DESCRIPCIÓN DE LA CONSTRUCCIÓN Y VALIDACIÓN DE LAS CONJETURAS LOGRADAS POR UN GRUPO DE ESTUDIANTES DEL CURSO DE GEOMETRÍA ANALÍTICA AL REALIZAR UNA TAREA SOBRE LOS CENTROS DEL TRIÁNGULO EN UN APPLET

Mery Viviana Pinzón Morante

2007140040

Víctor Andrés Torres Chala

2007140057

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Bogotá D.C, Colombia

2013

DESCRIPCIÓN DE LA CONSTRUCCIÓN Y VALIDACIÓN DE LAS CONJETURAS LOGRADAS POR UN GRUPO DE ESTUDIANTES DEL CURSO DE GEOMETRÍA ANALÍTICA AL REALIZAR UNA TAREA SOBRE LOS CENTROS DEL TRIÁNGULO EN UN APPLET

Mery Viviana Pinzón Morante

2007140040

Víctor Andrés Torres Chala

2007140057

Trabajo de grado entregado para optar el título de Licenciado en Matemáticas

Asesora

María Nubia Soler Álvarez

Profesora Departamento de Matemáticas

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Bogotá, Colombia

2013

Nota de aceptación

Firma del jurado

Firma del jurado

Bogotá D.C. 30 de Enero de 2013

	FORMATO
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE
Código: FOR020GIB	Versión: 01
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 1 de 4

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Titulo del documento	**Descripción de la construcción y validación de las conjeturas logradas por un grupo de estudiantes del curso de Geometría Analítica al realizar una tarea sobre los centros del triángulo en un Applet**
Autor(es)	PINZON MORANTE Mery Viviana, TORRES CHALA Víctor Andrés
Director	SOLER ÁLVAREZ María Nubia
Publicación	Bogotá, D.C., Universidad Pedagógica Nacional
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional. Facultad de Ciencia y Tecnología. Departamento de Matemáticas. 2013
Palabras Claves	Conjeturar, líneas notables, puntos notables, matemática dinámica

2. Descripción
En este trabajo se exponen y analizan las conjeturas que realizaron algunos estudiantes de la clase de Geometría analítica de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional de primer semestre del año 2012, al resolver un problema sobre los puntos notables de un triángulo en un ambiente de geometría

dinámica.

Se describe el proceso que llevó cada uno de los estudiantes para la resolución del problema y se muestra la manera cómo lograron la validación de las conjeturas.

Se plantean algunas conclusiones a nivel teórico y metodológico sobre los procesos de conjeturación en la resolución del problema planteado y las diversas conjeturas que con base en él se construyeron.

3. Fuentes

Entre los recursos seleccionados para la elaboración de este trabajo, se destacan trabajos relacionados con los procesos de elaboración de conjeturas, puntos y líneas notables de un triángulo. Entre las fuentes más relevantes se encuentran las siguientes:

1. Cañadas, M., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D. y Yevdokimov, O. (2008). Perspectivas teóricas en el proceso de elaboración de conjeturas e implicaciones para la práctica: tipos y pasos. España: Universidad de Zaragoza.

2. Soler, M. y Carranza E. (2012). Razonamientos abductivos, inductivos y deductivos desarrollados por estudiantes del curso de geometría analítica al realizar una tarea relacionada con la representación de objetos geométricos en distintos sistemas coordenados. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

3. Barreto, B. D (2008) *La geometría del triángulo*. Recuperado el 15 Noviembre, 2012de:http://ficus.pntic.mec.es/dbab0005/triangulos/Geometria/pdf/Global.pdf

4. Corral, C. A. (2012). Generalidades del triángulo. Recuperado el 15 de noviembre, 2012 de: http://acorral.es/triangeo/triangulos.pdf

4. Contenidos

El presente documento está conformado por cinco capítulos organizados como sigue: en el primero se encuentra la justificación, el planteamiento del problema, la pregunta de investigación y los objetivos; en el segundo capítulo se desarrolla el marco de referencia mostrando una parte matemática y una parte teórica acerca del proceso de conjeturar basada en el documento de Cañadas y otros donde se exponen los pasos que se deben seguir en el proceso de conjeturar; en el tercer capítulo hace referencia a la metodología en el que se describen los pasos realizados para lograr la creación de la tarea y las herramientas usadas para la recolección de la información, además se presentan algunas posibles soluciones que se dieron a la tarea por parte de los autores de este trabajo de grado; en el cuarto capítulo se encuentra el análisis de la información recogida y en el último se presentan conclusiones y recomendaciones.

5. Metodología

Para la realización de este trabajo de grado, se tuvieron en cuenta 3 etapas: la primera, diseño de la tarea a realizar por los estudiantes, la segunda, la implementación de la tarea y recolección de la información, la tercera, análisis de la información recogida desde la propuesta de Cañadas et al.

6. Conclusiones

1. Retomando la propuesta de Cañadas et al (2008) y teniendo en cuenta la información recogida, se observó que los estudiantes realizaron las siguientes etapas durante el proceso de conjeturar llevado a cabo:

- Observación de los datos
- Estudio de la tarea

- Formulación de una conjetura
- Verificación de conjetura
- Validación de conjetura

2. El plantear tareas apoyadas en la utilización de un software matemático permite al estudiante tener dos medios para realizar la validación de sus conjeturas, uno es por medio del mismo programa y otro a través de cálculos matemáticos. Aunque el primero tiene un poco menos de validez, ayuda al estudiante a comprobar si sus cálculos son correctos.

Desde nuestra formación como docentes nos permitió observar que no se deben generalizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, ya que aunque los estudiantes que desarrollaron la tarea pertenecían al mismo curso de Geometría Analítica, ellos no realizaron los mismos procesos

Elaborado por:	PINZON MORANTE Mery Viviana, TORRES CHALA Víctor Andrés
Revisado por:	SOLER ÁLVAREZ María Nubia

Fecha de elaboración del Resumen:	30	01	2013

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

Realizar conjeturas es fundamental para el desarrollo del pensamiento matemático, pues hace parte de la actividad que realizan los matemáticos al construir conocimiento en esta área; a través del proceso de demostrar la validez de las conjeturas es posible tener una certeza del resultado de una tarea o un problema propuesto y por lo tanto llegar a su solución o avanzar en ella.

Este trabajo de grado está enfocado principalmente a realizar un estudio sobre el proceso de conjeturar utilizado por algunos estudiantes del curso de Geometría Analítica de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional de primer semestre del año 2012.

Para realizar el estudio sobre el proceso de conjeturación, se parte del apoyo del grupo de investigación "Clase de matemáticas" del cual surgió un Applet que plantea un ejercicio que busca involucrar los puntos notables de un triángulo y que permite dar distintas posibilidades de solución al ejercicio matemático propuesto. Teniendo en cuenta lo anterior, fue necesario investigar los sustentos teóricos que le dan validez al problema plateado en el Applet, dentro de los cuales están los teoremas de los puntos notables de un triángulo y demostraciones matemáticas, las cuales posibilitan pensar diversas formas para hallar una solución a una tarea o problema propuesto.

Los resultados que se muestran en este trabajo son el producto del análisis del ejercicio realizado por los estudiantes a la luz de la clasificación de los pasos para el planteamiento y la validación de una conjetura, expuesta por Cañadas, Deulofeu, Figueiras, Reid y Yevdokimov (2008). Se puede observar como los estudiantes realizaron diferentes exploraciones antes de llegar a una conjetura.

De acuerdo con lo anterior se elaboraron conclusiones enfocadas a mostrar la estructura de la clasificación de los pasos que realizan los estudiantes al momento de sacar conjeturas con ayuda de un programa de geometría dinámica; así como recomendaciones de tipo metodológico para superar las contingencias en el momento de recopilar la información frente a los grupos de estudio y los problemas plateados.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este capítulo se presenta la justificación del presente trabajo de grado, así como los objetivos que se buscan con el desarrollo del mismo.

1.1. JUSTIFICACIÓN

Este trabajo busca dar respuesta a la pregunta ¿Cuál es el proceso de elaborar y verificar conjeturas realizado por los estudiantes del curso de Geometría Analítica al desarrollar una tarea relacionada con los puntos notables de un triángulo, que involucra el uso de Applets de Matemática Dinámica?

Teniendo en cuenta que en la literatura consultada se encontraron muy pocos documentos sobre el proceso que lleva a cabo una persona al plantear y validar una conjetura con ayuda de un ambiente de geometría dinámica, este trabajo se realizó con el fin de ampliar la información acerca de éste y lograr resolver la pregunta formulada anteriormente.

Otra finalidad de este trabajo de grado fue apoyar y aportar al proyecto de investigación "Clase de matemáticas", describiendo los procesos de formulación y validación de conjeturas, aspecto que es útil para el análisis que se hace en dicho proyecto. Este análisis consiste en describir las características de las tareas que favorecen el desarrollo de los pasos del proceso de conjeturar.

Por último, se consideró que al realizar este trabajo se pueden orientar y brindar las herramientas para planear una clase usando programas de *matemática dinámica*[1]*;* los maestros en formación encontrarán en este tipo de software un posibilidad de trabajar con sus estudiantes dos aspectos importantes de la actividad matemática como lo son formular y verificar conjeturas, ofreciendo la oportunidad de que ellos analicen y construyan diversas formas de resolución a un mismo problema matemático.

---

[1] Por *software de matemática dinámica* se está entendiendo, aquellos que tienen herramientas matemáticas de diferentes áreas como cálculo, álgebra, geometría, estadística, entre otros. Desde esta definición Geogebra se puede considerar como un software de *matemática dinámica*.

1.2. OBJETIVOS

1.2.1. GENERAL

Estudiar y describir los procesos de formulación y validación de conjeturas llevadas a cabo por estudiantes del curso de Geometría Analítica al realizar una tarea relacionada con los centros del triángulo utilizando un software de *matemática dinámica*.

1.2.2. ESPECÍFICOS

1. Estudiar la propuesta de Cañadas et al (2008) sobre el proceso de conjeturación.
2. Diseñar e implementar una tarea que permita a un grupo de estudiantes del curso geometría analítica realizar procesos de conjeturación.
3. Desde el proceso de conjeturar propuesto por Cañadas et al (2008), identificar y describir de los pasos de dicho proceso que son utilizados por estudiantes del curso Geometría Analítica la Licenciatura en Matemáticas al realizar la tarea diseñada.

2. MARCO DE REFERENCIA

En este capítulo se presentan los referentes teóricos que sustentan el trabajo de grado realizado.

2.1. MARCO MATEMÁTICO

La tarea diseñada involucra propiedades relativas a puntos y líneas notables de un triángulo, por lo tanto, se hace necesario realizar una breve presentación de algunos hechos geométricos relacionados con ellos y que son relevantes en la solución de dicha tarea.

2.1.1. Mediatriz

Inicialmente se hace la definición de un segmento como la recta perpendicular que intersecta al punto medio del mismo, desde esta definición se dice que la mediatriz de un lado del triángulo es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de cada uno de los extremos de dicho lado. La figura 1 presenta un ejemplo de las mediatrices de un triángulo ABC.

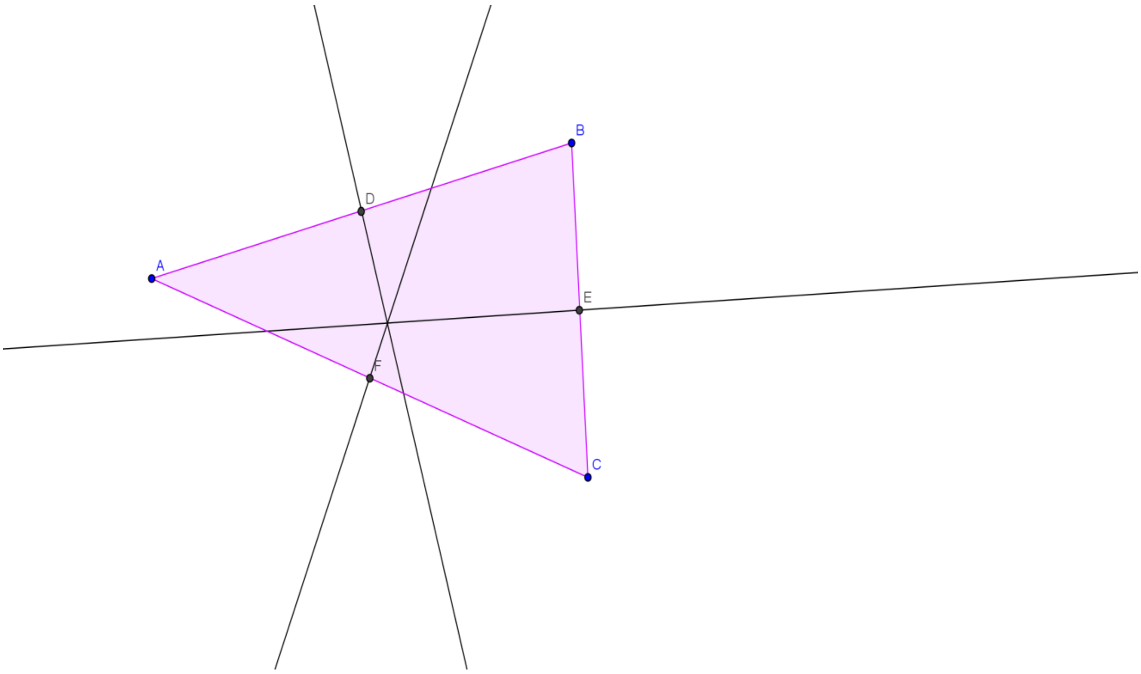


Figura 1. Ejemplo de mediatrices en un triángulo ABC.

Para la bisectriz se presentan los siguientes teoremas, la demostración de los mismos se encuentra en el anexo 1.

Teorema 1.
Las mediatrices de un triángulo concurren en un punto llamado circuncentro.

Notemos que en la figura 2 $GA = GB = GC$, por lo tanto podemos trazar una circunferencia con centro en G y radio GA que pase por los tres vértices del triángulo. A dicha circunferencia se le conoce como el circuncírculo o circuncircunferencia del triángulo, y al radio de esta circunferencia se le conoce como el circunradio.

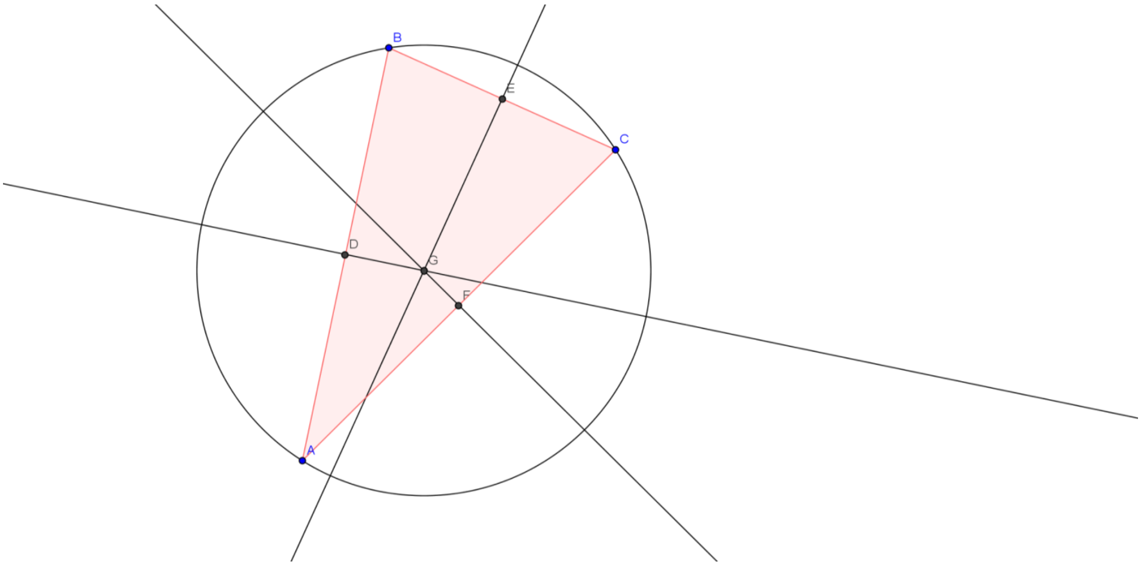


Figura 2. Circunferencia con centro en el circuncentro G del triángulo ABC y que contiene los vértices de este último.

Teorema 2.
En un triángulo dado la razón entre un lado y el seno del ángulo opuesto es igual a dos veces el circunradio del triángulo. Es decir que, dado un triángulo ABC con sus respectivos lados a, b, c y circunradio R, se cumple la relación:

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC} = 2R$$

Teorema 3.
El área de un triángulo es igual al semiproducto de dos lados cualesquiera por el seno del ángulo que forman. Es decir que dado un triángulo ABC con sus respectivos lados a, b, c, se cumple que:

$$area\ (ABC) = \frac{1}{2} ab\ sen\ C = \frac{1}{2} ac\ sen\ B = \frac{1}{2}\ cb\ sen\ A$$

Teorema 4.
El área de un triángulo está dada por el producto de la medida de sus tres lados dividido cuatro veces el circunradio.

2.1.2. Mediana

Una mediana de un triángulo es un segmento cuyos extremos son uno de los vértices del triángulo y el punto medio de su lado opuesto. En figura 3 se presenta un ejemplo de las medianas de un triángulo dado.

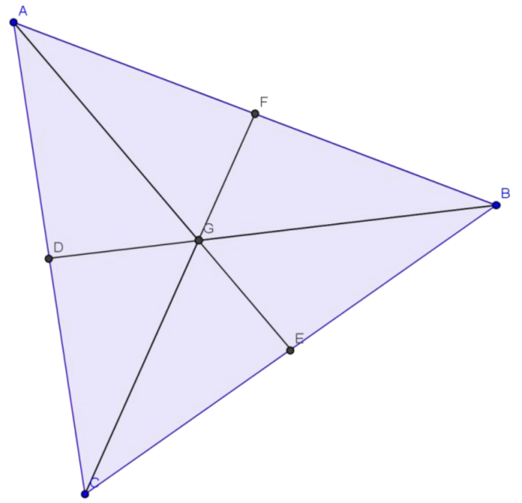


Figura 3. Representación de cada una de las medianas de un triángulo.

Con respecto a este hecho geométrico existen los siguientes teoremas para los cuales se presenta la demostración en el anexo 2.

Teorema 1.
Las tres medianas de un triángulo son concurrentes. El punto de concurrencia se conoce como el Gravicentro, Centroide o Baricentro del triángulo, dicho punto está situado a una razón de 2:1 desde el vértice al punto medio.

Teorema 2. El baricentro de un triángulo con vértices $A\,(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ *y* $C\,(x_3, y_3)$ *tiene coordenadas:*

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

Teorema 3.
Los seis triángulos determinados por las medianas de un triángulo tienen igual área.

Teorema 4.

Los tres triángulos determinados por los segmentos cuyos extremos son el baricentro y cada uno de los vértices del triángulo tienen igual área (Ver figura 4). El Baricentro de dicho triángulo es el único punto con tal propiedad.

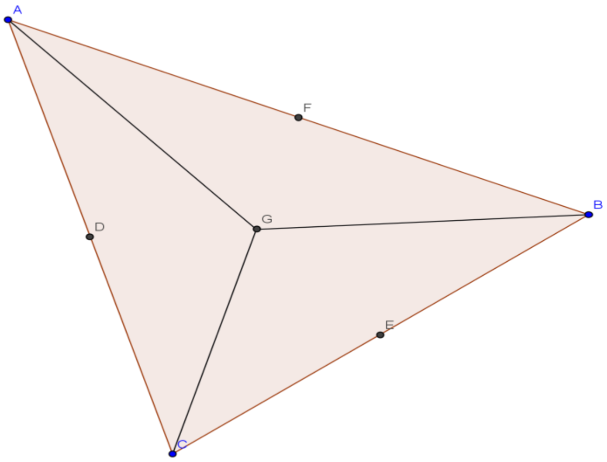


Figura 4. Triángulos determinados al trazar las medianas de un triángulo ABC.

Teorema 5.
El baricentro siempre está situado en el interior del triángulo. En la figura 5 se muestran el baricentro para algunos triángulos en los cuales se puede evidenciar esta propiedad.

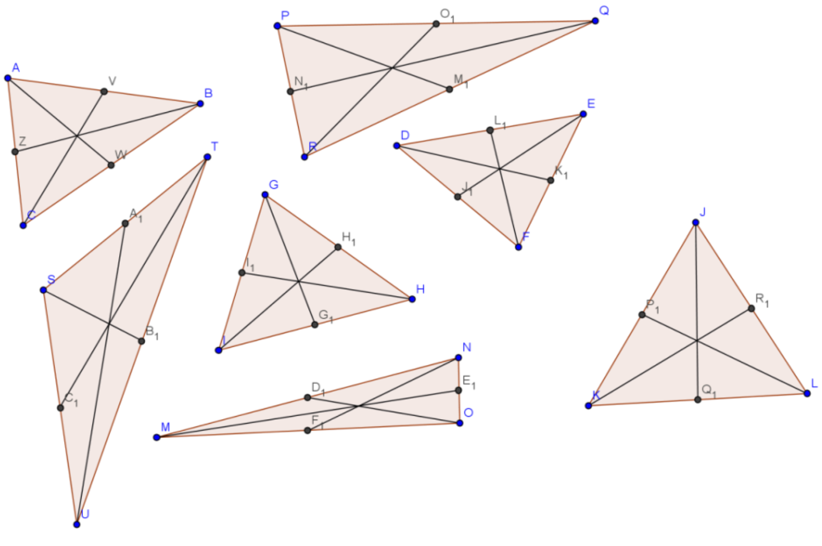


Figura 5. Ejemplos de baricentro en un triángulo dado.

Teorema 6.
El baricentro siempre está situado a $\frac{2}{3}$ del vértice y a $\frac{1}{3}$ del punto medio, es decir que el baricentro divide a la mediana en dos segmentos con la característica de

que uno es el doble del otro, para esta afirmación se muestra un ejemplo en la figura 6.

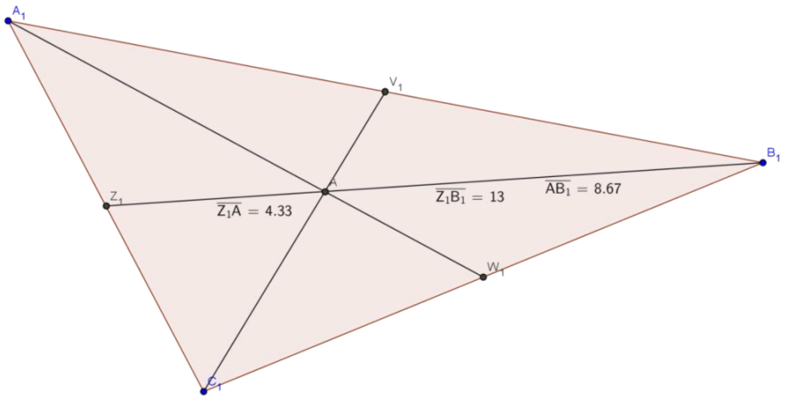


Figura 6. Ejemplo de la ubicación del baricentro en un triángulo ABC.

2.1.3. Altura

Una altura de un triángulo es un segmento perpendicular a la recta que contiene uno de los lados del triángulo y que pasa por el vértice opuesto a dicho lado. En la figura 7 se presenta las alturas del triángulo ABC.

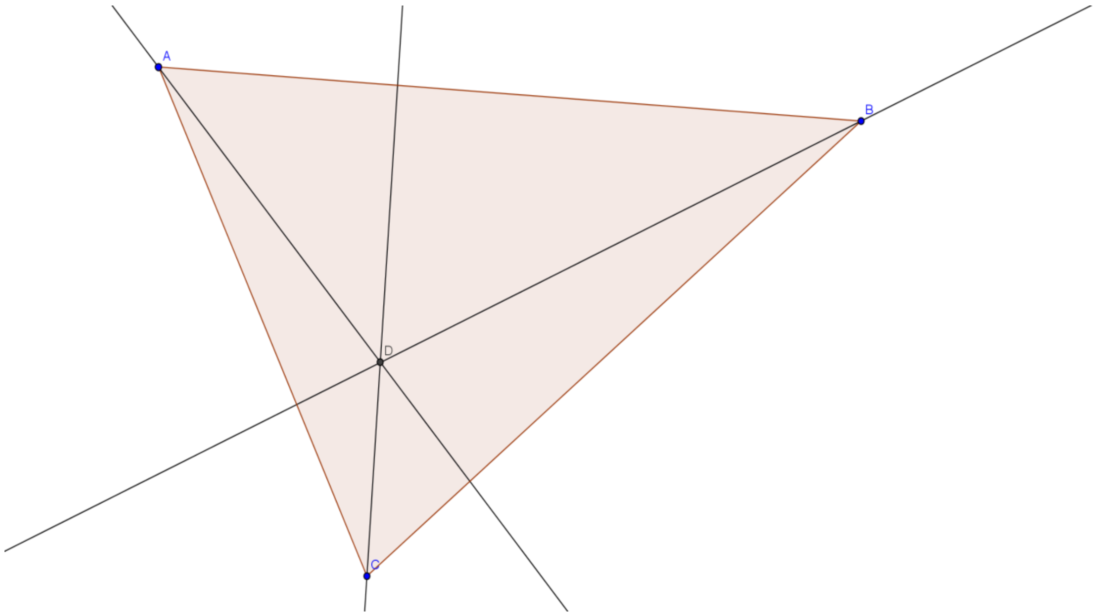


Figura 7. Alturas de un triángulo ABC.

En relación con las alturas, en lo que sigue se presentan algunos teoremas relevantes. La demostración de éstos se encuentra en el anexo 3.

Teorema 1.

Las tres alturas de un triángulo son concurrentes. El punto de concurrencia se conoce como el Ortocentro del triángulo.

El triángulo formado por los pies de las alturas (punto de intersección entre la altura y la recta que contiene al lado relativo a dicha altura) se conoce como triángulo órtico.

Teorema 2.

El ortocentro de un triángulo es el incentro de su triángulo órtico.

Las alturas de un triángulo pueden estar en el interior, en el exterior o coincidir con uno de sus lados. En la figura 7 se evidencia un ejemplo donde todas las alturas están dentro del triángulo, y en la figuras 8 y 9 se muestra un ejemplo gráfico de los otros casos.

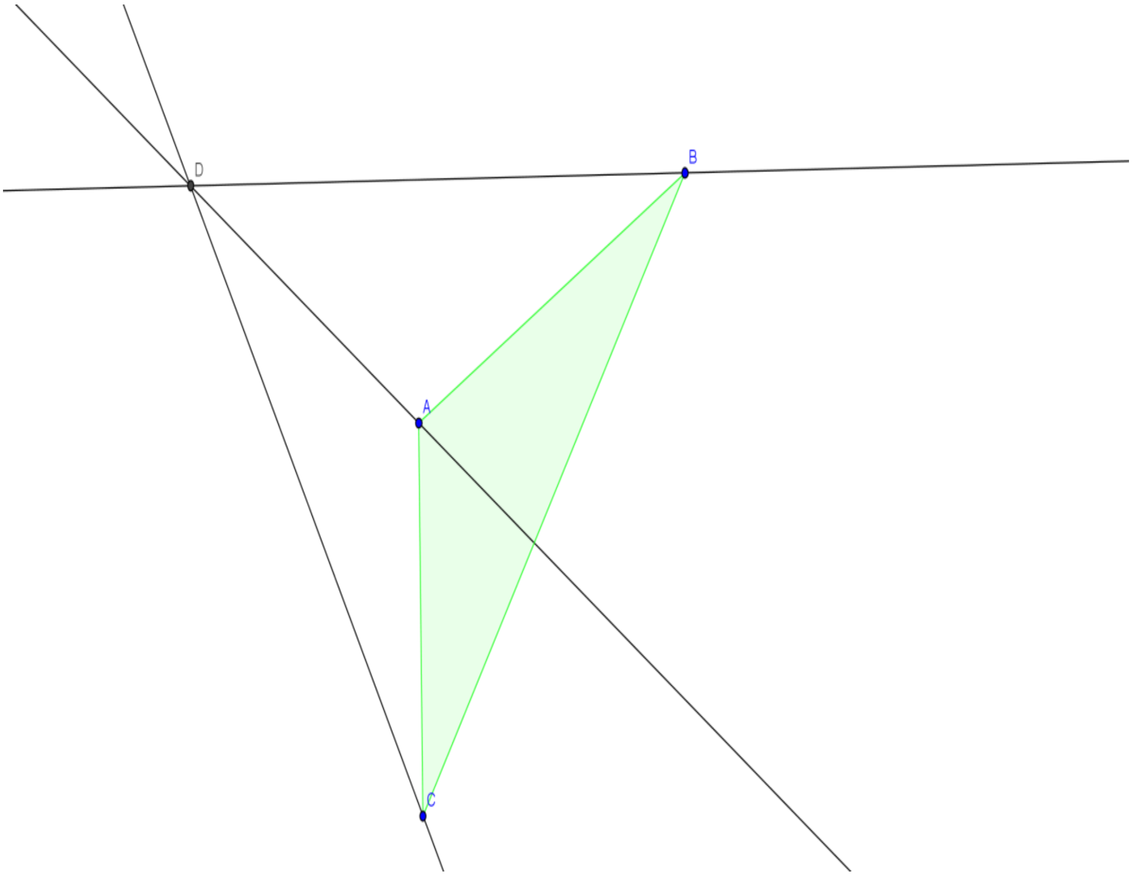


Figura 8.Ejemplo donde las alturas del triángulo ABC están en el exterior del mismo.

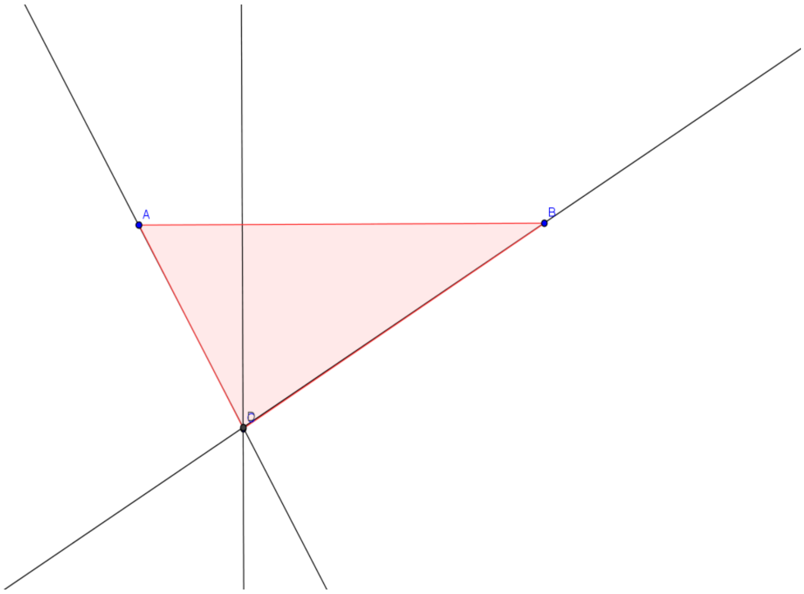


Figura 9. Ejemplos de alturas. En el primer caso, una altura que se interseca con los lados del triángulo y en el segundo caso, la altura está dentro del triángulo.

2.1.4. Bisectriz

Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan (están a la misma distancia) de las semirrectas de un ángulo. En la figura 10 se presenta el ejemplo de las bisectrices de un triángulo dado.

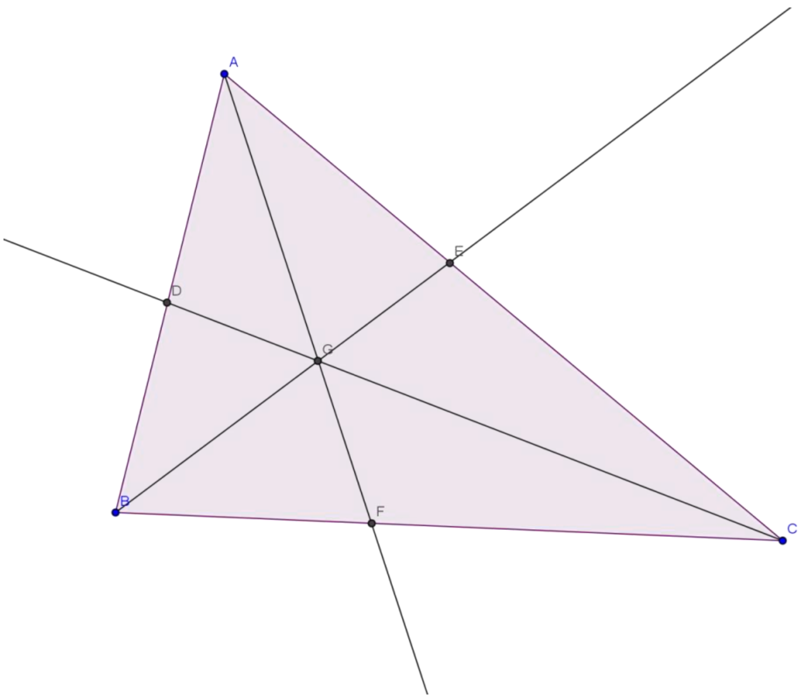


Figura 10. Bisectrices de los ángulos triángulo ABC, con su respectivo punto de intersección (incentro).

Teorema 1.
Las bisectrices de un triángulo son concurrentes. El punto de concurrencia se conoce como el incentro del triángulo. Se puede generar una circunferencia inscrita en el triángulo con centro en el incentro y radio cualquiera de sus vértices.

Terminando la presentación de los hechos geométricos necesarios para el soporte matemático del presente trabajo de grado, se presenta la otra parte de este capítulo en el cual se muestran algunos estudios realizados anteriormente relacionados con el proceso de conjeturar.

2.2. SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y EL PROCESO DE CONJETURAR

Hoy en día se reconoce en los procesos educativos que la formulación de conjeturas es muy importante en la actividad matemática. Dicha postura se fortaleció desde que Polya (1954 citado por Cañadas, Deulofeu, Figueiras, Reid y Yevdokimov 2008) propusiera las bases para elaborar conjeturas ya que así se despertó mayor interés por comprender los procesos que se siguen a la hora de buscar conjeturas.

Cañadas y otros (2008) plantean que a través de diversas investigaciones se ha llegado a evidenciar la importancia de conjeturar en las matemáticas, además se ha mostrado que no todos las situaciones propuestas invitan a realizar conjeturas y que dependiendo del tipo de problema que se plantee se pueden dar distintos caminos para conjeturar. Estos investigadores estudiaron propuestas, perspectivas y resultados mostrados por investigadores de Australia, Canadá, España y Ucrania, con el fin de dar respuesta a las siguientes preguntas:

4. *¿Qué tipos de conjeturas identificamos en nuestros trabajos y cuáles son los pasos que caracterizan el proceso de conjeturar?*

5. *¿Qué tipo de conjeturas se favorecen según el tipo de problema?*

6. *¿Cómo podemos caracterizar los rasgos del comportamiento de los individuos que se ponen en marcha al elaborar una conjetura?*

Sin embargo, más allá de dar respuesta a esas preguntas, los autores pretenden realizar una reflexión educativa en torno a las siguientes cuestiones:

1. *¿Cómo podrían los profesores enseñar a los estudiantes a elaborar conjeturas?*

2. *¿Por qué muchos profesores prefieren no usar o no promover actividades que impliquen conjeturas en el aula?*

3. *¿Cuáles son los obstáculos de los estudiantes y profesores en el estudio y la enseñanza de las conjeturas?*

Uno de los enfoques principales desde la resolución de problemas es la teoría del procesamiento de la información, la cual establece que la resolución de problemas está constituida en dos fases, la primera es la representación del problema y la segunda es la solución de éste, (Mayer, 1986; Newell y Simón, 1972 citado por Cañadas et al, 2008). Para resolver un problema desde este enfoque es necesario que el estudiante busque estrategias ya que no se conocen las reglas de solución.

En este documento los autores toman como definición de resolución de problemas la propuesta por Puig y Cerdán (1988 citados por Cañadas et al, 2008) *"la actividad mental desplegada por el resolutor desde el momento en que, siéndole representado un problema, asume que lo que tiene delante es un problema y quiere resolverlo hasta que da por acabada la tarea*".

La palabra problema hace referencia cuando el individuo o resolutor se enfrenta a la situación y no conoce o no tiene los conocimientos a priori para dar resolución a esta situación, debido a lo anterior lo que para algunos es un problema para otros no lo es.

Yevdokimov (2005 citado por Cañadas et al, 2008), en su discusión entre problemas cerrados y abiertos, considera que un problema es cerrado cuando dados dos tipos de propiedades el problema consiste en, a partir de una de ellas, deducir la otra, en este tipo de problemas se busca deducir la veracidad o falsedad de una proposición; en los problemas abiertos se pueden dar las condiciones iniciales y se busca encontrar las consecuencias de ellas, o se dan las propiedades finales y se busca encontrar las propiedades iniciales, o no se da ninguna propiedad y el problema consiste en buscar aquellas propiedades que se encuentran relacionadas a la situación; su propósito es buscar, a través de conexión de datos e incógnitas, los elementos que satisfacen las condiciones del problema. En los problemas abiertos no se tiene un método de solución estipulada y permite que el estudiante dé inicio de inmediato a la resolución del problema por medio de conjeturas.

Una conjetura es una proposición que se prevé verdadera pero que está pendiente de ser sometida a examen; dicho examen es una demostración que nos da como resultado su aceptación o su rechazo según sea el caso (Lakatos, 1978. Polya, 1945, citados por Cañadas et al, 2008). Con un único caso, en el cual la conjetura planteada no sea válida, ésta se rechaza, ya que se dice que debe ser verdadera para todos los casos y de ser así se considera aceptada dejando de ser conjetura.

Teniendo en cuenta las investigaciones estudiadas Cañadas et al (2008) muestran los siguientes tipos de conjeturas:

1. Inducción empírica a partir de un número finito de casos discretos: aquí la elaboración de la conjetura se da a partir de la observación de un número finito de casos en los cuales se pueda determinar un patrón constante en todos los casos.

2. La inducción empírica a partir de casos dinámicos: por medio de la dinámica se establece la conjetura como una regla general que describe un conjunto de acontecimientos relacionados.

3. La analogía: la conjetura se realiza por medio de un hecho o regla general ya conocida.

4. La abducción: la conjetura se establece sobre la veracidad de un solo caso, y surge como la regla general para los demás.

5. La conjetura basada en la percepción: son aquellas que se dan a partir de una representación mental que se hace del problema, es decir que el problema debe representase como una imagen mental para que a partir de ésta se realice la conjetura.

Además Cañadas et al (2008) proponen dividir el proceso en diferentes pasos según ellos para comprender en detalle el camino a conjeturar. Cañadas (2002 citado por Cañadas et al, 2008) y Cañadas y Castro (2007 citado por Cañadas et al, 2008) proponen siete pasos en el proceso de conjeturar.

1. Observación de los casos (casos particulares)

2. Organización de los casos: implica el uso de estrategias para sistematizar y facilitar la tarea con la búsqueda de patrones en los casos particulares.

3. Búsqueda y predicción de patrones: se da cuando se observa una situación repetida y constante, se imagina que este patrón puede aplicarse a los casos desconocidos.

4. Búsqueda y predicción de patrones: se da cuando se observa una situación repetida y constante, se imagina que este patrón puede aplicarse a los casos duda.

6. Validez de la conjetura (verificar predicción): es poner a prueba, es decir, verificar la predicción para nuevos casos particulares para decidir la veracidad o falsedad de dicha conjetura; acá se establece la validez de la conjetura para nuevos casos particulares pero no de manera general.

7. Generalización de las conjeturas (razones): se da un cambio desde una posible conjetura a una regla generalmente aceptada, aquí se cree que la conjetura es general de lo contrario se queda como conjetura que se cumple para casos particulares y por consiguiente no es una conjetura valida.

8. Validación.

Para las conjeturas de tipo dos (Inducción empírica a partir de casos dinámicos) se realiza inicialmente una manipulación dinámica de una situación y en seguida se hace el estudio de los pasos anteriormente nombrados.

En las conjeturas de analogía y de abducción se realizan los pasos que se tienen en cuenta para las conjeturas de tipo uno, sin embargo no se realiza una organización de los datos. Esto debido a que uno de los grupos solo logra realizar la conjetura y no la logra verificar.

Para las conjeturas basadas en la percepción primero se hace una traducción del problema, luego se hace una construcción mental de los elementos matemáticos involucrados y por último se realiza una formulación de conjeturas, la generalización y una demostración para determinar veracidad o falsedad de la misma.

3. METODOLOGÍA

A continuación se hace una breve descripción de lo que se realizó en cada una de las etapas de elaboración de este trabajo de grado. Las etapas desarrolladas fueron la elaboración de una tarea, recolección de información y el análisis de dicha información.

3.1. CREACIÓN DE LA TAREA

En este apartado se presentan dos etapas importantes de la creación de la tarea, una primera consiste en la elaboración y ajustes realizados durante la misma y la segunda consiste en posibles soluciones a las cuales podían llegar los estudiantes.

3.1.1. ELABORACION Y AJUSTES DE LA TAREA

Después de varias reuniones con el grupo de investigación “clase de matemática”, y de buscar una tarea la cual permitiera a los estudiantes encontrar conjeturas en el transcurso de su resolución, en conjunto se decidió cuál debía ser el applet que se propondría a los estudiantes como tarea a realizar, además se solucionó la tarea para determinar si el desarrollo de ésta procuraba un proceso de conjeturación.

Se decidió elaborar el applet en el software libre Geogebra ya que este era el utilizado para el desarrollo de las clases de Geometría Analítica. En la figura 11 se presenta el pantallazo de la primera versión del applet y la pregunta inicialmente propuesta a los estudiantes.

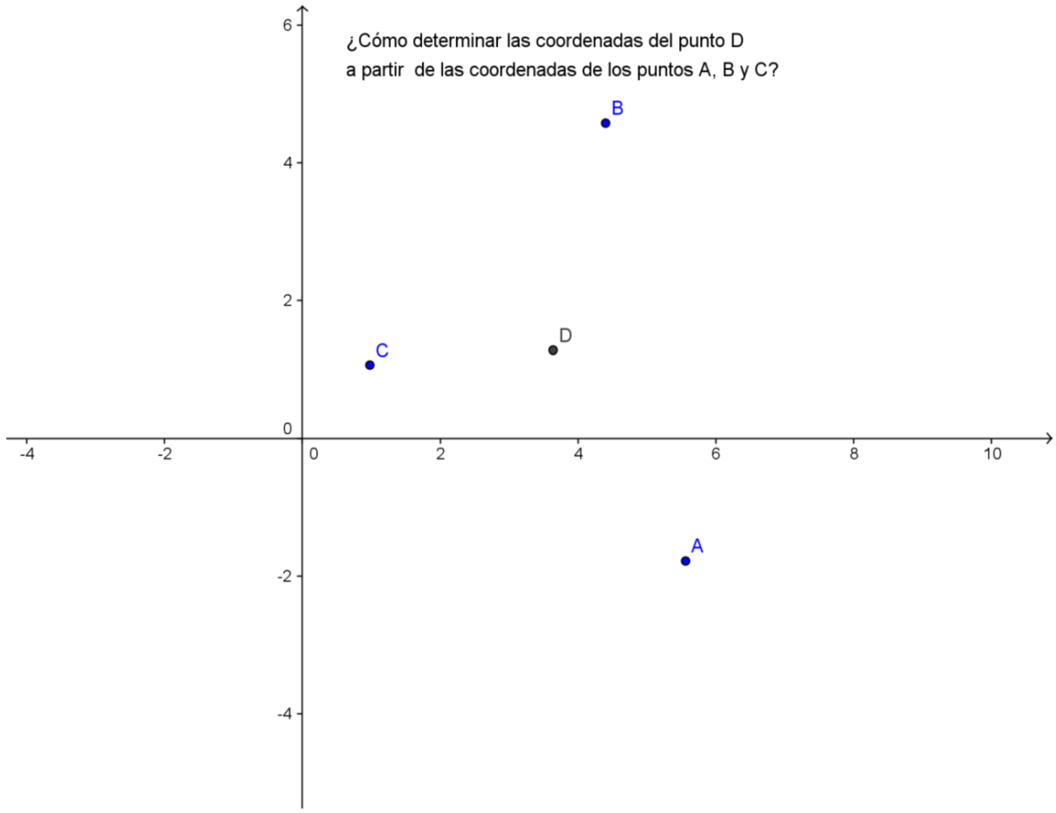


Figura11. Pantallazo del applet inicialmente diseñado.

El Applet consistía en tres puntos A, B y C ubicados de maneras arbitrarias y movibles hacia cualquier coordenada y un punto dependiente llamado D, al cambiar la coordenada de cualquiera de los puntos arbitrarios también cambia la coordenada del punto D, ya que se trata del baricentro del triángulo que se forma con los puntos A, B y C.

La tarea consiste en encontrar las coordenadas del punto D a partir de las coordenadas de los demás puntos, los estudiantes pueden explorar el Applet haciendo construcciones o arrastres de puntos según lo requieran para resolver la tarea.

Cuando se desarrolló esta tarea se logró evidenciar que era un trabajo muy largo (ver respuesta 12), ya que todos los cálculos debían realizarse de manera general, es decir, con incógnitas y para esto se requería de una disposición grande de tiempo.

Por esta razón se decidió hacer cambios en el applet colocando los puntos A y B fijos, con coordenadas $(1, 2)$ y $(4, 2)$ respectivamente y el punto C podía moverse pero únicamente sobre la recta $y = 2$, el punto D depende del movimiento que se genere en C.

La tarea también cambio, ya que ahora se pedía determinar las coordenadas del punto D a partir únicamente de las coordenadas del punto C.

3.1.2. SOLUCIÓN INICIAL DE LA TAREA

Durante el diseño de la tarea, ésta fue solucionada por los autores de este trabajo de grado, con el fin de comprobar que hubiese más de una solución, estimar el tiempo de solución de la tarea y determinar la complejidad de la misma.

Como se dijo anteriormente se solucionó, se hicieron algunas modificaciones y luego se volvió a solucionar.

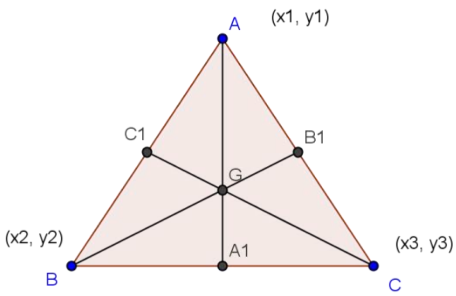
La solución de la tarea inicial se encuentra en el apartado 3.2.2.1 y la solución para la tarea que fue propuesta a los estudiantes se encuentra en el apartado 3.2.2.2 Se presentan tres soluciones diferentes, la primera, haciendo uso de construcciones auxiliares y la intersección de rectas, la segunda, haciendo uso de vectores y la tercera, utilizando propiedades métricas del baricentro.

3.1.2.1. Soluciones para la tarea ¿Cómo determinar las coordenadas del punto D a partir de las coordenadas de los puntos A, B, y C?

Como ya se dijo estas posibles soluciones se estudiaron con el fin de prever lo que realizarían los estudiantes al solucionar la tarea y así estimar la pertinencia de la misma y el tiempo necesario para su solución.

CASO 1

Dado el triángulo ABC (figura 13) y los puntos medios de sus lados, como se muestra en la figura, se puede deducir las coordenadas del punto G, que es el baricentro del triángulo. De la figura se deducen las coordenadas del punto A_1, B_1, C_1que son las siguientes:



$$A_1 = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$$

$$B_1 = \left(\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2}\right)$$

$$C_1 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Figura 13. Caso particular de posibles coordenadas para dar solución a la tarea inicialmente planteada.

Sabemos que dados dos puntos estos determinan una única recta, y como se conoce la ecuación de la pendiente de una recta, se puede deducir la ecuación de la recta AA_1.

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{\frac{y_2+y_3}{2}-y_1}{\frac{x_2+x_3}{2}-x_1}$$

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{\frac{y_2+y_3-2y_1}{2}}{\frac{x_2+x_3-2x_1}{2}}$$

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2+y_3-2y_1}{x_2+x_3-2x_1}$$

$$\mathrm{A}=\frac{y_2+y_3-2y_1}{x_2+x_3-2x_1}$$

$$y-y_1=(x-x_1)A$$

$$y=(x-x_1)A+y_1$$

De forma similar se deduce la ecuación de la recta determinada por los puntos B y B_1.

$$\frac{y-y_2}{x-x_2}=\frac{\frac{y_1+y_3}{2}-y_1}{\frac{x_1+x_3}{2}-x_1}$$

$$\frac{y-y_2}{x-x_2}=\frac{\frac{y_1+y_3-2y_1}{2}}{\frac{x_1+x_3-2x_1}{2}}$$

$$\frac{y-y_2}{x-x_2}=\frac{y_1+y_3-2y_1}{x_1+x_3-2x_1}$$

$$\mathrm{B}=\frac{y_1+y_3-2y_2}{x_1+x_3-2x_2}$$

$$y-y_2=(x-x_2)B$$

$$y=(x-x_2)B+y_2$$

Sabiendo que dos rectas diferentes se intersecan en un único punto, en este caso se conoce que $\overleftrightarrow{AA_1}$ y $\overleftrightarrow{BB_1}$ se intersecan, es por eso que se igualan las ecuaciones de estas dos rectas para encontrar su punto de intersección, este punto se denotará G. Se inicia despejando y, y se igualan las ecuaciones para encontrar x.

$$(x - x_1)A + y_1 = (x - x_2)B + y_2$$

$$Ax - Ax_1 + y_1 = Bx - Bx_2 + y_2$$

$$Ax - Bx = Ax_1 - Bx_2 + y_2 - y_1$$

$$x(A - B) = Ax_1 - Bx_2 + y_2 - y_1$$

$$x = \frac{Ax_1 - Bx_2 + y_2 - y_1}{(A - B)}$$

$$x = \frac{\frac{x_1y_2 + x_1y_3 - 2x_1y_1}{x_2 + x_3 - 2x_1} - \frac{x_2y_1 + x_2y_3 - 2x_2y_2}{x_1 + x_3 - 2x_2} + y_2 - y_1}{\frac{y_2 + y_3 - 2y_1}{x_2 + x_3 - 2x_1} - \frac{y_1 + y_3 - 2y_2}{x_1 + x_3 - 2x_2}}$$

$C = x_1y_2 + x_1y_3 - 2x_1y_1$

$D = x_2y_1 + x_2y_3 - 2x_2y_2$

$E = x_2 + x_3 - 2x_1$
$F = x_1 + x_3 - 2x_2$

$G = y_2 + y_3 - 2y_1$

$H = y_1 + y_3 - 2y_2$

$$x = \frac{\frac{C}{E} - \frac{D}{F} + y_2 - y_1}{\frac{G}{E} - \frac{H}{F}}$$

$CF = x_1^2y_2 + x_1^2y_3 - 2x_1^2y_1 + x_1x_3y_2 + x_1x_3y_3 - 2x_1x_3y_1 - 2x_1x_2y_2 - 2x_1x_2y_3 + 4x_1x_2y_1$

-$ED = -(x_2^2y_1 + x_2^2y_3 - 2x_2^2y_2 + x_2x_3y_1 + x_2x_3y_3 - 2x_2x_3y_2 - 2x_1x_2y_1 - 2x_1x_2y_3 +$ 4$x1x2y2$

$$x = \frac{\frac{CF - ED}{EF} + y_2 - y_1}{\frac{GF - EH}{EF}}$$

$$x = \frac{\frac{CF - ED + EF(y_2 - y_1)}{EF}}{\frac{GF - EH}{EF}}$$

Se cancela EF

$$x = \frac{CF - ED + EF(y_2 - y_1)}{GF - EH}$$

$$EF = x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_1^2 + x_2x_3 + x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 4x_1x_2$$

$$\begin{aligned} EF(y_2 - y_1) = {} & x_1x_{2y_2} + x_1x_3y_2 - 2x_1^2y_2 + x_2x_3y_2 + x_3^2y_2 - 2x_1x_3y_2 - 2x_2^2y_2 - 2x_2x_3y_2 \\ & + 4x_1x_2y_2 - x_1x_2y_1 - x_1x_3y_1 + 2x_1^2y_1 - x_2x_3y_1 - x_3^2y_1 + 2x_1x_3y_1 \\ & + 2x_2^2y_1 + 2x_2x_3y_1 - 4x_1x_2y_1 \end{aligned}$$

$$GF = x_1y_2 + x_1y_3 - 2x_1y_1 + x_3y_2 + x_3y_3 - 2x_3y_2 - 2x_2y_2 - 2x_2y_3 + 4x_2y_1$$

$$-EH = -(x_2y_1 + x_2y_3 - 2x_2y_2 + x_3y_1 + x_3y_3 - 2x_3y_2 - 2x_1y_1 - 2x_1y_3 + 4x_1y_2)$$

$$x = \frac{\begin{array}{c} -x_1^2y_2 + x_1^2y_3 + x_1x_3y_3 - x_1x_3y_1 - x_1x_2y_2 + x_2^2y_1 - x_2^2y_3 - x_2x_3y_3 + x_1x_2y_1 + \\ x_2x_3y_2 + x_3^2y_2 - x_3^2y_1 \end{array}}{-3x_1y_2 + 3x_1y_3 + 3x_3y_2 - 3x_3y_1 - 3x_2y_3 + 3x_2y_1}$$

$$x = \frac{\begin{array}{c} -x_1^2y_2 + x_1^2y_3 + x_1x_3y_3 - x_1x_3y_1 - x_1x_2y_2 + x_2^2y_1 - x_2^2y_3 - x_2x_3y_3 + x_1x_2y_1 + \\ x_2x_3y_2 + x_3^2y_2 - x_3^2y_1 \end{array}}{3(-x_1y_2 + x_1y_3 + x_3y_2 - x_3y_1 - x_2y_3 + x_2y_1)}$$

$$\begin{aligned} I = {} & -x_1^2y_2 + x_1^2y_3 + x_1x_3y_3 - x_1x_3y_1 - x_1x_2y_2 + x_2^2y_1 - x_2^2y_3 - x_2x_3y_3 + x_1x_2y_1 \\ & + x_2x_3y_2 + x_3^2y_2 - x_3^2y_1 \end{aligned}$$

$$x = \frac{\mathrm{I}}{3(-x_1y_2 + x_1y_3 + x_3y_2 - x_3y_1 - x_2y_3 + x_2y_1)}$$

$$\begin{aligned} I = {} & -x_1^2y_2 + x_1^2y_3 + x_1x_3y_3 - x_1x_3y_1 - x_1x_2y_2 + x_2^2y_1 - x_2^2y_3 - x_2x_3y_3 + x_1x_2y_1 \\ & + x_2x_3y_2 + x_3^2y_2 - x_3^2y_1 + x_1x_3y_2 - x_1x_3y_2 - x_1x_2y_3 + x_1x_2y_3 - x_2x_3y_1 \\ & + x_2x_3y_1 \end{aligned}$$

Factorizando I se tiene la siguiente expresión:

$$I = (x_1 + x_2 + x_3)(-x_1y_2 + x_1y_3 + x_3y_2 - x_3y_1 - x_2y_3 + x_2y_1)$$

$$x = \frac{(x_1 + x_2 + x_3)(-x_1y_2 + x_1y_3 + x_3y_2 - x_3y_1 - x_2y_3 + x_2y_1)}{3(-x_1y_2 + x_1y_3 + x_3y_2 - x_3y_1 - x_2y_3 + x_2y_1)}$$

Cancelando los factores que son iguales en el numerador y en el denominador obtenemos la coordenada de x:

$$x = \frac{(x_1 + x_2 + x_3)}{3}$$

Reemplazando x en la ecuación de la recta AA_1 obtenemos y:

$$y = \left(\frac{(x_1+x_2 + x_3)}{3} - x_1\right)A + y_1$$

$$y = \left(\frac{(x_1+x_2 + x_3)}{3} - x_1\right)\left(\frac{y_2 + y_3 - 2y_1}{x_2 + x_3 - 2x_1}\right) + y_1$$

$$y = \left(\frac{x_2 + x_3 - 2x_1}{3}\right)\left(\frac{y_2 + y_3 - 2y_1}{x_2 + x_3 - 2x_1}\right) + y_1$$

$$y = \left(\frac{y_2 + y_3 - 2y_1}{3}\right) + y_1$$

$$y = \frac{y_2 + y_3 - 2y_1 + 3y_1}{3}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

Entonces tenemos que las coordenadas del baricentro de cualquier triángulo son:

$$\left(\frac{(x_1+x_2 + x_3)}{3}, \frac{(y_1 + y_2 + y_3)}{3}\right)$$

CASO 2

El baricentro de un triángulo con vértices $A = (x_1\,, y_1)$, $B = (x_2\,, y_2)$ y $C\ (x_3\,,\ y_3)$ tiene las coordenadas:

$$\left(\frac{(x_1+x_2 + x_3)}{3}, \frac{(y_1 + y_2 + y_3)}{3}\right)$$

Demostración:

Primero recordamos la siguiente fórmula: las coordenadas del punto que divide a $\overline{\boldsymbol{P_1P_2}}$ en razon r/s son:

$$\left(\frac{rx_2 + sx_1}{\mathrm{r} + \mathrm{s}}, \frac{ry_2 + sy_1}{r + s}\right)$$

Llamemos A_1 al punto medio de BC, por la fórmula anterior este punto tiene coordenadas:

$$\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$$

Como el baricentro es un punto que divide al segmento AA_1 en razon 2/1 (Donde el segmento más grande es el que está junto al vértice), entonces su coordenada en x es:

$$\frac{2\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right) + x_1}{2 + 1} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

Hacemos lo mismo con la coordenada y, entonces el baricentro tiene coordenadas:

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

CASO 3

Para mostrar cuáles son las coordenadas del punto G, se utilizó la siguiente propiedad del baricentro: los dos segmentos en que el baricentro divide cada mediana están en la relación 2 a 1. Es decir que sobre cada mediana el baricentro está situado *a* $\frac{2}{3}$del vértice y a $\frac{1}{3}$ del lado opuesto. Esta propiedad se puede expresar de muchas formas utilizando vectores, por ejemplo, $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$ o bien $\overrightarrow{GA_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}$, donde A_1 es el punto medio del lado BC.

Puesto que se obtiene **G** aplicando al punto **A** una traslación de vector $\overrightarrow{AG}$, se puede establecer la siguiente cadena de igualdades:

$$G = A + \overrightarrow{AG} = A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1} = A + \frac{2}{3}(A_1 - A) = A + \frac{2}{3}A_1 - \frac{2}{3}A = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}A_1$$

Y puesto que **P** es el punto medio del segmento **BC**, podemos continuar:

$$G = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}A_1 = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}\left(\frac{B + C}{2}\right) = \frac{1}{3}A + \frac{B + C}{3} = \frac{A + B + C}{3}$$

Si $A = (x_1\,, y_1), B = (x_2\,, y_2)$ y $C = (x_3\,, y_3)$, este último resultado nos dice que las coordenadas del baricentro G del triángulo ABC son:

$$G = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

Y luego de esto ustedes qué concluyeron…. Para qué le sirvió hacer todo esto… Cuánto tiempo duraron? No sé… concretamente hacer esto para qué les sirvió… ¿Era necesario poner esto en el cuerpo del documento? De pronto sólo en los anexos… Acá sinteticen las estrategias de solución… algo como esto les dije antes… No cambian sustancialmente el documento…

3.1.2.2. Solución de la tarea propuesta a los estudiantes, ¿Cómo determinar la coordenadas del punto D a partir de las coordenadas del punto C?

A continuación, se presentan respuestas encontradas por los autores de este documento a la tarea propuesta a los estudiantes, se realizó nuevamente este estudio para prever las posibles soluciones, estimar el tiempo y mirar la pertinencia de la tarea y así de ser necesario revisarla nuevamente.

CASO 1

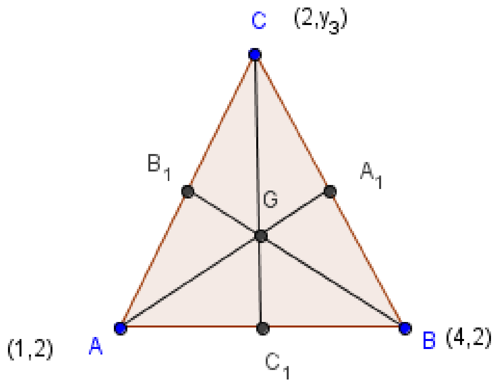


Figura 14.Medianas del triángulo que se genera con los puntos ABC, en la tarea propuesta a los estudiantes.

Dado el triángulo ABC (Figura 14) y los puntos medios de sus lados, como se muestra en la imagen, podemos deducir las coordenadas del baricentro del triángulo (punto G). De la figura podemos deducir las coordenadas del punto A_1, B_1, C_1que son las siguientes:

$$A_1 = \left(3\,, \frac{2+y_3}{2}\right), B_2 = \left(\frac{3}{2}\,, \frac{2+y_3}{2}\right), C_1 = \left(\frac{5}{2}\,, 2\right)$$

Así encontramos la ecuación de la recta.
Sabemos que por dos puntos pasa una única recta, y como conocemos la ecuación de la pendiente de una recta, podemos deducir la ecuación de la recta AA_1

$$\frac{y-2}{x-1} = \frac{\frac{2+y_3}{2} - 2}{3-1}$$

$$\frac{y-2}{x-1} = \frac{\frac{2+y_3-4}{2}}{2}$$

$$\frac{y-2}{x-1}=\frac{y_3-2}{4}$$

$$y-2=(x-1)\frac{y_3-2}{4}$$

$$y=\frac{xy_3-2\mathrm{x}-y_3+2}{4}+2$$

$$y=\frac{xy_3-2\mathrm{x}-y_3+10}{4}$$

De igual forma se dedujo la ecuación de la recta que pasa por los puntos CC_1
$C1=\left(\frac{5}{2},2\right)$

$$\frac{y-y_3}{x-2}=\frac{2-y_3}{\frac{5}{2}-2}$$

$$\frac{y-y_3}{x-2}=\frac{2-y_3}{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{y-y_3}{x-2}=4-2y_3$$

$$y-y_3=(\mathrm{x}-2)(4-2y_3)$$

$$y-y_3=4\mathrm{x}-2xy_3-8+4y_3$$

$$y=4\mathrm{x}-2xy_3-8+5y_3$$

Se sabe que las rectas AA_1 y CC_1 se intersecan, es por eso que se igualaron las ecuaciones de estas dos rectas para encontrar su punto de intersección, este punto lo denotaremos G. Se inició igualando las ecuaciones para encontrar la coordenada de x (abcisa), esto se realizó de la siguiente manera:

$$\frac{xy_3-2\mathrm{x}-y_3+10}{4}=4\mathrm{x}-2xy_3-8+5y_3$$

$$xy_3-2\mathrm{x}-y_3+10=16\mathrm{x}-8xy_3-32+20y_3$$

$$-2\mathrm{x}-16\mathrm{x}=y_3-10-xy_3+16\mathrm{x}-8xy_3-32+20y_3$$

$$-18\mathrm{x}=-9xy_3-42+21y_3$$

$$-18\mathrm{x}+9xy_3=-42+21y_3$$

$$\mathrm{x}(-18+9y_3) = -42+21y_3$$

$$\mathrm{x} = \frac{-42+21y_3}{-18+9y_3}$$

$$\mathrm{x} = \frac{(-6+3y_3)7}{(-6+3y_3)3}$$

$$\mathrm{x} = \frac{7}{3}$$

Remplazando el valor de x en la ecuacion de la recta AA_1obtenemos la coordenada de y (odenada), esto lo hicemos de la siguiente manera:

$$y = \frac{xy_3 - 2\mathrm{x} - y_3 + 10}{4}$$

$$y = \frac{\frac{7}{3}y_3 - 2\frac{7}{3} - y_3 + 10}{4}$$

$$y = \frac{\frac{7}{3}y_3 - \frac{14}{3} - y_3 + 10}{4}$$

$$y = \frac{\frac{4}{3}y_3 + \frac{16}{3}}{4}$$

$$y = \frac{\frac{4y_3+16}{3}}{4}$$

$$y = \frac{(4+y_3)(4)}{(3)(4)}$$

$$y = \frac{4+y_3}{3}$$

En conclusión las coordenadas del baricentro para este caso en particular son:

$$G = \left(\frac{7}{3}, \frac{4+y_3}{3}\right)$$

CASO 2

Recordamos de nuevo la siguiente fórmula de geometría analítica:

$$\left(\frac{rx_2 + sx_1}{\mathrm{r} + \mathrm{s}}, \frac{ry_2 + sy_1}{r + s}\right)$$

Llamemos A_1 al punto medio de BC, por la fórmula anterior este punto tiene coordenadas:

$$\left(3\ , \frac{2 + y_3}{2}\right)$$

Como el baricentro es un punto que divide al segmento AA_1 en razón 2/1(Donde el segmento más grande es el que está junto al vértice), entonces su coordenada en x es:

$$\frac{2(3) + 1}{2 + 1} = \frac{7}{3}$$

Se hizo un procedimiento similar para encontrar la coordenada de y:

$$\frac{2\left(\frac{2 + y_3}{2}\right) + 2}{2 + 1} = \frac{2 + y_3 + 2}{3} = \frac{4 + y_3}{3}$$

Entonces el baricentro tiene coordenadas:

$$G = \left(\frac{7}{3}, \frac{4 + y_3}{3}\right)$$

CASO 3

Conocemos que en cada mediana, el baricentro está situado *a* $\frac{2}{3}$del vértice y a $\frac{1}{3}$ del lado opuesto. Esta propiedad la expresamos utilizando vectores; por ejemplo, $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$ o bien $\overrightarrow{GA_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}$, donde A_1 es el punto medio del lado BC.

Puesto que obtenemos **G** aplicando al punto **A** una traslación de vector $\overrightarrow{AG}$, podemos establecer la siguiente cadena de igualdades:

$$G = A + \overrightarrow{AG} = A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1} = A + \frac{2}{3}(A_1 - A) = A + \frac{2}{3}A_1 - \frac{2}{3}A = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}A_1$$

Y puesto que **P** es el punto medio del segmento **BC**, podemos continuar:$G = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}A_1 = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}\left(\frac{B+C}{2}\right) = \frac{1}{3}A + \frac{B+C}{3} = \frac{A+B+C}{3}$

Si $A = (1, 2), B = (4\ , 2)$ y $C = (2\ , y_3)$, este último resultado nos dice que las coordenadas del baricentro G del triángulo ABC son:

$$G = \left(\frac{1+4+2}{3}, \frac{2+2+y_3}{3}\right)$$

$$G = \left(\frac{7}{3}, \frac{4+y_3}{3}\right)$$

MISMO COMENTARIOS QUE ANTES…

3.2. RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN

Mientras los estudiantes resolvieron la tarea, se hizo una grabación en video utilizando el programa SuperScreen Capture, esto con el fin de tener la información detallada de las construcciones que realizaban los estudiantes en el Applet al resolver la tarea, así como los diálogos entre ellos, esto con el fin de identificar en detalle el proceso realizado por los estudiantes al formular las conjeturas. Además se entregaron algunas hojas en blanco para que los estudiantes realizaran los cálculos o gráficos necesarios (se les solicitó a los estudiantes que no borraran lo plasmado en el papel).

El papel de los observadores fue diferente en cada uno de los grupos, ya que en el primero solamente se realizó observación y en dos ocasiones el entrevistador responde a los estudiantes preguntas muy concretas, mientras que en el grupo dos se realizaron más intervenciones por parte del entrevistador.

3.2.1. POBLACIÓN

Este trabajo se realizó con dos grupos de estudiantes, los cuales cursaban el espacio académico de Geometría Analítica en el primer periodo del año 2012.

Esta clase se caracterizó por el trabajo en equipo haciendo uso del software libre Geogebra, la docente se encargaba de llevar los applet que se trabajarían en la clase, luego los estudiantes se reunían en grupos para resolver la tarea propuesta. Además esta clase se caracterizaba por el manejo y utilización de la plataforma moodle, ya que a través de ella se realizaban foros y se subían las memorias de las clases.

Se trabajaban dos sesiones de clase a la semana, una de ellas en la sala de sistemas y la otra en un aula de clase normal. Las sesiones de clase en la sala de sistemas consistían en un trabajo exploratorio y de validación de conjeturas mientras que el trabajo en el aula consistía en presentaciones por parte de los estudiantes a sus compañeros sobre el trabajo realizado anteriormente.

Debido a lo expuesto en el párrafo anterior ese grupo de estudiantes tenía herramientas, conocimientos del tema y del software lo cual les permitía resolver la tarea; algunas de las características del grupo fueron:

1. Manejo de software dinámico

2. Conocimientos previos de geometría analítica (ecuación de la recta, coordenadas del punto medio, intersección de rectas)
3. Conocimiento de vectores

El primer grupo estaba conformado por dos estudiantes a las cuales llamaremos Marcela y Diana y el segundo grupo se componía de una estudiante a la cual llamaremos Ana.

3.3. MÉTODO DE ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

Para el análisis de la información obtenida de la producción de las estudiantes del grupo uno al solucionar la tarea, inicialmente se elaboró una tabla en la cual se presentaba un estudio de los pasos propuestos por Cañadas et al (2008) y que fueron utilizados por los estudiantes en el desarrollo de la tarea.

La tabla estaba dividida en seis columnas, en cada una se encontraba uno de los pasos que se identificaron en el proceso de conjeturación que realizaron los estudiantes. Los pasos fueron:

- *Afirmaciones sobre las que no hay duda, es decir, que se piensan verdaderas sin cuestionarse:*en este apartado se tenían en cuenta los conceptos previos que utilizaban los estudiantes para dar solución a la tarea.

- *Utilización de conocimientos previos:* aquí se estudió como se utilizaban esos conceptos previos en el desarrollo.

- *Observación de los datos presentados en el applet:* estudios que realizaron los estudiantes antes de iniciar el desarrollo de la tarea.

- *Búsqueda y predicción de patrones*: aquí se plasmó los datos que permitían observar la exploración como lo fue las construcciones auxiliares y los arrastres que realizaron las estudiantes.

- *Formulación de una conjetura:* en esta columna se presentaron las diferentes conjeturas que surgieron en el desarrollo de la tarea.

- *Validación de la conjetura:*aquí se mostraron los procesos que realizaron los estudiantes para garantizar la validez de su trabajo.

Dicha tabla se convirtió en objeto de discusión y permitió identificar con claridad lo hecho por los estudiantes en cada etapa del proceso.

A partir de la tabla elaborada, se hicieron transcripciones de algunas partes de los videos que contenían la actividad de los estudiantes, que permitían identificar aspectos puntuales en las etapas del proceso de conjeturar logrado por ellos.

Se quiso realizar una tabla similar con la información del grupo dos, pero no fue posible concretarla, dado que en el desarrollo de la tarea se llegó a una conjetura y la mayor parte del tiempo se dedicó a la exploración de datos. Por lo tanto, para éste grupo, el análisis consistió en exponer los distintos pasos que siguió durante la exploración de los datos.

Después de la exposición de las distintas exploraciones que realizó la estudiante, se realizó un escrito con la única conjetura presentada por ella, el cual tiene la misma estructura con la que se presentaron las conjeturas del grupo 1, con la diferencia que en éste, Ana no logró validar su conjetura, a pesar de que ella estaba segura de haberlo logrado.

4. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

En el presente análisis se hará un estudio de los procedimientos que llevaron a cabo dos grupos de estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica para resolver una situación problema y las conjeturas que plantearon y validaron para llegar a la respuesta.

Retomando la propuesta de Cañadas et al (2008) y teniendo en cuenta la información recogida, se observó que los estudiantes realizaron las siguientes etapas:

1. Observación de los datos
2. Estudio de la tarea
3. Formulación de una conjetura
4. Verificación de conjetura
5. Validación de conjetura}

4.1. Análisis Grupo 1

Este grupo estaba conformado por dos estudiantes Marcela y Diana, quienes tardaron aproximadamente una hora para dar solución a la tarea, la cual resuelven por medio de los siguientes pasos:

Observación de datos

Las estudiantes empezaron el desarrollo de la tarea con una exploración del Applet, observando las relaciones que podían tener los puntos que se presentaban allí. Para esto construyeron las rectas que pasan por los puntos dados A, B, y C e identificaron el triángulo que se generaba en estos tres puntos. (Ver figura 15).

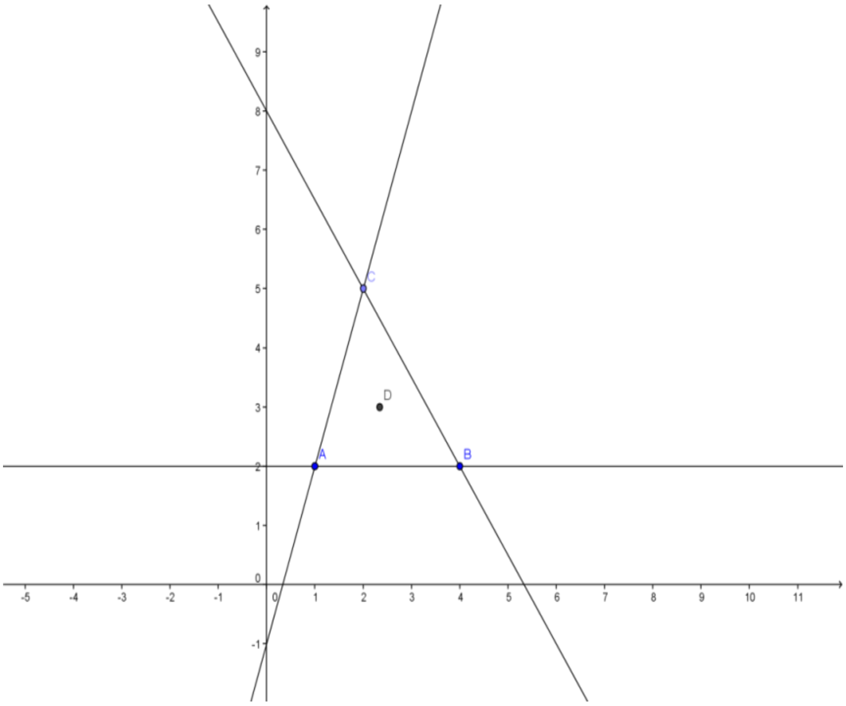


Figura 15. Rectas que intersecan a los puntos A, B, y C e identificación del triángulo formado entre ellas.

Estudio de la tarea

Al observar el triángulo que se formaba, las estudiantes empezaron a utilizar sus conocimientos previos de puntos notables en un triángulo para identificar alguna propiedad del punto D que se encontraba en el interior de dicha figura.

Presentación de la primera conjetura

Con la construcción hecha en la observación de los casos y con el análisis del estudio de la tarea, la estudiante *Marcela* formula una primera conjetura: *D es el ortocentro.*

Verificación de la conjetura

Para verificar la conjetura, lo que hicieron las estudiantes fue construir una de las alturas del triángulo, y dicha recta no contiene al punto D (Ver figura 16), con esto llegaron a la conclusión de que el punto D no era el punto de intersección de las alturas, por lo tanto la primera conjetura no era válida.

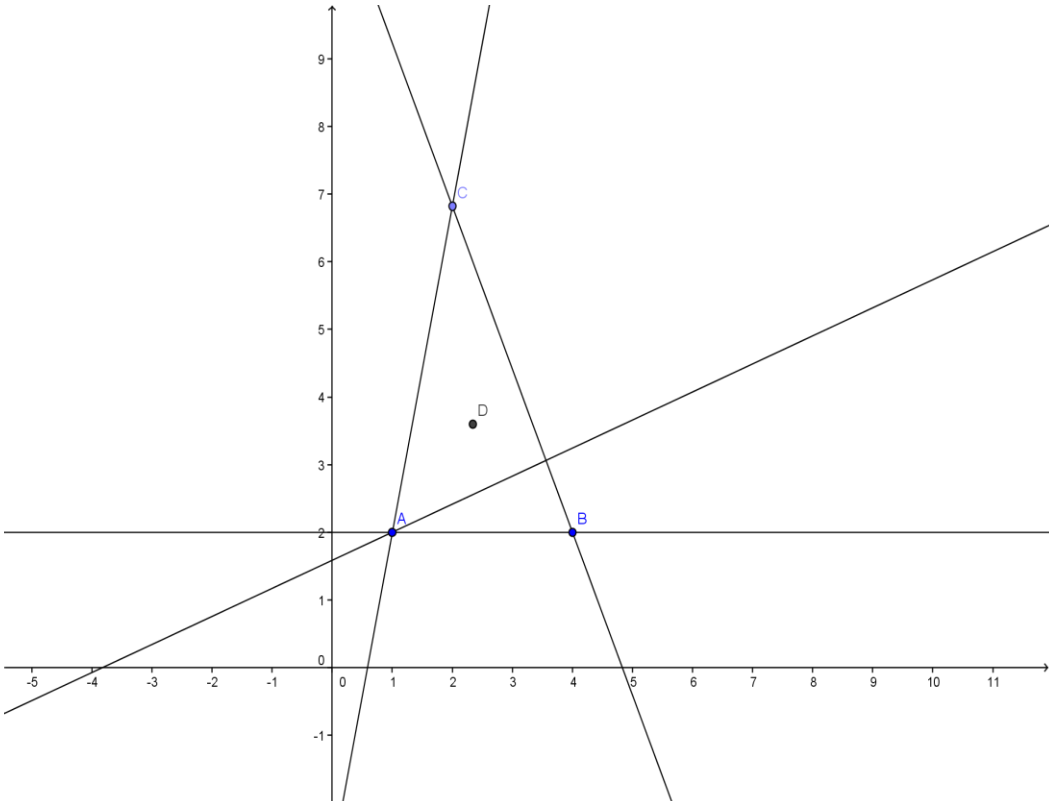


Figura 16. Recta perpendicular a la recta BC y que pasa por el punto A.

Presentación de la segunda conjetura

Cuando comprobaron que su conjetura inicial era falsa, *Laura* propuso estudiar la intersección de las medianas y de la misma manera que para la conjetura anterior, procedieron a realizar una verificación por medio del Applet.

Verificación de la conjetura

Es importante resaltar que las estudiantes tuvieron una confusión al realizar la construcción, ya que inicialmente construyeron las mediatrices del triángulo (Figura 17). Construyeron la recta perpendicular al segmento AC que contiene al punto medio de dicho segmento y de acuerdo con la posición en la que se encontraba el punto C, la recta trazada contenía al punto D; por lo cual las estudiantes pensaron que esta conjetura podía ser verdadera, sin embargo decidieron construir otra mediatriz para terminar de comprobar su conjetura, pero con esta se dieron cuenta que la intersección no era en el punto D y nuevamente tenían una conjetura falsa (Ver figura 17).

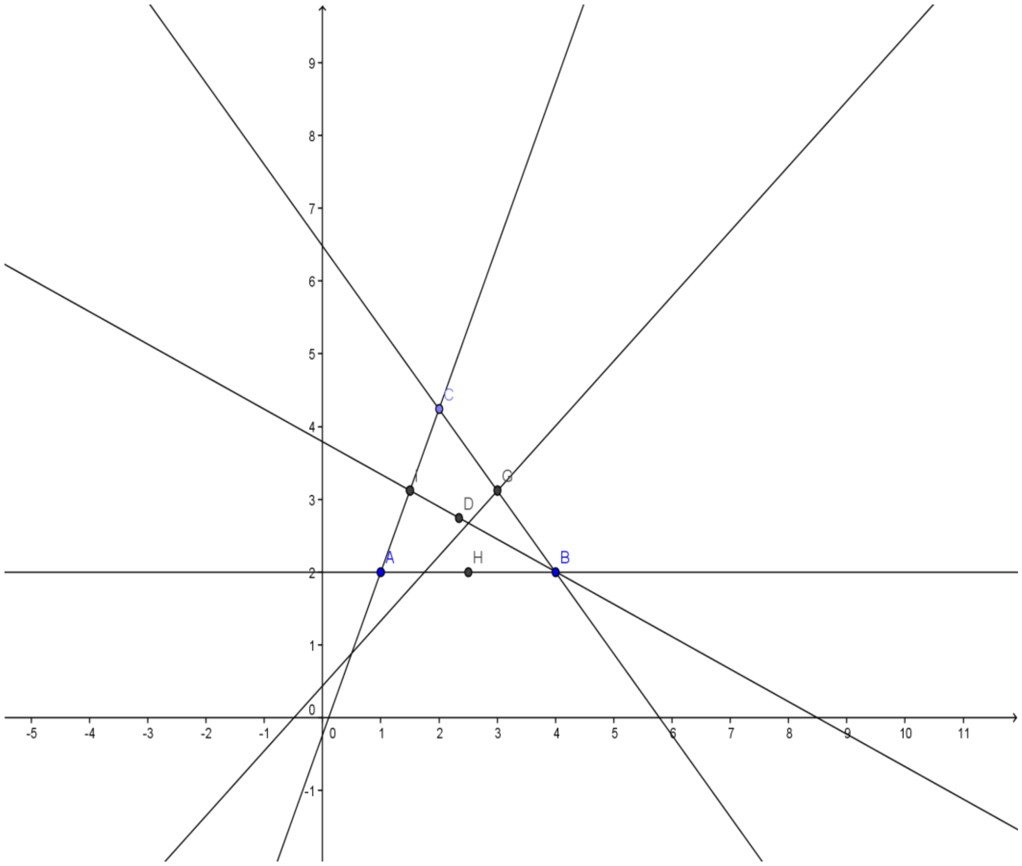


Figura 17. Mediatrices del triángulo ABC.

Presentación de la tercera conjetura

En la siguiente tabla se muestra una conversación entre la entrevistadora y las estudiantes:

ENTREVISTADORA	ESTUDIANTES
¿Qué pasó con las medianas que estaban trazando?	*Diana: no son porque Marcela ya las trazó y su intersección no coincide con el punto D*
¿Qué es una mediana?	*Es un segmento perpendicular que pasa por el punto medio de los lados de un triángulo.*
¿Están seguras que además de pasar por el punto medio debe ser perpendicular al lado del triángulo?	*No…*

	Diana: *Es la intersección de las medianas.*

Verificación de la conjetura

Las estudiantes trazaron las medianas del triángulo, lo cual les permitió evidenciar que la intersección de éstas coincidía con el punto D (Ver figura 18).

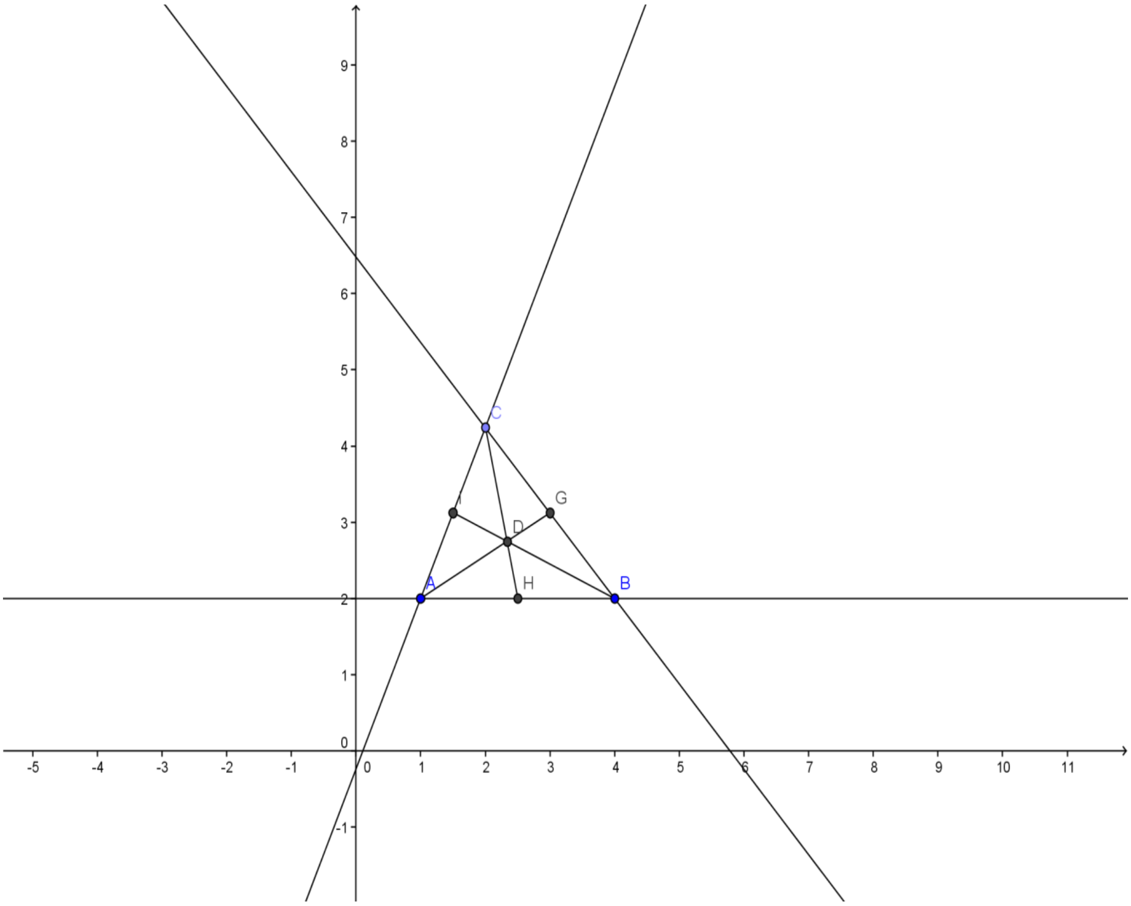


Figura 18. Medianas del triángulo ABC.

Generalización de la conjetura

Para garantizar que la conjetura era válida de manera general en cualquier posición del punto C, las estudiantes realizaron algunos desplazamientos de este punto en el applet y pudieron evidenciar que se cumplía para cualquier coordenada (Figuras 19, 20 y 21)

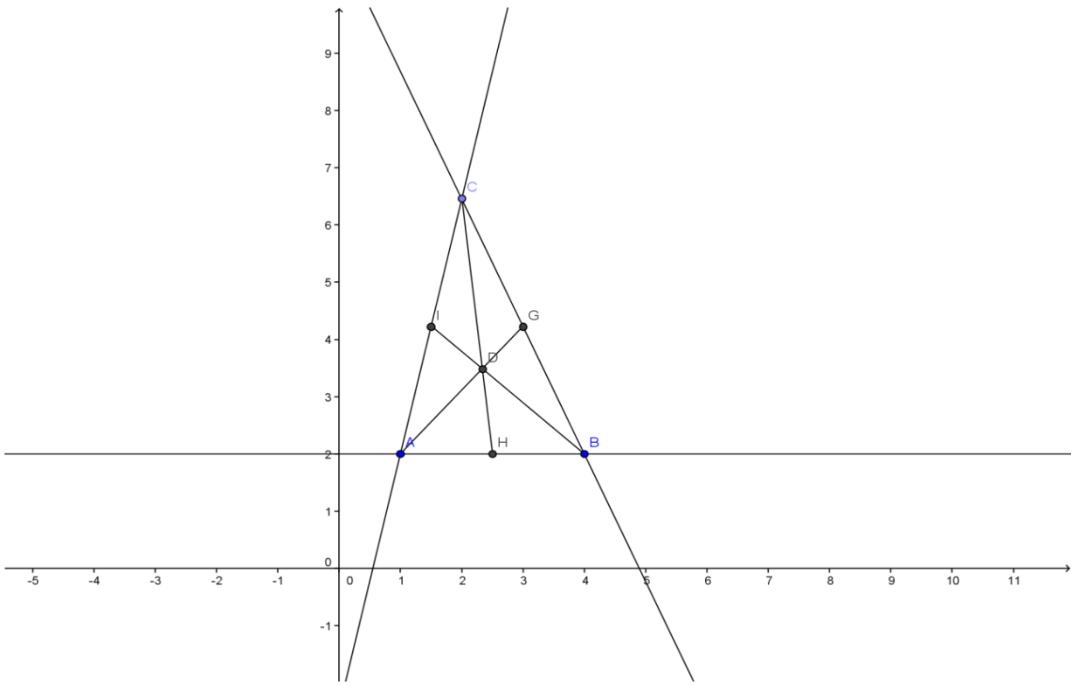


Figura 19. Posibles coordenadas del punto C, sobre la recta $f(2) = x$.

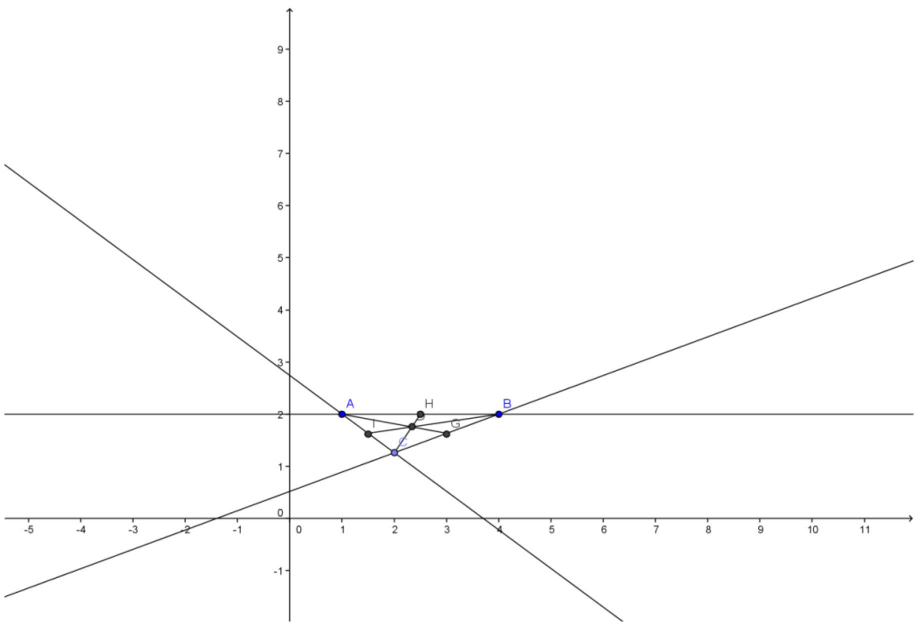


Figura 20. Pantallazo de cambio de coordenadas para el punto C.

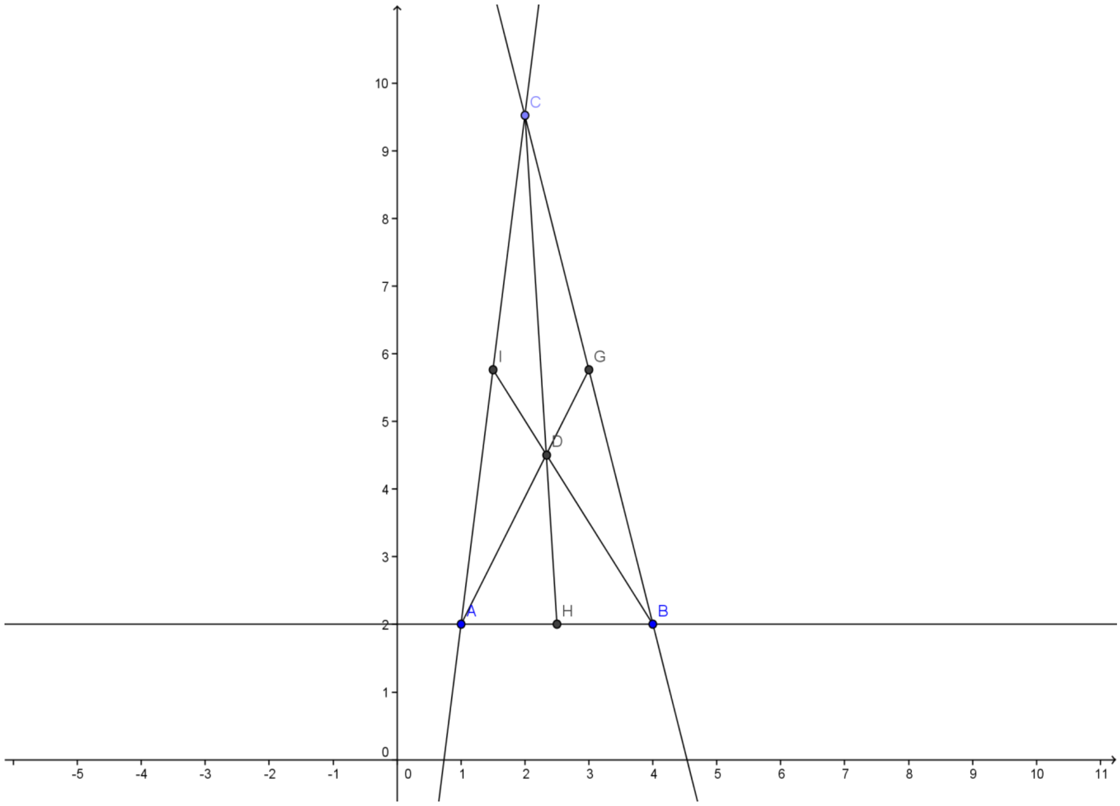


Figura 21. Pantallazo que evidencia de movimientos del punto C.

Después de toda esta exploración y verificación en el applet las estudiantes volvieron a utilizar sus conocimientos previos, por medio de cálculos elementales resolvieron la pregunta inicial *¿Cómo determinar las coordenadas del punto D, a partir de las coordenadas del punto C?*

Dichos cálculos los realizaron con lápiz y papel, encontrando las ecuaciones de dos de las rectas que contienen a las respectivas medianas y luego hallaron el punto de intersección para así dar las coordenadas del punto D. Dichos cálculos se muestran a continuación:

> Se tienen los puntos $A = (2,2)$ y $B = (4,2)$, estos puntos son fijos y se tiene el punto movible llamado C y cuyas coordenadas son $(2, a)$
>
> Las estudiantes encuentran las coordenadas del punto medio del segmento AB al cual ellas llamaron F.

$$F = \left(\frac{1+4}{2}\right), \left(\frac{2+2}{2}\right)$$

$$F = \left(\frac{5}{2}, 2\right)$$

Luego hacen lo mismo para encontrar el punto medio del segmento BC, y le llamaron G.

$$G = \left(\frac{2+4}{2}\right), \left(\frac{a+2}{2}\right)$$

$$G = \left(3, \frac{a+2}{2}\right)$$

En seguida, hallan las respectivas ecuaciones para las rectas $\overleftrightarrow{CF}$ y $\overleftrightarrow{AG}$.

Hallan la pendiente de $\overleftrightarrow{CF}$:

$$m = \frac{2-a}{\frac{5}{2}-2} = \frac{2-a}{\frac{1}{2}} = \frac{2(2-a)}{1} = 4-2a$$

Obteniendo la ecuación de $\overleftrightarrow{CF}$:

$$y = 4-2a(x+b)$$

$$2 = (4-2a)\frac{5}{2}+b$$

$$2 = 10-5a+b$$

$$2-10+5a = b$$

$$-8+5a = b$$

$$\therefore$$

$$y = (4-2a)x-8+5a$$

Y la ecuación para $\overleftrightarrow{AG}$ es:

$$A = (1,2) \quad \text{Y} \quad G = \left(3, \tfrac{a+2}{2}\right)$$

$$m = \frac{\frac{a+2}{2}-2}{3-1}$$

$$m = \frac{\frac{a+2-4}{2}}{2}$$

$$m = \frac{\frac{a-2}{2}}{\frac{2}{1}}$$

$$m = \frac{a-2}{4}$$

$$y = \frac{a-2}{4}x + b$$

Como dicha recta interseca al punto $A = (1,2)$ se tiene:

$$2 = \left(\frac{a-2}{4}\right) \cdot 1 + b$$

$$2 - \frac{a-2}{4} = b$$

$$\frac{8-a+2}{4} = b$$

$$\frac{-a+10}{4} = b$$

Luego la ecuación de la recta $\overleftrightarrow{AG}$ es:

$$y = \left(\frac{a-2}{4}\right)x + \left(\frac{-a+10}{4}\right)$$

Al hallar el punto de corte entre las dos rectas $\overleftrightarrow{AG}$ y $\overleftrightarrow{CF}$se encuentran las coordenadas del punto D.

$$(4-2a)x - 8 + 5a = \left(\frac{a-2}{4}\right)x + \left(\frac{-a+10}{4}\right)$$

$$(4-2a)x - \left(\frac{a-2}{4}\right)x = \left(\frac{-a+10}{4}\right) + 8 - 5a$$

$$\frac{4((4-2a)x - ax + 2x}{4} = -\frac{1}{4}a - 5a + \frac{5}{2} + 8$$

$$\frac{16x - 8ax - ax + 2x}{4} = -\frac{21}{4}a + \frac{21}{2}$$

$$18x - 9ax = \frac{-21a+42}{4} \cdot 4$$

$$18x - 9ax = -21a + 42$$

$$9x(2-a) = -21(a-2)$$

$$x = \frac{-21(a-2)}{-9(2-a)}$$

$$x = \frac{21}{9}$$

$$x = 2\frac{1}{3}$$

$$x \approx 2,\overline{33}$$

En seguida hallaron la coordenada en y de ese punto de intersección.

$$y = (4 - 2a)\left(\frac{7}{3}\right) - 8a + 5a$$

$$y = \frac{28}{3} - \frac{14}{3}a - 8 + 5a$$

$$y = -\frac{14}{3}a + \frac{15}{3}a + \frac{28}{3} - \frac{24}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}a + \frac{4}{3}$$

Con esto afirman que *las coordenadas del punto D a partir de las coordenadas de C son:*

$$D = \left(2,\overline{33}, \frac{1}{3}a + \frac{4}{3}\right)$$

Presentación de la tercera conjetura

Cuando obtuvieron las coordenadas del punto D, *Marcela* se preguntó si los cálculos estaría bien hechos, esto hizo que se generara una nueva conjetura: *Los cálculos hechos si responden a la pregunta formulada en la tarea.* Se considera una conjetura ya que se duda de su veracidad y puede no ser válida.

Verificación de la conjetura

Para la prueba de esta, primero dieron un valor para el punto C, fijando un $a = 5$ y realizaron los siguientes cálculos para encontrar las coordenadas del punto D:

$$y = \frac{5}{3} + \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{9}{3}$$

$$y = 3$$

Luego regresan al applet para dar las coordenadas fijas al punto C de (2, 5) y verificaron que las que obtenían por medio de cálculos para el punto D eran las mismas que se podían evidenciar en el applet (Ver figura 22).

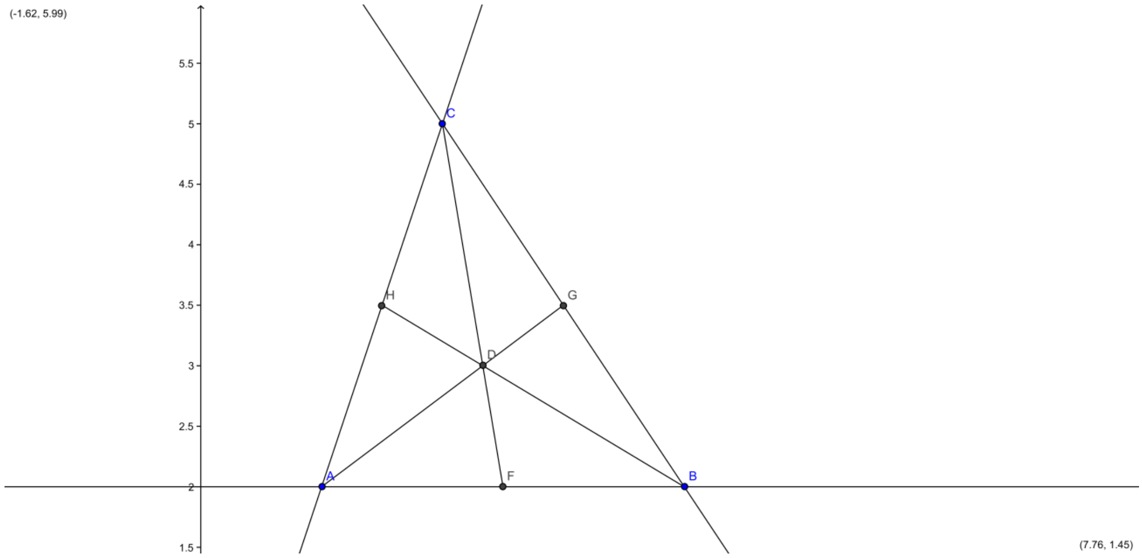


Figura 22.Pantallazo de las coordenadas del punto D al atribuir coordenadas fijas al punto C de (2, 5).

Se observó que todas las conjeturas que plantearon fueron comprobadas o se dio una validación como lo dirían Cañadas et al (2008) para demostrar su veracidad o falsedad.

4.2. Análisis grupo 2

Este grupo, a diferencia del anterior, solo estaba conformado por la estudiante Ana, es por esto que las dudas y preguntas que tuvo fueron discutidas con el entrevistador. Ella tardó aproximadamente dos horas y media para formular una conjetura.

Observación de datos

A continuación se presentan evidencias de la exploración hecha por Ana antes de llegar a su primera conjetura:

La estudiante comienza observando la pregunta que se presenta en la figura 2. Ana empieza haciendo construcciones auxiliares a la figura inicial, lo cual realizó para encontrar un indicio que le ayudó a responder la pregunta planteada en la tarea. A continuación se describen algunas de las exploraciones que realizó Ana:

En una primera instancia, la estudiante hace una serie de construcciones en el Applet, las cuales se describen a continuación:

- Traza la recta CD.
- Traza la recta CA.
- Traza la recta FG sobre el eje coordenado *y* con el punto G sobre el origen del plano Cartesiano.

- Traza una recta perpendicular a $\overleftrightarrow{FG}$ que pasa por el punto C.
- Traza $\overleftrightarrow{GH}$ sobre el eje coordenado x.
- Traza una recta perpendicular a la recta $\overleftrightarrow{GH}$ que pasa por el punto C.

Después de trazar estas rectas el entrevistador pregunta:

ENTREVISTADOR	ESTUDIANTE
¿Qué vas a hacer ahí?	*…no, pues voy a hallar las coordenadas ahí… ¿a ver qué?, las coordenadas ya las están dando.*
	Ana señala el punto C y pregunta:
	¿Éste punto se puede mover?
Si, además Ay D son fijos.	

Ana verifica esta información moviendo el punto C e intentando mover los puntos A y B. Realiza nuevas construcciones en el siguiente orden:

- Mueve el punto C arriba y abajo varias veces.
- Traza una recta perpendicular a $\overleftrightarrow{GH}$, que pasa por el punto D.
- Traza una recta perpendicular a $\overleftrightarrow{FG}$, que intenta hacer pasar por el punto D, pero sin darse cuenta construye un nuevo punto I.
- Oculta $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{CA}$.

El resultado de todas estas construcciones es presentado a continuación en la figura 23.

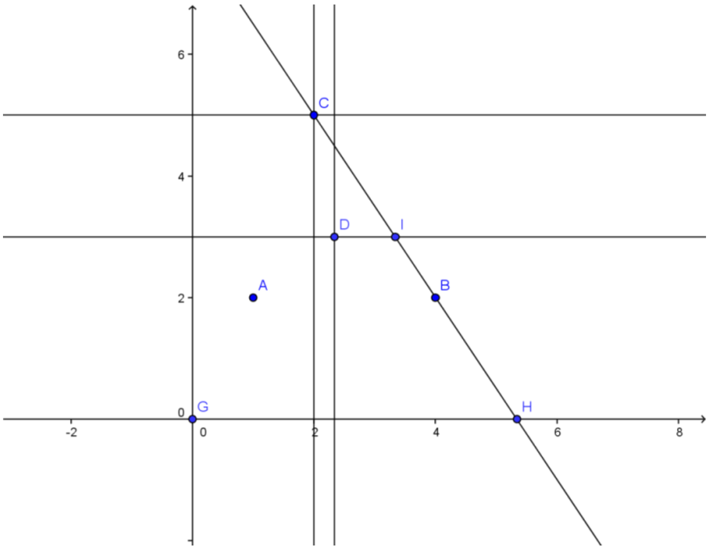


Figura 23. Pantallazo de la gráfica de realizada por Ana durante su exploración.

4. Ana construye los vectores $\overrightarrow{GC}$ y $\overrightarrow{GD}$ como se muestra en la figura 24. Hace desplazamientos del punto C y pregunta:

ENTREVISTADOR	ESTUDIANTE
	¿Solamente tiene que ver con éstas, las coordenadas del punto D?
…no, también puedes mirar los otros puntos que estaban al iniciar el Applet.	*...pues estaban los puntos C, B, A y D.*
... puedes mirar las propiedades de C. También puedes mirar A y B ¿qué relaciones tienen con C y D?	*...eso es lo que estoy mirando. Pues como dice que las coordenadas.*
… pero puede observar las propiedades.	

Ana realiza movimientos del punto C hacia arriba y hacia abajo y construye el $\overline{GA}$, pero después de hacer un par de movimientos, al punto C lo borra.

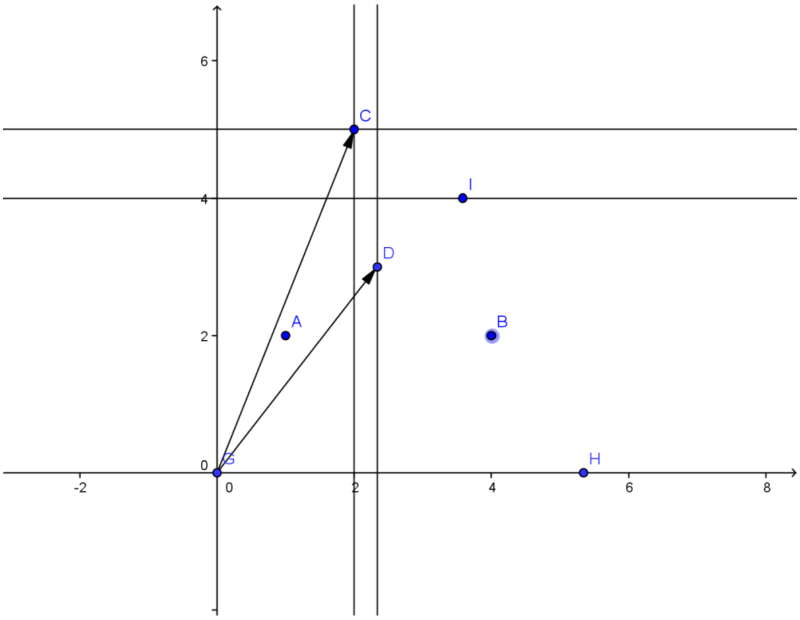


Figura 24. Pantallazo de los vectoresGC y GD.

Ana hace algunos movimientos con C y realiza las siguientes construcciones que se muestran la figura 25:

- Construye $\overline{AC}$.
- Construye $\overline{CB}$.
- Toma las medidas de $\overline{AC}$.
- Toma las medidas de segmento $\overline{CB}$.

Ana desplaza al punto C hacia arriba y hacia abajo e intenta desplazar el punto D, pero observa que no es posible. Luego de lo ocurrido borra las medidas que en un principio había tomado de $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$.

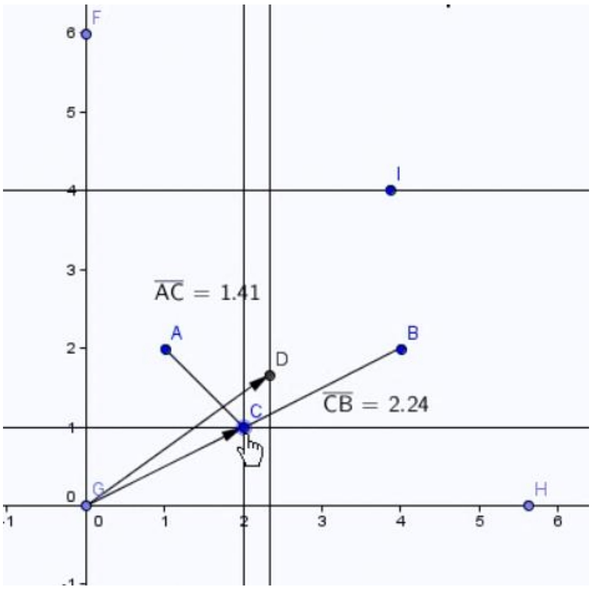


Figura 25.Pantallazo donde se evidencia el cambio de posición del punto C.

Ana realiza los siguientes pasos, como muestra la figura 26:

- Mueve el punto C hasta alinearlo con la recta perpendicular a la recta FH y que pasa por el punto D.
- Construye el segmentos CB
- Construye el segmentos AB

El entrevistador pregunta:

ENTREVISTADOR	ESTUDIANTE
¿Para qué creaste los vectores?	*…No sé, pues los cree como para mirar, pues para saber si tenían alguna relación, o sea digamos si, si, pues este se supone que es un vector* [señalando el punto C].
¿El que da las coordenadas?	*...si algo así, ósea como algo de vectores sí*
... y ¿estas líneas si las cogiste para trabajar coordenadas? pregunta	*...estas líneas las escogí, para mirar coordenadas, exactamente.*

señalando las rectas perpendiculares a la recta GH que pasan por los puntos C y D respectivamente. *... y ahora ¿hiciste el triángulo?*	*...si hice el triángulo.*

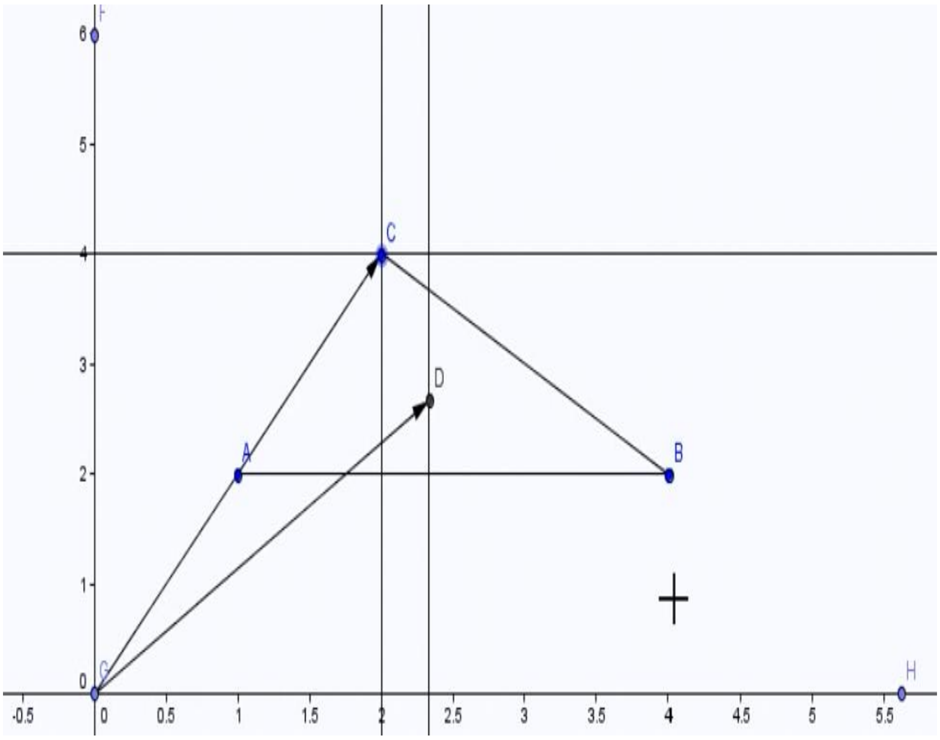


Figura 26. Movimiento del punto C hasta que sea colineal con la recta perpendicular a la recta FH y que interseca por el punto D. Construcción de los segmentos CB y AB.

Ana hace desplazamientos con el punto C y traza $\overline{AC}$, para completar la construcción del triángulo ABC como lo muestra la figura 27. Ana pregunta:

ENTREVISTADOR	ESTUDIANTE
	¿Este punto nunca es negativo?
¿Cuál punto?	*…el punto D*
... no sé, desplaza a C.	*Si, ¿cierto?*

Ana, desplazar el punto C hacia abajo, como lo muestra la figura 27.

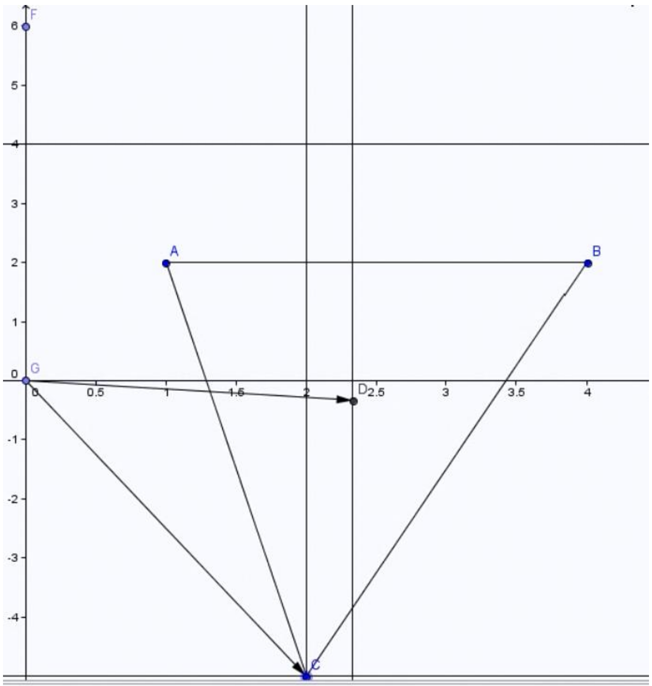


Figura 27. Triángulo ABC, generado a partir de movimientos del punto C.

Estudio de la tarea

Ana traza las medianas del triángulo de la siguiente forma (Ver figura 28):

1. Encuentra el punto medio de $\overline{AB}$: J.

2. Traza la recta que pasa por el punto AJ y percibe que también contiene al punto D.

3. Encuentran los puntos medios de los otros dos lados triángulo. (M punto medio de $\overline{CB}$ y L punto medio de $\overline{AC}$.

4. Construyen las rectas que contienen las medianas.

Presentación de la primera conjetura

Después de una discusión con el entrevistador, en la cual él le dice que para responder la pregunta realizada debe tener en cuenta todos los puntos que había en el primer instante de la presentación del Applet. Ana afirma que el punto D es la intersección de las medianas, logrando con esto una conjetura.

Verificación de la conjetura

Ana hace desplazamientos del punto C hacia arriba y hacia abajo de la pantalla, lo que le permite evidenciar que efectivamente D es el punto de intersección de las medianas (ver figuras 28 y 29).

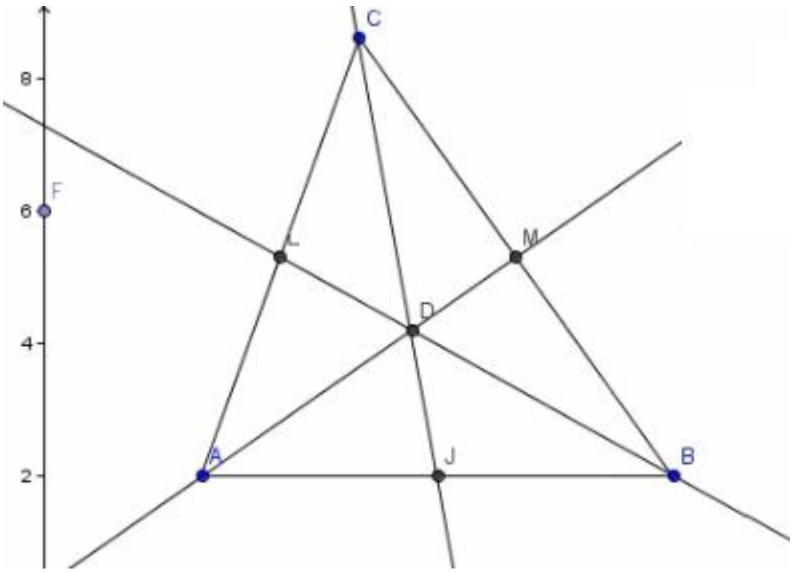


Figura 28.Pantallazo de una posible posición para las coordenadas para el punto C.

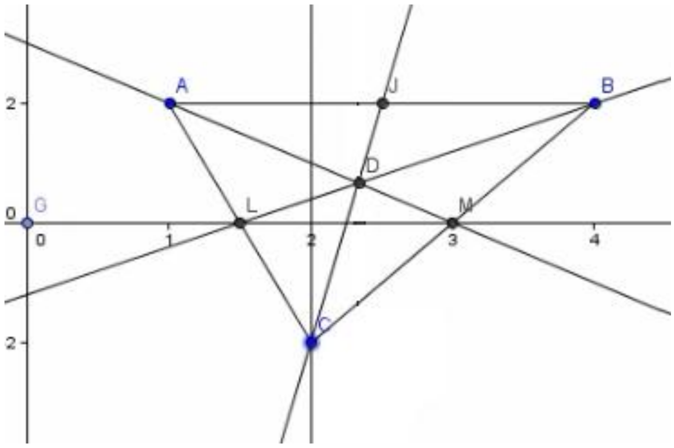


Figura 29.Pantallazo de cambio de coordenadas en el punto C.

Generalización de la conjetura

Después de hacer las exploraciones en el Applet, Ana tuvo una discusión con el entrevistador, en la cual ella le pregunta la ecuación de la recta, pues no la recordaba. El entrevistador le escribe en una hoja la ecuación de la recta a partir del punto y la pendiente y la ecuación de la pendiente de una recta.

Después, Ana usa sus conocimientos previos para resolver las ecuaciones que realiza por el método de igualación, pero después de varios intentos y distintos resultados no logra hallar solución alguna, debido a que realiza mal los cálculos algebraicos. Esto lo realiza a lápiz y papel y todo el procedimiento se encuentra escrito a continuación.

Antes de empezar la transcripción, enfatizamos que las partes de la solución de la ecuación en donde hay errores algebraicos se encuentren en rojo y en donde aparece una línea se marca el inicio de nuevos cálculos.

Transcripción de la hoja escrita por Ana:

Ana dibuja un triángulo y sus medianas e indica sus congruencias, para no olvidar que esto es una mediana. (Figura 30)

Coordenadas punto C:

C= (2, a)

Coordenadas D

D= (2.3, 3)

$D = (2.3, b)$

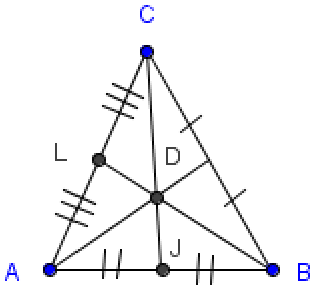


Figura 30. Medianas del triángulo ABC.

Ana escribe las coordenadas de los puntos medios del triángulo.

$$\left(\frac{3}{2}, 2\right)$$

$$(2.5,2\ ) = J$$

$$\left(\frac{5}{2}, 2\right) = Jm = \frac{y_{2-}\ y_1}{x_{2-}\ x_1}$$

$$B\ = (4, 2)$$

$$L = \left(\frac{3}{2}, \frac{2+a}{2}\right)\left(\frac{3}{2}, \frac{2+a}{2}\right) = L$$

$$y_{2-}\ _{y_1} =\ m(\ x_2 -\ x_1)$$

$$Y =\ m\,x\ +\ b$$

Como Ana conoce las coordenadas de los puntos medios de los lados del triángulo, escribe la ecuación de la recta.

$$m\ = \frac{y_{2\ -\ y_1}}{x_{2\ -\ x_1}} m_{\overleftrightarrow{BC}} = \frac{\frac{2\ +\ a}{2}\ -\ 2}{\frac{3}{2}\ -\ 4} = \frac{\frac{2\ +\ a\ -\ 4}{2}}{\frac{3\ -\ 8}{2}} = \frac{\frac{-2\ +\ a}{2}}{\frac{-5}{2}} = \frac{-2\ +\ a}{-5}$$
$$= \frac{2\ -\ a}{-5}$$

$$y - y_1 = m\ (\ x -\ x_1)$$

$$y - 2 = \frac{2-a}{5}(x-4)$$

$$y - 2 = \frac{2-a}{5}\ x - \frac{4\ (\ 2-a)}{5}$$

$$y = \left(\frac{2-a}{5}\right)\ x - \left(\frac{8-4a}{5}\right) +\ 2$$

$$y = \left(\frac{2-a}{5}\right) x - \left(\frac{8-4a+10}{5}\right)$$

Después de hacer los cálculos algebraicos obtiene la ecuación de $\overleftrightarrow{LB}$.

$$y = \left(\frac{2-a}{5}\right) x - \left(\frac{-4a+18}{5}\right) = \overleftrightarrow{LB}$$

$$\overleftrightarrow{CJ} C = (2, a)$$

$$J = \left(\frac{5}{2}, 2\right)$$

$$m = \left(\frac{2-a}{\frac{5}{2}-2}\right) = \left(\frac{2-a}{\frac{1}{2}}\right) = 4 - 2a$$

Luego encuentra la ecuación de la recta $\overleftrightarrow{CJ}$

$$y - a = (4-2a)(x-2) = 4 - 2a$$

$$y = (4-2a)x - (2-2a) = \overleftrightarrow{CJ}$$

Determina la intersección de las dos rectas, pero en este procedimiento comete errores algebraicos, los cuales se resaltaran en color rojo.

Iguala $\overleftrightarrow{LB}$ y la recta $\overleftrightarrow{CJ}$

$$\left(\frac{2-a}{5}\right) x - \left(\frac{-4a+18}{5}\right) = (4-2a)x - (2-2a)$$

Despeja la x

$$\frac{2-a}{5} x - (4-2a)x = -(2-2a) + \left(\frac{-4a+18}{5}\right)$$

$$\left(\frac{(2-a) - 5(4-2a)}{5}\right) x = \frac{-(2-2a) + (-4a+18)}{5}$$

$$\left(\frac{-18-11a}{5}\right) x = \frac{6a+8}{5}$$

Encuentra el valor de x.

$$x = \frac{\frac{6a+8}{5}}{\frac{-18+11a}{5}}$$

En el paso anterior Ana cometió el error de pasar a dividir el término que acompañaba a la variable x, pero le cambio el signo a la constante que acompañaba a la variable a, es decir paso de ser un (-11a) a ser un 11a

$$x = \frac{6a+8}{-18+11a}$$

En esta parte halla la ecuación de $\overleftrightarrow{CJ}$, partiendo de que conoce la pendiente de la recta $(4-2a)$ y las coordenadas del punto J $\left(\frac{5}{2}, 2\right)$:

$$y - 2 = (4-2a)\left(x - \frac{5}{2}\right)$$

$$y = (4-2a)x - \frac{5}{2}(4-2a) + 2$$

$$y = 4x - 2ax - 10 + 5a + 2$$

$$y = 4x - 2ax + 5a - 8$$

Iguala las ecuaciones de $\overleftrightarrow{LB}$ y $\overleftrightarrow{CJ}$ para encontrar el término de la x:

$$\left(\frac{2-a}{5}\right)x - \left(\frac{-4a+18}{5}\right) = 4x - 2ax + 5a - 8$$

$$\frac{2}{5}x - \frac{9x}{5} + \frac{4a}{5} - \frac{18}{5} = 4x - 2ax + 5a - 8$$

$$\frac{2}{5}x - 4x = -2ax + \frac{ax}{5} + 5a - \frac{4a}{5} - 8 + \frac{18}{5}$$

$$\frac{-18}{5}x = \frac{-9}{5}ax + \frac{21}{5}a - \frac{22}{5}$$

$$\frac{-18}{5}x + \frac{9}{5}ax = \frac{21}{5}a - \frac{22}{5}$$

$$x\left(\frac{-18}{5}+\frac{9}{5}a\right)=\frac{21}{5}a-\frac{22}{5}$$

$$x\left(\frac{-18}{5}+\frac{9}{5}a\right)=\frac{21}{5}a-\frac{22}{5}$$

Obtiene el siguiente resultado al despejar la X:

$$x=\frac{\frac{21a-22}{5}}{\frac{-18+9a}{5}}=\frac{21a-22}{-18+9a}$$

Como conoce las coordenadas de los puntos B y L, halla la ecuación de la recta BL.

$$B=(4,2)$$

$$L=\left(\frac{3}{2},\frac{2+a}{2}\right)$$

$$m=\frac{\frac{2+a}{2}-2}{\frac{3}{2}-4}=\frac{\frac{2+a-4}{2}}{\frac{-5}{2}}=\frac{\frac{2+a-4}{2}}{-\frac{5}{2}}=\frac{\frac{-2+a}{2}}{-\frac{5}{2}}=\frac{-2+a}{-5}$$

$$y-2=\left(\frac{-2+a}{-5}\right)(x-4)$$

$$y=\frac{(-2+a)(x-4)}{-5}+2$$

$$y=\frac{-2x+ax+8-4a}{-5}+2$$

$$y=\frac{-2x+ax+8-4a-10}{-5}$$

$$y=\frac{-2x+ax-4a-2}{-5}\overleftrightarrow{BL}$$

Además conoce las coordenadas de los puntos C y J, halla la ecuación de la recta CJ.

$$C = (2, a)$$

$$J = \left(\frac{5}{2}, 2\right)$$

$$m = \frac{2-a}{\frac{5}{2}-2} = \frac{2-a}{\frac{1}{2}} = 4-2a$$

$$y-2 = (4-2a)\left(x-\frac{5}{2}\right)$$

$$y = 4x-2ax-10+5a$$

Ana iguala las dos ecuaciones para encontrar la coordenada x,

$$4x-2ax-10+5a = \frac{-2x+ax-4a-2}{-5}$$

$$-20x+10ax+50-25a = -2x+ax-4a-2$$

$$-20x+2x+10ax-ax = -4a+25a-50-2$$

$$-18x+9ax = 21a-52$$

$$x(-18+9a) = 21a-52$$

Encuentra el valor de x.

$$x = \frac{21a-52}{9a-18}$$

De nuevo conoce las coordenadas de los puntos C y J, entonces ella halla la ecuación de la recta CJ.

$$J\left(\frac{5}{2}, 2\right) C(2, a)$$

$$m = \frac{2-a}{\frac{5}{2}-2} = 4-2a$$

$$y-2 = (4-2a)\left(x-\frac{5}{2}\right)$$

$$y = 4x - 10 - 2ax + 5a$$

$$= (4 - 2a)x - 10 + 5a$$

Con las coordenadas de los puntos C y J, halla la ecuación de $\overleftrightarrow{CJ}$.

$$L = \left(\frac{3}{2}, \frac{2+a}{2}\right)$$

$$B = (4,2)$$

$$m = \frac{\frac{2+a}{2} - 2}{\frac{3}{2} - 4} = \frac{\frac{2+a}{2}}{\frac{-5}{2}} = \frac{-2+a}{-5} = \frac{2-a}{5}$$

En el momento en que Ana halla la pendiente comete dos errores algebraicos, el primero lo hace al momento de sumar las expresiones encontradas en el numerador, y el segundo al simplificar la expresión le cambia el signo al numeró 2 que está en el denominador.

Por la razón anterior los cálculos hechos a continuación tendrán un resultado incorrecto

$$y - 2 = \frac{2-a}{5}(x - 4)$$

$$y = \frac{2x - 8 - ax + 4a}{5} + 2$$

$$= \frac{2x - 8 - ax + 4a + 10}{5}$$

$$= \frac{2x + 2 - ax + 4a}{5}$$

$$y = \frac{(2-a)}{5}x + \frac{2+4a}{5}$$

Iguala las ecuaciones de las rectas CJ y LB para encontrar las coordenadas en x:

$$\frac{(2-a)}{5}x + \frac{2+4a}{5} = (4 - 2a)x - 10 + 5a$$

$$\frac{(2-a)}{5}x-(4-2a)x=-10+5a+\frac{2+4a}{5}$$

$$x\left(\frac{2}{5}-\frac{a}{5}-4-2a\right)x=\frac{-48}{5}+\frac{29a}{5}$$

$$x\left(\frac{-18}{5}-\frac{11}{5}a\right)x=\frac{-48}{5}+\frac{29a}{5}$$

Obtiene la coordenada en x:

$$x=\frac{-48+29}{-18-11a}$$

Resultados

Debido al tiempo que utilizó Ana para la exploración de datos, ella no alcanzó a completar el proceso de verificación de la validez de los cálculos realizados, ya que en el momento en que los verificaba, en el programa no coincidían los cálculos realizados con los resultados que arrojaba el software.

Ana alcanzó a realizar varios cálculos, pero ninguno de éstos, en el momento de la verificación de la validez de los cálculos, le coincidió con los resultados del software. Sin embargo, estaba segura del proceso que había seguido para hallar las coordenadas del baricentro, por lo tanto sabía que tenía errores al momento de realizar los cálculos algebraicos.

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este capítulo se muestran diferentes tipos de conclusiones, respecto a los objetivos, respecto a la formación como docentes y respecto a la metodología.

Respecto a los objetivos:

Retomando la propuesta de Cañadas et al (2008) y teniendo en cuenta la información recopilada, se observó que los estudiantes no realizaron todas las etapas del proceso de conjeturar propuestas por estos autores, solo las que se describen a continuación:

1. Observación de los datos: Los estudiantes revisaron los datos presentados en el Applet, teniendo en cuenta sus conocimientos previos, esta etapa fue bastante distinta en los dos grupos, mientras que en el grupo de Marcela y Diana este paso no tomo muy poco tiempo, en el grupo de Ana tomo la mayor parte del desarrollo de la tarea (aproximadamente 2 horas) debido a que Ana exploro bastantes formas de solucionar la tarea, como lo fueron los vectores, la relación entre triángulos entre otros, esto hizo que se demorara en generar una conjetura.

2. Estudio de la tarea: En este paso, los estudiantes realizaron desplazamientos para verificar qué puntos se podían mover, cuáles puntos tenían dependencia de otros, si D pertenecía al interior del triángulo al desplazar el punto C, algunos cálculos como las coordenadas de los puntos medios de los lados del triángulo y construcciones auxiliares como los lados del triángulo para verificar que efectivamente el punto D está en el interior del triángulo.

3. Formulación de una conjetura: Después de realizar la observación de los datos y el estudio de la tarea los estudiantes empezaron a plantear algunas conjeturas, el Grupo Marcela y Diana dijo que el punto D era el Ortocentro del triángulo, implícitamente creyeron que el punto D era el circuncentro del triángulo al creer que era el punto de intersección de las mediatrices del triángulo y los grupos conjeturaron que el punto D es la intersección de las medianas, estas conjeturas se evidenciaban a partir de los pasos anteriores, en los cuales verificaban que existía un triángulo, que D dependía del punto C y además que nunca salía del triángulo.

4. Verificación de conjetura: Luego de tener la conjetura procedían a una verificación previa que en su gran mayoría lo hicieron con ayuda del Applet, ambos grupos trazaron las medianas del triángulo y se dieron cuenta que el punto de estaba en la intersección de estas, luego hicieron desplazamientos del punto C para verificar que el punto D siempre estaba en la intersección de las medianas, después de esto hallaron las coordenadas de los puntos medios de los lados del triángulo, los dos grupos trataron de hallar las ecuaciones de las rectas que contenían las medianas del triángulo pero solo el grupo de

Marcela y Diana lograron hacer bien los cálculos, Ana no lo logró debido a que presentó errores algebraicos en los cálculos, después de esto hallaron las coordenadas del punto de intersección de las rectas que contenían a las medianas ya que este es el punto D.

5. Validación de conjetura: Este paso sólo lo logro el grupo de Marcela y Diana; como ellas ya tenían teóricamente las coordenadas del punto D que dependían de las coordenadas del punto C, tomaron coordenadas aleatorias para el punto C y realizaron la demostración con lápiz y papel. Después de esto, comparaban los resultados con los del Applet, y como eran los mismos, asumían que su conjetura era válida.

Además, con el desarrollo de la tarea por medio del Applet se evidenció que esta herramienta permite al estudiante revisar y analizar diferentes caminos hacia la solución del problema, ofrece también la posibilidad de explorar y de tener de manera más tangible una situación abstracta.

Los estudiantes de la Licenciatura en matemáticas realizaron la tarea propuesta, siguiendo un proceso similar al planteado por los autores estudiados, sin embargo no llevaron a cabo todas las etapas, por lo anterior se logró afirmar que el proceso expuesto por Cañadas et al, no es llevado por los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas en la misma secuencia en la que los autores lo plantean.

Respecto a la metodología

El plantear tareas apoyadas en la utilización de un software matemático permite al estudiante tener dos medios para realizar la prueba de sus conjeturas, uno es por medio del mismo programa y otro a través de cálculos matemáticos. Aunque el primero tiene un poco menos de validez ayuda al estudiante a comprobar si sus cálculos son correctos.

Además el desarrollar actividades en software matemáticos, permite a los estudiantes desarrollar sus procesos de análisis, por ejemplo no es lo mismo trazar un triángulo a mano que uno en un software matemático, este último le permite realizar cambios en el mismo y evidenciar diferentes casos particulares.

Respecto a la formación como docentes

Con la realización de este documento desarrollamos una mayor capacidad para elaborar tareas en las que intervienen preguntas abiertas que ofrezcan a los estudiantes tener más de un camino para llegar a la solución. También aprendimos que la utilización de herramientas tecnológicas es muy importante en la clase de matemáticas para desarrollar una mayor interacción entre los estudiantes y las matemáticas, ya no hay excusa por las licencias de los software, debido a que hoy en día existen muchos software libres, como es el caso de GeoGebra.

Otro aspecto relevante que nos deja el trabajo como docentes en formación, es no generalizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, debido a que los estudiantes que desarrollaron la tarea presentada en este trabajo pertenecían al mismo curso de Geometría Analítica y no realizaron los mismos procesos, ni trabajaron al mismo ritmo, teniendo en cuenta que sus conocimientos previos son muy similares.

El desarrollo de este trabajo nos permitió tener una mirada crítica como investigadores en el proceso de conjeturación que realizan los estudiantes de la Licenciatura en Matemática, además nos ayudó a mejorar en el aspecto de diseñar tareas que nos permitan observar dicho proceso en nuestros estudiantes, y de esta forma contribuir a una mejor formación de nuestros estudiantes.

Recomendaciones

Un aspecto negativo de la metodología empleada, fue el recoger la información, debido a que el programa en el cual se hizo registro del video, no está diseñado gravar videos de larga duración, por esta motivo nos perdimos la posibilidad de tener otro grupo en el estudio, porque se perdieron las evidencias al video ser tan largo, por este motivo se recomienda cortar las grabaciones cuando los estudiantes realizan cálculos en el papel, además esto permite estudiar mejor la información optimizando el tiempo de revisión de las evidencias.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Cañadas, M., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D. y Yevdokimov, O. (2008). Perspectivas teóricas en el proceso de elaboración de conjeturas e implicaciones para la práctica: tipos y pasos. España: Universidad de Zaragoza.

2. Soler, M. y Carranza E. (2012). Razonamientos abductivos, inductivos y deductivos desarrollados por estudiantes del curso de geometría analítica al realizar una tarea relacionada con la representación de objetos geométricos en distintos sistemas coordenados. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

3. Barreto, B. D (2008) *La geometría del triángulo*. Recuperado el 15 Noviembre, 2012de http://ficus.pntic.mec.es/dbab0005/triangulos/Geometria/pdf/Global.pdf.

4. Corral, C. A. (2012). Generalidades del. Recuperado el 15 de noviembre de 2012:http://acorral.es/triangeo/triangulos.pdf.

ANEXO 1

En este anexo se presentan las demostraciones pertinentes para los teoremas relacionados con la mediatriz.

Teorema 1.

Las mediatrices de un triángulo concurren en un punto llamado circuncentro.

Demo//

Dado el triángulo ABC se tienen los segmentos AB, BC y AC. Por el teorema de la existencia del punto medio encontramos los puntos medios para cada uno de los segmentos los cuales se denominan D, E y F respectivamente. Con la definición de mediatriz trazo las mediatrices de los segmentos AB y BC, como no son rectas paralelas sabemos que se intersecan en un punto el cual llamaremos G (figura 31).

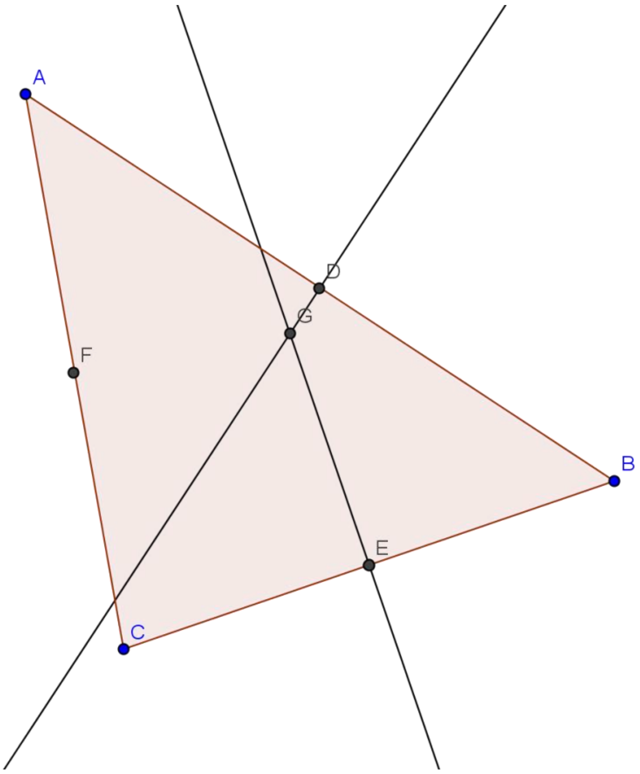


Figura 31. Mediatrices de los lados AB y BC del triángulo ABC.

Ahora para demostrar que la mediatriz del segmento AC se interseca con las otras en el punto G y no en cualquier otro punto, con la definición de mediatriz se sabe que $\overline{CG} \equiv \overline{GB}$ y $\overline{GB} \equiv \overline{GA}$ (figura 32). Por ultimo por transitividad se tiene que $\overline{CG} \equiv \overline{GA}$, así aplicando nuevamente la definición de mediatriz se afirma que G pertenece a la mediatriz del segmento AC y así se concluye que las tres mediatrices se intersecan (concurren) en el punto G.

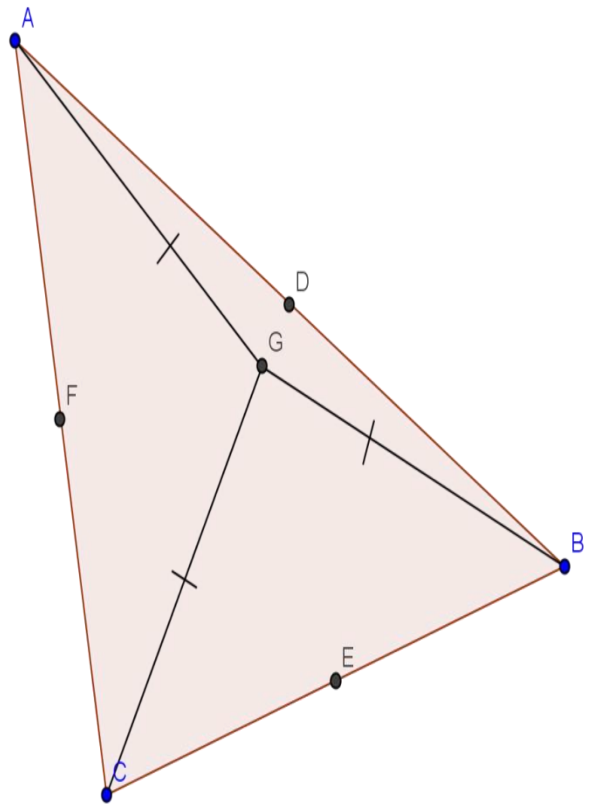


Figura 32. Congruencia de los segmentos $\overline{CG} \equiv \overline{GB}$, $\overline{GB} \equiv \overline{GA}$ *y* $\overline{CG} \equiv \overline{GA}$.

Teorema 2.

En un triángulo la razón entre un lado y el seno del ángulo opuesto es igual a dos veces el circunradio del triángulo. Es decir que, dado un triángulo ABC *con respectivos lados* a, b, c *y circunradio* R*, se cumple la relación:*

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC} = 2R$$

Demo//

Dado el triángulo ABC, con circuncentro en G. Trazamos la circunferencia con centro en G y radio GA, puesto a que la circunferencia tiene infinitos puntos se toma uno de ellos el cual se denominará H de tal manera que $\overline{AH}$ es un diámetro de la circunferencia y por tanto dos veces la distancia de uno de los vértices al circunradio, a dicha distancia se le denominara R. (Figura 33).

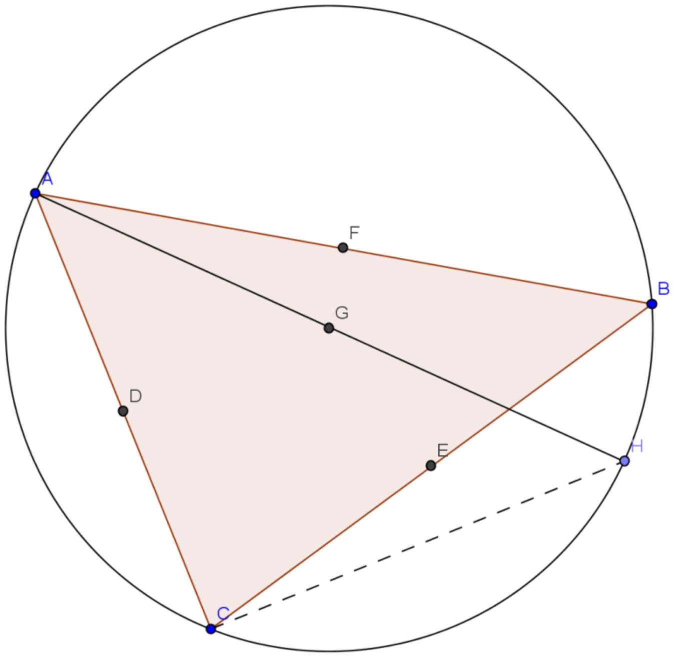


Figura 33. Gráfico en el cual se evidencian los pasos nombrados anteriormente.

De la anterior figura se evidencia que $< ABC \equiv < AHC$ ya que subtienden el mismo arco, además $< ACH$ es recto puesto que AH es diámetro de la circunferencia. Por lo tanto, del triangulo AHC se obtiene:

$$\sin AHC = \frac{b}{AH} = \sin ABC$$

Así concluimos que:

$$\frac{b}{\sin B} = AH = 2R$$

De manera análoga se realiza para los otros ángulos o por medio del teorema de los senos se obtiene:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Quedando demostrado el teorema.

Teorema 3.
El área de un triángulo es igual al semiproducto de dos lados cualesquiera por el seno del ángulo que forman. Es decir que dado un triángulo ABC con sus respectivos lados a, b, c se cumple que:

$$area\ (ABC) = \frac{1}{2} ab\ sen\ C = \frac{1}{2} ac\ sen\ B = \frac{1}{2}\ cb\ sen\ A$$

Demo//

Dado el triángulo ABC con sus respectivos lados a, b y c y la altura AD relativa al lado BC(figura 34).

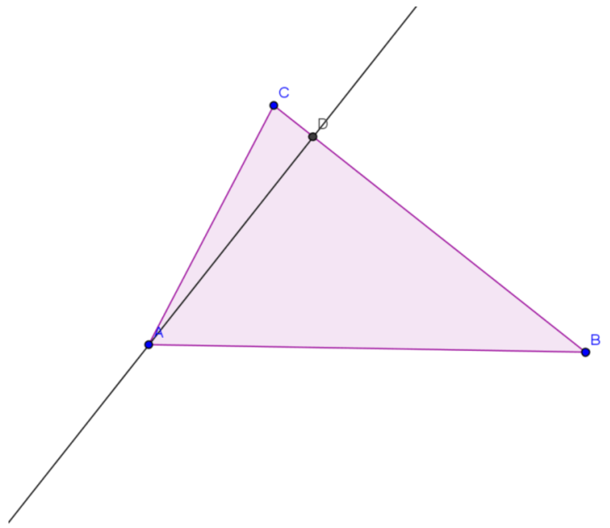


Figura 34. Muestra la construcción del triángulo ABC, junto con una de sus alturas la correspondiente al lado CB.

Como el área de un triángulo está definida por $\frac{1}{2}\ b * h$ donde b es la base y h la altura del triángulo, entonces para el ejercicio se tiene:

$$\text{Área } (ABC) = \frac{1}{2}(BC)(AD)$$

$$\rightarrow \text{Área } \ (ABC) = \frac{1}{2}\ ab\ sen\ C \text{ Puesto que } sen\ C = \frac{AD}{b}$$

Para terminar la demostración del teorema de manera similar se obtiene que:

$$\text{Área } (ABC) = \frac{1}{2}acsenB = \frac{1}{2}bcsenA$$

Teorema 4.

El área de un triángulo está dada por el producto de sus tres lados dividido cuatro veces el circunradio.

Demo//

De acuerdo con los anteriores teoremas se sabe que el área del triángulo está dada por $(ABC) = \frac{1}{2}\ ab\ sen\ C$ y que $\frac{c}{sen\ C} = 2R \rightarrow sen\ C = \frac{c}{2R}$, por lo tanto de manera inmediata se tiene:

$$\text{Área } (ABC) = \frac{1}{2}absenC = \frac{1}{2}ab\left(\frac{c}{2R}\right) = \frac{abc}{4R}$$

ANEXO 2

En este apartado de los anexos se presentan las demostraciones de los teoremas relacionados con las medianas de triángulo.

Teorema 1.

Las tres medianas de un triángulo son concurrentes. El punto de concurrencia se conoce como el Gravicentro, Centroide o Baricentro del triángulo, dicho punto está situado a una razón de 2:1 desde el vértice al punto medio.

Demo//

Dado el triángulo arbitrario *ABC*conD, *E,* y *F* puntos medios de los lados *BC, CA* y *AB,* respectivamente (figura 35).

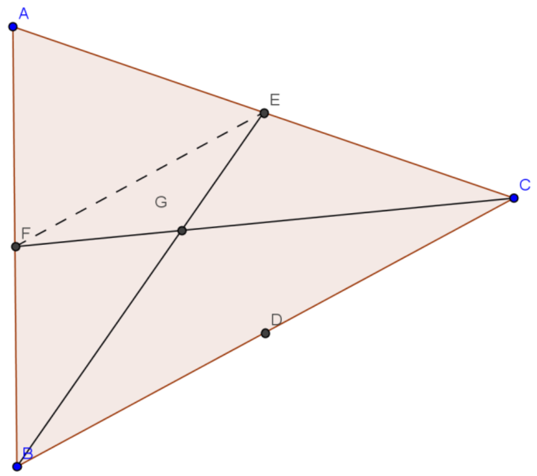


Figura 35. Triangulo ABC con los puntos D, E, F puntos medios de los lados BC, CA yAB,respectivamente.

Sea G el punto de intersección de BE y CF (figura 35), como E y F son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente, se tiene que $\overline{FE}$ es paralela a $\overline{BC}$e igual a su mitad. Por lo tanto los triángulos GEF y BGC son triángulos semejantes a razón $2:1$ ya que $< FGE \equiv < BGC$ por ser ángulos opuestos por el vértice, $< FEG \equiv < GBC$ y $< BCG \equiv < EFG$ debido a que son ángulos correspondientes entre rectas paralelas. Es decir que $\frac{BG}{GE} = \frac{CG}{GF} = 2$ y así G divide en razón $2:1$ a las medianas BE y CF. De la misma forma, podemos demostrar que las medianas AD yBE se cortan en razón $2:1$ a partir del vértice. Por tanto las tres medianas son concurrentes en G.

Teorema 2. El baricentro de un triángulo con vértices $A\,(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C\,(x_3, y_3)$ tiene coordenadas:

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

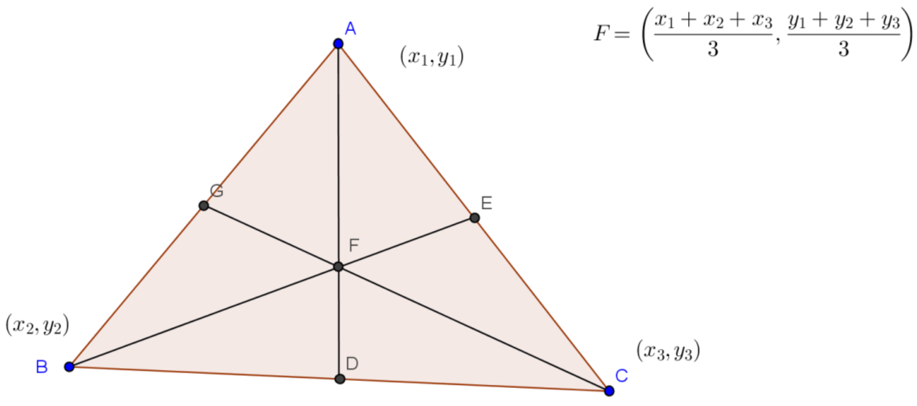


Figura 36. Triángulo ABC con su baricentro y sus respectivas coordenadas.

Demo//

Recordando la fórmula de geometría la cual enuncia que *las coordenadas del punto que divide a un segmento en razón* $^r/_s$ *están dadas por:*

$$\frac{rx_2 + sx_1}{r + s}, \frac{ry_2 + sy_1}{r + s}$$

Dado el triángulo ABC por el teorema de la existencia del punto medio se llamará D al punto medio de $\overline{BC}$ (figura 36), de acuerdo con la anterior formula se tiene que las coordenadas de D son:

$$\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$$

Como el baricentro es un punto que divide a $\overline{AD}$ en razón $^2/_1$. (Donde el segmento más grande es el que está junto al vértice), entonces su coordenada en x es:

$$\frac{2\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right) + x_1}{2 + 1} = \frac{x_1 + x_1 + x_3}{3}$$

Se hace lo mismo para la coordenada C y de esta manera el punto F (baricentro) tiene coordenadas:

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

Teorema 3.

Los seis triángulos determinados por las medianas de un triángulo tienen igual área.

Dado el triangulo ABC con sus medianas $\overline{AD}, \overline{BE}$ y $\overline{CF}$ respectivamente (figura 37).

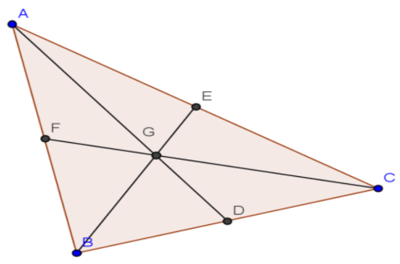


Figura 37*. Triángulos generados dentro del triángulo ABC al construir las medianas.*

Como los triángulos ABD y ACD tienen igual base y sus alturas son congruentes, entonces sus áreas son iguales, es decir $\acute{a}rea\,(ABD) \equiv \acute{a}rea\,(ACD)$. Además, en el triángulo BGC, los triángulos BGD y CGD también tienen igual área. Por lo tanto se debe cumplir que las áreas de los triángulos ABG y ACG sean iguales, pues $\acute{a}rea\,(ABG) = \acute{a}rea\,(ABD) - \acute{a}rea\,(BGD) = \acute{a}rea\,(ACD) - \acute{a}rea\,(CGD) = \acute{a}rea\,(ACG)$. De la misma forma, podemos demostrar que $\acute{a}rea\,(AGC) \equiv \acute{a}rea\,(BGC) \equiv \acute{a}rea\,(AGB)$, y además cada triángulo tiene área igual a un tercio del área del triángulo ABC. Luego, como cada uno de esos tres triángulos contiene dos de los triángulos pequeños que buscamos, pues en cada caso, cada triángulo pequeño tendrá área igual a la mitad del triángulo al que pertenecen. Es decir:

$$\acute{a}rea\,(BGD) = \acute{a}rea\,(CGD) = \frac{1}{2}\,\acute{a}rea\,(BGC) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\acute{a}rea\,(ABC)\right) = \frac{1}{6}\acute{a}rea\,(ABC)$$

$$\acute{a}rea\,(CGE) = \acute{a}rea\,(AGE) = \frac{1}{2}\acute{a}rea\,(AGC) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\acute{a}rea\,(ABC)\right) = \frac{1}{6}\acute{a}rea\,(ABC)$$

$$\acute{a}rea\,(CGF) = \acute{a}rea\,(AGF) = \frac{1}{2}\acute{a}rea\,(AGB) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\acute{a}rea\,(ABC)\right) = \frac{1}{6}\acute{a}rea\,(ABC)$$

Así queda demostrado que los seis triángulos tienen la misma área.

Teorema 4.

Los tres triángulos determinados por los segmentos que unen el baricentro de un triángulo con cada uno de sus vértices tienen igual área. El baricentro es el único punto del triángulo que cumple tal propiedad.
Demo//

En el teorema anterior se mostró que los tres triángulos determinados tienen área de $\frac{1}{3}$del triángulo original. Por lo tanto, sólo falta demostrar que el Centroide del triángulo es el único punto con tal propiedad. Esta demostración se hace por contradicción.

Para ello, se construye un triángulo ABC (figura 38), y se ubica un punto arbitrario Pen su interior. Sean D, Ey Flos puntos de intersección de $AP, BP\ y\ CP$con los lados $AC, BC\ y\ AB$, respectivamente. Ahora supongamos que $(APB) = (BPC) = (CPA)$.

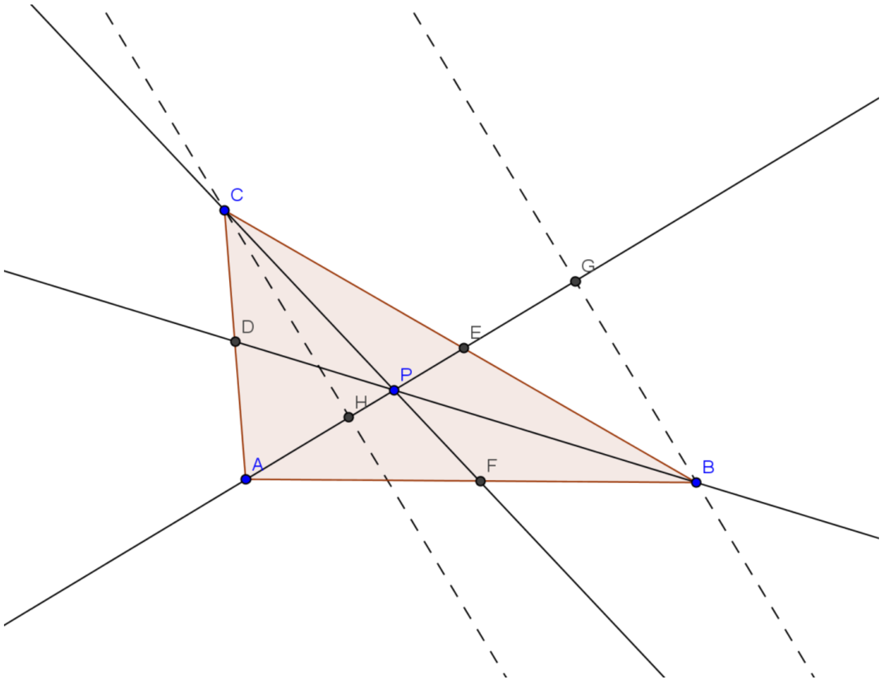


Figura 38. Supuesto de que el baricentro no es el único punto con el cual se cumple la propiedad.

En los triángulos APC y APB comparten la misma base AP; por lo tanto, como tienen áreas iguales, sus alturas deben ser iguales. Se trazan las alturas desde C y B al lado AP. Estas cortan a AP en los puntos H y G, respectivamente (y por lo tanto $CH = BG$).

Observando los triángulos CHE y BGE: tienen un ángulo recto y comparten el ángulo en E, al estar opuestos por el vértice; por lo tanto, son semejantes. Y más aún, como $CH = BG$, entonces son congruentes. De este modo $BE = EC$. Es decir, E es punto medio del lado BC. Análogamente podemos demostrar que D y F son los puntos medios de los lados CA y AB, respectivamente. Por tal motivo, P debe ser el baricentro del triángulo ABC.

ANEXO 3

Aquí se presenta la demostración para los teoremas relacionados con las alturas del triángulo.

Teorema 1.

Las tres alturas de un triángulo son concurrentes. El punto de concurrencia se conoce como el Ortocentro del triángulo.

Demo//

Dado un triángulo *ABC* trazo dos de sus alturas, (figura 39). Dado a que las alturas no son paralelas se intersecan en uno de sus puntos al cual se le llamará D.

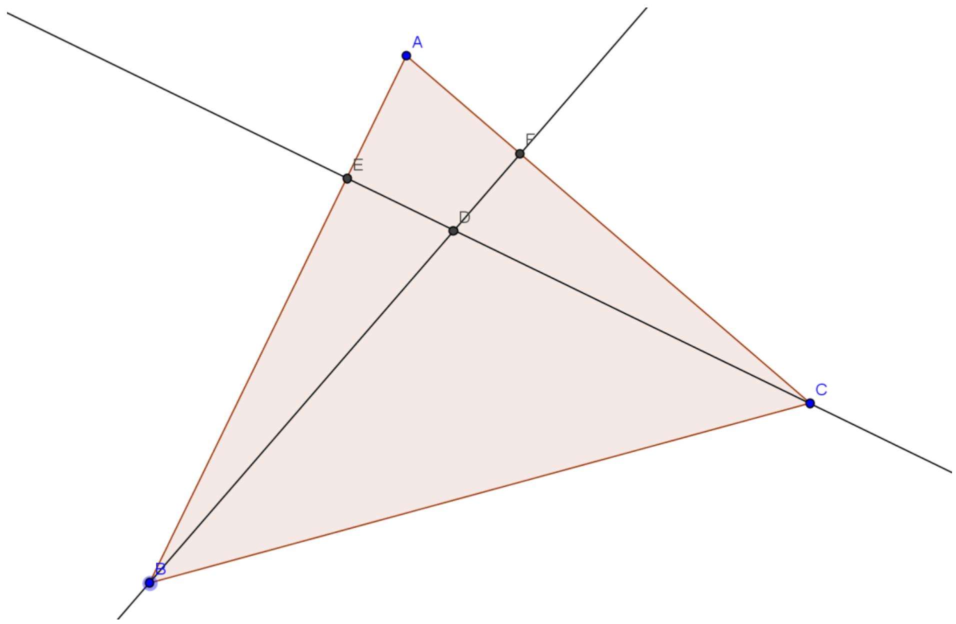


Figura 39.Triángulo ABC con dos de sus alturas y el punto de intersección de las mismas.

Trazamos $\overleftrightarrow{AD}$ y la tarea consiste en demostrar que el ángulo que forma dicha recta con $\overline{BC}$ es recto.

Puesto que el cuadrilátero EBCF es cíclico (Se puede trazar una circunferencia a la cual pertenezcan los cuatro vértices del cuadrilátero) ya que $< DEB \equiv < BFC$, también por ser cuadrilátero cíclico se puede afirmar que $< EBD \equiv < DCF$, además como $< FEC$ y $< FBC$ subtienden el mismo arco se puede afirmar que son ángulos congruentes, $< CFB \equiv < BEC$ esto se afirma por la definición de altura ya que $\overleftrightarrow{CE}$ y $\overleftrightarrow{BF}$ son alturas del triángulo. Otra característica de los cuadriláteros cíclicos es que una pareja de ángulos opuestos suman$180°$, por lo tanto el cuadrilátero $EDFA$ también es cíclico de esta manera los ángulos inscritos $< DFE \equiv < DAE$ (figura 40).

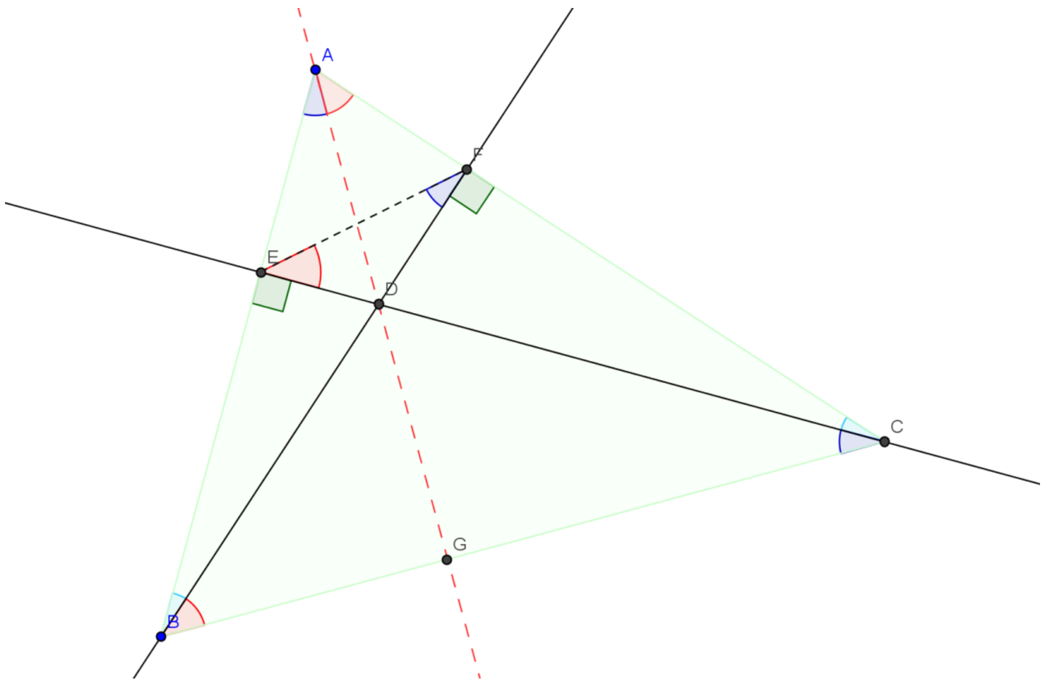


Figura 40. Construcciones auxiliares para la demostración.

En resumen:

$$< FBC \equiv < FEC \equiv < CAG = \theta$$

$$< BFE \equiv < BAG \equiv < BCE = \alpha$$

$$< CEB \equiv BFC = 90°$$

$$< FBE \equiv < ECA = \beta$$

En el triángulo FBC la suma de los ángulos internos debe ser igual a $180°$, se sabe que $< BFC = 90°$ por lo tanto $< FBC + < BCE + < ECF = 90°$, de acuerdo con las letras griegas asignadas se tiene $< \theta + < \alpha + < \beta = 90°$, Ahora en el triángulo AGC se tienen los ángulos $< \theta, < \alpha, < \beta$ nuevamente y como se sabe que la suma de dichos ángulos es 90° y que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° se concluye que el $< CGA = 90°$, de esta manera demostramos que $\overleftrightarrow{AG}$ corresponde a la altura del triángulo ABC relativa a $\overline{BC}$.

ANEXO 4

Para la bisectriz solo demostraremos la concurrencia de las mismas, ya que esta línea notable no se trata con mucho detalle en este trabajo de grado.

Teorema 1.
Las bisectrices de un triángulo son concurrentes. El punto de concurrencia se conoce como el Incentro del triángulo. Se puede generar una circunferencia inscrita en el triángulo con centro en el incentro y radio cualquiera de sus vértices.

Demo//

Dado el triángulo ABC, con el teorema de la existencia de la bisectriz trazamos las bisectrices de $< B$ y $< C$ como estas no son rectas paralelas se intersecan en un punto el cual llamaremos D (figura 41).

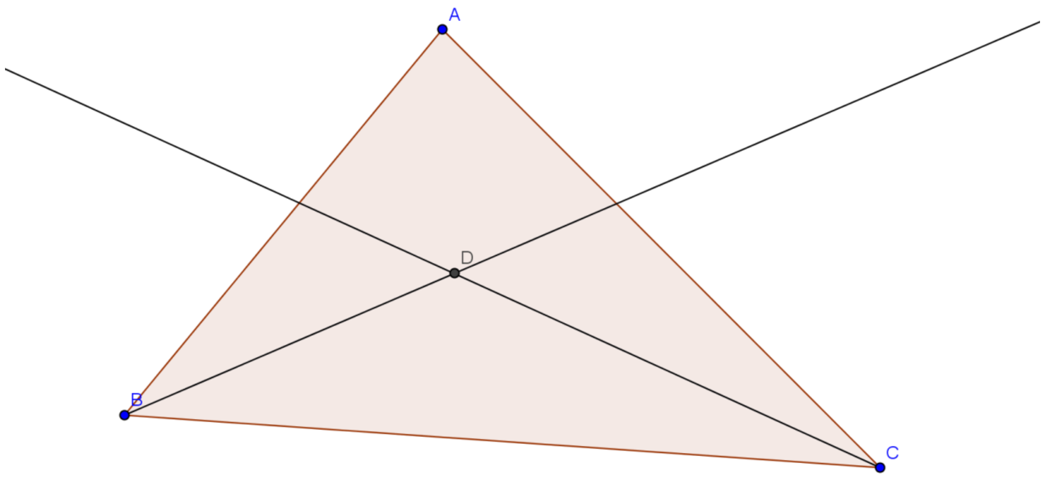


Figura 41. Construcción de dos de las bisectrices del triángulo ABC.

Ahora se debe demostrar que la tercera bisectriz se interseca con las demás en el punto D, para así demostrar la concurrencia.

Por definición tenemos que al trazar una perpendicular a$\overline{BA}$ y a $\overline{BC}$ por el punto D los segmentos son congruentes, de igual manera se hace para $\overline{AC}$ (ver figura 42).

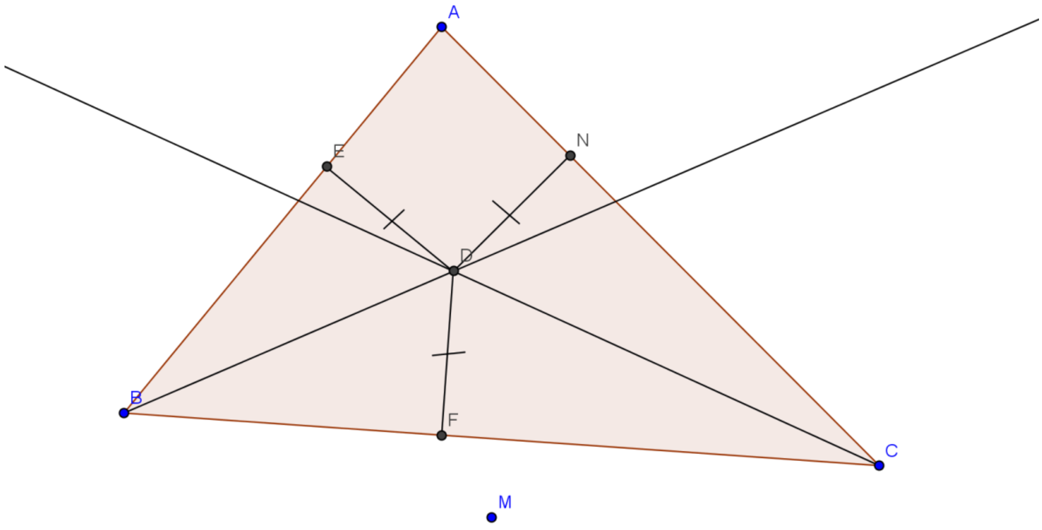


Figura 42. Congruencia de $\overline{DE} \equiv \overline{DF} \equiv \overline{DG}$, dado por la definición de bisectriz.

Como el punto D equidista de $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, se afirma que pertenece a la bisectriz del $< A$, por lo tanto las bisectrices concurren en el punto D.