples que pueden modelarse mediante la colocación de r elementos en n urnas, con valores particulares de n y r.

2 Se quiere formar números de cuatro cifras con los 10 dígitos. Cuántos números distintos se puede formar si:

a. Los dígitos se pueden repetir.
b. No puede haber una cifra repetida en cada número.
c. El último número tiene que ser 4 y no se puede repetir dígito.

Figura 3.12 Ejemplo del modelo de colocaciones Caso 1

Más adelante está la categoría PR7 Permutaciones (Números factoriales): son situaciones que requieren formar o contar todas las ordenaciones posibles de un conjunto de datos.

4 Calcula el número de posibilidades que hay para sentar a 9 personas en 9 asientos.

Figura 3.13 Ejemplo de Permutaciones

3.1.1.5 Elementos Validativos

Dentro de los argumentos e ideas presentadas por el texto, solo aparece el uso de un elemento validativo el cual es el *V3: Razonamientos algebraicos deductivos.* Este elemento validativo aparece en el texto en el momento que va a explicar los conceptos de Permutación y Combinación. A continuación se presentan los ejemplos de la sección Combinaciones.

Ejemplos

(1) Se va a elegir una comisión de 5 personas de un grupo de 11 ¿de cuántas formas se les puede seleccionar?

En este caso el orden no es importante, pues simplemente se va a elegir un grupo de 5 personas. Tampoco hay repetición de elementos pues una persona no puede ser seleccionada dos veces en el mismo grupo. Por tanto, para encontrar el número de formas distintas para hacer la selección, se realiza una combinación con $N = 9$ y $n = 5$, luego:

$$_9C_5 = \frac{9!}{(9-5)!5!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$$

Así, de un grupo de 11 personas se puede seleccionar una comisión de 5 de ellas, de 126 formas distintas.

(3) Se quiere preparar ensaladas que contengan por lo menos uno de los siguientes ingredientes: lechuga, tomate, cebolla, zanahoria y espinaca. ¿De cuántas maneras se pueden preparar dichas ensaladas?

Para preparar la ensalada con al menos un ingrediente puede seleccionarse 1 de los 5 ingredientes, 2 de los 5 ingredientes,…, 5 de los 5 ingredientes. Luego el número requerido de ensaladas está dado por:

$$_5C_1 + {}_5C_2 + {}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5$$
$$= 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31$$

Se pueden preparar 31 ensaladas con al menos uno de los 5 ingredientes.

Figura 3.14 Ejemplo de Razonamiento algebraico deductivo

Hasta este momento se ha mostrado e identificado que elementos y que categorías se hacen presentes en el caso 1. A continuación, se presenta de igual forma el estudio cualitativo de las categorías y elementos registrados para el texto del caso 2.

3.1.2 Caso 2

El libro 1 es la Introducción al Cálculo, publicado en el año 2004 en Bogotá cuyo autor es: James Stewart. Este libro contiene 724 páginas, está organizado en 11 capítulos dentro de los cuales los 10 primeros hacen un recorrido por la evolución de los sistemas de numeración y sus propiedades, iniciando con el estudio de los números reales, después trata sobre las diferentes clases de funciones, después en el capítulo 9 habla sobre Geometría analítica y el capítulo 10 trata acerca de los limites y continuidad de funciones, en el último capítulo el libro hace énfasis el tema de Conteo y Probabilidad.

Este capítulo está dividido en cuatro secciones: los principios de conteo, permutaciones y combinaciones, probabilidad y por ultimo, valor esperado.

En este libro se evidencian algunos estándares y lineamientos propuestos por el Ministerio de Educación Nacional en torno al contenido del mismo sobre Probabilidad y en especial sobre combinatoria para grado once.

3.1.2.1 Elementos Intensivos

Entendiendo los elementos intensivos como todas las definiciones, propiedades y características de un objeto matemático, se puede determinar que los elementos intensivos encontrados en este primer caso son:

Definiciones

La primera definición encontrada en este libro se refiere al principio de multiplicación (definición 1 presentada en los elementos intensivos).Se observa en este texto de la siguiente manera:

PRINCIPIO FUNDAMENTAL DEL CONTEO

Cuando dos eventos suceden uno tras otro, si el primero puede suceder en m formas y el segundo en n formas (después de haber sucedido el primero), entonces ambos pueden suceder, uno tras otro, en $m \times n$ formas distintas.

Figura 3.15 Ejemplo de la definición 1 en el caso 2

La segunda definición encontrada en este libro se refiere a una permutación (definición 4 presentada en los elementos intensivos).Se evidencia en el texto de la siguiente manera:

PERMUTACIONES

Una **permutación** de un conjunto de objetos distintos es un ordenamiento de esos objetos.

La cantidad de permutaciones de n objetos es $n!$

Figura 3.16 Ejemplo de la definición 4 en el caso 2

Más adelante el texto tiene su tercera definición, para hablar de permutaciones de n objetos tomados de r en r usa la definición 9 de los elementos intensivos (Variaciones ordinarias o sin repetición), la cual se muestra a continuación:

PERMUTACIONES DE n OBJETOS TOMADOS DE r EN r

El número de permutaciones de n objetos tomados de r en r es

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Figura 3.17 Ejemplo de la definición 9 en el caso 2

La cuarta definición hace referencia a objetos distinguibles (definición 6 Permutaciones con repetición) la cual se muestra dentro de los diversos tipos de Permutación, esto se muestra como parámetro para resolver varios ejercicios o actividades.

PERMUTACIONES DISTINGUIBLES

Si un conjunto de n objetos consiste en k tipos distintos de objetos con n_1 objetos del primer tipo, n_2 del segundo, n_3 del tercero, etcétera, siendo $n_1 + n_2 + \cdots n_k = n$, el número de permutaciones distinguibles de esos objetos es

$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots n_k!}$$

Figura 3.17 Ejemplo de la definición 6 en el caso 2

La siguiente definición trata sobre las combinaciones (Definición 11 Combinaciones), esta definición se muestra de manera verbal favoreciendo las notaciones reducidas a continuación un ejemplo:

Una **combinación** de r elementos de un conjunto es cualquier subconjunto de r elementos, sin tener en cuenta su orden. Si el conjunto tiene n elementos, el número de combinaciones de r elementos se representa por $C(n, r)$ y se llama **número de combinaciones de n elementos tomados de r en r**.

Figura 3.18 Ejemplo de la definición 11 en el caso 2

También el texto habla sobre las combinaciones sin repetición (definición 12 combinaciones sin repetición), se evidencia el uso de la notación reducida y de la formula como manera para mostrar esta clase de combinaciones.

COMBINACIONES DE n OBJETOS TOMADOS DE r EN r

El número de combinaciones de n objetos tomados de r en r es

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Figura 3.19 Ejemplo de la definición 12 en el caso 2

3.1.2.2 Elementos Extensivos

Dado que los elementos extensivos se describen como los campos de problemas que se relacionan con el objeto matemático, se pueden identificar los siguientes campos en los ejercicios planteados por el texto:

P2. Problemas de enumeración: En el texto los problemas de enumeración o de conteo se presentan de manera recurrente, y muestran las diversas aplicaciones de problemas relacionados con el análisis combinatorio.

21. En el estado de California, las placas de los automóviles tienen un dígito distinto de cero, seguido por 3 letras y después por 3 dígitos. ¿Cuántas placas distintas son posibles con este sistema?

Figura 3.19 Ejemplo de problemas de enumeración en el caso 2

P5.*1 Selección de una muestra a partir de un conjunto de objetos.* En este apartado se evidencia como la selección de muestras sirve para encontrar la cantidad de situaciones posibles que dan solución a preguntas específicas.

EJEMPLO 1 ■ Cálculo del número de permutaciones

Un club tiene nueve miembros. ¿De cuántas maneras pueden elegirse un presidente, un vicepresidente y un secretario entre ellos?

SOLUCIÓN Se debe conocer el número de formas de seleccionar tres miembros *en orden* para los puestos de presidente, vicepresidente y secretario, entre los nueve miembros del club. Ese número es

$$P(9,3) = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = 9 \times 8 \times 7 \times = 504 \quad ■$$

Figura 3.20 Ejemplo de problemas de selección en el caso 2

P5.2 *Colocación de r objetos en n casillas:* En este apartado se relacionan a la colocación con eventos reservados al azar el cual brinda cierto nivel de incertidumbre y le da un mayor nivel de complejidad a los ejercicios.

EJEMPLO 6 ■ Cálculo del número de combinaciones

En una rifa hay 20 boletos en un sombrero y se deben sacar cuatro al azar. Los poseedores de los boletos se van a ganar viajes gratis a las Bahamas. ¿De cuántas formas pueden salir los ganadores?

SOLUCIÓN Se debe calcular el número de formas de elegir cuatro ganadores de 20 elementos. El orden en el que se tomen los boletos no importa, porque cada uno de los ganadores obtiene el mismo premio. En consecuencia, se desea calcular el número de combinaciones de 20 objetos (los boletos) tomados de cuatro en cuatro. Esa cantidad es

$$C(20,4) = \frac{20!}{4!(20-4)!} = \frac{20!}{4!\,6!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 4845 \quad ■$$ ”

Figura 3.21 Ejemplo de los problemas de Colocación en el caso 2

P 5.3 *Partición en subconjuntos de un conjunto de datos:* Para resolver estas situaciones se hace necesario utilizar algoritmos más complejos.

Se van a asignar 14 obreros de construcción a tres tareas distintas. Se necesitan siete para mezclar el mortero, cinco para colocar ladrillos y dos para llevar los ladrillos a los colocadores. ¿De cuántas maneras distintas se pueden asignar los trabajadores a esas tareas?

SOLUCIÓN Se necesita hacer una partición de total de trabajadores en 3 grupos que contengan 7, 5 y 2 trabajadores, respectivamente. El número de formas de hacerlo es

$$\frac{14!}{7!\,5!\,2!} = 72{,}072 \qquad \blacksquare$$

Figura 3.21 Ejemplo de problemas de partición en el caso 2

3.1.2.3 Elementos Ostensivos

Entendiendo como elementos ostensivos todo tipo de representación de un objeto matemático, los elementos de representación presentados por los autores del texto son:

a. Términos

Los términos encontrados en este análisis son los siguientes

- *OT1: Palabras específicas de las matemáticas que normalmente no forman parte del lenguaje cotidiano*.

En este caso los términos usados en el libro de texto: eventos sucesivos, principio de multiplicación...

Hay una consecuencia inmediata de este principio, para cualquier cantidad de eventos: Si $E_1, E_2, \ldots, E_k$ son eventos sucesivos, y si E_1 puede suceder en n_1 formas, E_2 en n_2 formas, etcétera, todos juntos uno tras otro pueden suceder de $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$ maneras distintas.

Figura 3.22 Ejemplo de elementos ostensivos de nivel 1 en el caso 2

OT2: Palabras que aparecen en las matemáticas y el lenguaje ordinario, aunque no siempre con el mismo significado en los dos contextos.

Se puede establecer que del lenguaje utilizado por el texto, los términos que corresponden a esta categoría son: Permutación, número de permutaciones, combinación, agrupación, orden, eventos, repetición.

$$\boxed{\text{La cantidad de permutaciones de } n \text{ objetos es } n!}$$

¿Cuántas permutaciones formadas por 5 letras se pueden tener con esas mismas ocho letras? Algunas de esas permutaciones son

XYZWC *AZDWX* *AZXYB* *WDXZB*

De nuevo, hay ocho alternativas para la primera posición, siete para la segunda, seis para la tercera, cinco para la cuarta y cautro para la quinta. Según el principio fundamental de conteo, la cantidad de permutaciones es

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$$

En general, si un conjunto tiene n elementos, el número de formas de ordenar a r elementos del conjunto se representa con $P(n,r)$ y se llama **número de permutaciones de n objetos tomados de r en r**.

Figura 3.23 Ejemplo de elementos ostensivos de nivel 2 en el caso 2

OT3: Palabras que tienen significados iguales o muy próximos en ambos contextos.

Las palabras utilizadas por el libro respecto a este ítem son: valor, conjunto, fases, experimento, evento, distinguible, reacomodo.

PERMUTACIONES DISTINGUIBLES

Si hay un conjunto de 10 pelotas, cada una de un color distinto, el número de permutaciones de esas pelotas es $P(10, 10) = 10!$ Si las 10 pelotas son rojas, sólo hay una permutación distinta, porque se ven igual con todas las maneras de ordenarlas. En general, cuando se maneja un conjunto de objetos, algunos de los cuales son iguales, dos permutaciones son **distinguibles** si una de ellas no se puede obtener de la otra al intercambiar las posiciones de los elementos iguales. Por ejemplo, si hay 10 pelotas de las cuales seis son rojas y las otras cuatro son de un color distinto cada una, ¿cuántas permutaciones distinguibles son posibles? En este caso la clave es que las pelotas del mismo color no se pueden distinguir entre sí. Por consiguiente, cada reacomodo de las bolas rojas, estando fijas las demás, es esencialmente la misma permutación. Como hay $6!$ rearreglos de las bolas rojas para cada posición fija de las demás, la cantidad total de las permutaciones distinguibles es $10!/6!$ Con este argumento podemos llegar a la siguiente regla general:

Figura 3.24 Ejemplo de elementos ostensivos de nivel 3 en caso 2

b. Notaciones y símbolos

Las notaciones utilizadas en el texto son las siguientes:

Para Permutación

Se evidencia diversas notaciones como las verbales, las formulas y las notaciones reducidas las cuales dan varias visiones del concepto matemático y permiten enfrentarlo de diversas maneras

En general, si un conjunto tiene n elementos, el número de formas de ordenar a r elementos del conjunto se representa con $\boldsymbol{P(n,r)}$ y se llama **número de permutaciones de n objetos tomados de r en r.**

La cantidad de permutaciones de n objetos es $n!$

Figura 3.25 Notación de permutación en caso 2

PERMUTACIONES DE n OBJETOS TOMADOS DE r EN r

El número de permutaciones de n objetos tomados de r en r es

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Figura 3.26 notación de permutación de n objetos tomado de r en r en caso 2

PERMUTACIONES DISTINGUIBLES

Si un conjunto de n objetos consiste en k tipos distintos de objetos con n_1 objetos del primer tipo, n_2 del segundo, n_3 del tercero, etcétera, siendo $n_1 + n_2 + \cdots n_k = n$, el número de permutaciones distinguibles de esos objetos es

$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots n_k!}$$

Figura 3.27 notación de permutaciones distinguibles en caso 2

Para combinación*:*

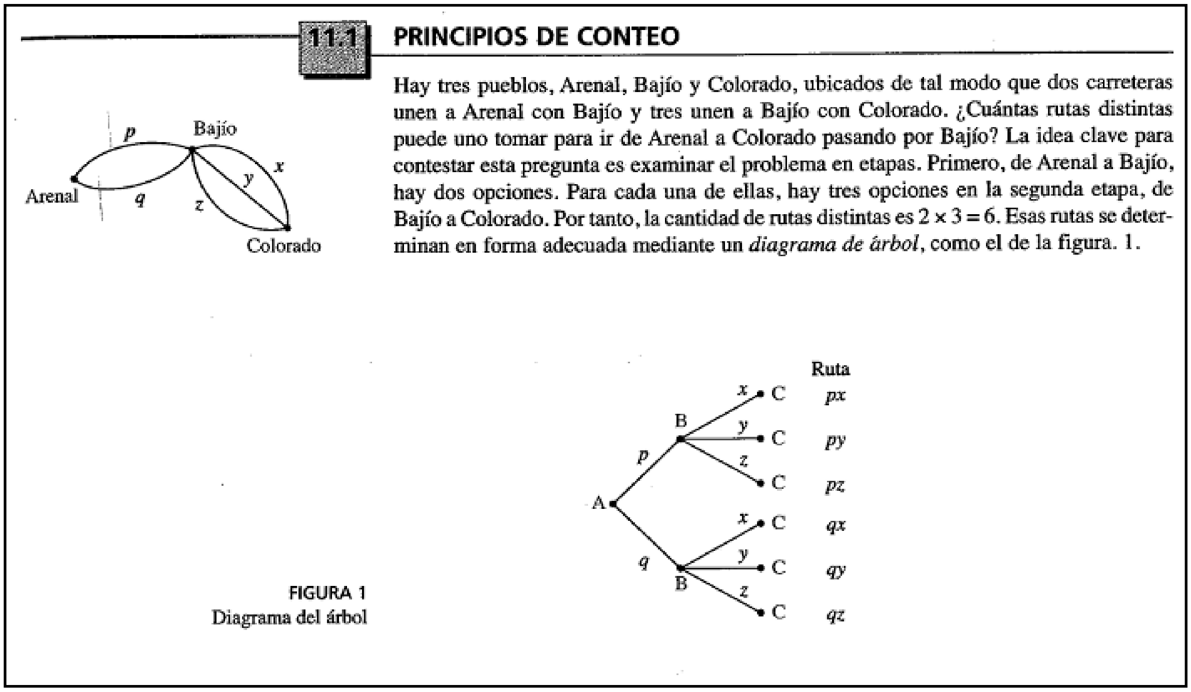
Una **combinación** de r elementos de un conjunto es cualquier subconjunto de r elementos, sin tener en cuenta su orden. Si el conjunto tiene n elementos, el número de combinaciones de r elementos se representa por $\boldsymbol{C(n, r)}$ y se llama **número de combinaciones de n elementos tomados de r en r**.

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Figura 3.28 Notaciones para Combinaciones en caso 2

c. Tablas y gráficos

Dentro del texto al iniciar la sección de principios de conteo se muestra un ejemplo, el cual introduce al lector al principio de multiplicación haciendo uso de un grafo y un diagrama de árbol.


11.1 PRINCIPIOS DE CONTEO

Hay tres pueblos, Arenal, Bajío y Colorado, ubicados de tal modo que dos carreteras unen a Arenal con Bajío y tres unen a Bajío con Colorado. ¿Cuántas rutas distintas puede uno tomar para ir de Arenal a Colorado pasando por Bajío? La idea clave para contestar esta pregunta es examinar el problema en etapas. Primero, de Arenal a Bajío, hay dos opciones. Para cada una de ellas, hay tres opciones en la segunda etapa, de Bajío a Colorado. Por tanto, la cantidad de rutas distintas es $2 \times 3 = 6$. Esas rutas se determinan en forma adecuada mediante un *diagrama de árbol*, como el de la figura. 1.

FIGURA 1
Diagrama del árbol

Figura 3.29 Ejemplo de Diagrama de Árbol en caso 2

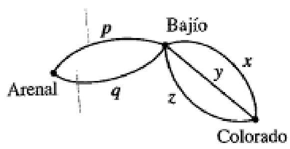
3.1.2.4 Elementos Actuativos

Los elementos actuativos hacen referencia a todos los procesos hechos con el fin de dar solución a un problema, a continuación se muestran los procedimientos que se favorecen dentro del texto.

PR3) Aplicación de la regla de la suma a partir de grafos: A partir de situaciones con grafos sencillos se realizan enumeraciones y recuentos de las trayectorias de los mismos.

11.1 PRINCIPIOS DE CONTEO

Hay tres pueblos, Arenal, Bajío y Colorado, ubicados de tal modo que dos carreteras unen a Arenal con Bajío y tres unen a Bajío con Colorado. ¿Cuántas rutas distintas puede uno tomar para ir de Arenal a Colorado pasando por Bajío? La idea clave para contestar esta pregunta es examinar el problema en etapas. Primero, de Arenal a Bajío, hay dos opciones. Para cada una de ellas, hay tres opciones en la segunda etapa, de Bajío a Colorado. Por tanto, la cantidad de rutas distintas es $2 \times 3 = 6$. Esas rutas se determinan en forma adecuada mediante un *diagrama de árbol*, como el de la figura. 1.



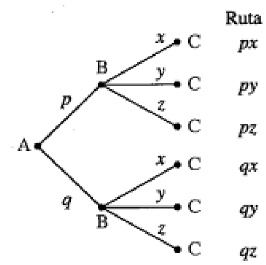


FIGURA 1
Diagrama del árbol

Figura 3.31 Ejemplo de aplicación de la regla de la suma a partir de grafos en caso 2

PR4) Modelo de colocaciones. Caso de objetos distinguibles: son situaciones combinatorias simples que pueden modelarse mediante la colocación de r elementos en n urnas, con valores particulares de n y r.

Un club tiene nueve miembros. ¿De cuántas formas se puede elegir un comité de tres entre los miembros de ese club?

Figura 3.32 ejemplo de aplicación del modelo de colocaciones en el caso 2

PR5) Modelo de colocaciones Caso de Objetos indistinguibles: se calcula el número de colocaciones de objetos iguales en urnas distintas con las condiciones dadas.

Calcule el número de formas distintas de colocar 15 pelotas en una fila, si cuatro son rojas, tres son amarillas, seis son negras y dos son azules.

Figura 3.33 Ejemplo del caso de modelos indistinguibles en caso 2

PR6) Variaciones: Se identifican situaciones de muestreo donde es necesario tener en cuenta el orden de extracción de las muestras para la formación de configuraciones distintas.

> Se deben seleccionar en orden cuatro boletos de una rifa, de entre 20 que hay en un sombrero. El que tenga el primer boleto gana un automóvil, el segundo gana una motocicleta, el tercero una bicicleta y el cuarto una patineta. ¿De cuántas formas distintas se pueden ganar esos premios?

Figura 3.34 Variaciones en el caso 2

PR7) Permutaciones (Números factoriales): son situaciones que requieren formar o contar todas las ordenaciones posibles de un conjunto de datos.

> Una **permutación** de un conjunto de objetos distintos es un ordenamiento de esos objetos. Por ejemplo, algunas de las permutaciones de las letras *ABCDWXYZ* son las siguientes:
>
> *XAYBZWCD* *ZAYBCDWX* *DBWAZXYC* *YDXAWCZB*
>
> ¿Cuántas permutaciones son posibles? Como hay ocho alternativas para la primera posición, siete para la segunda (ya se ha elegido la primera), seis para la tercera (ya se eligieron las dos primeras), etcétera, de acuerdo con el principio fundamental de conteo, la cantidad de permutaciones posibles es
>
> $$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40{,}320$$

Figura 3.35 Ejemplo de permutaciones con números factoriales en caso 2

3.1.2.5 Elementos Validativos

Dentro de los argumentos e ideas presentadas por el texto, los elementos validativos presentado en el texto son:

V1: Comprobación de casos particulares y contraejemplos.

La comprobación de casos particulares y contraejemplos es utilizada por el texto en el momento que va a explicar los conceptos de Permutación y Combinación. A continuación se presentan los ejemplos de la sección Combinaciones.

Una **permutación** de un conjunto de objetos distintos es un ordenamiento de esos objetos. Por ejemplo, algunas de las permutaciones de las letras *ABCDWXYZ* son las siguientes:

XAYBZWCD *ZAYBCDWX* *DBWAZXYC* *YDXAWCZB*

¿Cuántas permutaciones son posibles? Como hay ocho alternativas para la primera posición, siete para la segunda (ya se ha elegido la primera), seis para la tercera (ya se eligieron las dos primeras), etcétera, de acuerdo con el principio fundamental de conteo, la cantidad de permutaciones posibles es

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40{,}320$$

Este mismo razonamiento, si se maneja n en vez de 8, conduce a la siguiente observación.

La cantidad de permutaciones de n objetos es $n!$

Figura 3.37 Comprobación de casos particulares y contraejemplos en el caso 2

- *V3:* Razonamientos algebraicos deductivos.

Acabamos de mostrar que $P(8, 5) = 6720$. Con los mismos argumentos podemos deducir una fórmula general de $P(n, r)$. En realidad, hay n objetos y r lugares para colocarlos. Por tanto hay n alternativas para la primera posición, $n - 1$ para la segunda, $n - 2$ para la tercera, y así sucesivamente. La última posición se puede llenar en $n - r + 1$ maneras. De acuerdo con el principio fundamental de conteo,

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

Esta fórmula se puede escribir en forma más compacta con la notación factorial:

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-r)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Figura 3.38 Razonamientos algebraicos deductivos en caso 2

3.2 ANÁLISIS CUANTITATIVO DE LOS CASOS ESTUDIADOS

A continuación se presenta un resumen de los elementos, así como de las categorías identificadas en los libros de texto del caso 1 y del caso 2.

3.2.1 Elementos Intensivos

Habiendo establecido anteriormente un análisis relativo a los elementos intensivos presentes en el caso 1 y en el caso 2, se puede ver que de las 19 categorías especificadas en el marco para las definiciones de los elementos básicos del análisis combinatorio, para el caso 1 se identifican 3 definiciones y para el caso 2, se contemplan 8 definiciones. A continuación se muestra una síntesis de lo estipulado anteriormente.

Tabla 3.2.1 Elementos intensivos presentes en los casos estudiados

				CASO 1	CASO 2
ELEMENTOS INTENSIVOS	DEFINICIONES	PRINCIPIOS BÁSICOS	SUMA		
			PRODUCTO	X	X
			COCIENTE		
		MÉTODOS GRÁFICOS	GRAFOS		X
			ARBOL		
		PERMUTACION	D1		X
			D2		
			D3		
			D4		X
			D5		
			D6		X
			D7		
		VARIACIONES	D8		
			D9	X	X
			D10		
		COMBINACION	D11		X
			D12	X	X
			D13		
			D14		

Se puede establecer que para el texto 1 y el texto 2 la relación de las categorías identificadas en los libros corresponde respectivamente a un 15,7% y 45,1% del total de categorías intensivas contempladas en el marco teórico (19 en total). Lo que deja ver un mejor balance para el segundo texto que para el primero. No obstante, en ninguno de los casos se supera el 50% de las definiciones contempladas.

3.2.2 Elementos Extensivos

Respecto a los tipos de problemas identificados en los libros de texto analizados se establece que de 8 categorías existentes, en el caso 1 se hacen presentes tres de ellas y en el caso 2 lo hacen 4 categorías.

A continuación se presenta un resumen de los elementos extensivos en los casos analizados.

Tabla 3.2.2 Elementos Extensivos presentes en los casos 1 y 2

			CASO 1	CASO 2
ELEMENTOS EXTENSIVOS	EXISTENCIA	P1		
	ENUMERACIÓN	P2	X	X
	CLASIFICACIÓN	P3		
	OPTIMIZACIÓN	P4		
	SELECCIÓN	P5,1	X	X
	COLOCACIÓN	P5,2	X	X
	PARTICIÓN	P5,3		X

Estableciendo así en el primer caso que los problemas mostrados están en un 42,8% (3 de 7 casos) y en el segundo caso en un 57,14%(4 de 7 casos) de los elementos descritos en el marco teórico como elementos extensivos. Lo cual indica un énfasis muy grande en los problemas de recuento por parte de ambos textos así como de los problemas de enumeración, no hablando de los problemas de existencia, clasificación y optimización; se observa en los tipos de problemas que se hace especial énfasis en situaciones sobre la enumeración usando situaciones de la vida cotidiana teniendo como contexto a números, personas y objetos. En este caso el texto dos incluye a la categoría de partición, lo cual hace que el texto dos sea más completo que el uno.

3.2.3 Elementos Ostensivos

Después de mostrar las categorías seleccionadas como referencia para los elementos ostensivos en el marco teórico, se puede afirmar que en ambos casos se usan todos los elementos ostensivos disponibles. A continuación se muestra una tabla con la descripción detallada del análisis.

Tabla 3.2.3 Elementos Ostensivos Presentes en los casos 1 y 2

<table>
<tr><th colspan="3"></th><th>CASO 1</th><th>CASO 2</th></tr>
<tr><td rowspan="5">ELEMENTOS OSTENSIVOS</td><td rowspan="3">TERMINOS</td><td>OT1</td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td>OT2</td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td>OT3</td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td colspan="2">NOTACIONES</td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td colspan="2">GRAFICOS</td><td>X</td><td>X</td></tr>
</table>

3.2.4 Elementos Actuativos

De un total de 10 categorías vistas alrededor de los procedimientos se observa que en el primer texto solo favorece al 20% de los procedimientos mientras que en el segundo caso se favoreció al 60% de los mismos. A continuación se muestra la tabla con la información más detallada de esta clasificación.

Tabla 3.2.4 Elementos Actuativos Presentes en los casos 1 y 2

			CASO 1	CASO 2
ELEMENTOS ACTUATIVOS	PROCEDIMIENTOS	PR1		
		PR2		
		PR3		X
		PR4	X	X
		PR5		X
		PR6		X
		PR7		X
		PR8	X	
		PR9		
		PR10		X

Se evidencia una mayor cobertura en el caso dos respecto a los elementos actuativos. No obstante, dentro del caso dos, es posible aumentar estos porcentajes si se potencian los problemas o situaciones que involucren problemas con permutaciones circulares, además de disminuir el énfasis en las permutaciones y combinaciones sencillas y realizar una distinción entre los distintos tipos de permutación y de combinación.

3.2.5 Elementos Validativos

En cuanto al material desarrollado por los textos que hicieron parte del análisis, la cantidad de categorías presentes en cuanto a elementos validativos es bastante baja, siendo este un vacio grande ya que se desconoce el uso de los gráficos para sustentar argumentos.

Tabla 3.2.5 Elementos validativos presentes en los textos analizados

			CASO 1	CASO 2
ELEMENTOS VALIDATIVOS	DEMOSTRACIONES Y ARGUMENTOS	V1		X
		V2		
		V3	X	X
		V4		

3.3 Conclusiones del análisis de textos

En este capítulo se llevó a cabo el análisis de dos libros de texto y su relación con el análisis combinatorio.

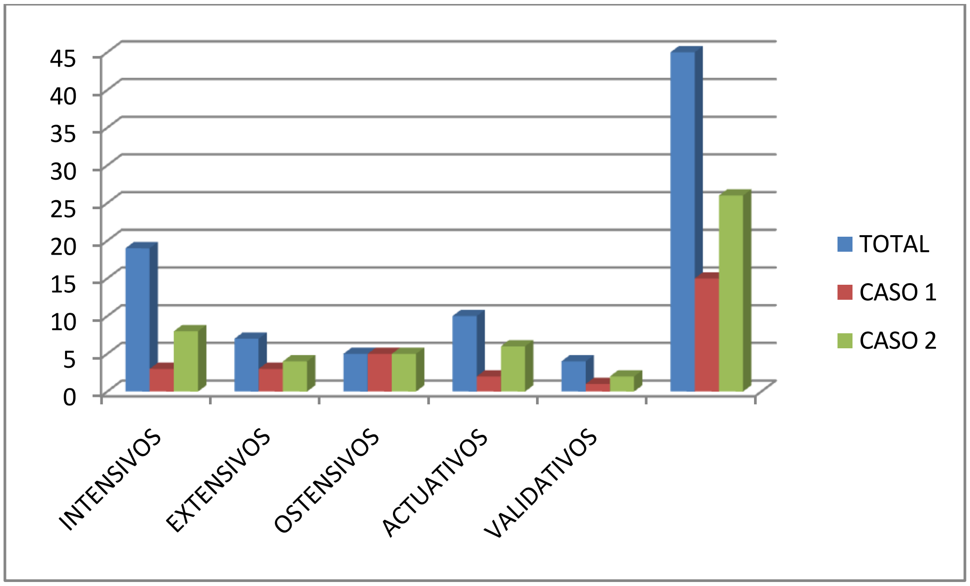
Se debe destacar que gran parte de los significados no se presentan en los textos seleccionados, tal es el caso de las definiciones y tipos de problema propias de los elementos intensivos y extensivos, especialmente en el primer texto. Cabe resaltar la gran diferencia existente en la inclusión de los elementos actuativos, ya que en el primer texto es del 20% mientras que en el segundo caso es del 60%, mostrando así una gran diferencia en contenidos.

Tabla 3.3.1 Elementos de significado en los casos citados

	TOTAL	CASO 1	CASO 2
INTENSIVOS	19	3	8
EXTENSIVOS	7	3	4
OSTENSIVOS	5	5	5
ACTUATIVOS	10	2	6
VALIDATIVOS	4	1	2
	45	15	26

Por tanto la cantidad de representaciones usadas en los libros en los dos casos es muy similar ya que los elementos ostensivos se pueden identificar en cantidades iguales, sin embargo el libro del caso 2 presenta una ventaja considerable en los aspectos intensivos y actuativos. A continuación se presenta un diagrama de barras de la información anteriormente presentada.

Gráfico 3.3.1 Elementos de significado en los casos 1 y 2



Quizás, una de las causas por las cuales gran cantidad de categorías no se contemplan y en algunos casos hay total ausencia en el estudio del análisis combinatorio, es el hecho de no utilizar más definiciones ya que utilizan muy pocas, en relación con todas los existentes en este campo de las matemáticas.

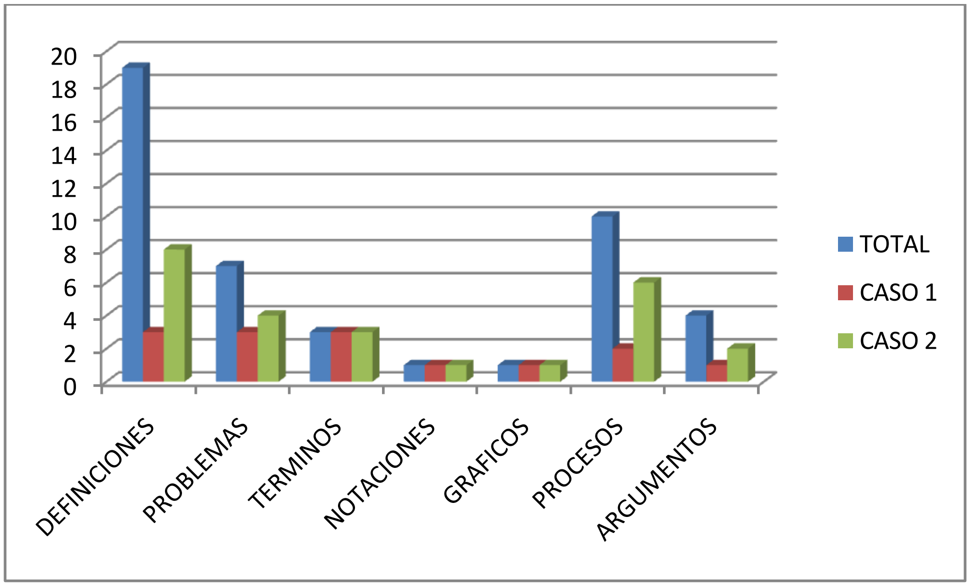
A continuación se presenta un resumen de las categorías de los elementos de significado presentes en los casos estudiados, que corroboran los resultados obtenidos hasta el momento.

Tabla 3.3.2 Categorías de los elementos de significado en los casos 1 y 2

	TOTAL	CASO 1	CASO 2
DEFINICIONES	19	3	8
PROBLEMAS	7	3	4
TERMINOS	3	3	3
NOTACIONES	1	1	1
GRAFICOS	1	1	1
PROCESOS	10	2	6
ARGUMENTOS	4	1	2

A continuación se muestra el gráfico 3.1.2 que permite ver el contraste de las categorías de los elementos de significados con respecto a los casos estudiados.

Gráfico 3.3.2 Categorías en los casos 1 y 2



Se puede ver una gran diferencia entre las categorías de definiciones, problemas, procesos y argumentos, mientras que en los términos, las notaciones y los gráficos existe una gran paridad en los textos en torno al análisis combinatorio.

CAPÍTULO 4. CONCLUSIONES

De acuerdo al estudio realizado se puede establecer en primera instancia que el análisis combinatorio es un concepto que encierra distintas componentes: de tipo conceptual, de formulación de problemas, de notaciones y representaciones, de desarrollo y procedimientos, y validaciones; componentes que son denominadas como elementos de significado intensivos, extensivos, ostensivos, actuativos y de validación, respectivamente. Lo que hace que el análisis combinatorio desde la perspectiva ontosemiótica, sea un concepto extenso y complejo pues su significado contiene diferentes directrices de estudio.

En segunda instancia, se puede decir de acuerdo al análisis curricular desarrollado y propiamente a los estándares curriculares colombianos, que durante los últimos 30 años estos contemplan una mínima parte de los elementos de significado establecidos, ya que en el documento de los estándares en matemáticas (MEN, 2003) y en los anteriores se hace mención de manera insuficiente comparado con otros temas como las medidas de tendencia central por citar un ejemplo. Esto se puede considerar ínfimo al contemplar la extensión del tema de estudio, restringiendo el uso y las posibles aplicaciones de un tema que posee una gran aplicabilidad en las ciencias y en la vida cotidiana.

En tercera instancia, en el análisis de textos se pudo establecer que los elementos de significación identificados en los libros son escasos confrontándolo con el marco teórico construido. Esta situación parece coherente con la situación actual de la Probabilidad en la educación colombiana, ya que aunque esté presente en la recomendaciones de los lineamientos (MEN, 2006) y estándares curriculares (MEN, 2003) en la práctica se le presta poca importancia a nivel escolar. Además, la escasa literatura que existe sobre el mismo, incide en que se le dedique poca atención y tiempo de trabajo dentro del aula.

Respecto de los elementos de significado del análisis combinatorio, existe un gran esmero por mostrar los procedimientos, definiciones, fórmulas y demás elementos relacionados con el tema, pero estos no son tratados en su amplia gama de categorías, esto debido a que los ejercicios presentados se enmarcan en el cálculo de permutaciones y combinaciones simples, en algunos casos con y sin repetición, desconociendo otros tipos de colocaciones los cuales enriquecerían mucho mas el estudio del análisis combinatorio. Además, se desconoce en su mayoría el uso del binomio de Newton como camino para llegar a los números combinatorios, lo cual se puede mejorar haciendo uso de los mismos en próximos libros de texto. También es importante indicar que el uso de gráficos, como los diagramas de árbol y los grafos, es escaso, ya que solamente aparece un ejemplo por texto estudiado.

Para terminar, creo imprescindible que se analicen los elementos de significado que tienen los diferentes objetos matemáticos que como docentes enseñaremos a nuestros estudiantes, esto con el fin de brindarles nuevas herramientas y así generar un mejor aprendizaje; que es el propósito de nuestra labor como profesores.

REFERENCIAS

Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de tendencia central. UNO, p.p 25, 41 – 58.

Batanero, C. Godino, J., Navarro-Pelayo, V. (1994). Razonamiento Combinatorio. SINTESIS, p.p 24 – 42, 49 - 54, 89 – 92, 109 – 113

Batanero, C. Godino, J. Navas, F. (1997). Concepciones de maestro de primario en formación sobre los promedios. LOGSE. p.p. 310 –314

Batanero, C. Cañizares, J. Godino, J. Roa, R. (1991). Estrategias en la Resolución de Problemas Combinatorios por Estudiantes con Preparación Matemática Avanzada. *Epsilon. 36, p.p* 433 - 446

Cifuentes, J. Salazar, F. (2010) Hipertexto 11 Matemáticas. SANTILLANA, p.p 307- 311.

Echeverry, A. y Vergel, R (2004) Modulo de estadística y probabilidad. Trabajo monográfico realizado en el marco de la Especialización en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional de Bogotá

MEN (2003). Estándares Básicos De Calidad En Matemáticas. Bogotá. Ministerio de Educación Nacional.

MEN (2006). Lineamientos Curriculares Matemáticas. Bogotá. Ministerio de Educación Nacional.

Stewart, J. (2004). Introducción al Calculo. THOMPSON LEARNING, p.p 607 – 620.

Wilhelmi, M. (2004). Combinatoria y probabilidad. UNIVERSIDAD DE GRANADA, p.p 45 – 57.