Análisis semiótico de la función lineal en el álgebra de Baldor

Alvaro Raúl Córdoba Belalcázar
raulcord1985@gmail.com

Resumen

Esta investigación centra su atención en la complejidad que subyace al aprendizaje de dos de los registros semióticos de mayor uso al abordar el tema de la función lineal, el registro de las expresiones algebraicas y el registro de los gráficos cartesianos, diferenciar el objeto matemático aquí representado de sus diferentes representaciones, la coordinación de estos dos registros e identificar los fenómenos que hacen que esta acción no se desarrolle, como lo es el fenómeno de no congruencia. Es necesario para que haya un aprendizaje significativo del objeto matemático "función lineal".

Introducción

La semiótica es un campo de estudio, una metodología de análisis y una estrategia crítica que comenzó hace dos mil quinientos años atrás en la India y la Antigua Grecia, como una indagación en el conocimiento, en el lenguaje y en la problemática específica de los signos.

Esta disciplina es ineludible en la Educación Matemática porque todo objeto matemático cobra vida por medio de sus representaciones, la función lineal es un aspecto sobre los cuales la enseñanza de las matemáticas en los grados octavo y noveno de la educación básica dedica grandes espacios de tiempo para su reflexión. Sin embargo, es común ver en estudiantes de dichos grados que no saben diferenciar la expresión algebraica que representa a una línea recta que pasa por el origen de otra que no lo hace. Lo mismo sucede para el caso de tener que diferenciar la representación en escritura algebraica de una línea recta de pendiente positiva y una de pendiente negativa.[1]

Los registros de representación de los gráficos cartesianos y de la escritura algebraica juegan un papel determinante en la movilización del objeto matemático referenciado en el párrafo anterior, tomando en cuenta simultáneamente estos dos registros de representación y no cada uno de manera aislada, es como se puede analizar la importancia de las representaciones semióticas en la actividad cognitiva matemática. Así, el estudio de los fenómenos que se encuentran en la conversión de un registro al otro explican muchas de las dificultades que viven los estudiantes al aprender la función lineal.

Este trabajo se desarrollará en tres capítulos, en el primero se analizará aspectos generales sobre las representaciones semióticas, las actividades que éstas deben cumplir para ser consideradas como tal, y el fenómeno de no congruencia; en el segundo se centrará la atención en la articulación de los dos registros de interés y finalmente se hará un análisis de congruencia de los mismos tomando como objeto de análisis ejercicios del Álgebra de Baldor.

Marco teórico

Las actividades cognitivas fundamentales de las representaciones ligadas a la semiosis

Dentro del mundo de las representaciones existen dos actividades que explican su comportamiento una de ellas es la Semiosis ligada a la aprehensión o la producción de una representación semiótica; y la Noesis que tiene que ver con los actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto.

Hay tres actividades cognitivas de representación inherentes a la semiosis. La primera es, evidentemente, la formación de representaciones en un registro semiótico particular, ya sea para "expresar" una representación mental, o bien para "evocar" un objeto real. Esta formación implica siempre una selección en el conjunto de los caracteres y de las determinaciones que constituyen lo se "quiere" representar. Las otras dos actividades están directamente ligadas a la propiedad fundamental de las representaciones semióticas; su transformabilidad en otras representaciones que conservan ya sea todo el contenido de la representación inicial, o bien sólo una parte de ese contenido. Estas son: el tratamiento y la conversión.

El tratamiento

El tratamiento es la transformación de una representación en otra representación de un mismo registro. Esta actividad es pues una transformación estrictamente interna a un registro: utiliza únicamente las posibilidades de funcionamiento propio al sistema; así, las paráfrasis o las reformulaciones en lengua natural, el cálculo con un sistema de escritura de números, las anamorfosis con las representaciones icónicas, las reconfiguraciones con el registro de las figuras geométricas; son ejemplos de tratamiento.

La conversión

La conversión es una transformación de la representación de un objeto dado en un registro, en otra representación del mismo objeto, en otro registro. La característica de la conversión es conservar la referencia al mismo objeto pero sin conservar la explicitación de las mismas propiedades de ese objeto. En este sentido la representación del objeto del registro de llegada no tendrá el mismo contenido que su representación en el registro de partida.

Esta actividad presenta dos características que no se encuentran en el tratamiento y que cimientan una operación cognitivamente mucho más compleja y mucho más evolucionada que las operaciones de tratamiento.

Esta orientada: y, por tanto, siempre es necesario precisar cual es el registro de partida y cual es el registro de llegada.

Puede ser congruente o no congruente. Esto quiere decir que el pasaje entre dos representaciones de un mismo objeto puede ser congruente en un sentido y no congruente en el otro. En algunos casos, el pasaje de un registro a otro se hace de manera casi espontánea. Se hablará entonces de congruencia: la representación del registro de partida es transparente a la representación del registro de llegada. En otros casos, la representación del registro de partida se hace opaca y no deja pensarse como una representación en el registro de llegada. Se hablara entonces de no congruencia. [2]

No-congruencia y encerramiento de los registros de representación

Las dificultades que se tienen por la no-congruencia de la conversión se deben en parte al desconocimiento de uno de los dos registros de representación.

Tal es el caso de los diferentes registros bi-dimensionales como los gráficos cartesianos, las figuras geométricas o incluso las tablas; es decir, para todos los registros en los que muy fácilmente se admite que es suficiente "ver" lo que las curvas, los dibujos muestran.

Es evidente en la enseñanza el desconocimiento del registro de representación de los gráficos cartesianos porque los alumnos muy rápidamente saben construir una recta o una curva en un plano marcado, en virtud de la regla de punteo donde a una dupla de números le hace corresponder un punto

en el plano. En efecto, cuando la conversión se efectúa en el sentido escritura algebraica de una ecuación hacia el gráfico, no parece surgir ninguna dificultad específica. Pero todo cambia cuando es necesario hacer la conversión inversa, incluso después de la enseñanza de las funciones lineales.

En realidad, las unidades significantes del gráfico (recta, curva...) no están de ninguna manera determinados por la relación con los puntos marcados en un fondo cuadriculado. Esas unidades están determinadas por algunos valores visuales de la recta (o de. la curva...), que están separados del fondo constituido por los dos ejes orientados. Las unidades significantes de un gráfico corresponden a los valores de diferentes variables visuales. El alumno que no discrimina estas variables, es como si fuera ciego para la conversión inversa aquella que se enseña habitualmente. Esto quiere decir que él tiene pocas oportunidades para hacer una lectura correcta de los gráficos.

Este problema induce a los estudiantes a quedarse en el caso donde se presenta congruencia entre los registros porque la conversión es trivial y transparente, pero, los casos de conversión entre representaciones congruentes son quizás tan frecuentes como los de conversión entre representaciones no-congruentes, se podría pues creer que las dificultades debidas a la no-congruencia son un fenómeno secundario. En realidad, tal visión es engañosa puesto que los fracasos debidos a la no-congruencia revelan un encerramiento de los registros de representación. Este encerramiento persiste incluso después de que la enseñanza aparentemente haya movilizado diferentes registros de representación. Ahora bien, como se ve, la coordinación de los diferentes registros de representación es una condición necesaria para la comprensión de un contenido matemático.[3]

Los criterios de congruencia entre representaciones

Para determinar si dos representaciones son congruentes o no, es necesario comenzar por segmentarlas en sus respectivas unidades significantes, de manera tal que puedan ser puestas en correspondencia. Al término de esta segmentación comparativa, entonces se puede ver si las unidades significantes son, en cada uno de los dos registros, unidades significantes simples o combinaciones de unidades simples. Esta comparación puede hacerse directamente o por intermedio de una tercera representación que de alguna manera "codifique" las representaciones que se quieren comparar.

Luego se debe examinar si cumplen con los tres criterios de congruencia citados a continuación:

El primero es la posibilidad de una correspondencia "semántica" de los elementos significantes: a cada unidad significante simple de una de las representaciones, se puede asociar una unidad significante elemental. Se considera como unidad significante elemental toda unidad que depende del "léxico" de un registro. El segundo criterio es la univocidad "semántica" terminal: a cada unidad significante elemental de la representación de salida, no le corresponde más que una única unidad significante elemental en el registro de la representación de llegada.

El tercer criterio es relativo a la organización de las unidades significantes. Las organizaciones respectivas de las unidades significantes de las dos representaciones comparadas, conduce a que las unidades en correspondencia semántica sean aprehendidas en el mismo orden en las dos representaciones.

Unidades significantes del registro semiótico de la escritura algebraica

En la escritura de la forma general de una recta y=ax+b donde “a” es el coeficiente director y “b” una constante añadida, la discriminación de las unidades significantes propias a esta expresión algebraica es relativamente evidente. Hay:

Los signos relacionados (¨<,>, =,…),

- Los símbolos de operación o de signo (+,-)
- Los símbolos de variable,
- Los símbolos de exponente, de coeficiente y de constante.

En una expresión algebraica, cada símbolo corresponde generalmente a una unidad significativa. Hay, sin embargo, unidades significativas en las que los símbolos se omiten: el coeficiente 1, el carácter “positivo” de los coeficientes mayores que 0. Así, no se escribe y=+1x, pero en cambio si se escribe y=-2x. Recordar esta trivialidad es importante cuando se trata de poner en correspondencia las variables visuales pertinentes de la gráfica y de las unidades significativas de la escritura algebraica.[4]

Unidades significantes del registro semiótico de los gráficos cartesianos

La discriminación de las propiedades de las figuras de una representación gráfica, es por el contrario, menos evidente. Retomando ciertas variables visuales definidas por Bertín (1977,186-189), que corresponden a una simple modificación de la configuración trazo-realizado/ejes orientados son:

VARIABLES VISUALES	VALORES DE LAS VARIABLES VISUALES
El sentido de la inclinación del trazo:	El trazo sube de izquierda a derecha. El trazo *desciende* de izquierda a derecha.
Los ángulos del trazo con los ejes:	Hay una *partición simétrica* del cuadrante atravesado. El ángulo formado con el eje horizontal es menor que el formado con el eje vertical. El ángulo formado con el eje horizontal es mayor que el formado con el eje vertical.
La posición del trazo respecto al origen del eje vertical:	El trazo corta al eje y arriba del origen. El trazo corta el eje y abajo del origen. El trazo corta al eje y en el origen.

La primera de las tres variables visuales particulares puede entonces tomar dos valores, la segunda puede tomar tres y la tercera otros tres. Hemos omitido dos casos, aquellos en los cuales la recta es paralela a uno de los dos ejes: ya no hay que tener en cuenta los valores de las variables precedentes, es suficiente con leer el valor del punto de intersección de la recta con el otro eje.[5]

Correspondencia entre las unidades significantes del registro algebraico y cartesiano A cada uno de los ocho valores de las variables visuales particulares corresponde una unidad significativa en la escritura algebraica de la ecuación de la recta: lo que importa en la escritura y = ax+b es el coeficiente a y la constante b.

VARIABLES VISUALES	VALORES	UNIDADES SIMBÓLICAS CORRESPONDIENTES
Sentido de inclinación:	Trazo ascendente Trazo descendente	Coeficiente >0, ausencia del símbolo +. Coeficiente <0, presencia del símbolo -.
Angulo con los ejes	Partición simétrica Angulo menor Angulo mayor	Coeficiente = 1 Coeficiente < 1 Coeficiente > 1
Posición sobre el eje Y.	Corta arriba Corta abajo Corta en el origen	Se añade una constante de signo +. Se sustrae una constante de signo -. No presenta.

Metodología

El presente proyecto está dirigido al análisis del texto Algebra de Baldor donde se ponga en acto el paso del registro de los gráficos cartesianos hacia el registro de la escritura algebraica y viceversa. El análisis de esta información se hará de acuerdo con el modelo teórico que propone Raymond Duval, en relación la actividad cognitiva vinculada con el cambio de registros semióticos de representación.

Conclusiones

El Algebra de Baldor sólo tiene en cuenta la conversión de las expresiones algebraicas hacia el registro gráfico, permitiendo desarrollar algoritmos, tratamientos dejando de lado la actividad de coordinación necesaria para un aprendizaje significativo. Además se ve que los ejercicios que se dan en este sentido son congruentes, ellos cumplen con los tres criterios de congruencia.

La discriminación de las unidades significantes de registro de las representaciones gráficas exigen un trabajo de aprendizaje particular, para su utilización, no se puede remitir a la interpretación espontánea e inmediata que esta ligada a la percepción de las figuras y de las imágenes.

Al enseñar la función lineal se deben proponer secuencias de aprendizaje que movilicen de manera controlada varias actividades cognitivas.

Bibliografía

AURELIO, BALDOR. *Algebra Elemental.* Cultural Colombia, Ltda, Bogota, 1972.

DUVAL, R. *Gráficas y Ecuaciones: la articulación de dos registros.* Traducción de Myriam Vega Restrepo, Universite Louis Pasteur, Strasbourg: IREM, 1988.

DUVAL, R. *Las representaciones gráficas: funcionamiento y condiciones de su aprendizaje.* Documento Universitario, Traducción de Myriam Vega Restrepo, Universite Louis Pasteur, Strasbourg: IREM, 1988.

MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL. Matematicas: *Lineamientos Curriculares.* Santa Fé de Bogotá. Panamericana Formas e impresos. 1998.

DUVAL, R. Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo. Cali: Universidad del Valle, 1999.

DUVAL, R. *Semiosis y pensamiento humano.* Traducción de Myriam Vega Restrepo, Cali: Universidad del Valle, 1999.

[1]Duval, R. *Semiosis y pensamiento humano*. Traducción de Miriam Vega Restrepo. Cali: Universidad del Valle, 1999. p. 45.

[2] Duval, R. *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo*. Cali: Universidad del Valle, 1999. p. 44-45.

[3] Duval, R. *Semiosis y pensamiento humano*. Traducción de Miriam Vega Restrepo. Cali: Universidad del Valle, 1999. p. 53-54.

[4] Duval, R. *Graficas y ecuaciones, la articulación de dos registros.* Université Louis Pasteur, IREM, Strasbourg, 1988. p. 127.

[5] Ibid, p. 128.