LA REGLA DE BRADWARDINE: UN MOMENTO EN LA HISTORIA DE LA PROPORCIONALIDAD

DAVID LEONARDO CALDERÓN PRECIADO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D.C.

2013

LA REGLA DE BRADWARDINE: UN MOMENTO EN LA HISTORIA DE LA PROPORCIONALIDAD

DAVID LEONARDO CALDERÓN PRECIADO

CÓD.:2006240011

CC.:1030533189

Trabajo de grado presentado como requisito para optar por el título de Licenciado en Matemáticas

Asesor: Edgar Alberto Guacaneme Suárez

Magister en Educación – Énfasis en Educación Matemática

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D.C.

2013

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios por todas las bendiciones que me ha otorgado.

A mi esposa e hijo quienes constituyen el motor de mi vida.

A mis padres por todo su amor y apoyo incondicional.

Finalmente, agradezco al profesor Edgar Guacaneme por constituir un ejemplo a seguir sobre el propósito de ser docente.

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN (RAE)

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Titulo del documento	La regla de Bradwardine: Un momento en la historia de la proporcionalidad.
Autor(es)	CALDERÓN PRECIADO, David Leonardo
Director	Guacaneme, Edgar Alberto
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2013. 129 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional.
Palabras Claves	Historia de las Matemáticas, Razón, Proporción, Regla de Bradwardine, Elementos de Euclides.

2. Descripción

Este documento tiene como propósito realizar una reflexión sobre el papel que desempeña la historia de las Matemáticas, particularmente la historia de la razón y la proporción, en la formación de un docente en Matemáticas. Para ello se ha seleccionado como tema de estudio la regla de Bradwardine, que consiste en una interpretación sobre la manera en que se relacionan la fuerza, la resistencia y la velocidad, de una manera distinta a como lo propuso el filósofo griego Aristóteles en el siglo IV a.C.

3. Fuentes

Las principales referencias bibliográficas de este trabajo de grado son:

1. Guacaneme, E. A. (2011). La Historia de las Matemáticas en la educación de un profesor: razones e intenciones. XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM). Recife, Brasil 26-30 de Junio.
2. Sylla, E. (2008). The origin and fate of Thomas Bradwardine's de proportionibus velocitatum in motibus in relation to the history of Mathematics. En Walter,R (Ed.). & Sophie, R. (Ed.). *Mechanics and Natural Philosophy Before the Scientific Revolution,* (pp. 67 – 119). Springer Netherlands.
3. Puertas, M. L. (1994). *Euclides. Elementos Libros V-IX* (Vol. II). Madrid. Ed. Gredos S.A.

4. Contenidos

A continuación se describen los contenidos presentes en cada capítulo de este trabajo de grado:

Introducción: Se sintetizan aquellas temáticas que se abordarán en el documento. Por otra parte se hace una descripción de los contenidos de cada capítulo del trabajo de grado.

Capitulo 1: Se especifican los objetivos del trabajo de grado. Adicionalmente se incluye la justificación y metodología del mismo.

Capitulo2: Se realiza una interpretación de varias definiciones y proposiciones de los libros V y VII de *Elementos* de Euclides.

Capitulo 3: Se realiza una exploración de la regla de Bradwardine a partir de diversos documentos.

Capitulo4: Se reflexiona sobre algunos aportes que la historia de la razón y la proporción puede otorgar a un docente de Matemáticas en formación.

5. Metodología

La metodología de este trabajo de grado se puede resumir en tres momentos, el primero de ellos explora las razones por las cuales la regla de Bradwardine constituye una teoría importante para la historia de la razón y la proporción. El segundo momento interpreta algunos aspectos de la teoría de la razón y la proporción desde la obra *Elementos* de Euclides para contrastarla con la teoría de Bradwardine. El último momento realiza una reflexión sobre los aportes que este trabajo de grado otorga a un docente de Matemáticas en formación.

6. Conclusiones

El significado de las definiciones y proposiciones de los libros V y VII de *Elementos* de Euclides dependen de la interpretación de sus términos indefinidos. Adicionalmente la obra expresa verbalmente ideas matemáticas.

La ley de Bradwardine constituye un ejemplo del uso de las Matemáticas como instrumento argumentativo, pero a su vez demuestra que las Matemáticas no son un sistema de verdades absolutas.

Finalmente, el proyecto de grado ha permitido al maestro en formación adquirir diferentes significados e interpretaciones sobre razones y proporciones, y en consecuencia comprender la importancia de considerar diferentes puntos de vista al momento de expresar e interpretar ideas matemáticas.

Elaborado por:	Calderón Preciado, David Leonardo
Revisado por:	Guacaneme Suárez, Edgar Alberto

Fecha de elaboración del Resumen:	20	10	2013

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Este documento pretende explorar la propuesta del filósofo, teólogo, físico y matemático inglés Thomas Bradwardine (1220 – 1349 d.C.) sobre la relación de las magnitudes físicas fuerza, resistencia y velocidad, contemplada en su obra *Tractatus de proportionibus velocitatum*, que a su vez se relaciona con el concepto de razón y proporción. Por otra parte, pretende interpretar varias definiciones y proposiciones de la obra *Elementos* de Euclides (325 – 365 a.C), relacionadas con razones y proporciones, en vista que Bradwardine la utilizó para dar un fundamento matemático a su propuesta.

A partir del estudio planteado se desarrolla una reflexión sobre los aportes que la historia de la razón y la proporción puede otorgar a la formación de un docente de Matemáticas.

El documento se configura a través de cinco capítulos dispuestos de la siguiente manera: En el primer capítulo se establecen varios aspectos generales del trabajo de grado, tales como la justificación, los objetivos principales y la metodología.

El segundo capítulo es un análisis del concepto de razón y proporción en *Elementos* de Euclides a partir de la interpretación de varias definiciones y proposiciones contempladas en los libros V y VII.

El tercer capítulo es un estudio de la regla de Bradwardine a partir de las indagaciones realizadas por Sylla (2008) sobre los antecedentes y consecuencias de dicha ley.

El cuarto capítulo es una reflexión sobre los aportes que el presente estudio puede otorgar a un docente de Matemáticas en formación, esto teniendo en cuenta la ponencia de Guacaneme (2011) sobre las razones e intenciones de la historia de las Matemáticas en la formación de un docente.

El quinto capítulo incluye las conclusiones del trabajo de grado que se deducen a partir del estudio de la obra *Elementos* de Euclides, libros V y VII, de la exploración de la regla de Bradwardine, y de la reflexión sobre los aportes que el estudio de la historia de las Matemáticas puede otorgar a un docente en formación.

Finalmente se incluye como anexo una traducción no oficial del documento Sylla, E. (2008) y las referencias del trabajo de grado.

De esta manera se espera que este trabajo de grado genere gran interés a los estudiantes que se preparan como docentes en Matemáticas que estén interesados en la historia de la proporcionalidad.

Capítulo 1. ASPECTOS GENERALES

1.1 Justificación

La motivación fundamental que promueve el desarrollo del proyecto aquí expuesto se relaciona con el siguiente interés particular: identificar los aportes que el estudio de la historia de la razón y la proporción pueden otorgar a la formación de un docente en Matemáticas.

En esta línea, el profesor Edgar Guacaneme ha desarrollado un avance y como parte de este, se han reconocido varios hitos de la historia de la proporcionalidad: la época de la escuela pitagórica, la época dorada de los griegos, la época del surgimiento del álgebra, la época del Renacimiento, la época de creación del Cálculo y del Análisis, y la época de la construcción de los números reales (Guacaneme, 2012).

De estos hitos hemos decidido determinar un momento particular de la historia (el Renacimiento), e investigar las concepciones de la proporcionalidad que en aquel entonces eran aceptadas, para lo cual resulta pertinente el estudio de la *regla de Bradwardine,* no solo por estar incluida en el marco histórico mencionado, sino también por ser una temática poco conocida.

1.2 Asunto de estudio

Teniendo en cuenta la justificación anterior, el asunto de estudio se puede clasificar en tres partes: la primera es una exploración de la *regla de Bradwardine,* que se relaciona estrechamente con razones y proporciones. Thomas Bradwardine (1220 – 1349) utilizó la obra *Elementos* de Euclides (325 – 265 a.C.) para fundamentar Matemáticamente su obra, es por esto que el segundo asunto de estudio es una interpretación de algunas proposiciones y definiciones de los libros V y VII de *Elementos* que se relacionan con razones y proporciones.

El tercer asunto de estudio es considerar el artículo del profesor Guacaneme (2011) considerando ciertas preguntas orientadoras para realizar una reflexión sobre los aportes que el estudio de la historia de la razón y la proporción puede otorgar a un licenciado en Matemáticas en formación.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivos generales

- Explorar la *regla de Bradwardine.*
- Identificar la relación que existe entre la *regla de Bradwardine* y la obra *Elementos* de Euclides (325 – 265 a.C.).
- Identificar el aporte que el estudio de la historia de la razón y la proporción otorga a la formación de un docente en Matemáticas.

1.3.2 Objetivos específicos

- Estudiar, comprender y analizar la *regla de Bradwardine*.
- Estudiar definiciones y proposiciones de la obra *Elementos* de Euclides (325 – 265 a.C.) que estén relacionadas con la proporcionalidad.
- Realizar una reflexión sobre los aportes que la historia de la razón y la proporción otorga a un docente en Matemáticas.

1.4 Aspectos metodológicos

Las actividades realizadas para llevar a cabo el proyecto de grado se pueden organizar en tres momentos distintos.

La primera actividad fue indagar por qué Thomas Bradwardine se considera un personaje importante en la historia de la proporcionalidad. Para ello estudiamos los documentos: Celeyrette (2008) y Sylla (2008) los cuales coinciden en afirmar que Thomas Bradwardine estudió la relación entre las magnitudes físicas fuerza, resistencia y velocidad, estableciendo una ley involucrada con el concepto de proporción. Dicha ley se consideró novedosa al desafiar la validez del legado aristotélico sobre la relación entre dichas magnitudes físicas, legado establecido con más de un milenio de anterioridad.

La segunda actividad fue investigar las teorías de la proporción propuestas en los siglos III y IV antes de Cristo a partir de la obra *Elementos* de Euclides (325 – 265 a.C.), en vista de que esta obra tiene una gran influencia del legado aristotélico y porque según Sylla (2008, p.82), Thomas Bradwardine consideró *Elementos* para fundamentar matemáticamente su teoría. Particularmente se interpretan varias definiciones y proposiciones de los libros V y VII que se relacionan estrechamente con los conceptos de razón y proporción.

La tercera actividad consistió en reflexionar sobre los aportes que este estudio puede otorgar a la formación de un docente en matemáticas. Para ello se consideraron los planteamientos de Guacaneme (2011), quien propone un esquema sobre la racionalidad y la intencionalidad de la Historia de las Matemáticas en la educación de un profesor de Matemáticas, que permite organizar las múltiples y diversas respuestas generadas a partir de la reflexión.

Capítulo 2. LA RAZÓN Y LA PROPORCIÓN EN ELEMENTOS DE EUCLIDES

2.1 *Elementos* de Euclides.

Al intentar comprender la teoría de la proporción propuesta por Aristóteles (384 - 322 a.C.) tomamos la decisión de estudiar la obra *Elementos* de Euclides (325 – 265 a.C.). Nuestro argumento es que Euclides y Aristóteles fueron dos pensadores griegos contemporáneos y que los libros V y VII de esta obra están relacionados directamente con el estudio de la proporcionalidad.

El primer contacto que tuvimos con *Elementos* de Euclides fue a través de una traducción al español realizada por Puertas (1994). Al estudiar los libros V y VII encontramos un aspecto muy interesante: ambos presentan una teoría muy similar. La diferencia es que en el libro V Euclides estudia *magnitudes geométricas* mientras que en el libro VII Euclides estudia *números.* De este hecho surge un cuestionamiento ¿por qué estudiar magnitudes y números por aparte? La respuesta la obtuvimos realizando algunas indagaciones en un trabajo de pregrado de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, Parra, E. & Vargas, E. (2012). Las dos teorías tan similares son consecuencia del problema de la inconmensurabilidad al que se enfrentaron los pitagóricos, ocasionando una separación entre la aritmética y la geometría. Para enfrentar dicha dificultad, Euclides desarrolla una teoría en la cual se tendrán en cuenta únicamente magnitudes geométricas sin asignarles medidas (libro V de *Elementos)* y una teoría que considera los números como el concepto fundamental (libro VII de *Elementos*).

En el siguiente apartado exploramos los libros V y VII de *Elementos* de Euclides considerando aquellas proposiciones y definiciones que se relacionan directamente con las razones y las proporciones.

2.2 La teoría de la razón y la proporción en el libro V de Elementos de Euclides

En la versión de Puertas (1994) El libro V de *Elementos* está constituido por 18 definiciones, 25 proposiciones y 2 corolarios. Iniciemos con la presentación de algunas de las definiciones que podrían darnos un significado de proporcionalidad de acuerdo con la propuesta de Euclides.

2.2.1 Definiciones del libro V de Euclides

> Libro V, definición 1: Una magnitud es parte de una magnitud, la menor de la mayor, cuando mide la mayor. (Puertas, 1994, p. 9)

Para comprender esta definición es necesario otorgarle un claro significado a la expresión *mide* al ser ésta una noción indefinida en la obra. Nuestra primera interpretación fue suponer que medir significa comparar dos magnitudes considerando una de ellas como unidad de medida; sin embargo, nos inclinamos por una interpretación bastante aceptada: “una magnitud mide a otra cuando al multiplicarlas llegan a coincidir”. Por ejemplo, supongamos que el siguiente segmento representa la magnitud 1:

Figura 1: Magnitud 1

Y este otro segmento la magnitud 2:

Figura 2: Magnitud 2

Al triplicar la magnitud 1 y al duplicar la magnitud 2 se obtienen dos segmentos con la misma longitud:

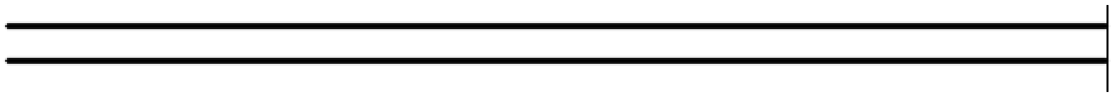

Figura 3: Magnitud 1 triplicada y magnitud 2 duplicada

Podemos afirmar que, de acuerdo con nuestra interpretación del término *medir,* la magnitud 1 mide a la magnitud 2 (o viceversa).

Consideremos ahora la definición de razón.

> Libro V, definición 3: Una razón es determinada relación respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas. (Puertas, 1994, p. 9)

Teniendo en cuenta que Euclides estudia magnitudes geométricas, entendimos por la expresión "homogéneas" que no es conveniente comparar el tamaño de un segmento con el de una superficie, o con el de un volumen, o con la amplitud de un ángulo. Únicamente se permite comparar el tamaño de un segmento con el de otro segmento, y ocurre lo mismo con las superficies, los volúmenes y las amplitudes angulares. Por otra parte, comparar dos tamaños es un proceso que puede llevarse a cabo de diferentes maneras, por ejemplo, en algunas ocasiones es sencillo determinar si una superficie es mayor que otra sobreponiéndola:

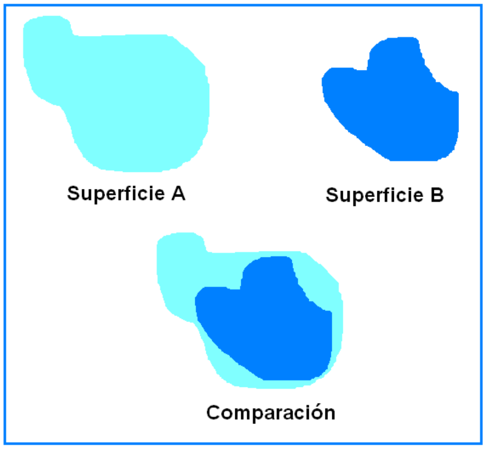

Figura 4: Comparación de dos superficies

En otros casos no es tan sencillo:

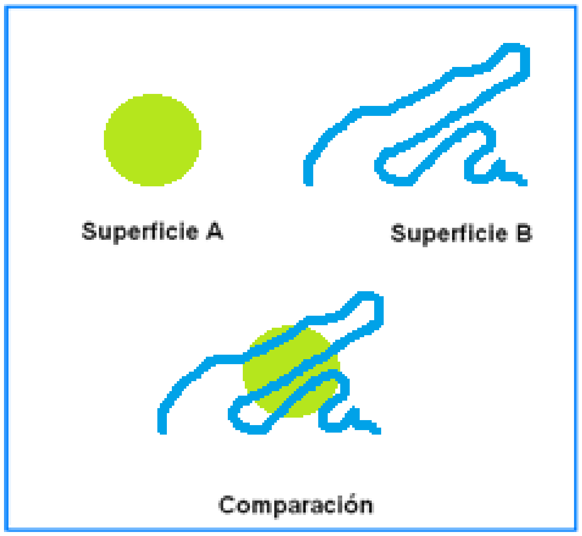

Figura 5: Comparación del tamaño de dos superficies

Considerando la figura 4 podemos afirmar que la superficie A es de mayor tamaño que la superficie B. “Ser mayor” es entonces una posible relación entre dichos tamaños, por lo tanto, y ante la vaguedad de la definición en cuestión, “ser mayor” es una razón.

Ahora consideremos el concepto de *guardar razón entre sí*, correspondiente a la definición 4.

> Libro V, definición 4: Se dice que las magnitudes guardan razón entre sí cuando, al multiplicarse, puedan exceder la una a la otra. (Puertas, 1994, p. 10)

Considerando la figura 4, al aumentar el tamaño de la superficie B su tamaño excede al de la superficie A, de manera que ambas superficies guardan razón entre sí.

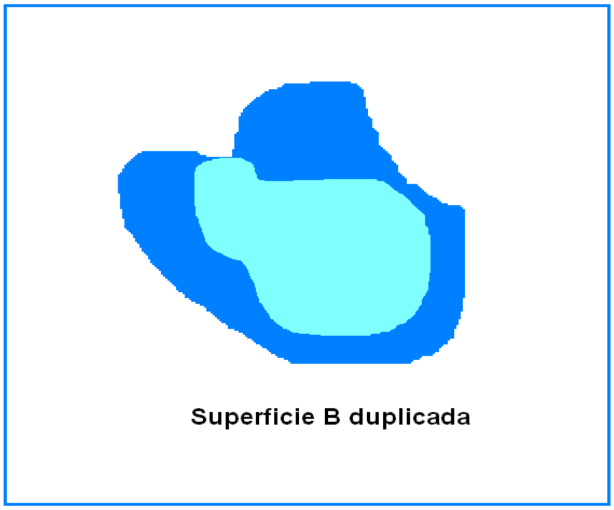

Figura 6: Comparación del tamaño de dos superficies

Por supuesto aquellas definiciones que mencionen el concepto de razón son de nuestro interés en vista que pretendemos indagar el concepto de proporción en *Elementos*, de manera que consideramos interpretar la definición número 5.

> Libro V, definición 5: Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda magnitud, que una tercera magnitud con una cuarta magnitud, cuando cualquier equimúltiplo de la primera y la tercera exceden a la par, sean iguales a la par o sean inferiores a la par, que cualquier equimúltiplo de la segunda y la cuarta, respectivamente y cogidos en el orden correspondiente. (Puertas, 1994, p. 11)

Consideremos la siguiente figura:

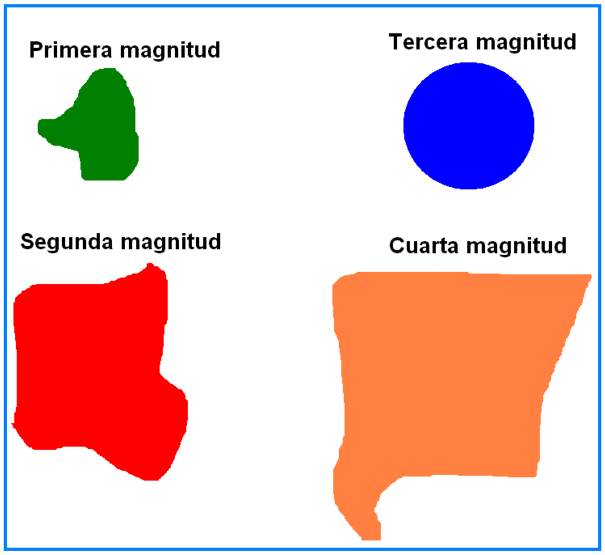

Figura 7: Representación de cuatro superficies

En esta interpretación usaremos algunas figuras cerradas para representar superficies que son magnitudes geométricas.

Se puede observar que la primera magnitud es de menor tamaño que la segunda magnitud, y que la tercera magnitud es de menor tamaño que la cuarta magnitud, es decir, la primera guarda razón con la segunda, y la tercera guarda razón con la cuarta de acuerdo a nuestra interpretación de la definición 3. Pero es difícil afirmar que al multiplicar la primera y tercera magnitudes serán iguales a la par, superiores a la par, o inferiores a la par, que la segunda y tercera magnitudes. Esto ocurre porque hemos utilizado algunas figuras planas cerradas convexas y no convexas para representar las superficies.

Esta comparación sería más sencilla si utilizáramos figuras simples como segmentos o cuadrados para representar las superficies y así poder establecer relaciones entre sus tamaños. Observemos la figura 8 en donde se contemplan magnitudes que tienen la misma razón:

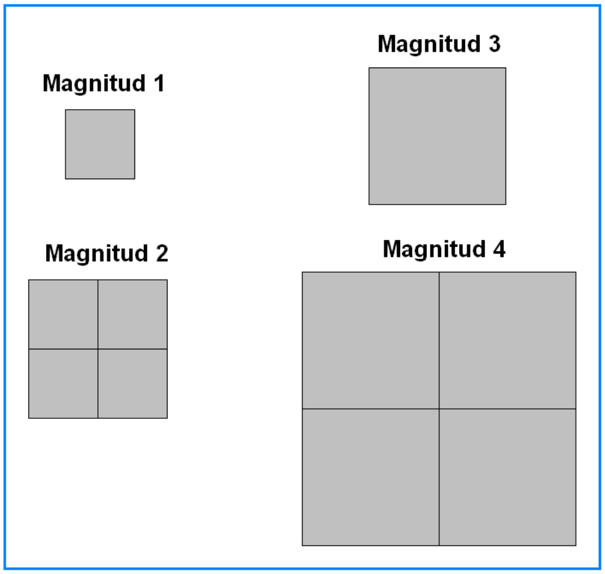

Figura 8: Cuatro magnitudes con la misma razón, dos a dos

En la figura 8 se evidencia que la magnitud 2 equivale a cuatro veces la magnitud 1. De igual forma la magnitud 4 equivale a cuatro veces la magnitud 3. Multipliquemos por dos las magnitudes 1 y 3:

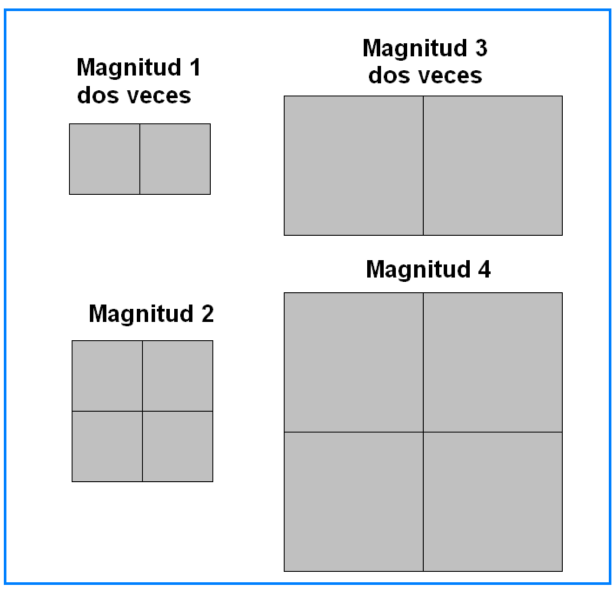

Figura 9: Multiplicación de superficies 1 y 3

Se puede afirmar que al multiplicar por dos las magnitudes 1 y 3 estas resultan inferiores a la par que las magnitudes 2 y 4. Si multiplicáramos por cuatro las magnitudes 1 y 3, resultarían iguales a la par que las magnitudes 2 y 4. Finalmente si se multiplican las magnitudes 1 y 3 por algún múltiplo mayor a 4, resultarían magnitudes superiores a la par a las magnitudes 2 y 4.

Ahora consideraremos una definición fundamental para nuestros propósitos sobre comprender el concepto de proporcionalidad, precisamente, la definición de magnitudes proporcionales:

> Libro V, definición 6: Se llaman proporcionales las magnitudes que guardan la misma razón. (Puertas, 1994, p. 12)

A manera de ejemplo exponemos la figura 6:

Figura 10: Segmentos A, B, C y D.

La figura 6 se ha construido utilizando segmentos para representar magnitudes. La magnitud C equivale a 4 veces la magnitud A y la magnitud D equivale a cuatro veces la magnitud B, de tal forma que son magnitudes que guardan la misma razón y por lo tanto son proporcionales.

Ahora estudiaremos algunas proposiciones planteadas en el libro V que se relacionan directamente con el concepto de proporción, de tal forma que podamos comprender cómo se relacionan las magnitudes que se llaman proporcionales.

2.2.2 Proposiciones del libro V de *Elementos* Euclides:

El libro V de Elementos de Euclides consta de 25 proposiciones y 2 corolarios mediante los cuales se señalan propiedades entre magnitudes geométricas, varias de ellas relacionadas explícitamente con la proporcionalidad. Al iniciar el estudio de este libro pretendimos estudiar cada una de las 25 proposiciones, sin embargo, se ha señalado que un estudio particularizado del libro V de Euclides desbordaría todas nuestras posibilidades temporales y estaría fuera del contexto de los propósitos de este proyecto de grado. Por esta razón, hemos decidido considerar el estudio realizado por Guacaneme (2012), en el cual se realiza una clasificación de las 25 proposiciones atendiendo a sus contenidos y a las relaciones establecidas entre magnitudes y proporciones

1. Proposiciones que relacionan *magnitudes y magnitudes*
2. Proposiciones que relacionan *magnitudes y proporciones*
3. Proposiciones que relacionan *proporciones y magnitudes*
4. Proposiciones que relacionan *proporciones y proporciones*
5. Proposiciones que no presentan estructura condicional

Dicho estudio facilita un análisis de las proposiciones del libro V y permite contemplar su estructura general. Los grupos son los siguientes:

2.2.2.1 Grupo 1: Proposiciones que relacionan magnitudes con magnitudes

A este grupo pertenecen las proposiciones 1, 2, 3, 5 y 6 las cuales hacen referencia a las magnitudes y sus múltiplos únicamente. De esta manera, podríamos enunciar que en un lenguaje moderno atienden a la propiedad distributiva y a la asociativa del producto. A manera de ejemplo se presenta la proposición 3, la cual puede interpretarse como una proposición que se refiere a la ley asociativa del producto:

> Libro V, proposición 3: Si una primera magnitud es el mismo múltiplo de una segunda que una tercera lo es de una cuarta, y se toman equimúltiplos de la primera y la tercera, también por igualdad cada una de las dos magnitudes tomadas serán equimúltiplos, respectivamente, una de la segunda y la otra de la cuarta. (Puertas, 1994, p. 23)

Ejemplifiquemos esta proposición:

Sea A la primera magnitud y B la segunda magnitud, de tal forma que A sea el triplo de la magnitud B:

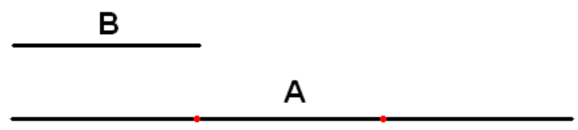

Figura 11 Segmentos A y B

Sea C la tercera magnitud de tal forma que C sea el triplo de una cuarta magnitud D:

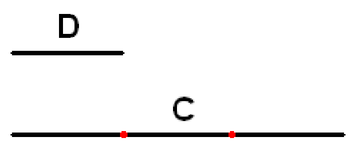

Figura 12 Segmentos C y D

Consideremos ahora el doble de la magnitud A y el doble de la magnitud C:

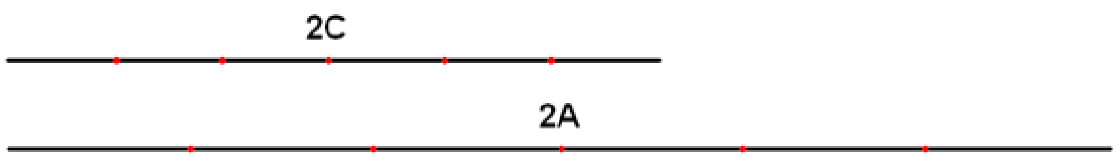

Figura 13: Segmentos A y C duplicados

La proposición afirma que en la misma forma en que la magnitud $2A$ equivale a 6 veces la magnitud B, asimismo la magnitud $2C$ equivale a 6 veces la magnitud D.

Consideremos ahora el siguiente grupo:

2.2.2.2 Grupo 2: Proposiciones que relacionan magnitudes con proporciones

A este grupo pertenecen las proposiciones 7 y 8. En dichas proposiciones la igualdad o desigualdad de las magnitudes se refleja o trasmite a algunas de las razones en que ellas están implícitas, Guacaneme (2012, p. 120). Consideremos la proposición 7 como un ejemplo:

> Libro V, proposición 7: Las magnitudes iguales guardan la misma razón con una misma magnitud y la misma magnitud guarda la misma razón con las magnitudes iguales. (Puertas, 1994, p. 30)

Expresamos esta proposición considerando la simbología usada por Guacaneme (2012, p.119)[1]:

$$\text{Si } X = Y \text{ entonces } X\!:\!Z :: Y\!:\!Z \ \text{ y } Z\!:\!X :: Z\!:\!Y.$$

Consideremos el siguiente ejemplo que relacionamos mediante el uso de segmentos:

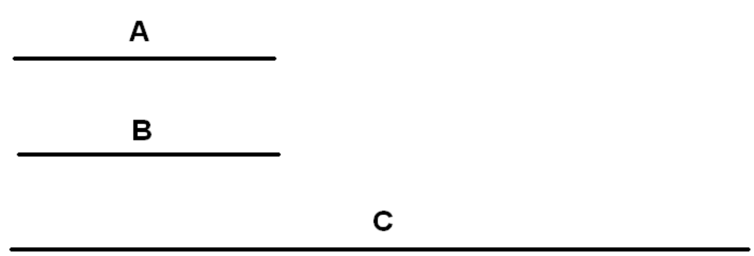

Figura 14: Segmentos A, B y C

Estamos partiendo del hecho que la magnitud A es igual a la magnitud B y hemos incluido una magnitud C de diferente tamaño. La razón que hay entre la magnitud A y la magnitud C es la misma que hay entre la magnitud B y la magnitud C, es decir:

[1] Recordamos que los símbolos : y :: se usan para denotar razones y proporciones respectivamente.

$$A : C :: B : C$$

Adicionalmente se cumple que la razón que hay entre la magnitud C y la magnitud A es la misma que hay entre la magnitud C y la magnitud B, es decir:

$$C : A :: C : B$$

Estas dos propiedades se cumplen sin importar si la magnitud C fuere mayor que A y B, si fueren iguales las tres, o si la magnitud C fuere de menor tamaño que las magnitudes A y B.

A continuación exponemos el siguiente grupo de proposiciones.

2.2.2.3 Grupo 3: Proposiciones que relacionan proporciones con magnitudes

A este grupo pertenecen proposiciones que determinan relaciones entre magnitudes a partir de relaciones entre proporciones. En este grupo están las proposiciones 9, 10, 14, 20, 21 y 25.

Estudiemos como ejemplo la proposición 14.

> Libro V, proposición 14: Si una primera magnitud guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta y la primera es mayor que la tercera, la segunda será también mayor que la cuarta, y si es igual, será igual, y si es menor, será menor. (Puertas, 1994, p. 40)

En esta proposición se establece una condición entre dos razones iguales, es decir una proporción, y a partir de allí se establece una relación de orden entre las magnitudes implicadas.

Observemos el siguiente dibujo:

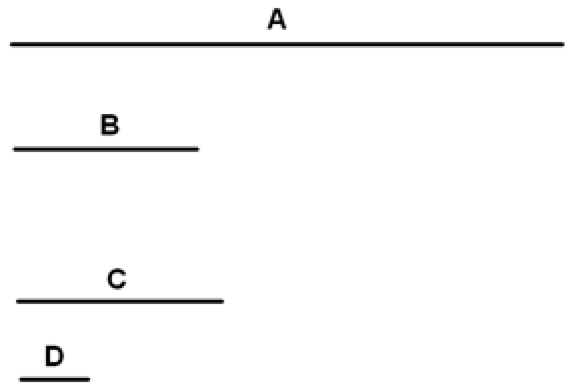

Figura 15: Segmentos A, B, C y D

Esta representación se ha construido teniendo en cuenta que la magnitud A es tres veces la magnitud B, y que la magnitud C es tres veces la magnitud D, pero además se ha considerado la condición de la proposición donde se exige que la magnitud A sea mayor que la magnitud C. Con esta condición se obtiene como consecuencia que la magnitud B es mayor que la magnitud D. Por supuesto podrían darse otros dos casos donde la magnitud A y C sean iguales y por consecuencia las magnitudes B y D también sean iguales, o que la magnitud A sea menor que la magnitud C y por consecuencia la magnitud B sea menor que la magnitud D.

Expresemos esta proposición considerando la simbología propuesta en Guacaneme (2012, P.120):

Si $W: X :: Y: Z$ y $W > Y$ entonces $X > Z$

Si $W: X :: Y: Z$ y $W = Y$ entonces $X = Z$

Si $W: X :: Y: Z$ y $W < Y$ entonces $X < Z$

Consideremos ahora el siguiente grupo de proposiciones:

2.2.2.4 Grupo 4: Proposiciones que relacionan proporciones con proporciones

Este grupo está conformado por las proposiciones 4, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 19, 22, 23 y por los porismas de las proposiciones 7 y 19 del libro V de *Elementos*. Dichas proposiciones se han seleccionado considerando que en ellas se enuncian proporciones entre magnitudes y se concluyen de nuevo relaciones entre proporciones. Por ejemplo consideremos la proposición 13 que dice:

> Libro V, proposición 13: Si una primera magnitud guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta, y la tercera guarda con la cuarta una razón mayor que una quinta con una sexta, la primera guardará también con la segunda una razón mayor que la quinta con la sexta. (Puertas, 1994, p. 39)

De nuevo representamos mediante un dibujo la manera en que comprendemos esta proposición:

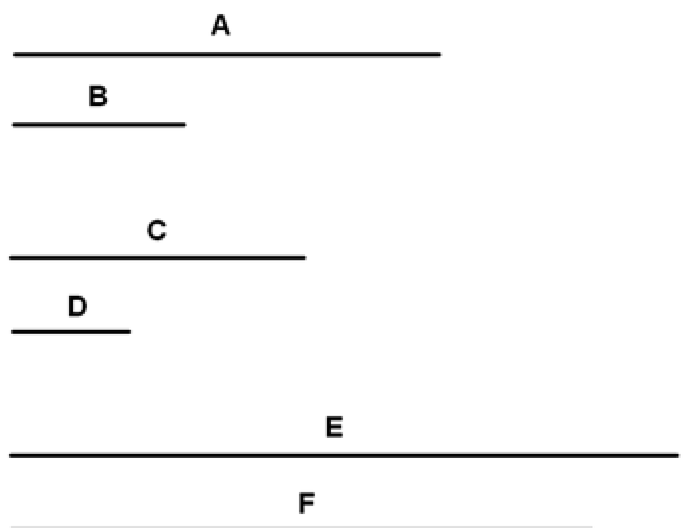

Figura 16: Representación de la proposición 13 libro V

Esta representación ha sido construida considerando que la magnitud A equivale a 5 veces la mitad de la magnitud B, y de igual forma la magnitud C equivale a cinco veces la mitad de la magnitud D, por lo cual las magnitudes son proporcionales. Adicionalmente se han construido dos segmentos que representan las magnitudes E y F de tal forma que la magnitud E equivale a 8 veces la séptima parte de la magnitud F. A pesar que los segmentos E y F son de mayor tamaño que los otros segmentos de la figura, la relación de sus tamaños es menor pues son de hecho casi del mismo tamaño. La proposición establece que si la razón entre las magnitudes C y D es mayor que la razón entre las magnitudes E y F, entonces la razón entre las magnitudes A y B también será mayor que la razón entre las magnitudes E y F. Esta proposición puede representarse con la siguiente simbología, Guacaneme (2012, P.120):

Si $U{:}V :: W{:}X$ y $W{:}X > Y{:}Z$ entonces $U{:}V > Y{:}Z$.

2.2.2.5 Grupo 5: Proposición que no presentan estructura condicional

Este grupo contiene únicamente la proposición 15, la cual no puede ubicarse en alguno de los grupos anteriores:

> Libro V, proposición 15: Las partes guardan la misma razón entre sí que sus múltiplos, tomados en el orden correspondiente. (Puertas, 1994, p. 41)

La siguiente figura representa la proposición 15:

Figura 17 : Representación de la proposición 15, libro V.

En este ejemplo se ha construido la magnitud B de tal forma que sea el doble de la magnitud A y la magnitud D de tal forma que sea el doble de la magnitud C. De esta manera, A es parte de B, y C es parte de D. Dadas estas condiciones la proposición manifiesta que:

$$A : C :: B : D$$

Esta propiedad se cumple si en vez de usar el doble de las magnitudes A y C se utiliza el triple, cuádruple, o cualquier otro múltiplo, y se comparan las razones en el orden correspondiente tal como lo expresa el enunciado de la proposición.

Esta proposición puede expresarse de la siguiente manera, considerando a Guacaneme (2012, p.121):

Sean Xy Y magnitudes geométricas y n un número natural:

$$X : Y :: nX : nY$$

De esta manera finalizamos nuestro estudio de definiciones y proposiciones del libro V de *Elementos* de Euclides en relación con el concepto de proporcionalidad. Ahora presentamos el estudio del libro VII de *Elementos* de Euclides para posteriormente establecer diferencias y similitudes entre ambos libros.

2.3 La teoría de la razón y la proporción en el libro VII de *Elementos* de Euclides

El libro VII de *Elementos* de Euclides está conformado por 22 definiciones y 39 proposiciones, las cuales han sido incluidas como anexo en el capítulo 6. Ya hemos mencionado con anterioridad que existen bastantes similitudes entre las teorías de los libros V y VII de *Elementos,* y que interpretaremos algunas definiciones y proposiciones que están relacionadas con razones y proporciones.

2.3.1 Definiciones en el libro VII de Euclides

Estas son algunas de las definiciones expuestas en el libro VII de *Elementos*. Presentamos nuestras interpretaciones de manera similar a como lo hicimos en el estudio del libro V.

> Libro VII, definición 1: Una unidad es aquello en virtud de la cual cada una de las cosas que hay, se llama una. (Puertas, 1994, p. 111)
>
> Libro VII, definición 2: Un número es una pluralidad compuesta de unidades. (Puertas, 1994, p. 112)
>
> Libro VII, definición 3: Un número es parte de un número, el menor del mayor, cuando mide al mayor. (Puertas, 1994, p. 113)
>
> Libro VII, definición 4: Pero partes cuando no lo mide. (Puertas, 1994, p. 113)

Consideramos que las definiciones 1 y 2 no han sido añadidas en *Elementos* para ser utilizadas en alguna demostración, en vez de ello, pareciera que se pretende dar un contexto enmarcado por la unidad y la pluralidad de unidades, que son el objeto de estudio del libro VII de *Elementos*. Por otra parte, las definiciones 3 y 4 mencionan el proceso de “medir” un número, algo que interpretamos de la siguiente manera: un número mide a otro cuando es su submúltiplo, a lo cual se denomina “parte”. Por ejemplo 3 mide a 9 por que 3 es la tercera parte de 9. De igual forma 2 mide a 10 por que 2 es la quinta parte de 10. El término “partes” se aplica a “múltiplos de un submúltiplo”. Consideremos los números 4 y 6. Sabemos que 4 no es un submúltiplo de 6, es decir, 4 no es una parte de 6. Sin embargo, 4 es dos veces la tercera parte de 6, por lo cual se dice que 4 es “partes” de 6, pues se han tomado varias partes de 6 para constituir el número 4. En otras palabras, se puede constituir el número 4 con un “múltiplo de un submúltiplo” de 6, que es el número 2. De igual forma, al considerar los números 15 y 20 podemos afirmar que 15 es “partes” de 20 por que 15 es el triplo de la cuarta parte de 20. En otras palabras se puede constituir el número 15 con un “múltiplo de un submúltiplo” de 20, que es el número 5.

Consideremos ahora las definiciones 17 y 18, en las que se menciona el concepto de “lado”, el cual resulta involucrado en la definición 21 que es la definición de números proporcionales:

> Libro VII, definición 17: Cuando dos números, al multiplicarse entre sí, hacen algún número, el resultado se llama número

> plano y sus lados son los números que se han multiplicado entre sí. (Puertas, 1994, p. 117)
>
> Libro VII, definición 18: Cuando tres números, al multiplicarse entre sí, hacen algún número, el resultado es un número sólido y sus lados son los números que se han multiplicado entre sí. (Puertas, 1994, p. 118)

Estas dos definiciones son bastante sencillas, pues únicamente le asigna la palabra “lados” a lo que actualmente conocemos como “factores”, y por otra parte asigna el nombre “número plano” o “número sólido” al producto de dichos números dependiendo si son dos o tres factores respectivamente. Por ejemplo el número 42 es un número plano y sus lados podrían ser los números 7 y 6 o los números 21 y 2 entre otros. El número 30 es un número sólido y sus lados podrán ser 2, 3 y 5.

Deseamos enfatizar que en este contexto se consideran únicamente números naturales mayores que 1. Por otra, a pesar de expresiones como “número plano” y “número sólido” el estudio de este libro no hace referencia a objetos geométricos. Estudiemos ahora la definición 21 correspondiente a números proporcionales:

> Libro VII, definición 21. Unos números son proporcionales cuando el primero es el mismo múltiplo o la misma parte o las mismas partes del segundo que el tercero del cuarto. (Puertas, 1994, p. 118)

A continuación mostramos algunos ejemplos de números proporcionales atendiendo a las tres sub-definiciones de la definición 21.

Unos números son proporcionales cuando el primero es el mismo múltiplo del segundo que el tercero del cuarto, luego por ejemplo 6, 3, 20 y 10 son números proporcionales porque 6 es el segundo múltiplo de 3 y 20 es el segundo múltiplo de 10.

También unos números son proporcionales cuando el primero es la misma parte del segundo que el tercero de cuarto, así por ejemplo los números: 12, 4, 15 y 5 son proporcionales, porque la parte que 4 es de 12 es la misma parte que 5 es de 15.

Finalmente, la proposición afirma que unos números son proporcionales cuando el primero es las mismas "partes" del segundo, que el tercero del cuarto. Por ejemplo, los números 8, 12, 4 y 6 son proporcionales por que las "partes" que 8 es de 12 son las mismas "partes" que 4 de 6.

Ahora estudiamos la definición 22 que se relaciona también con la proporcionalidad:

> Libro VII, definición 22: Números planos y sólidos semejantes son los que tienen los lados proporcionales. (Puertas, 1994, p. 118)

La definición de números planos y de números sólidos son las definiciones 17 y 18 del libro VII respectivamente, De igual forma el significado de la palabra "lados" se encuentra en las definiciones 17 y 18 del libro VII, y podemos relacionarla con el concepto de "múltiplo".

A manera de ejemplo consideremos los números 12 y 108. Sabemos que ambos números pueden descomponerse en varios factores, sin embargo, debemos considerar aquellos factores con los cuales se pueda establecer una proporción. Es por ello que seleccionamos como lados del número 12 los números 3 y 4, mientras que los lados del número 108 son 9 y 12. Como:

$$3:4::9:12$$

Se puede afirmar que los números 12 y 108 son planos semejantes.

Un ejemplo de números sólidos semejantes son 729 y 3375, pues los lados del número 729 son 3, 9 y 27. Los lados del número 3375 son 5, 15 y 45. Como los números 3,9, 27 y 5,15, 45 son proporcionales, entonces los números 729 y 3375 son sólidos semejantes.

A continuación estudiamos algunas proposiciones planteadas en el libro VII que se relacionan directamente con el concepto de proporción, de tal forma que podamos comprender cómo se relacionan los números llamados proporcionales.

2.3.2 Proposiciones del libro VII de Euclides

Este apartado pretende estudiar algunas de las 39 proposiciones contenidas en el libro VII de *Elementos* de Euclides. Consideramos a Guacaneme (2012, p.120) para clasificar las proposiciones de libro V estudiadas con anterioridad. Las proposiciones del libro VII se estudian porque ya conocemos la definición de números proporcionales propuesta por Euclides, pero no conocemos la manera en que dichos números se relacionan. Por otra parte, recalcamos que un estudio particularizado de cada una de las proposiciones estaría fuera de los alcances temporales de este trabajo de grado, razón por la cual a continuación ejemplificamos e interpretamos algunas proposiciones de los grupos propuestos.

2.3.2.1 Grupo 1: Proposiciones que relacionan números con números

Este grupo hace referencia a proposiciones que relacionan números, sin considerar igualdades entre razones que los involucren. A este grupo pertenecen las proposiciones 1, 15, 16, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 35, 37 y 38, que es el grupo más numeroso. Consideremos, por ejemplo, la siguiente proposición:

> Libro VII, proposición 24: Si dos números son primos respecto a otro número, también el producto será número primo respecto al mismo número. (Puertas, 1994, p. 146)

Para ejemplificar esta proposición es necesario conocer el concepto de número primo propuesto por Euclides. Dicho concepto se contempla en la definición 12 del libro VII:

> Libro VII, definición 12: Un número primo es aquél que sólo es medido por la unidad. (Puertas, 1994, p. 116)

Para interpretar esta definición recordamos el significado otorgado a la palabra “medir”, que se interpreta como submúltiplo en el contexto del libro VII de

Elementos de Euclides. Interpretamos el significado de números primos como aquellos números cuyos submúltiplos son únicamente la unidad, esto excluyendo la idea de que un número pueda ser medido por sí mismo. Por ejemplo el número 5 es primo porque su único submúltiplo es la unidad.

Consideremos ahora la definición de números primos entre sí:

> Libro VII, definición 13: Números primos entre sí son los medidos por la sola unidad como medida común. (Puertas, 1994, p. 116)

Podemos considerar los números 8 y 9, los cuales solo tienen por medida común a la unidad.

Regresando al estudio de la proposición 24 nos disponemos a dar nuestra interpretación mediante un ejemplo: Consideremos los números 7, 8, 9. En la pareja (7,9) los números son primos relativos. De igual forma en la pareja (8,9) los números son primos relativos. Y al tener en cuenta el producto de 7 y 8, que es 56, los números de la pareja (56,9) también resultan ser primos relativos, tal como lo afirma la proposición.

A continuación exponemos el siguiente grupo de proposiciones

2.3.2.2 Grupo 2: Proposiciones que relacionan números con proporciones

Este grupo está conformado por las proposiciones 17, 18, 19 (parte 2) y 23, haciendo referencia a proposiciones cuyos enunciados inician mencionando relaciones entre números y finalizan concluyendo “igualdad” entre las razones que los involucran, es decir proporciones. Consideremos la proposición 18:

> Libro VII, proposición 18: Si dos números, al multiplicar a un número cualquiera, hacen ciertos números, los resultantes guardarán la misma razón que los multiplicados. (Puertas, 1994, p. 140)

Tengamos en cuenta la pareja de números (3,4). El producto de esta pareja y el número 7 es la pareja (21, 28). La razón que hay entre 21 y 28 es la misma razón que hay entre 3 y 4. Usando una simbología moderna podemos expresar esta idea como:

$$\frac{7}{7}\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{21}{28}$$

Y de forma generalizada:

$$\frac{a}{a}\left(\frac{b}{c}\right)=\frac{ab}{ac}$$

Siendo a, b, c números naturales mayores que 1.

Consideremos ahora el siguiente grupo de proposiciones que relaciona proporciones y números.

2.3.2.3 Grupo 3: Proposiciones que relacionan proporciones con números

Este grupo lo conforman las proposiciones 19 (parte1), 21, 22, con la característica que sus enunciados mencionan números que guardan la misma razón y concluyen alguna propiedad entre los mismos.

Consideramos importante resaltar un cuestionamiento que surgió a partir del estudio de la proposición 21.

> Libro VII, proposición 21: Los números primos entre sí son los menores de aquellos que guardan la misma razón que ellos. (Puertas, 1994, p. 144)

La primera vez que estudiamos esta proposición se planteó el siguiente cuestionamiento:

- ¿Esta proposición es una definición de números primos entre sí?

La pregunta surgió en vista de que la proposición contiene la palabra “son” que es un verbo que se usa en muchas ocasiones para definir un grupo de varios elementos. Sin embargo, explicamos que las definiciones no se demuestran, y esta proposición tiene una demostración en el libro VII de Euclides por lo cual no se considera una definición.

El segundo cuestionamiento fue:

- ¿La proposición tiene una estructura de implicación (si, entonces)?

Sugerimos examinar la demostración de la proposición:

> Sean A, B números primos entre sí.
>
> Digo que A, B son los menores de aquellos que guardan la misma razón que ellos.
>
> Pues, si no, habrá algunos números menores que A, B que guarden la misma razón que A, B. Sean r, Δ.
>
> Así pues, como los números menores de los que guardan la misma razón miden a los que guardan la misma razón el mismo número de veces, el mayor al mayor y el menor al menor, es decir, el antecedente al antecedente y el consecuente al consecuente, entonces r mide a A el mismo número de veces que $\Delta \propto B$.
>
> Pues cuantas veces r mide a Δ, tantas unidades habrá en E. Por tanto, Δ mide a B según las unidades de E. Pero, puesto que r mide a A según las unidades de E, entonces E mide a A según las unidades de r. Luego, por lo mismo, E mide también a B según las unidades de Δ. Entonces E mide a A, Bque son primos entre sí. Lo cual es imposible. Luego no habrá algunos números menores que A, B que guarden la misma razón con A, B.
>
> Por consiguiente, A, B son los menores de aquellos que guardan la misma razón que ellos. (Puertas, 1994, p. 144)

La expresión “pues si no” indica que la proposición se demostrará por reducción al absurdo. La hipótesis es que “A, B son primos entre sí”, y la tesis es que “A, B son los menores de aquéllos que guardan la misma razón entre ellos”.

Considerando que se trata de una demostración por contradicción, suponemos que tiene la estructura si, entonces…, por lo cual hay que tener en cuenta la negación de una implicación:

$$\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$$

$p = A, B$ son primos entre sí.

$q = A, B$ son los menores de aquellos que guardan la misma razón entre ellos.

$-q = A, B$ no son los menores de aquellos que guardan la misma razón entre ellos.

Estudiando esta proposición concluimos que no es necesario que las proposiciones cuya estructura sea de la forma "si,… entonces" contengan de manera explícita estas dos palabras en sus enunciados. Adicionalmente deseamos enfatizar que para conocer la estructura de una proposición es pertinente considerar su demostración.

A continuación un ejemplo de nuestra interpretación de la proposición 21, libro VII de *Elementos*:

Consideremos las parejas de números (16,30), (32,60), (24,45) que guardan la misma razón entre ellos. Existe la pareja (8,15) que es la pareja compuesta por dos números menores a los dados, de tal forma que se guarde la misma razón. Por consiguiente los números 8 y 15 son primos entre sí.

Ahora presentamos el siguiente grupo de proposiciones, el grupo 4:

2.3.2.4 Grupo 4: Proposiciones que relacionan proporciones con proporciones

Este grupo está conformado por proposiciones donde la hipótesis y la tesis se caracterizan por involucrar igualdad entre razones de números. El grupo lo componen las proposiciones 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 20. Estudiemos la proposición número 9 para ejemplificar este grupo:

> Libro VII, proposición 9 : Si un número es parte de un número y otro número es la misma parte de otro, también, por alternancia, la parte o partes que el primero es del tercero, la misma parte o partes será el segundo del cuarto. (Puertas, 1994, p.131)

Consideremos la siguiente proporción:

$$5:15 :: 10:30$$

Es decir, la parte que 5 es de 15 es la misma parte que 10 es de 30. La proposición indica que a partir de este hecho se puede establecer la siguiente proporción:

$$5:10 :: 15:30$$

Estudiemos ahora el último grupo de proposiciones:

2.3.2.5 Grupo 5: Proposiciones que no presentan estructura condicional

Las proposiciones de este grupo se caracterizan por no tener una estructura condicional de la forma "si,… entonces", en vez de ello presentan *proposiciones problema*, es decir, proposiciones que establecen un método para hallar un número relacionado con los conceptos de la teoría. Por ejemplo, un método para hallar la medida común máxima entre dos números o el número al que dichos números miden. Las proposiciones que pertenecen al grupo 5 son: 2, 3, 4, 33, 34, 36, 39.

A continuación consideremos la proposición 4 para ejemplificar este grupo:

> Libro VII, proposición 4: Todo número es parte o partes de todo número, el menor del mayor. (Puertas, 1994, p. 126)

Consideremos la demostración de esta proposición:

> Sean dos números A, Br y sea el menor Br. Digo que Br es parte o partes de A. Pues A, Br o son primos entre sí o no lo son. En

primer lugar sean primos entre sí. Entonces, si se divide Br en las unidades que hay en él, cada unidad de las que hay en Br será alguna parte de A; de modo que Br es partes de A.

Ahora no sean A, Br primos entre sí; entonces Br o mide a A o no (lo mide). Si en efecto Br mide a A, Br es parte de A. Pero, si no, tómese la medida común máxima, Δ, de A, Br [VII, 2][2] y divídase Br en los (números) BE, EZ, Zr iguales a Δ. Ahora bien, como Δ mide a A, Δ es parte de A; pero Δ es igual a cada uno de los números) BE, EZ, Zr; luego cada uno de los números) BE, EZ, Zr es también parte de A. De modo que Br es parte de A.

Por consiguiente, todo número es parte o partes de todo número, el menor del mayor. Q.E.D. (Puertas, 1994, p. 126).

Esta demostración está dividida en tres casos:

1) Se asume que los números A y Br son primos entre sí concluyendo que Br es partes de A. Por ejemplo podemos considerar los números 5 y 6, pues ambos son primos entre sí y 5 es "partes" de 6.
2) Se asume que A y Br no son primos entre sí considerando que Br divide a A y se concluye que Br es parte de A. Por ejemplo los números 6 y 12, pues 6 y 12 no son primos entre sí y 6 divide a 12.
3) Se asume que A y Br no son primos entre sí considerando que Br no divide a A. Hallando el máximo común divisor de A y Br se pueden determinar las partes que Br es de A. Se concluye que Br es partes de A. Por ejemplo los números 6 y 8 que no son primos entre sí y 6 no divide a 8. El máximo común divisor entre 6 y 8 es el número 2. De esta manera puede afirmarse que 6 es partes de 8 porque 6 es el triplo de la cuarta parte de 8.

[2] Hace referencia a la proposición 2 del libro VII de *Elementos*.

De esta manera finalizamos nuestro estudio de los libros V y VII de *Elementos* de Euclides, el cual nos ha permitido adquirir algunas ideas relacionadas con razones y proporciones.

2.4 Comparación de los libros V y VII de *Elementos* de Euclides en relación con razones y proporciones.

A continuación pretendemos indagar algunas similitudes y diferencias establecidas entre los libros V y VII de *Elementos* considerando definiciones, proposiciones y demostraciones relacionadas con razones y proporciones.

2.4.1 Similitudes en las definiciones y proposiciones de los libros V y VII de Elementos

Una similitud la encontramos en la definición de "parte" de una magnitud y "parte" de un número:

> Libro V, definición 1: Una magnitud es parte de una magnitud, la menor de la mayor, cuando mide a la mayor. (Puertas, 1994, p. 10)
>
> Libro VII, definición 3: Un número es parte de un número, el menor del mayor, cuando mide al mayor. (Puertas, 1994, p. 113)

Puertas (1994, p.9) incluye la siguiente nota al pie en la definición 1 del libro V haciendo referencia a la similitud en cuestión:

> *Méros "parte" se utiliza en los Elementos en dos sentidos: a) el más general de la noción común 5: "El todo es mayor que la parte"; b) como aquí, con el significado más restringido de lo que hoy llamamos "submúltiplo" o "parte alícuota". En este mismo sentido se utiliza en VII, Def. 3, cuya única diferencia con esta definición es el uso de "número" en lugar de "magnitud".*

Respecto a la relación de medir que se menciona en las dos defınciones Puertas (1994, p.9) menciona que:

> *…La noción de medida y la relación de medir a (y ser medido por) quedan indefinidas.*

Es por ello que pueden otorgarse diferentes significados al concepto de medir e interpretar las definiciones y proposiciones tal como lo hicimos al principio de este capítulo, algo que hace mucho más interesante el estudio de la obra *Elementos.*

Otra similitud aparece en el concepto de múltiplo:

> Libro V, definición 2: Y la mayor es múltiplo de la menor cuando es medida por la menor. (Puertas, 1994, p. 9)
>
> Libro VII definición 5: Y el mayor es múltiplo del menor cuando es medido por el menor. (Puertas, 1994, p. 113)

Estas dos definiciones presentan una evidente similitud. Sin embargo, el concepto de "múltiplo" del libro V es muy diferente al del libro VII, primero por la naturaleza de los objetos de estudio (magnitudes geométricas y números) y segundo por el significado del término "medir". Esta última idea la expondremos con el siguiente ejemplo:

Consideremos los segmentos $2A$ y $3A$ construidos a partir de un segmento A de longitud arbitraria, los cuales representan tres magnitudes geométricas.

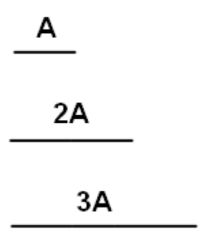

Figura 18: Representación de tres magnitudes geométricas

De acuerdo a la interpretación de “medir” en la teoría del libro V, una magnitud geométrica mide a otra cuando al multiplicarse llegan a coincidir. De esta manera podemos afirmar que la magnitud $2A$ mide a la magnitud $3A$ porque al triplicar la magnitud $2A$ y al duplicar la magnitud $3A$ ambas van a coincidir. La conclusión es que la magnitud $3A$ es múltiplo de la magnitud $2A$. Por su parte, en el libro VII, un número mide a otro cuando es su submúltiplo, a lo cual se denomina “parte”. Consideremos los números 2 y 3. Sabemos que 2 no es múltiplo de 3, esto en vista que 2 no es parte, sino partes de 3. La conclusión es que 2 no es múltiplo de 3.

En resumen, la magnitud $2A$ es múltiplo de la magnitud $3A$ pero 2 no es múltiplo de 3, una gran diferencia a pesar de la similitud de las definiciones de múltiplo establecidas en los libros V y VII de *Elementos.*

Para finalizar esta sección deseamos considerar la similitud que existe en la proposición 12 del libro V y la proposición 12 del libro VII de *Elementos.* Primero estudiemos la proposición 12 del libro V:

> Libro V, proposición 12: Si un número cualquiera de magnitudes fueran proporcionales, como sea una de las antecedentes a una de las consecuentes, así lo serán todas las antecedentes a las consecuentes. (Puertas, 1994, p. 37)

Esta proposición puede ejemplificarse de la siguiente manera: Consideremos los segmentos $A, 2A, B, 2B, C, 2C$, que representan 6 magnitudes geométricas homogéneas:

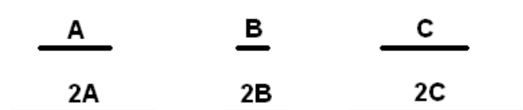

Figura 19: Representación de 6 magnitudes geométricas homogéneas

Podemos establecer la siguiente proporción:

$$A: 2A :: B: 2B :: C: 2C$$

Al considerar la suma de los antecedentes A, B, C y la suma de los consecuentes $2A, 2B, 2C$, y representar dichas sumas con segmentos, se obtiene[3]:

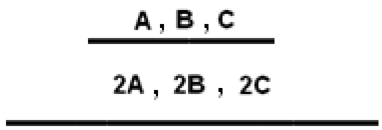

Figura 20: Representación de la suma de las magnitudes A, B, C y de la suma de las magnitudes 2A, 2B, 2C

La proposición 12 del libro V de *Elementos* indica que puede establecerse la siguiente proporción:

$$A: 2A :: B: 2B :: C: 2C :: (A + B + C): (2A + 2B + 2C)$$

Es importante resaltar que no importa la cantidad de magnitudes que se consideren, por ello la expresión “Si un número cualquiera…” en el enunciado de la proposición 12 del libro V de *Elementos.*

Ahora estudiemos la proposición 12 del libro VII:

> Libro VII, proposición 12: Si unos números, tantos como se quiera, fueran proporcionales, como uno de los antecedentes es a uno de los consecuentes, de la misma forma todos los antecedentes serán a todos los consecuentes. (Puertas, 1994, p. 134)

Puertas (1994, p.113) describe esta proposición utilizando la siguiente expresión algebraica:

Expresión algebraica: si $a: a` :: b: b` :: c: c` \ldots$*, cada razón es igual a la razón* $(a + b + c + \cdots): (a` + b` + c` \ldots)$*.*

---

[3] Utilizamos comas para referirnos a las sumas de las magnitudes tal como lo hace Euclides en *Elementos*.

Adicionalmente podemos ejemplificar esta proposición considerando la siguiente proporción:

$$3:9::6:18::12:36$$

La proposición indica que al sumar los antecedentes y los consecuentes:

$$3+6+12 : 9+18+36$$

Se obtiene una razón proporcional:

$$21 : 63$$

A partir de las interpretaciones anteriores podemos concluir que una diferencia entre la proposición 12 del libro V y la proposición 12 del libro VII de *Elementos* radica en el objeto de estudio, que en el primer caso son magnitudes geométricas, y en el segundo caso son números. A pesar de ello, en términos generales son definiciones muy similares al establecer una razón entre la suma de los antecedentes y la suma de los consecuentes de una proporción dada.

A continuación describiremos algunas similitudes generales entre los libros V y VII de Elementos.

2.4.2 Similitudes generales entre los libros V y VII de *Elementos*

En términos generales podemos enunciar las siguientes características similares entre los libros V y VII de *Elementos:*

1) Ambos libros presentan una serie de definiciones que, en su mayoría, se utilizan para demostrar la validez de diferentes proposiciones.

Esta es una característica de las teorías que utilizan un método hipotético-deductivo, pues primero se enuncian sus definiciones, axiomas o postulados de la teoría, y luego se usan para validar los teoremas involucrados en dicha teoría.

2) Ambos libros utilizan trazos para representar las demostraciones de las diferentes proposiciones.

Debemos mencionar que algunos autores prefieren usar el término “trazos” en lugar del término “segmentos”, pues este último es un elemento geométrico y no sería coherente usar segmentos para representar proposiciones de una teoría (libro VII de *Elementos)* en la cual el objeto de estudio son números y no magnitudes geométricas. De esta manera, Euclides utiliza los mismos trazos tanto en el libro V como en el libro VII de *Elementos.* A continuación presentamos un ejemplo de los trazos en mención utilizados en la proposición 2 del libro V de *Elementos*:

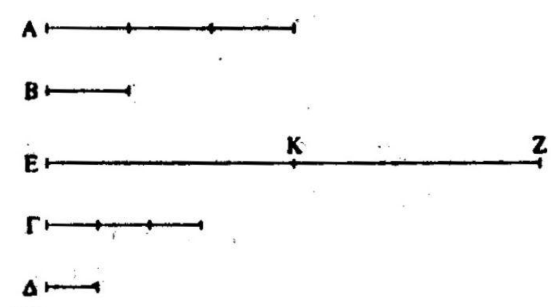

Figura 21: Uso de trazos en Elementos, libro VII. Puertas (1994, p.152)

3) Todos los enunciados de las definiciones, las proposiciones y sus respectivas demostraciones, se realizan de manera retórica, tanto en el libro V como en el libro VII de *Elementos.*

Esta característica ocurre con cada definición proposición y demostración expuesta en los libros V y VII de *Elementos.* Es interesante observar cómo los enunciados retóricos se reducen al utilizar una simbología moderna, por ejemplo en la proposición 7 del libro V:

Enunciado retórico:

> Libro V, proposición 7: Las magnitudes iguales guardan la misma razón con una misma magnitud y la misma magnitud guarda la misma razón con las magnitudes iguales. (Puertas, 1994, p. 30)

Enunciado simbólico. Guacaneme (2012, p.119):

$$\text{Si } X = Y \text{ entonces } X\!:\!Z :: Y\!:\!Z \text{ y } Z\!:\!X :: Z\!:\!Y.$$

En ambas presentaciones se debe conocer claramente el significado de los términos y los símbolos implicados, por ejemplo en el enunciado retórico es importante conocer el significado de los términos “razón” y “magnitud”. De igual forma en el enunciado simbólico debe conocerse el significado del símbolo “:” y del símbolo “::”.

Ahora indagaremos algunas diferencias entre las definiciones y proposiciones de los libros V y VII de *Elementos*

2.4.3 Diferencias generales entre los libros V y VII de *Elementos* de Euclides.

Iniciemos este apartado destacando la diferencia entre las definiciones de los libros V y VII:

1) El objeto de estudio del libro V es magnitudes geométricas mientras que el objeto de estudio del libro VII son números

Esta es la principal diferencia entre el libro V y el libro VII. Este último hecho no es explícito en alguno de los dos libros, debe deducirse a partir del estudio de las definiciones y proposiciones de cada uno de ellos.

2) El libro VII de Elementos incluye una definición de unidad, mientras que el libro V no.

Es decir, no hay una definición análoga en el libro V que haga referencia a una magnitud unitaria o algún término similar. Adicionalmente recordamos que los pitagóricos no aceptaban la existencia del número 1, razón por la cual muy seguramente introdujeron una definición para la unidad.

3) El libro VII incluye una definición para su objeto de estudio mientras que el libro V no.

El libro V no incluye alguna definición alusiva a magnitudes geométricas, mientras que el libro VII incluye una definición de “número” a partir de la definición de unidad.

A continuación comparamos la definición de razón establecida en ambos libros, V y VII de *Elementos*.

2.4.4 Comparación entre la definición de razón establecida en los libros V y VII de *Elementos.*

Indagaremos algunas diferencias en la definición de razón establecida en los libros V y VII de *Elementos.* Iniciemos con la definición de razón del libro V de *Elementos:*

> Libro V, definición 3: Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas. (Puertas, 1994, p.9)

Por su parte, en el libro VII de *Elementos* no hay alguna definición de razón entre números, de esta manera no podemos establecer una comparación directa. Sin embargo, intentaremos dar un significado al término “razón” considerando que dicho término se menciona por primera ocasión en la proposición 14, libro VII:

> Proposición 14, libro VII: Si hay unos números, tantos como se quiera, y otros iguales a ellos en cantidad que, tomados de dos en dos, guardan la misma razón, también, por igualdad, guardarán la misma razón. (Puertas, 1994, p.136)

Examinemos la demostración de esta proposición para determinar el significado de razón, y así compararlo con la definición 3 del libro V de *Elementos*:

Sean A, B, Γ tantos números como se quiera y Δ, E, Z otros iguales a ellos en cantidad que, tomados de dos en dos, guardan la misma razón, (es decir que) como A es a B, así Δ es a E, y como B es a Γ, así E es a Z.

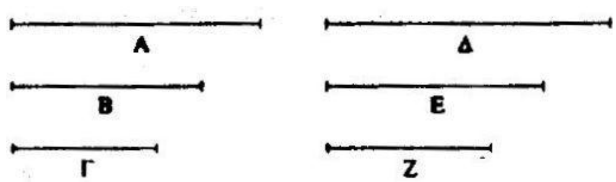

Figura 22: Representación de la proposición 14, libro VII de Elementos. Puertas (1994, p.136)

> *Digo que también, por igualdad, como A es a r, así Δ es a Z. Puesto que, como A es a B, así Δ a E, entonces, por alternancia, como A es a Δ, así B a E [VII, 13][4]. Así mismo, dado que como B es a r, así E es a Z, entonces, por alternancia, como B es a E, así r a Z [VII, 13]. Pero, como B es a E, así A a Δ; por tanto, como A es a Δ, así también r a Z; luego, por alternancia, como A es a r, así Δ a Z [VII, 13]. Q.E.D. Puertas (1994, p.136)*

Considerando la expresión "…(es decir que) como A es a B…" concluimos que para establecer una razón se necesitan dos números. Por otra parte, al establecer una razón resulta importante saber qué número es mayor, menor o igual, esto a juzgar por los trazos de diferentes tamaños.

Ahora compararemos la definición de proporción establecida en los libros V y VII de *Elementos*:

2.4.5 Comparación entre la definición de proporción establecida en los libros V y VII de *Elementos.*

En este apartado deseamos comparar la definición de proporción establecida en los libros V y VII de *Elementos*. Iniciemos con el libro V en el que se establece la siguiente definición de proporción:

> Libro V, definición 6: Se llaman proporcionales las magnitudes que guardan la misma razón. (Puertas, 1994, p. 12)

[4] Hace referencia a la definición 13 del libro VII de *Elementos.*

Esta definición está precedida por otras definiciones, un hecho que podemos representar de la siguiente manera:

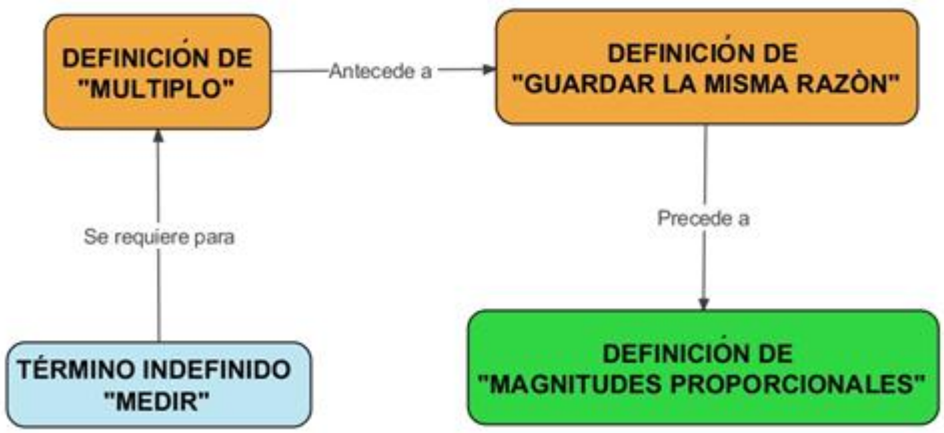

Figura 23: Definiciones que anteceden a la definición 6 del libro V de Elementos

En este mapa se observa la dependencia de la definición de magnitudes proporcionales con otras definiciones. Por otra parte se observa que cada definición del mapa conceptual depende del término indefinido “medir”.

Por otra parte en el libro VII se establece la siguiente definición de proporción:

> Libro VII, definición 21: Unos números son proporcionales cuando el primero es el mismo múltiplo, o la misma parte o las mismas partes del segundo que el tercero del cuarto. (Puertas, 1994, p. 118)

Esta definición también está precedida por otras definiciones, un hecho que representaremos con el siguiente mapa conceptual:

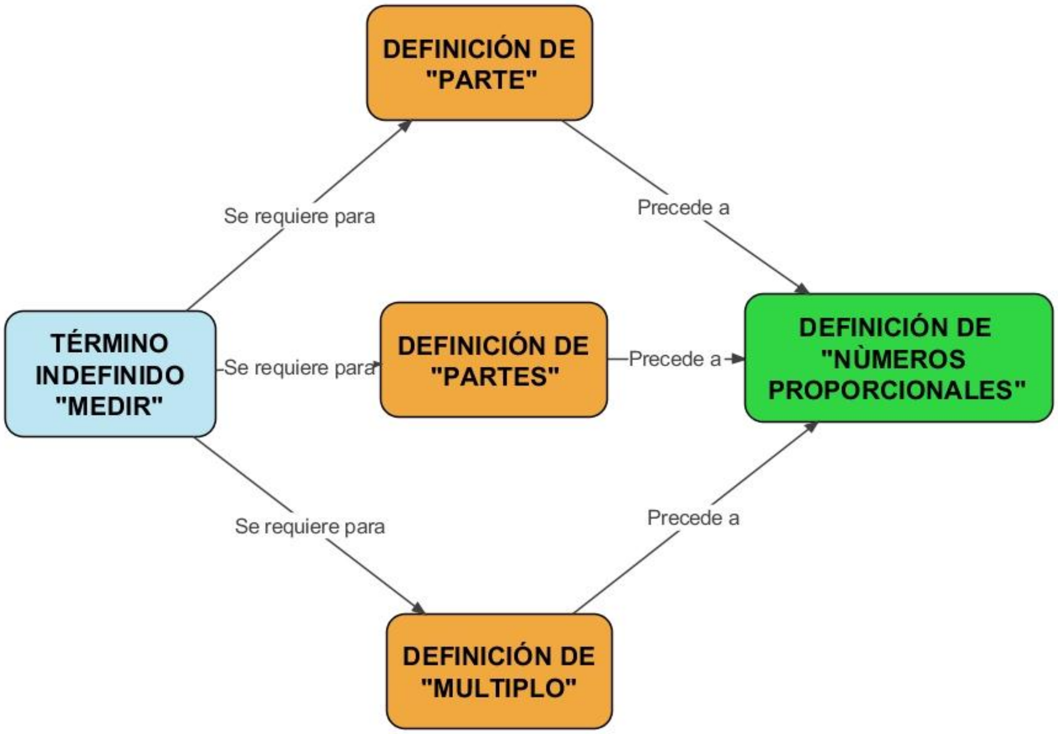

Figura 24: Definiciones que anteceden a la definición 21 del libro VII de Elementos

En este mapa se observa que la definición de números proporcionales establecida en el libro VII depende de tres definiciones simultáneamente, que son “parte”, “partes” y “múltiplo”. Adicionalmente todas las definiciones dependen del término indefinido “medir”. Este último hecho ocurre en la teoría de ambos libros, V y VII. Por otra parte, la definición de proporción incluida en el libro V presenta una diferencia con la definición del libro VII en el cual, la definición de proporción depende de tres definiciones simultáneamente.

Presentamos a continuación las conclusiones del capítulo 2 del presente trabajo de grado.

2.5 Conclusiones del capítulo 2

En este apartado pretendemos establecer nuestras conclusiones después de estudiar los libros V y VII de *Elementos* de Euclides:

1. En los libros V y VII de Euclides se enuncian las definiciones y proposiciones de manera retórica, a diferencia de la manera en que actualmente se enuncian los teoremas, recurriendo a una simbología moderna y sintética.

Concluimos que al enunciar verbalmente una proposición como al enunciarla simbólicamente se hace necesario esclarecer el significado de las palabras y los símbolos implicados. El uso de símbolos reduce los enunciados de las proposiciones, pero se corre el riesgo de desconocer sus significados. Por su parte, los enunciados retóricos podrían ser asequibles para un estudiante que no esté muy relacionado con símbolos matemáticos, sin embargo, no es simple expresar una idea matemática verbalmente. En este sentido es interesante hacer el ejercicio de tomar una definición matemática que se exprese simbólicamente e intentar expresarla verbalmente.

2. Existen términos no definidos en la teoría tanto del libro V como del libro VII de *Elementos.*

Este es el caso del término “razón” que no se define en el libro VII de *Elementos.* También es el caso del término “medir” de la cual Puertas (1994, p.10) menciona:

> *La noción de medida y la relación de medir (y ser medido por) quedan indefinidas.*

Esta característica enriquece el estudio de la obra, pues a partir del significado que se otorgue a los términos indefinidos se pueden interpretar las diferentes definiciones y proposiciones.

3. En los libros V y VII de Euclides se argumentan las proposiciones recurriendo a un método hipotético–deductivo, partiendo de las definiciones previamente establecidas para validar la deducibilidad de las proposiciones enunciadas, considerando en términos generales una hipótesis y una tesis.

Cada una de las proposiciones establecidas tanto en el libro V como en el libro VII cuenta con una demostración que se deduce a partir de definiciones y proposiciones anteriores. Sin embargo, no todas las definiciones han sido utilizadas con el propósito de permitir la demostración de una proposición, en vez de ello, en algunos casos las definiciones establecen un contexto para los objetos de estudio, como es el caso de las definiciones 1 y 2 del libro VII de *Elementos.*

4. Los libros V y VII presentan varias similitudes en algunas definiciones y proposiciones, cuya diferencia radica en considerarlas en el contexto de las magnitudes o en el contexto de los números.

Esta característica está presente en varias definiciones y proposiciones que serían idénticas al cambiar por ejemplo la palabra “número” por la palabra “magnitud”, como es el caso de la definición 1 del libro V y la definición 3 del libro VII, o el caso de la gran similitud existente entre las proposición 12 del libro V y la proposición 12 del libro VII.

5. Euclides recurre con frecuencia al uso de trazos para representar magnitudes y números.

Esta conclusión se evidencia en los dibujos incluidos en demostraciones de las proposiciones de los libros V y VII de *Elementos.* Dichos trazos no deben confundirse con segmentos, pues estos últimos son objetos de la Geometría y la teoría del libro VII aborda como objeto de estudio números.

A continuación presentamos el capítulo 3 del presente trabajo de grado, el cual aborda el estudio de la regla de Bradwardine y su relación con la teoría de razones y proporciones expuesta en *Elementos* de Euclides.

Capítulo 3. LA REGLA DE BRADWARDINE

Este capítulo consiste en la exploración de la *regla de Bradwardine* y su relación con la obra *Elementos*. Dicha exploración la iniciamos con la búsqueda de documentos pertinentes para tal fin, donde destaca la falta de referencias escritas en español tanto en bibliotecas públicas como en la red. Después de investigar varios artículos escritos en otros idiomas, hemos seleccionado dos documentos cuyas características resultan pertinentes para las necesidades de este trabajo de grado. El primero de ellos, Sylla (2008), menciona antecedentes de la propuesta de Bradwardine, algunas características de la regla en mención, relaciones con la obra *Elementos* de Euclides y las consecuencias de su existencia. El segundo, una biografía de Thomas Bradwardine adquirida desde la página de la Universidad de Arizona, artículo que mejor describe la regla en cuestión.

Considerando los anteriores comentarios, el presente capítulo está dispuesto de la siguiente manera:

1) Antecedentes de la regla de Bradwardine
2) La regla de Bradwardine
3) Destino de la regla de Bradwardine

Iniciamos entonces con aquellos antecedentes que determinaron la existencia de la regla en cuestión.

3.1 Antecedentes de la regla de Bradwardine

Aristóteles (384 - 322 a.C.), filósofo, lógico y científico de la antigua Grecia, estudió la manera en que se relacionan las magnitudes físicas fuerza, resistencia y velocidad. Según Sylla (2008, p.76) su legado puede expresarse de la siguiente manera al considerar un cuerpo en movimiento:

> *La velocidad depende de la proporción de la fuerza a la resistencia, con la condición que la fuerza debe ser mayor a la resistencia, de lo contrario no habrá movimiento*

Nuestra interpretación del legado aristotélico sobre la manera en que se relacionan las magnitudes físicas fuerza, resistencia y velocidad puede expresarse mediante una terminología moderna:

$$V = \frac{F}{R}$$

Donde F representa la fuerza, V la velocidad y R la resistencia, con la condición que $F > R$.

De acuerdo al documento de Sylla (2008, p.82) Thomas Bradwardine utilizó los *Elementos* de Euclides para fundamentar su teoría incluida en su obra *Tractatus de proportionibus velocitatum,* compuesta en 1328. Dicha teoría pretende establecer una versión diferente del legado aristotélico sobre cómo se relacionan las magnitudes fuerza resistencia y velocidad, mediante una ley mucho más compleja y expresada mediante la simbología de su época. Sin embargo, Bradwardine sabía que para otorgar un carácter muy formal a su obra y lograr una buena aceptación, debía fundamentar matemáticamente su teoría, por lo cual *Elementos* de Euclides adquiere gran importancia para consolidar su propuesta.

Según Sylla (2008, p.91), una ventaja para Bradwardine fue que en el contexto medieval las magnitudes fuerza, resistencia y velocidad son consideradas de la misma naturaleza, pues para los pensadores de su época, y considerando que en *Elementos* solo se establecen razones entre magnitudes de la misma naturaleza, habría sido poco aceptado el hecho de considerar establecer razones entre la distancia y el tiempo, tal como lo hacemos actualmente, por tratarse de magnitudes físicas de diferente naturaleza.

A pesar de su ventaja, una interesante dificultad se presentó al considerar el significado de "componer razones", un procedimiento que según Sylla (2008, p. 71) Bradwardine utilizó para fundamentar su ley. La dificultad radica en que algunas versiones de *Elementos* incluyen la definición 5, libro VI sobre la composición de razones y otras no. Según Sylla (2008, p.82), Bradwardine trabajó con una versión de Campanus (1220 – 1296 d.C.) que excluía dicha definición, de manera que su referente más claro sobre el significado de componer razones lo obtuvo en la proposición 23 del libro VI, que dice:

Proposición 23, libro VI: Los paralelogramos equiángulos guardan entre sí la razón compuesta de las razones de sus lados. (Puertas, 1994, p. 93)

A continuación presentamos la demostración de esta proposición:

Sean AC, CF paralelogramos equiangulares, en los cuales los ángulos BCD y ECG son iguales.

Digo que el paralelogramo AC tiene la razón compuesta de las razones de los lados con el paralelogramo CF.

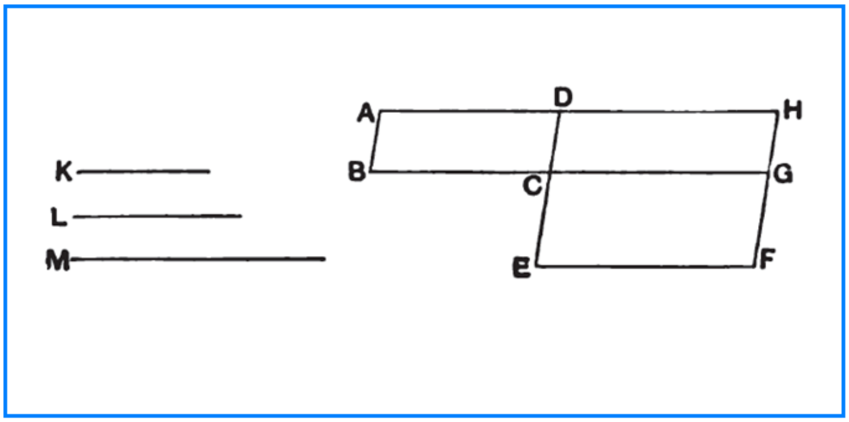

Figura 25: Representación de la Proposición 23, libro VI

Ubiquemos a BC en una línea recta con CG. Entonces DC está en una línea recta con CE. Complétese el paralelogramo DC. Sea una línea recta K de tal forma que:

BC es a CG como K es a L
DC es a CE como L es a M *(VI, 12)*[5]

[5] Hace referencia al libro VI de *Elementos,* definición 12.

Entonces las razones de K a L y de L a M son las mismas razones de los lados BCa CG, y DC a $CE.$

Pero la razón de K a M está compuesta de la razón de K a L y de L a $M;$ Entonces K tiene también hacía M la razón compuesta de las razones de los lados.

Ahora, como BC es a CG así también el paralelogramo AC es al paralelogramo $CH.$ (VI, I).

Mientras que BC es a CG, así también K es a L, por lo tanto, K es a Lcomo AC es a $CH.$ (V, II).

De nuevo, como DC es a CE, también el paralelogramo CH es a CF (VI, I),

Mientras que DC es a CD así también L es a M, por lo tanto, como L es a M también el paralelogramo CH es al paralelogramo $CF.$ (V, II)

Entonces se ha probado que como K es a L, también el paralelogramo AC es al paralelogramo CH, y como L es a M, también el paralelogramo CH es al paralelogramoCF, por lo tanto por ex aequali[6], como K es a M, también AC es al paralelogramo $CF.$

Pero K tiene hacia M la razón compuesta de las razones de los lados; por lo tanto AC tiene hacia CF la razón compuesta de los lados.

Q.E.D. (Puertas, 1994, p. 94).

Según Sylla (2008, p.70), si esta demostración es el primer referente sobre el significado de componer razones, debe considerarse la expresión: *la razón de K a M está compuesta de la razón de K a L y de L a M*. Esto quiere decir que componer razones consiste en considerar los términos de una serie, y la razón del primer término al último término está “compuesta” de las razones entre términos

[6] En el artículo de Sylla (2008) traducen esta frase como “por igualdad”.

intermedios. Por ejemplo la razón de A a E esta compuesta de la razón de A a B, la razón de B a C, la razón de C a D, y la razón de D a E

Adicionalmente, Sylla (2008, p.71) identifica una operación llamada *ex aequali* que tiene gran afinidad con la interpretación de componer razones, y que está incluida en el libro V de *Elementos,* definición 17:

> Libro V, definición 17: Una razón por igualdad[7] se da cuando, habiendo diferentes magnitudes y otras iguales a las primeras en número que, tomadas de dos a dos, guardan la misma razón, sucede que como la primera es a la última -entre las primeras magnitudes-, así pues -entre las segundas magnitudes- la primera es a la última; o dicho de otra forma, consiste en tomar los extremos sin considerar los medios. Puertas (1994, p.16)

Nuestra interpretación de esta definición la expondremos mediante el siguiente ejemplo: Consideremos las magnitudes geométricas A, B, C representadas por los siguientes segmentos:

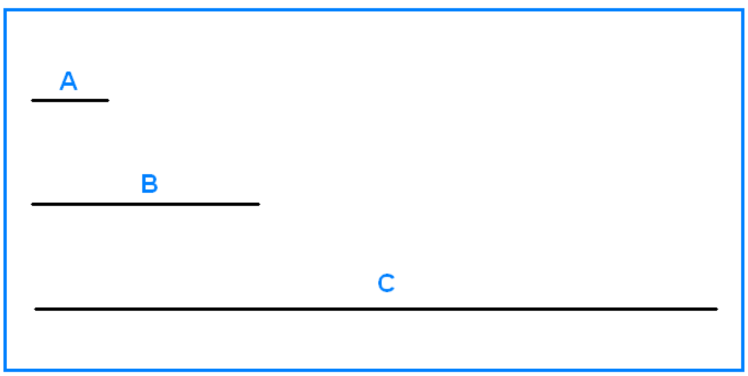

Figura 26: Magnitudes A, B y C

Dichas magnitudes se han representado considerando que la magnitud C equivale a 3 veces la magnitud B, que a su vez equivale a tres veces la magnitud A. Por

[7] Puertas (1994, p.16) traduce la expresión "*ex aequali"* como "*por igualdad".*

otra parte consideremos el siguiente conjunto de magnitudes construidas con el mismo criterio:

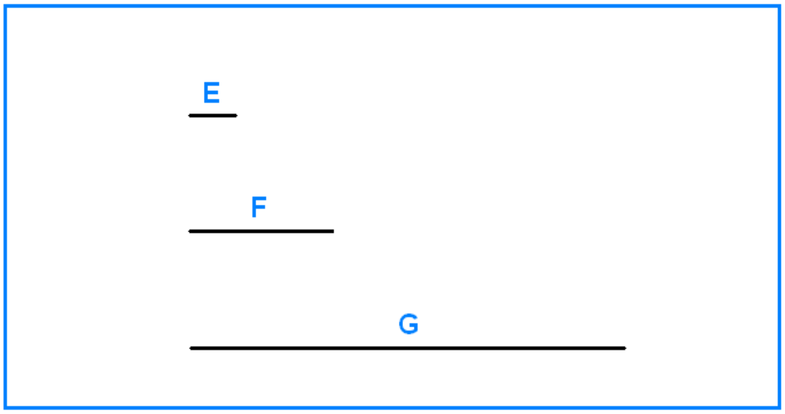

Figura 27: Magnitudes E, F y G.

Es decir la magnitud G equivale a 3 veces la magnitud F, que a su vez equivale a tres veces la magnitud E. La definición 17 del libro V de *Elementos* indica que la magnitud A es a la magnitud C como la magnitud E es a la magnitud G.

Esta operación tiene gran afinidad con lo que se ha considerado que significa componer razones, es decir, se han considerado los términos de una serie, y la razón del primer término al último término está compuesta de las razones entre términos intermedios.

Por fortuna, en la versión *Elementos* de Euclides traducida por Puertas (1994, p.56) está incluida la controversial definición 5 del libro VI, que define la composición de razones:

> Libro VI, definición 5: Se dice que una razón está compuesta de razones cuando los tamaños de las razones multiplicadas por sí mismas producen alguna razón. (Puertas, 1994, p. 56)

En dicha definición se menciona la palabra "tamaño", que Sylla (2008, p.81) interpreta de la siguiente manera:

> *Básicamente, en términos modernos, "tamaño" de una razón es simplemente el número o la fracción que expresa su cantidad. El tamaño de la proporción de 2 a 1 es 2. El tamaño de la proporción de 3 a 2 es 1½. En el enfoque Teónico, las proporciones se componen cuando sus tamaños se multiplican entre sí, o, si hay algún inconveniente, se pueden multiplicar los numeradores, para formar el numerador de la razón compuesta y multiplicar los denominadores para formar el denominador.*

De esta manera se obtienen dos versiones distintas de lo que significa componer razones, la primera de ellas a partir de la proposición 23 del libro VI, y la segunda a partir de la definición 5 del libro VI, cuya genuinidad se ha cuestionado y que ha sido excluida de algunas traducciones de *Elementos* de Euclides. Sylla (2008, p.70) ha llamado la primera versión como “pre-Teónica” y la segunda versión como “Teónica”, en vista que antes de la traducción de *Elementos* de Euclides realizada por Teón (335 – 405 d.C.) la definición 5 del libro VI no estuvo incluida.

En nuestra opinión el enfoque pre-Teónico que se ha fundado en la proposición 23 del libro VI de *Elementos* y cuya demostración se realiza utilizando magnitudes geométricas, presenta una gran relación con la definición 5 del libro 7 de *Elementos* que involucra números (tamaños de razones). Dicha relación la ejemplificamos de la siguiente manera, recordando que en el enunciado de la proposición 23 del libro VI de *Elementos* de Euclides se tienen en cuenta paralelogramos equiángulos:

Consideremos dos rectángulos, de los cuales sabemos que son paralelogramos equiángulos:

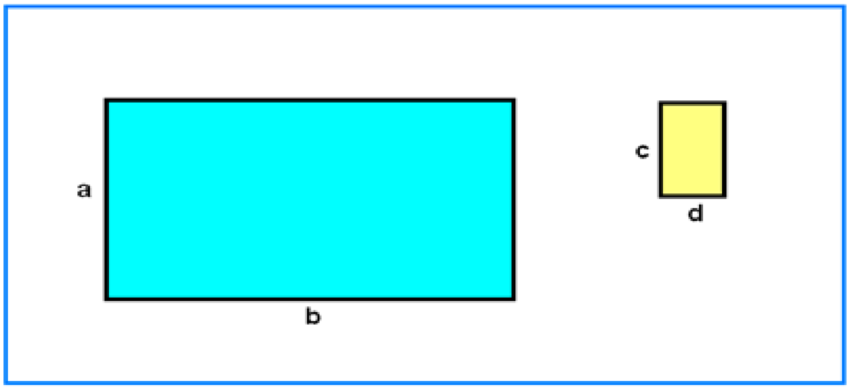

Figura 28: Representación de la composición de razones

Sea A_1el área del rectángulo determinado por los lados a y b, y sea A_2 el área del rectángulo determinado por los lados c y d. Es decir:

$$A_1 = a \times b$$

$$A_2 = c \times d$$

Consideremos la razón entre A_1 y A_2

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{a \times b}{c \times d}$$

La proposición 23 del libro V de *Elementos* establece que hay una “razón compuesta de las razones de sus lados”, y al interpretar la composición como la multiplicación de dichas razones, esto según la definición 5 del libro VI, se obtiene:

$$\left(\frac{a}{c}\right) \times \left(\frac{b}{d}\right)$$

Recordemos de nuevo que Sylla (2008, p.81) aclara que si tenemos dos razones a componer, y consideramos que componer es multiplicar, sencillamente multiplicamos los numeradores y los denominadores de las razones, luego se obtiene:

$$\frac{a \times b}{c \times d}$$

Este es el mismo resultado obtenido al establecer la razón entre las áreas de los dos rectángulos:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{a \times b}{c \times d}$$

Y se concluye que los rectángulos guardan entre sí la razón compuesta de las razones de sus lados.

Para finalizar deseamos agregar que según Sylla (2008, p.117) muy seguramente Bradwardine conocía los enfoques pre-Teónico y Teónico de la composición de razones, procedimiento que hace parte de la fundamentación de su ley. A pesar de ello, Bradwardine eligió fundamentar su trabajo en el enfoque Pre- Teónico usando una versión de *Elementos* de Euclides que excluía la definición 5 del libro VI. Asegura que es muy probable que Bradwardine haya tomado esta decisión como una estrategia para evadir los posibles cuestionamientos aritméticos que podrían presentarse al respecto.

Hemos enunciado algunos de los antecedentes que Thomas Bradwardine enfrentó al momento de establecer su regla sobre las magnitudes fuerza, resistencia y velocidad. A continuación exploramos, dentro de las posibilidades de los documentos investigados, en qué consiste la regla de Bradwardine, con la intención de corroborar su relación con la composición de razones y establecer posibles relaciones con la teoría sobre las razones proporciones expuesta por Euclides en su obra *Elementos.*

3.3 La regla de Bradwardine

Para explorar la regla de Bradwardine hemos seleccionado una biografía adquirida desde la base de datos de la Universidad de Arizona, (Biography, 2011), que describe aspectos fundamentales de esta ley incluida en su obra *Tractatus de proportionibus velocitatum in motibus.* De acuerdo con la reseña biográfica

(Biography, 2011, pág. 391), la obra fue escrita en 1328, y trata sobre la relación entre las magnitudes físicas fuerza, resistencia y velocidad. Según Bradwardine es inapropiado considerar la proporción $V \propto \frac{F}{R}$ donde V representa la velocidad, F la fuerza y R la resistencia, pues no se tiene en cuenta el postulado de la filosofía natural Escolástica-Aristotélica según la cual el movimiento de algún cuerpo puede producirse sólo cuando la fuerza motriz supera la capacidad de resistencia, lo que en términos modernos puede expresarse como:

$$F > R$$

Dicho pensamiento fue establecido por Aristóteles en sus obras *De caelo* y *La* Física, (Biography, 2011, pág. 391), pero el filósofo griego nunca tuvo por objetivo establecer estas relaciones mediante un lenguaje matemático, a diferencia de Bradwardine, quién argumentó que la expresión $V \propto \frac{F}{R}$ presenta serios inconvenientes, pues si se considera una fuerza F_1 y una resistencia R_1 con la condición que $F_1 > R_1$, y se comienza a duplicar la resistencia (es decir: $R_2 = 2R_1, R_3 = 2R_2$ etc.), manteniendo F_1 constante, en algún momento la resistencia superará la magnitud de la fuerza, es decir:

$$R_n > F_1$$

Con estas condiciones, la razón $\frac{F_1}{R_n}$ genera valores entre 0 y 1, lo cual no puede interpretarse como ausencia de velocidad como lo afirma Aristóteles.

Ante estos inconvenientes Bradwardine comienza a indagar la posibilidad de utilizar otras expresiones propuestas en épocas anteriores. Por ejemplo considera la expresión $V \propto (F - R)$, con la cual tiene la ventaja de establecer una velocidad finita en caso que la resistencia sea cero, obteniendo una velocidad equivalente a la fuerza. Sin embargo, esta expresión presenta la dificultad que no corresponde con el postulado aristotélico según el cual *cuando las proporciones entre las fuerzas y las resistencias son iguales las velocidades serán iguales,* Sylla (2008, p.77). Esto se puede explicar mediante un ejemplo sencillo, supongamos que la velocidad V_1 está determinada por los valores $F_1 = 8$ y $R_1 = 4$ y que la velocidad V_2 está determinada por los valores $F_2 = 12$ Y $R_2 = 6$. De esta manera las magnitudes de fuerza y resistencia son proporcionales por que conservan la misma razón y por tanto las velocidades V_1 y V_2 son iguales. Sin embargo al sustituir los valores de fuerza y resistencia en la expresión $V \propto (F - R)$ se obtienen velocidades diferentes, $V_1 = 4$ y $V_2 = 6$.

Finalmente, Bradwardine expresa su último resultado verbalmente, cuya idea fundamental puede resumirse así: "las velocidades varían aritméticamente mientras que las proporciones de las fuerzas y las resistencias que determinan esas velocidades varían geométricamente", (Biography, 2011, pág. 392). Utilizando una simbología moderna podemos expresar esta idea considerando la serie:

$$\frac{V}{n}, \ldots, \frac{V}{3}, \quad \frac{V}{2}, \quad \frac{V}{1}, \quad 1V, \quad 2V, \quad 3V, \ldots nV$$

La cual corresponde con la serie:

$$(\frac{F}{R})^{\frac{1}{n}}, \ldots, \quad (\frac{F}{R})^{\frac{1}{3}}, \quad (\frac{F}{R})^{\frac{1}{2}}, \quad (\frac{F}{R})^{1}, \quad (\frac{F}{R})^{2}, (\frac{F}{R})^{3}, (\frac{F}{R})^{n}$$

Esta es la manera en que el documento (Biography, 2011) describe la regla de Bradwardine. En nuestra exploración de esta ley no logramos localizar un documento que la describiera en detalle. La mayoría de documentos realizan análisis históricos, como es el caso de Celeyrette (2007), o de Goldestein (2008). Otro intento por adquirir información sobre la ley de Bradwardine fue mediante un correo electrónico enviado a la doctora Edith Sylla, a quién solicitamos nos recomendara algún artículo sobre dicha ley, a lo que respondió:

> *La regla de Bradwardine es difícil de entender porque utiliza unas matemáticas de las razones que son diferentes a las modernas. Recomiendo investigar el libro "Science in the Middle Ages" de David Lindberg en el capítulo "The Science of Motion", en el cual John Murdoch y yo tratamos de explicarla claramente.*

Lastimosamente no logramos adquirir el libro en mención, razón por la cual no logramos ampliar nuestro conocimiento sobre la regla de Bradwardine.

Para finalizar consideramos a Sylla (2008) quien menciona el destino de la ley de Bradwardine:

3.4 Destino de la ley de Bradwardine

Según Sylla (2008, p.117), cuando nuevas ediciones y traducciones de Euclides y otras obras griegas condujeron a un cambio en la interpretación de proporciones o razones, y cuando el concepto de número comenzó a extenderse más allá de los números enteros, los fundamentos matemáticos que Bradwardine uso en su teoría se debilitaron, y junto a ellos su regla, esto considerando los avances en Física que se alejaron de la idea aristotélica que una fuerza es necesaria para el movimiento, y la aparición de las leyes de Newton posteriormente. Es así como la ley de Bradwardine desapareció silenciosamente.

3.5 Conclusiones del capítulo 3

Hemos procurado en la medida de lo posible, mostrar algunos antecedentes de la ley propuesta por Thomas Bradwardine, su relación con *Elementos* de Euclides y las situaciones que se presentaron al momento de usar esta obra para argumentar su regla. Posteriormente, hemos realizado una presentación de la misma mostrando los aspectos de su propuesta, a pesar de la falta de fuentes de información. Finalmente, hemos mencionado la manera en que esta regla fue desapareciendo a medida que la interpretación de las razones, proporciones, los modelos físicos y matemáticos fueron evolucionando.

A partir de estas consideraciones podemos concluir que:

1) Fue necesario más de un milenio para que las ideas aristotélicas sobre las relaciones entre fuerza, resistencia y velocidad perdieran vigencia.

Esta consideración la mencionamos teniendo en cuenta que las ideas aristotélicas fueron estipuladas en el siglo III antes de Cristo, mientras que la regla de Bradwardine, considerada como uno de los primeros intentos en cambiar dicho legado, fue propuesta en el siglo XIV, en su obra *Tractatus de proportionibus velocitatum,* compuesta en 1328.

2) Las diferentes traducciones de *Elementos* de Euclides han generado polémicas sobre la interpretación de algunos conceptos relacionados con razones y proporciones, como es el caso de la definición 5 del libro VI de *Elementos*.

Según Sylla (2008, p.82) Bradwardine utilizó una versión de *Elementos* que no contenía la definición 5 del libro VI. Por su parte Simpson considera que esta definición es inútil, absurda y nada geométrica, Puertas(1994, p56).

3) La evolución del concepto de razón y proporción se ha dado a través de diferentes medios de expresión tales como la retórica aristotélica, el pensamiento axiomático euclidiano, y el uso de la simbología y notación matemática, como el caso de la regla de Bradwardine.

La obra *Elementos* tiene una característica fundamental y es que sus definiciones, proposiciones y demostraciones se exponen en su mayoría haciendo uso de palabras, más no de símbolos. Por su parte Bradwardine utiliza una simbología matemática para exponer sus ideas de una manera similar a como lo hacemos actualmente. De esta manera, las razones y las proporciones se han estudiado considerando diferentes medios de expresión para establecer sus propiedades, medios que presentan ventajas y desventajas, por ejemplo las palabras hacen los enunciados mucho más largos, y los símbolos implican una clara comprensión del significado de cada símbolo.

- Los intelectuales medievales conocían el inmenso poder de la argumentación matemática, a tal punto que la obra de Thomas Bradwardine logró aceptación a partir de sus fundamentos matemáticos basados en *Elementos* de Euclides, y no en la experimentación Física Sylla (2008, p.117).

El comentario de Sylla (2008, p.117) puede reafirmarse con el hecho que la regla de Bradwardine no es válida, y desapareció cuando Isaac Newton estipuló sus leyes del movimiento en el siglo XVI. Esto significa que Bradwardine debió enfocarse en aspectos experimentales relacionados con fuerza resistencia y velocidad por encima de la fundamentación matemática de su regla.

El comentario de Sylla (2008, p.117) indica que las matemáticas pueden convertirse en un gran instrumento argumentativo por la manera en que

Bradwardine obtuvo aceptación en la propuesta de su ley a partir de su fundamentación matemática.

A continuación presentamos el capítulo 4 del trabajo de grado, en el cual mostramos los aportes que el estudio de varios artículos relacionados con la ley de Bradwardine y el estudio de la concepción de razón y proporción en los libros V y VII de los elementos de Euclides, han generado para la formación de un docente de Matemáticas.

Capítulo 4. APORTES DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS A LA FORMACIÓN DE UN LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

En este capítulo se realiza una reflexión sobre los aportes que el desarrollo del presente proyecto de grado puede otorgar a un docente de matemáticas en formación. Para realizar la reflexión se consideran los planteamientos presentados en *La historia de las Matemáticas en la Educación de un profesor: razones e intenciones,* Guacaneme (2011). Dichos planteamientos hacen referencia al papel de la historia de las matemáticas en la educación de un profesor, y se organizan en cinco categorías propuestas que son:

1. La racionalidad (los por qué),
2. Las intenciones (los para qué),
3. Al tipo de historia (los qué),
4. Las estrategias metodológicas (los cómo)
5. Al momento adecuado (los cuándo),

En el artículo se enfatizan únicamente dos de estas categorías: la racionalidad y las intenciones. Para el propósito de la reflexión de este capítulo deseamos enfocarnos en la racionalidad, aspecto que el profesor Guacaneme aborda con la siguiente pregunta:

¿Por qué se plantea la apropiación del conocimiento histórico de las matemáticas por parte de los profesores?

El profesor Guacaneme advierte que en varios de los documentos considerados para responder este cuestionamiento se mezclan respuestas relacionadas con los ¿por qué? y ¿para qué?, probablemente por las relaciones que se pueden establecer entre las respuestas a ambas preguntas. Por otra parte identifica en la argumentación de dichas respuestas un aspecto en común, en ellas se considera la historia de las matemáticas como una fuente de *artefactos*[8] que favorecen el

---

[8] En el sentido planteado por Verillon and Rabardel (1995), un artefacto llega a ser una herramienta cuando los usuarios son capaces de emplearlo para sus propios propósitos.

conocimiento del profesor de matemáticas, o que pueden usarse en el ejercicio docente.

Dichos artefactos se organizan en las siguientes categorías:

1. Visiones de la actividad matemática: aquí, de manera particular, se alude a una perspectiva de la actividad de creación, generalmente oculta en la formulación deductiva de los resultados, y de la actividad de comunicación de los resultados de la actividad matemática. Asimismo se reconoce que la actividad matemática ha estado guiada por muy diversas razones (v.g., utilitarias, internas a las matemáticas, problemas de otras disciplinas, estéticas, curiosidad intelectual, retos, placer, recreativas) y ha estado influida por factores sociales y culturales. Igualmente, se ve a las matemáticas como actividad humana exigente, que incorpora errores, argumentos heurísticos, incertidumbre, dudas, argumentos intuitivos, controversias y aproximaciones alternativas a los objetos matemáticos, más que como sistema de verdades. Guacaneme (2011, p.4).

La segunda categoría es:

2- Visiones de los objetos matemáticos: en este sentido se afirma que la historia de las matemáticas permite reconocer preguntas, problemas, tratamientos, acepciones, representaciones, formas de pensamiento, etc. sobre objetos matemáticos específicos. Igualmente, se sostiene que la Historiada cuenta de interrelaciones entre dominios matemáticos o de las matemáticas con otras disciplinas y que revela la interdependencia de meta conceptos (v.g., demostración, rigor, evidencia, error) con el carácter evolutivo de los conceptos, de la formas de representación y del lenguaje. Guacaneme (2011, p.4).

Y la tercera categoría:

3- Competencias profesionales: a este respecto se aduce que el estudio de la historia de las matemáticas exige y promueve el desarrollo de competencias personales y profesionales que van más allá del conocimiento matemático (v.g., leer, escribir, escuchar, buscar fuentes, discutir, analizar y hablar sobre las matemáticas; sensibilidad, tolerancia y respeto hacia maneras no convencionales de expresar ideas o resolver problemas; valoración de la persistencia y el ánimo ante la adversidad). Guacaneme (2011, p.4).

Estas son las tres categorías que tendremos en cuenta para iniciar nuestra reflexión. Examinemos entonces la primera de ellas en el contexto del presente trabajo de grado. Aclaramos que la reflexión se redacta en primera persona en vista que se considera el punto de vista del maestro en formación:

Primera categoría: ¿El estudio realizado en este trabajo de grado cambió la visión de la actividad matemática del maestro en formación?

La respuesta es afirmativa, porque antes de realizar el trabajo de grado consideraba que cualquier teoría que fuese fundamentada matemáticamente era correcta. Sin embargo, la regla de Bradwardine es un contraejemplo de esta concepción, porque esta ley estaba argumentada en los *Elementos* de Euclides, y a pesar de ello, después de varios avances en física y matemáticas perdió su validez. En este sentido las matemáticas las interpreto actualmente como un fuerte instrumento argumentativo, cuyo uso no implica el hallazgo de verdades infalibles.

Por otra parte, antes de realizar el trabajo de grado tenía la sensación que los resultados actuales en matemáticas, postulados, teoremas, conceptos y demás, son los correctos, los apropiados, los que mejor pueden describir cualquier fenómeno físico, los que están mejor fundamentados, en otras palabras son las "matemáticas verdaderas". Sin embargo, al considerar que las ideas aristotélicas sobre la relación entre la velocidad, la resistencia y la fuerza fueron consideradas como veraces en su momento, y que posteriormente perdieron su validez; que la ley dinámica de Bradwardine fue considerada como veraz en el siglo XIV, y que posteriormente perdió su vigencia, puedo considerar que los conocimientos matemáticos actuales pueden perder su validez con el paso del tiempo, tal vez mucho tiempo después como en el caso aristotélico, tal vez en poco tiempo como ocurrió con la regla de Bradwardine. De manera que actualmente no interpreto las matemáticas como un sistema de verdades absolutas, sino como un sistema de conocimientos cuya veracidad se ratifica dependiendo del criterio vigente al momento de evaluar los conceptos implicados, enfatizando por supuesto la palabra "momento", con la cual me refiero a la historia de las matemáticas.

Esta última visión de la actividad matemática puede relacionarse con la concepción de las matemáticas escolares, en el sentido que muchos de los conceptos matemáticos que son objeto de enseñanza en determinados momentos dejan de ser parte de los proyectos curriculares al ser reemplazados por otros. En ese sentido debe existir un criterio para determinar cuáles conceptos deben hacer parte de un currículo matemático escolar y cuáles no, por lo cual me planteo la pregunta: ¿cuál es mi criterio para determinar los conceptos matemáticos que deben integrar un currículo?, pues bien, en un principio intente buscar argumentos en la utilidad de los conceptos matemáticos en un sentido práctico, es decir, lograr que los conceptos matemáticos a enseñar sea útiles para la vida del estudiante. Sin embargo debo confesar que en mi caso son muy pocas las ocasiones en las que las matemáticas han resuelto dificultades en mi vida, es decir, no he resuelto muchos de mis problemas usando integrales o derivadas, teorema de Pitágoras o cosas por el estilo, por lo cual este tipo de argumento tuvo muy poco peso. Esta discusión hizo parte de varias asesorías con el profesor Guacaneme quién me sugirió considerar los estándares básicos de competencias en Matemáticas (MEN, 2006), en los cuales se contemplan cinco tipos diferentes de pensamiento matemático: *numérico, espacial, métrico, aleatorio o probabilístico y variacional.* De manera que un criterio para determinar si un concepto matemático debe hacer parte de un proyecto curricular es considerar si desarrolla el pensamiento matemático, y adquirir dicho criterio lo considero una ganancia del desarrollo de este proyecto de grado.

Ahora consideramos la siguiente categoría sobre las visiones de los objetos matemáticos a partir de esta pregunta:

¿El estudio realizado en este trabajo de grado cambió la visión de los objetos matemáticos implicados en el mismo?

Este trabajo de grado está relacionado con el concepto de razón y proporción. Al respecto, recuerdo muy bien mi concepción de las proporciones las cuales definía con la expresión "*una proporción es una igualdad entre dos razones"* que pude confirmar en algunos textos de Matemáticas. Sin embargo, al estudiar la proposición 13 del libro V de los *Elementos* de Euclides que dice:

Proposición 13: Si una primera magnitud guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta, y la tercera guarda con la cuarta una razón mayor que una quinta con una sexta, la primera guardará también con la segunda una razón mayor que la quinta con la sexta.

La cual interpretamos en el capítulo 2 de este proyecto de grado, logré corroborar que una proporción puede establecerse considerando varias razones, no únicamente dos. Esta misma situación ocurrió con la definición de la operación (*exaequali*):

Libro V, definición 17: Una razón por igualdad (ex aequali) se da cuando, habiendo diferentes magnitudes y otras iguales a las primeras en número que, tomadas de dos a dos, guardan la misma razón, sucede que como la primera es a la última -entre las primeras magnitudes-, así pues -entre las segundas magnitudes- la primera as a la última; o dicho de otra forma, consiste en tomar los extremos sin considerar los medios.

De manera que esta indagación histórica sobre el concepto de proporción en los elementos de Euclides me permite corroborar que puede establecerse una proporción entre dos o más razones, algo pertinente cuando tenga la oportunidad de abordar esta temática en un aula de clases, desempeñándome como docente.

Consideremos ahora la última categoría relacionada con las competencias profesionales que el desarrollo de este trabajo de grado ha otorgado al docente en formación:

¿El estudio realizado en este trabajo de grado ha promovido y desarrollado competencias profesionales en el maestro en formación?

Por supuesto que sí. Estas competencias son:

1. **Lectura de artículos redactados en otros idiomas:**

Durante el desarrollo de esta tesis de pregrado tuve la necesidad de adquirir información relacionada con la regla de Bradwardine. En principio procuré adquirirla en la red de bibliotecas públicas, sin embargo no encontré alguna información al respecto. Posteriormente inicié mi búsqueda en internet y los resultados obtenidos hacían referencia en su mayoría a biografías de Thomas Bradwardine sin incluir información detallada sobre su regla. Con ayuda del profesor Guacaneme obtuve los artículos tan anhelados para fundamentar este proyecto de grado, los cuales estaban redactados la mayor parte de ellos inglés, de esta manera tuve que traducirlos, comprenderlos y utilizarlos para los propósitos establecidos en este proyecto.

Ahora comprendo que gran parte de la información sobre temáticas relacionadas con mi futura labor docente está disponible en otros idiomas, por lo cual es momento de sustituirla manía de acudir a documentos disponibles en español y considerar fuentes extranjeras.

2. **Fuentes de búsqueda**

Con este proyecto de grado pude corroborar la importancia de realizar búsquedas exhaustivas de la información requerida, es decir, he aprendido a refinar mi criterio de búsqueda de información acudiendo a las bibliotecas de universidades extranjeras, como es el caso de la universidad de Arizona de donde proviene uno de los artículos utilizados en esta tesis de pregrado, o acudiendo directamente a los redactores de los artículos que haya obtenido, esto lo menciono porque logré establecer contacto vía correo electrónico con Edith Sylla, quién me sugirió la lectura de un capítulo de uno de sus libros, en el cual procura explicar la regla de Bradwardine. De manera que con perseverancia e indagando múltiples fuentes de información se pueden obtener los artículos necesarios sobre la temática de interés, esto considerando que no siempre es sencillo adquirir documentos relacionados con historia de las matemáticas.

3. **Valoración de las diferentes interpretaciones.**

En el estudio realizado en este proyecto de grado pude contemplar diferentes interpretaciones del mismo concepto, que es la relación entre la fuerza, la resistencia y la velocidad, el primero de ellos otorgado por Aristóteles y el segundo por Thomas Bradwardine. Ambas interpretaciones a pesar de ser distintas, fueron el punto de partida para que otros intelectuales generaran nuevos conocimientos en matemáticas, incluso considerando que actualmente ninguno de los dos puntos de vista tiene vigencia. De esta manera he comprendido la importancia de valorar las interpretaciones que otras personas realizan sobre un concepto matemático en vez de considerar únicamente mis puntos de vista. Esto me resulta muy pertinente sobre la necesidad de aprender a escuchar y analizar cada una de las interpretaciones que mis estudiantes hagan sobre los conceptos de estudio, aún cuando no sean los más apropiados, pues a partir de ellos se pueden generar nuevos conocimientos.

Capítulo 5. CONCLUSIONES

Thomas Bradwardine (1290 – 1349 d.C.) interpretó la manera en que se relacionan las magnitudes físicas fuerza, resistencia y velocidad a partir de una regla que involucraba razones y proporciones. Esta regla fue fundamentada matemáticamente considerando la obra *Elementos* de Euclides logrando aceptación en poco tiempo. Sin embargo, esta ley no era válida y desapareció rápidamente a partir de los avances en Física y Matemáticas y la aparición de las leyes de Newton.

En términos generales el estudio de la obra *Elementos* de Euclides nos ha permitido conocer una manera diferente de expresar verbalmente ideas matemáticas. También comprender que el significado de las definiciones y proposiciones de esta teoría dependen de la interpretación de sus términos indefinidos.

Por su parte, el estudio de la regla de Bradwardine nos permitió conocer el legado de las ideas aristotélicas sobre la Física y el movimiento, las cuales tuvieron una vigencia que perduró por más de un milenio. Debemos comentar que no logramos adquirir una gran comprensión sobre dicha regla a causa de la falta de documentos que la describan de manera puntual.

Adicionalmente comprendimos que las Matemáticas son un fuerte instrumento argumentativo y que a pesar de ello no podemos considerarlas como un sistema de verdades absolutas.

Finalmente, el proyecto de grado ha permitido al maestro en formación adquirir diferentes significados e interpretaciones sobre razones y proporciones, y en consecuencia comprender la importancia de considerar diferentes puntos de vista al momento de expresar e interpretar ideas matemáticas.

Capítulo 6. ANEXOS

Anexo No. 1 Traducción[9]

"EL ORIGEN Y EL DESTINO DE THOMAS BRADWARDINE EN *DE PROPORTIONIBUS VELOCITATUM IN MOTIBUS* EN RELACION A LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS" DE EDITH DUDLEY SYLLA

En el *Libelli sophistarum,* publicado 11 veces entre 1497 y 1530 para el uso de los estudiantes de Oxford o Cambridge, una versión acortada del *De proportionibus velocitatum in motibus* de Thomas Bradwardine fue incluida, junto con varias otras obras cortas que abarcaron temas de lógica. En este Tractatus de proportionibus, que probablemente fue el trabajo abreviado de Bradwardine al menos un siglo antes, todavía se pensaba que era una parte importante y relevante de la educación de pregrado en el siglo XVI, pues muestra a fondo cómo el enfoque de Bradwardine a las proporciones de fuerzas, resistencias, y las velocidades de los movimientos se habían asimilado en el plan de estudios escolar. De hecho, para hacer frente a las proporciones en la vía Bradwardiniana fue necesario, junto con diversos métodos de la lógica entre las herramientas de análisis, que cada universitario de Oxford o Cambridge le fuera enseñado incluso a principios del siglo 16.

Sin embargo, en el siglo XX, la teoría de Bradwardine sobre las proporciones de las velocidades en los movimientos se habían convertido en territorio alienígena. De este modo, E. J. Dijksterhuis escribió acerca de la teoría de Bradwardine lo siguiente:

---

[9] Traducción del documento Sylla, E. (2008). The origin and fate of Thomas Bradwardine's de proportionibus velocitatum in motibus in relation to the history of Mathematics. En Walter,R. & Sophie, R. (Eds.). *Mechanics and Natural Philosophy Before the Scientific Revolution*, (pp. 67 – 119). Springer Netherlands.

Esta traducción se hace con fines netamente académicos y no comerciales en el marco del Trabajo de grado. En tanto que no constituye una traducción autorizada, se sugiere no citar esta traducción sino la fuente original.

Bradwardine asume que aquello que realmente sucede es que la proporción en la cual cambia la velocidad 'sigue' la manera en que cambia la proporción entre la fuerza y la resistencia; al hacerlo, dice algo que a los ojos de un lector actual es completamente indefinido. (Por ejemplo: "sigue" significa dependencia) o coincide con la formulación aristotélica. Su intención sin embargo no es ni lo primero, ni lo segundo, pero para aclarar las cosas es necesario hablar sobre la terminología de la teoría de la proporción medieval, que es muy extraña y confusa comparada con los modos de expresión actuales… (Posteriormente explica la manera en que Bradwardine utiliza la composición de proporciones). El modo de expresión descrita persistió hasta el siglo XVIII y fue una fuente constante de incomprensión a los lectores más adelante, que siempre estuvieron desconcertados por el hecho de que el doble de 3 es 6, pero el doble de la proporción 3:1 es la relación 9:1. . .

Después de describir la teoría de Bradwardine en términos de un algoritmo o ecuación exponencial, Dijksterhuis comenta:

Aunque se trata de una formulación matemática sin fundamento de una ley natural que no es válida, el argumento de Bradwardine de ninguna manera carece de importancia histórica, testifica una búsqueda tentativa de una expresión matemática sobre una supuesta relación funcional en la naturaleza, y para nosotros es instructivo como un síntoma de las grandes dificultades que se tuvieron que superar antes que los fenómenos de la naturaleza se pudieran describir en el lenguaje de las matemáticas. Como es evidente de lo anterior, estas dificultades no fueron sólo en baso a supuestos físicos incorrectos; sino también fueron causados por las peculiaridades y los defectos del lenguaje matemático. Al respecto se deben considerar los elementos de Euclides, un modo de expresión altamente especializado, generalmente rígido, que había sido muy refrenado por ciertas exigencias de exactitud debido a la influencia de concepciones filosóficas. Así, para elegir una instancia de la materia del tema bajo consideración, era imposible hablar de una velocidad como una relación entre la distancia y el tiempo. . . En matemáticas euclidianas es posible sólo hablar de la relación entre dos magnitudes del mismo tipo, es decir, de dos magnitudes, donde cada una de ellas puede, al ser multiplicada, superar a la otra.

Continuando con Dijksterhuis, podemos tomar el trabajo de Bradwardine sobre las proporciones de las velocidades en los movimientos como un paso de “importancia histórica” en la búsqueda de “una expresión matemática de una…relación funcional en la naturaleza”, incluso si ésta envuelve “una ley natural que no es válida”. No obstante, me gustaría argumentar que la formulación matemática de Bradwardine no fue “infundada”, pero tenía una firme fundamentación en la teoría de las proporciones y de la composición de las mismas al ser encontradas en una versión pre-Teonina de los *Elementos* de Euclides y en los trabajos matemáticos de Arquímedes y Apolonio también. Mientras esta matemática griega clásica era, como dice Dijksterhuis, “enormemente restringida por ciertas exigencias de exactitud”, como la exigencia de que las proporciones siempre implican dos magnitudes de la misma naturaleza, Thomas Bradwardine construyó sobre ella una teoría matemática de las proporciones de las velocidades en el movimiento de una elegancia aún digna de nuestro reconocimiento.

En el último medio siglo, los historiadores no han sido capaces de ver claramente las virtudes de la teoría de Bradwardine ya que entre su época y la nuestra se ha producido una revolución en la comprensión de la razón o la proporción (¿es lo mismo?), por lo que las proporciones se identificaron con divisiones indicadas, con lo que, en épocas anteriores, fueran llamadas sus "coeficientes", "cantidades", "exponentes" o "tamaños". Antes del cambio moderno, Bradwardine, siguiendo una tradición griega clásica (pre-Teonina), trató proporciones como las relaciones entre dos cantidades y no les aplicó las operaciones aritméticas normales tales como suma, resta, multiplicación o división.

COMPOSICIÓN DE PROPORCIONES ANTES DE BRADWARDINE

En los elementos de Euclides hay dos concepciones distintas sobre lo que significa “componer proporciones”, las cuales deben distinguirse para conocer el destino y el origen de la regla de Bradwardine. Por otra parte, las he llamado la primera y segunda tradición de la composición. Llamaré a la primera la más clásica y teórica “tradición pre-Teonica” de la composición de proporciones, y la segunda, más práctica y calculadora, la “tradición Teonica” de la composición de proporciones.

Primera tradición:

La primera tradición (pre - Teonica) aparece en las ediciones modernas de los *Elementos* como una operación no definida previamente, encontrada en el libro VI, Proposición 23, que dice:

> *Los paralelogramos equiángulos guardan entre sí la razón compuesta de las razones de sus lados.*

Lo que significa "¿compuesto de?", aquello que Euclides hace para componer dos proporciones es tomar las dos proporciones de los lados de los paralelogramos que quiere componer y equipararlos a dos proporciones continuas con cada una (por ejemplo, tal que el antecedente de una proporción es la misma que el consecuente de la otra). Él comenta:

> Sitúe una línea recta *K*, y arrégleselas para que,
>
> *BC* sea a *CG*, como *K* a *L*,
>
> y como *DC sea* a *CE*, como *L* a *M*.
>
> Luego las proporciones de *K* a *L* y de *L* a *M* son las mismas que las
>
> proporciones de los lados, es decir, de *BC* a *CG* y de *DC* a *CE*.
>
> Pero la razón de *K* a *M* se compone de la razón de *K* a *L* y de que de
>
> *L* a *M*; de modo que *K* tiene también a *M* la razón compuesta de las
>
> proporciones de los lados.

En el procedimiento en la proporción 23 del Libro VI es tomado como la clave de la definición de "composición" de proporciones, entonces es claro que la operación de composiciones consiste en tomar términos en una serie y argumentar que la proporción de la primera a la ultima está compuesta de las proporciones entre términos inmediatos, así que, por ejemplo, la proporción de A a E está compuesta de la proporción de C a D, y de la proporción de D a E. Bajo esta comprensión de composición no se necesita demostración mas es simplemente obvio inspeccionar. La composición continua de proporciones es comúnmente añadida a líneas contiguas, es como si los puntos A, B, C, D, E, estuvieran marcados en una regla y la distancia de A a E fuera igual a la distancia de A a B, mas la distancia de B a C y así sucesivamente hasta E.

Por esto, bajo esta comprensión de composición las proporciones son relaciones entre entidades de la misma naturaleza, y como relaciones, son algo distinto de los números e incluso que las magnitudes geométricas. Por otra parte, en el libro V, definición 17, Euclides ha definido una operación entre proporciones llamada *ex aequali (por igualdad),* la cual tiene mucha afinidad con el concepto de composición de proporciones:

> *Libro V, definición 17: Una razón por igualdad se da cuando, habiendo diferentes magnitudes y otras iguales a las primeras en número que, tomadas de dos a dos, guardan la misma razón, sucede que como la primera es a la última -entre las primeras magnitudes-, así pues -entre las segundas magnitudes- la primera as a la última; o dicho de otra forma, consiste en tomar los extremos sin considerar los medios.*

La operación *ex aequali* provee las bases para la composición de proporciones en el sentido que la utilizará Bradwardine para la fundación de su ley. Lo que se necesita es tener en cuenta que los términos de las proporciones a componer deben ser continuas (como la A, B, C, D, E antes mencionados) y monótonamente creciente o decreciente. En este entendimiento de la composición de proporciones puede interpretarse como "Agregar", como en la adición de segmentos más cortos para hacer una línea más larga. Esta comprensión de la "adición" de proporciones es ejemplificada por los definiciones de Euclides 9 y 10 del libro V:

> *Libro V, definición 9: Cuando tres magnitudes son proporcionales, se dice que la primera guarda con la tercera una razón duplicada de la que guarda con la segunda.*

> *Libro V, definición 10. Cuando cuatro magnitudes son proporcionales, se dice que la primera guarda con la cuarta una razón triplicada de la que*

> *guarda con la segunda, y así siempre, sucesivamente, sea cual sea la proporción.*

Aquí, aunque la traducción latina normalmente tiene *duplicata* y *triplicata,* en lugar de “doble” o “triple”, algunos autores entienden los significados como si fueran lo mismo, tomando la proporción de la primera magnitud a la segunda como una mitad o una tercera, etc., de la proporción de la primera a la ultima magnitud. Entonces estas mitades o terceras partes podrían ser añadidas para hacer la proporción completa de extremos. La simplicidad de la función de Bradwardine es más aparente cuando una puede decir que como la proporción de fuerza a resistencia es duplicada o triplicada, así es la velocidad, duplicada o triplicada, y así sucesivamente.

En la teoría de la música o armonía antigua y medieval existía una fuerte tradición de “adición” de proporciones conectadas a la suma de intervalos musicales, así cuando la quinta estrofa (correspondiente a la proporción 3:2) era añadida a la octava (correspondiente a la proporción 2:1) se producía el intervalo diapasón diapente (correspondiente a la proporción 3:1). Esta “adición” de proporciones había aparecido ya en Los Fundamentos de la Música de Boetio. Así, en el Libro II, proporción 25, Boetio escribe:

> Afirmo, pues, que la diapente consiste justamente del sesquialter, el diatessaron de la razón sesquitertiana... Si restamos el diatessaron de la consonancia de la diapente, el intervalo se mantiene, lo que se llama el "tono", si tomamos una sesquitertiana lejos de una razón sesquialter, una razón sesquioctava se termina. Se deduce, entonces, que el tono debe ser asignado a la razón sesquioctava.

Lo que Boetio está diciendo es que 4:3 sustraído de 3:2 deja 9:8. Él no dice cómo los trabajos matemáticos, mas de los diagramas que aparecen en manuscritos de su trabajo, aparece que él estuvo pensando en una matriz de los números 9 – 8 – 6 en una línea con ligaduras entre los números. Entonces, el diapente en la proporción de 3:2 corresponde a la razón de 9 y 6, los extremos de la línea; mientras el diatesseron en la proporción 4:3 corresponde a la razón de 8 y 6 en la recta de la línea, la cual, cuando se aleja de la razón de 9 y 6, deja al resto del intervalo de 9 a 8.

Dependiendo del instrumento musical que sea tomado para ser la base de la teoría armónica, la imagen de adición musical de intervalos puede variar. Más tarde en *Los Fundamentos de La Música* Boetio propone tomar una cadena y amarrarla en 7 partes iguales. Si la cadena es dividida en tres partes de un lado y cuatro partes del otro, y las dos partes de la cadena son jalados, la consonancia que será escuchada es la diatessaron correspondiente a la proporción 4:3. Similarmente, la cadena podría ser cortada en 5 partes y luego dividida en tres partes en un lado y dos en el otro, cuando estas dos partes de la cadena sean jalados simultáneamente uno después del otro, los tonos serian en la consonancia diapente o 3:2. En un teclado, es fácil visualizar cómo los intervalos entre notas seleccionadas en una línea pueden ser adicionadas para hacer octavas y similares. Las dos notas siempre permanecen juntas, incluso cuando sus razones sean consideradas y la dirección de comparación de nota baja a alta o viceversa sea irrelevante.

Lo que Bradwardine hizo en su *On the proportions of velocities in motions* fue tomar esta primera tradición “pre-Teonina” de composición de proporciones como si fuera la única. Las conclusiones claves en el siglo XVI sobre la versión corta del trabajo de Bradwardine fueron:

> *La velocidad de movimiento sigue la proporción geométrica del motor por encima de la potencia de lo movido, lo cual significa que si hay dos potencias y dos resistencias y la proporción entre la primera potencia y su resistencia es mayor que la proporción entre la segunda potencia y su resistencia, la primera potencia se moverá más rápidamente con su resistencia que la segunda potencia con su resistencia, tal como una proporción es mayor que otra. . .*

Según esta opinión, las siguientes conclusiones deben ser consideradas:

1 - Si una potencia está en una proporción doble a su resistencia, cuando la potencia es doblada (duplata), manteniendo la resistencia constante, el movimiento será el doble (duplabitur). . .

2 - Si ninguna potencia se encuentra en una proporción doble a su resistencia, esa potencia es suficiente para mover con la mitad de esa resistencia el doble de rápido (en duplo velocius) que como se mueve con la resistencia total. . .

3 - Si una potencia es más del doble proporcional a su resistencia, con la potencia que se duplicó y la resistencia constante, no se duplicará el movimiento. . .

4 - Si una potencia está en una proporción de más del doble de su resistencia, esa potencia no es suficiente para generar un movimiento dos veces más rápido con la mitad de la resistencia que como con toda. . .

5 - Si una potencia es en menos de una proporción doble a su resistencia, la potencia duplicada moverá [la misma resistencia] más de dos veces tan rápidamente. . .

6 - Si una potencia es en menor que una proporción doble a su resistencia, será suficiente para generar un movimiento más de dos veces tan rápidamente como con la mitad de la resistencia. . .

Aunque el sentido de la teoría de Bradwardine sobre la relación de potencias, fuerzas y resistencias es aquí expuesto en seis conclusiones, cada conclusión parece simple y es consecuencia directa de las matemáticas sobre las proporciones que introducen su trabajo.

Los supuestos claves y las conclusiones de la sección Matemática (como en la abreviatura del siglo XVI) son:

> [primera suposición:] todas las proporciones son iguales cuyas denominaciones (denominationes) son iguales.
>
> La segunda suposición es esto: si hay tres términos proporcionales y el primero es mayor que el segundo y el segundo.

Las suposiciones y conclusiones del trabajo de Bradwardine en la sección matemática (tal como en la versión resumida del siglo XVI) son:

Algunas suposiciones:

- Primera suposición: Todas las proporciones son iguales a aquellas cuyas denominaciones son iguales.
- La segunda suposición es: si hay tres términos proporcionales y el primero es mayor que el segundo y el segundo mayor que el tercero, la proporción de los

primeros al último está compuesta (componitur) de la proporción de la primera a la segunda y la segunda a la tercera.

- Tercera suposición: cuando hay muchos términos y el primer término es mayor que el segundo y el segundo es mayor que el tercero y del mismo modo con respecto a los demás términos hasta el último término, manteniendo una proporción, entonces la proporción de la primera hasta la última se compone de la proporción de la primera a la segunda y el de la segunda a la tercera, y así sucesivamente para los demás términos. . .
- Sexta suposición: cuando algo se compone de dos iguales, esa composición será el doble (duplum) de cualquiera de los iguales; Si se compone de tres iguales, será triple a alguno de ellos. . .
- Séptima suposición: cuando algo se compone de dos desiguales, el algo es más del doble de la menor y menos del doble de la mayor. ..

A continuación algunas conclusiones:

- la primera conclusión probada a partir de estas suposiciones es: si hay una proporción de mayor desigualdad entre el primer y el segundo término y del segundo al tercer término, entonces la proporción del primer al tercer término será una proporción doble (dupla) que la proporción del primero al segundo y del segundo al tercero. . .
- La tercera conclusión es la siguiente: Si el primer término es más del doble que el segundo, y el segundo término es exactamente el doble del tercero, la proporción del primero al tercero será menos del doble de la proporción del primero al segundo. .
- La Quinta conclusión es la siguiente: Si el primer término es menor que el doble del segundo y el segundo es precisamente el doble que el tercero, entonces la proporción del primer término al último será más del doble de la proporción del primero al segundo
- Séptima conclusión: no hay ninguna proporción mayor o menor que una proporción de igualdad. Tampoco hay una proporción de mayor desigualdad mayor que una proporción de igualdad. . .

De una comparación de estas conclusiones matemáticas y físicas, es obvio que las primeras y segundas conclusiones sobre movimientos son análogas a la primera conclusión sobre las proporciones matemáticas; la tercera conclusión sobre movimientos se desprende de la tercera conclusión sobre las proporciones y así sucesivamente. En otras palabras, la ley de Bradwardine sobre el movimiento es consecuencia directa y simple de las matemáticas de la comparación y composición de proporciones, y no de la física como tal.

Así que las proporciones de las velocidades y movimientos de Bradwardine vinieron como un “paquete de negocios”. Las personas aprendieron a aceptar las matemáticas de proporciones según la tradición "pre-Teonica", y luego las matemáticas de las relaciones de fuerzas, resistencias y velocidades se presentaron como la recompensa por haber aceptado estas matemáticas. Antes de Bradwardine, el intento de traducir lo que Aristóteles y Averroes habían dicho acerca de las relaciones de fuerzas, resistencias y velocidades en las matemáticas había generado varias dificultades.

Una simple interpretación matemática de Aristóteles podría decir que velocidad depende de la proporción de la fuerza para resistencia, con la condición que la fuerza es mayor que la resistencia, porque de lo contrario no habría ningún movimiento.

Esto se ajusta con las declaraciones de Aristóteles sobre si una cierta fuerza mueve con una velocidad determinada, luego el doble de la fuerza moverá la misma resistencia con el doble de la velocidad, o la misma fuerza moverá a la mitad la resistencia con el doble de la velocidad y así sucesivamente. Matemáticamente, esta idea tiene una condición inaceptable, porque implica que habrá una velocidad finita conforme la proporción de la fuerza a la resistencia se acerca a una proporción de igualdad. Por otra parte, si se dice que no hay ninguna velocidad cuando la fuerza sea igual o menor que la resistencia, entonces habrán algunas pequeñas velocidades correspondientes a alguna fracción de fuerza y resistencia (ya que la proporcionalidad simple haría estas velocidades pequeñas corresponden a una fuerza menor que la resistencia).

La principal alternativa matemática para entender a Aristóteles, lo que significa que las velocidades son proporcionales a la fuerza y la resistencia, fue decir que velocidades corresponden a la diferencia entre la fuerza y la resistencia o F – R. Esta formulación tenía la ventaja que predice una velocidad finita cuando no hay resistencia. Aristóteles habían utilizado su visión para argumentar que un vacío es imposible, ya que implicaría una proporción de una fuerza finita a cero resistencia y por lo tanto una velocidad infinita, una contradicción lógica. A principios del siglo XIV, sin embargo, mayoría de los estudiosos acepta que Dios podría, por su poder absoluto, hacer que el vacío existiera, y así las matemáticas de movimiento necesitan permitir una resistencia cero.

La formulación F – R había logrado este objetivo, pero tenía otros problemas serios. Implicaba, por ejemplo, que si dos cuerpos en movimiento con la misma velocidad fueran atados juntos se moverían más rápidamente, puesto que las diferencias entre las fuerzas combinadas y resistencias combinadas se sumarían. Por otra parte, la formulación de velocidad proporcional a F - R no "salvó" las declaraciones de Aristóteles: cuando las proporciones de la fuerza y la resistencia son iguales, las velocidades son iguales.

La matemática de las proporciones sobre las velocidades y movimientos que Bradwardine propuso otorgó una nueva alternativa matemática que coincidió con las proporciones de fuerza y resistencia hasta la velocidad cero, evitando los problemas de valor límite de la interpretación aristotélica estándar, y al mismo tiempo, con un lustre plausible, salvaría la verdad de las declaraciones de Aristóteles. Por otra parte, Bradwardine argumentó su posición refutando cuatro posiciones alternativas, que dejaron a la teoría de Bradwardine como la única alternativa.

Hubo otros argumentos en contra de la interpretación aristotélica estándar y a favor de la ley de Bradwardine basado en experiencia. Por ejemplo:

> "*la actual teoría [Aristóteles] debe ser refutada invocando la falsedad, porque la experiencia nos enseña lo contrario. Vemos, en efecto, si a un solo hombre que está moviendo algún peso de tal forma que apenas puede moverse lentamente, un segundo hombre ayuda al primero, los dos entonces moverán mucho más que dos veces más rápido. El mismo principio es bastante manifiesto en el caso de un peso suspendido de un eje rotatorio, que insensiblemente se mueve durante el curso hacia abajo (como es el caso de relojes). Si se agrega un peso de reloj igual al primero, el conjunto desciende y el eje o la rueda, se vuelve mucho más que dos veces más rápido (como es suficientemente evidente a primera vista)".*

La quinta conclusión de Bradwardine sobre las proporciones de las velocidades, citada anteriormente, explica por qué a medida que la potencia del movimiento se incrementa partiendo de ser un poco mayor que la resistencia, la velocidad aumenta mucho más del doble cuando la potencia se duplica. Pero la estrategia de Bradwardine defendiendo su punto de vista fue más matemática que física.

En el establecimiento de los preliminares matemáticos de su teoría, Bradwardine explicó sistemáticamente una visión de las proporciones y su composición, sin hablar de otros enfoques alternativos. Una vez que volvió a la física, no dio el punto de vista aristotélico como tradicionalmente lo entendida – que velocidades son proporcionales a las fuerzas e inversamente proporcionales a las resistencias – él asumió implícitamente que las proporciones sólo pueden variar como lo hacen en su propia ley.

Esto significa que la visión aristotélica tradicional tuvo que ser dividida en dos partes, diciendo que la velocidad varía como la fuerza si la resistencia se mantiene constante e inversamente con resistencia si la fuerza se mantiene constante. Habiendo hecho esta división de la teoría de Aristóteles para mantener la pretensión que las proporciones pueden variar sólo en la manera en que él lo propuso, Bradwardine manifestó contra esta teoría que era insuficiente, sin decir nada sobre el caso en que las fuerzas y las resistencias varían al mismo tiempo! (al refutar la segunda posición errónea, Bradwardine asumió su propia teoría de proporciones, incluyendo la visión que ninguna proporción es mayor o menor que una proporción de igualdad. ¿Qué significa?)

Igualmente argumentó contra la teoría de que las velocidades son proporcionales a (F, R): R en los terrenos que la teoría no podía calcular cualquier velocidad mayor o menor que la velocidad que se produce cuando la fuerza es el doble de la resistencia, porque entonces (F – R): R es la proporción de R:R o 1:1 (la misma pregunta, ¿qué significa?), y no hay ninguna proporción mayor o menor proporción de igualdad (su séptima conclusión sobre proporciones, citado anteriormente).

Inmediatamente después de la aparición de su obra *On the proportions of velocities in motions* en 1328, la nueva regla de Bradwardine para la relación de fuerzas, resistencias y velocidades en movimientos fue ampliamente y casi unánimemente aceptada. Creo que esto sucedió debido a la eficacia de los fundamentos matemáticos que se utilizaron, junto con el sorprendente avance de su teoría sobre las alternativas consideradas previamente. Los principales pensadores en París y Oxford, comenzaron a construir conocimientos sobre la base de Bradwardine. En París, Nicole Oresme y Alberto de Sajonia imitaban a Bradwardine escribiendo sus propias obras (De proportionibus), libros que incluyeron discusiones de su ley o regla.

En Oxford, Roger Swineshead, John Dumbleton y Richard Swineshead también incluyen discusiones sobre la ley de Bradwardine en sus obras, aunque no imitan su título. (De proportionibus). Alvaro Tomás de Lisboa, en París 1509, publicó el Gran *Liber de triplici motu proportionibus annexis. . . philosophicas Suiseth calculationes ex parte declarans*, exponiendo en detalle las matemáticas y la ciencia del movimiento que había sido fundada por Bradwardine y avanzada por Richard Swineshead. Doscientos años después del trabajo de Bradwardine, Jean Fernel lo defendió implícitamente en su obra *De proportionibus libri duo* en 1528.

Quienes se oponían a Bradwardine, por ejemplo Blasio de Parma, buscaron en gran parte razones matemáticas en lugar de físicas. La queja más común era que cuando una proporción es duplicada (duplicata), no es necesariamente el doble, porque un "doble" siempre es más grande que la mitad, mientras que una proporción puede ser más pequeña al ser duplicada (si es una proporción de menor desigualdad) o permanecer del mismo tamaño (si es una proporción de igualdad).

A finales del siglo XVI, en lugar de escribir obras sobre las proporciones de las velocidades en movimientos como tal, los matemáticos escribieron en contra de la interpretación de la composición de proporciones que Bradwardine hizo en su trabajo. En los siglos XVI y XVII, de hecho, una decisión fue tomada a favor de una segunda alternativa, el enfoque Teonico de la composición de proporciones, que quita los fundamentos matemáticos de la teoría de Bradwardine. La teoría fue, por lo tanto, destinada a desaparecer junto con la formación *De proportionibus de la sophistarum Libelli*, cualquiera que sea el descubrimiento de la ley de la inercia o de otros desarrollos en la física que derrocaron las correlaciones aristotélicas sobre las velocidades y las potencias que las causaron y las resistieron. Para entender el origen y el destino de la ley de Bradwardine, por lo tanto, es importante ubicarla dentro de la historia de las matemáticas y de la física.

LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS DE LA COMPOSICIÓN DE PROPORCIONES ANTES DE BRADWARDINE

Bradwardine no inventó su enfoque sobre la composición de proporciones, pero la seleccionó entre tradiciones previas existentes. En los últimos años se ha hecho un trabajo muy importante en la historia de los cambios en las matemáticas sobre razones y proporciones antes de Eudoxo. Como un sitio arqueológico, el suelo de los elementos de Euclides ha sido tamizado para detectar restos establecidos en periodos históricos. Según una narrativa, los matemáticos griegos tenían una matemática de las proporciones basada en números enteros.

Una vez los matemáticos quedaron convencidos que algunas magnitudes son inconmensurables, se desarrolló una teoría de las proporciones que funcionaría para todas magnitudes, ya sean racionales o irracionales, conmensurables o inconmensurables.

El ejemplo más conocido de tal teoría es de Eudoxo, que se cree se encuentra en el libro V de los elementos, pero otro ejemplo posible es la extensión del enfoque de atipairesis, casos en los que las sustracciones repetidas de una magnitud sobre otra nunca termina. En la versión de los elementos en griego actualmente conocida, editada por Theon de Alejandría en el siglo IV D. C, aparecen incoherencias, incluyendo definiciones y teoremas, que parecen no encajar con el resto del libro. Pedazos de una teoría de relaciones y proporciones que solo funciona para los números se encuentran en partes de la obra (en particular libros V y VI) que se suponen que se aplican a magnitudes geométricas (magnitudes en general, así como números en el libro V y para magnitudes geométricas solamente en el libro VI). En particular, la definición 5 del Libro VI asume que la cantidad de una razón o proporción puede ser expresada como un número entero o al menos como lo que llamaríamos una fracción o número racional, considerando que el libro VI es generalmente aceptado para aplicar la teoría general de relaciones o proporciones desarrollada en el libro V a magnitudes geométricas, incluyendo aquellas que son irracionales.

Ya en el siglo XVIII, Robert Simpson realizó un argumento convincente de que la definición de composición de razones o proporciones en los elementos, libro VI definición 5, no era auténtica, lo que se atribuye a Teón, la llamó "absurda y anti geométrica". Esta definición infame 5 del Libro VI (no aparece en la página de los elementos), interpolada en versiones "Teonicas" de los elementos de Euclides, tan despreciadas por Robert Simpson, de acuerdo a una traducción de Heath es:

> *Una razón se llama compuesta de razones cuando los tamaños de las razones multiplicadas entre sí hacen alguna (razón o tamaño).*

Esta definición estuvo presente en muchos manuscritos de los elementos, y su presencia da forma muchos pensamientos posteriores sobre la composición de proporciones, usualmente con el latín "denominatio" tomando el lugar de "Tamaño" según Heath – o, en algunos casos con la palabra "cantidad", o (en el caso de John Wallis) "exponente", traducción del griego "$\pi\mu\gamma ikons$" (los símbolos están mal escritos).

Básicamente, en términos modernos, la "denominación" de una proporción es simplemente el número o la fracción que expresa su cantidad. La denominación de la proporción de 2 a 1 es 2. La denominación de la proporción de 3 a 2 es 1½. En el entendimiento del enfoque Teonico, las proporciones se componen cuando se multiplican sus denominaciones, o si hay algún problema, se pueden multiplicar los numeradores juntos para formar el numerador de la denominación de la proporción compuesta y multiplicar los denominadores juntos para formar el denominador de la denominación.

Mientras que las traducciones de los elementos desde el griego a otros idiomas incluyen en su mayoría la definición 5 del libro VI, una de las dos traducciones árabes principales, la de “H. ajj ¯ aj”, no incluyó dicha definición. La traducción del árabe al latín de los elementos perteneciente a la familia "Adelard", incluyendo la versión muy popular de Campanus, están principalmente basada en la familia de manuscritos arabes "H. ajj ¯ aj" y además omite la definición, aunque la traducción al latín de Gerard de Cremona, basado en la traducción árabe "Ish. abit ¯AQ-Th¯, la incluye como una adición hecha por Th¯ abit. Como se indicó anteriormente, algunos estudiosos han argumentado que la versión griega de los elementos utilizada por los traductores de árabes contiene un texto anterior y por lo tanto es mejor que la versión de Teón. Edith Sylla cree que la versión de los elementos sin la definición 5 del libro VI representa mejor el enfoque de Eudoxo sobre la composición de razones o proporciones la cual se aplica a todas las magnitudes continuas y no sólo a aquellas que pueden representarse como números, tal como los griegos las habían comprendido.

Por el siglo XIV en Europa, muchas versiones de los elementos de Euclides estaban disponibles en latín, algunas incluyendo y otras sin incluir la definición 5 del libro VI. En su *De proportionibus velocitatum en motibus*, sin embargo, Thomas Bradwardine trabajó enteramente con de la versión de Campanus de los elementos, la versión sin la definición 5 del libro VI. Trabajar dentro de esta tradición le permitió poder establecer una comprensión de la composición de razones o proporciones que evita la aritmetización involucrada en esa definición, y por tanto su regla sobre las relaciones de proporciones de fuerza resistencia y velocidad parece sumamente natural y simple. Así Bradwardine estableció los fundamentos matemáticos para su teoría de las proporciones de las velocidades de movimientos en un enfoque "pre-Theonico" de Euclides sin la definición falsa 5 del libro VI. ¿Bradwardine tomó simplemente la tradición de la composición con la que estaba familiarizado para establecer las bases de su teoría de las proporciones de las velocidades y movimientos? Aunque la edición de Euclides que utiliza Bradwardine era de Campanus, que no incluyó la definición falsa 5 del libro VI, es difícil creer que Bradwardine nunca haya tenido contacto con algún trabajo matemático derivado. La sensación de Edith Sylla es que Bradwardine puede haber evitado mencionar la composición de proporciones multiplicando sus denominaciones con propósitos estratégicos. En *Geometria speculativa* de Bradwardine hay una definición análoga a la estipulada en el libro VI, definición 5, pero el término latino "denominatio", correspondiente a la palabra griega "´ $\pi\mu\gamma ikons$ ", traducido "tamaño" en la definición falsa, es definida. Sin embargo, en lugar de composición por multiplicación de denominaciones, Bradwardine tiene esta conclusión:

> *La razón de los extremos está compuesta por las razones de los medios.*

Bradwardine explica esta conclusión de esta manera:

> *Digo que se la razón de A a C está compuesta de la razón de los medios tomados entre A y C. Para que B sea un término medio entre A y C, según la proporcionalidad continua y razones no similares y desiguales. Se establece que A es a C como B a C y tanto como A excede B. Por lo tanto A excede C según la relación de los dos excesos recibidos. Por lo tanto ese exceso contiene los otros dos excesos, por lo cual. . . la razón contiene las razones, y yo llamo a esto una razón compuesta de razones. También es similar si hay varios medios, entonces la razón de los extremos se compone de las razones de los medios entre ellos mismos y a los extremos. Y se*

manifiestan que cada razón puede resolverse en las razones de muchas maneras. Un ejemplo sobre la razón doble, puede resolverse en dos razones similares, y son irracionales. También puede resolverse en dos racionales pero sin ser razones; por ejemplo, sesquiáltero y sesquitercio para 4 supera 2, es decir, según el sesquialtero, que es de 3 a 2 y según sesquitercio que es de 4 a 3. Pero si usted toma el doble según 6 y 3, usted encontrará más medios y más razones y por lo tanto siempre ascenderá a un número mayor.

Si la composición de razones se realiza usando medios y extremos, uno podría empujar a un lado o ignorar la definición interpolada de composición en términos de multiplicación.

Fuera de un contexto académico, en obras de aritmética comercial, la multiplicación fue utilizada a menudo para resolver problemas que involucran proporciones. En obras con títulos como *Liber abaci*, el estudiante fue enseñado a manejar proporciones usando la regla de tres, pero también para calcular cantidades absolutas. Esto es comprensible, porque en la compra y venta es necesario saber el precio que se pagará en términos de dinero y no sólo un artículo vale dos veces más que otro. En esta tradición aplicada, uno podría en efecto componer proporciones multiplicando sus "tamaños" o denominaciones", en consonancia con la definición mencionada, número 5 del libro VI. Si, por ejemplo, uno desea componer 5:6 con 3:4 uno simplemente multiplica las fracciones 5:6 y 3:4 para obtener 15:24, o en términos simplificados 5:8. En esta segunda tradición, la composición podría llegar a entenderse como *multiplicación*, y entonces el doble de la proporción 3:1 puede ser entendido a ser 2 veces 3:/1 o 6:1, en lugar de 9:1 como en la primera tradición.

Por otra parte, en diversas traducciones latinas de Euclides y en otros trabajos relacionados, este enfoque alternativo fue arrastrado por ciertos trabajos teóricos. En la traducción de los elementos de Euclides que Busard y Folkerts llaman la traducción de "Robert de Chester (?), también llamada la versión de “Adelard II”, la definición 5 del libro VI no aparece, pero en la prueba de la Proposición VI. 24 (correspondiente a VI. 23 en Heiberg), la versión latina de "Robert de Chester" de los elementos utiliza las palabras "producitur", "ex ductu" y "multiplices" donde uno normalmente espera "componitur" (es compuesto).

Anteriormente sugerí que el concepto de enfoque (pre-Teonico) de la composición de proporciones podría verse en la prueba de una proposición (sobre los paralelogramos). En la versión de "Robert de Chester", a pesar de tener la estrategia de selección de las líneas K, L y M en la proporción determinada, la regla que demuestra la conclusión es:

> *De todas las tres cantidades, la proporción de la primera a la tercera surge del producto de la proporción de la primera a la segunda por (multiplicación, en inglés times) la proporción de la segunda a la tercera. Por ejemplo, consideremos los números 1, 2 y 3. ¿Cuánto es 1 de 2? La mitad. ¿Cuánto es 2 de 3? Dos de tres partes, que, si multiplicas por un medio, una tercera parte necesariamente emerge, es decir la proporción que 1 tiene sobre 3. Y del libro VI, Proposición 1 y de libro V, Proposición 11, del libro V, Proposición 22, derivan su resultado.*

Así, en esta versión K:M equivale a K:L multiplicado por L:M, aunque no se ha definido la operación de multiplicar las proporciones. Las tres proposiciones citadas en la justificación son: en la traducción de Heath:

> VI. 1. Triángulos y paralelogramos que están bajo la misma altura son entre sí como sus bases.
>
> V. 11. Razones que son iguales con la misma razón, son también las mismas con la otra.
>
> V. 22. Si hay cualquier número de magnitudes sea cual sea, y otros iguales en cantidad, que tomados de dos en dos tienen la misma razón, tendrán entonces la misma razón *ex aequali.*

Así se podría decir que en la versión de "Robert de Chester" de Euclides, los dos enfoques para composición de proporciones coexistan de manera algo incoherente, en el sentido que se dice que las proporciones se multiplican, pero la justificación es el teorema ex aequali, que no hace mención de la multiplicación.

De hecho, en la traducción de Campanus de Euclides, publicada por Ratdolt en 1482, el final de VI. 24 dice:

> *…y porque f a h es producido a partir de f a g y g a h, como se ha dicho al final de la exposición del libro V, definición 11, se concluye que ac a de es producido del mismo modo; donde la proporción continua.*

De manera que Campanus, como "Robert de Chester", parecen entender la composición en el mismo sentido de que tomar un producto, y toma por referencia el libro V, definición 11. En su exposición del libro V, definición 11, que establece que si hay cuatro cantidades proporcionales, la proporción de la primera a la cuarta es la proporción de la primera a la segunda (triplicata), Campanus había hecho uso del concepto de denominación y había comentado que no pueden haber más de cuatro términos en una proporcionalidad porque hay sólo tres dimensiones. En su comentario sobre la definición 10, que dice que si hay tres cantidades proporcionales, la proporción de la primera a la tercera es la proporción de la primera a la segunda (duplicata), Campanus por su parte había explicado duplicata como significando multiplicado por sí mismo (*hoc est en se multiplicata*).

En la versión de Euclides traducida por Gerard de Cremona, hay varias características muy interesantes. En el libro V, en las definiciones 10 y 11, duplicata y triplicata se explican con la frase "cum iteratione". Después de la definición 18 sobre la relación de ex aequali, o en equalitas de términos de Gerard, hay una interpolación indicando que “Thabit Ibn Qurra” informa otra interpretación. Entonces en el libro VI, después de la definición 2, hay otra interpolación sobre la "agregación" de proporciones por multiplicación y su separación (?) por división. Así que aquí, en la traducción de Gerard desde el árabe, el enfoque alternativo para la composición por multiplicación aparece como algo encontrado por “Thabit” en otro manuscrito. Luego en el libro VI, la Proposición 23, donde se utiliza la composición, se utiliza la palabra aparentemente inadecuada "duplicata", donde otras traducciones han usado la palabra "multiplicata". Aunque me falta espacio aquí para ir a través de otras versiones de Euclídes disponibles antes de Bradwardine, vale la pena ver brevemente De *elementis arithmetice artis* de Jordanus de Nemores`s, una obra que también es utilizada por Bradwardine:

El libro V de *De elementis arithmetice artis* comienza con las definiciones:

Se dice que cada proporción añade algo sobre otra proporción, la cual, continúa con la primera, componen algo.

Esa proporción se llama la diferencia de una proporción con respecto a otra, que es aquella que supera a la otra.

Así que aquí tenemos otra palabra que se usa en relación con la “composición” llamada “continuata” o "continua". Esto suena muy familiar a la tradición pre-Teonica de la composición de proporciones.

La primera proposición de Jordanus, libro V sigue en este sentido, habla de lo que una proporción agrega sobre otra, pero de una manera bastante enigmática, diciendo que lo que la proporción A:B agrega más allá de la proporción C:D es la proporción AD:BC o

A:B=C:D + AD:BC, en este sentido de addition ¿Qué es lo que está sucediendo aquí? ¿Por qué es esto cierto? De una manera que debe ser familiar para nosotros, Jordanus define tres nuevos términos, E, F, G, donde es obvio desde la inspección que se la proporción E:G está compuesta de las proporciones E:F y F:G. él postula, por definición, que E = DA, que F = BC y que G = DB. Luego F:G = C:D, por la regla de que si el antecedente y el consecuente de una proporción se multiplican por la misma cantidad (en este caso B), la proporción sigue sin cambiar. Por la misma razón E:G = A:B (en este caso el múltiplo común es D). E es mayor que F por la proposición II. 9. Puesto que la proporción A:B es mayor que la proporción C:D (por la asunción que la proposición A:B agrega algo a C:D), se deduce que E es mayor que F. Así, ya que la proporción de E:G se compone de la proporción de E:F y de la proporción F:G, sigue *ex aequali* que la proporción A:B se compone de la proporción DA:BC y BC:DB, o, reduciendo la última proporción, de la proporción DA:BC y de C:D Q. E. D.

Si Jordanus había pensado la "adición" de proporciones simplemente como la multiplicación de sus denominaciones, el podría simplemente haber inspeccionado las proporciones A:B y C:D y razonado que lo que se debe multiplicar por C:D para producir A:Bb debe ser AD:BC. En su lugar él define los nuevos términos E, F, G, donde la composición de proporciones continuas es por inspección obviamente, y muestra que principalmente trabaja en la tradición de pre-Teonica.

Otra parte importante del contexto de Bradwardine es la obra *Quadripartitum* de Richard de Wallingford, escrito antes de 1335 y muy sobre la hora de *De proportionibus* de Bradwardine, una obra que continúa esta extraña convivencia de dos enfoques sobre la composición. Comienza la segunda parte de *Quadripartitum*, con definiciones que parecen volver a obras anteriores, posiblemente árabes, De proportionibus, al tener una conexión con la definición interpolada 5 del libro VI, relacionada con la denominación o el tamaño de una proporción:

1. *Una razón es una relación mutua entre dos cantidades del mismo tipo.*
2. *Cuando una de las dos cantidades del mismo tipo divide a la otra, lo que resulta de la división se llama la denominación de la razón del dividendo al divisor.*
3. *Una razón [se dice que es] está compuesta de razones cuando el producto de las denominaciones da lugar a alguna denominación.*

4. Una relación [se dice que es] es dividida por una razón cuando el cociente de las denominaciones da lugar a alguna denominación.

La mayoría de estas definiciones provienen de trabajos anteriores, donde se encuentra entre las definiciones o suposiciones algo muy como el infame libro VI, definición 5 de Euclides. El propósito de estas obras es demostrar el teorema de Menelao o el teorema transversal, siguiendo el precedente de Ametus Filius Josephi y Thabit Ibn Qurra. Un trabajo similar se atribuye también al-Kindi, donde se dice que se refieren al sector de la figure (¿), como explica John norte, lo que está en cuestión es mostrar las 18 formas aceptables de permutación de los términos en la relación:

$$1 = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$$

Si esto se entiende como equivalente a la multiplicación de fracciones y si las reglas de tales operaciones y conmutatividad se aceptan como se conoce, entonces todo el procedimiento parece trivial y el punto de derivar las 17 otras expresiones de la primera es innecesario. Se desprende de esta consideración que el Teorema se aplica a la composición de proporciones, entendidas como algo diferente de fracciones, y que las denominaciones de proporciones se utilizan sólo a modo de prueba. Básicamente lo que se hace es (a) r de proporciones a simples números; (b) multiplicar los números; y (c) tomar las proporciones de los productos resultantes.

Así comienzan los teoremas que son consecuencia de las definiciones de Richard de Wallingford mencionadas:

> *II.1. Si la denominación de una razón de cualquier extremo es multiplicada por el otro extremo [el segundo], se obtiene el extremo.*

Ya que la denominación se produce dividiendo el numerador o antecedente por el consecuente o denominador, está claro que multiplicando la denominación por el consecuente se producirá el antecedente otra vez.

El segundo teorema es:

> *Supongamos que haya dos extremos (a cada uno de los cuales el medio es una razón) Entonces la razón de la primera a la tercera se compone de [las razones de] la primera a la segunda y la segunda a la tercera.*

En la teoría pre-Teonica de proporciones este teorema es evidente (Euclides lo utilizó en VI. 23 sin explicación), pero Richard y las fuentes en que se basa su trabajo, toman sus propias bases para demostrar el Teorema, primeramente para tres magnitudes homogéneas A, B, C. Sea (la denominación) de A:B = D, sea B:C = E y A:C = F. Entonces por II. 1, E·C = B; D·B = A; y F ·C = A. Entonces F:E: : A: B (porque A:B = FC:EC = F:E) y puesto que D es la denominación de A:B también es la denominación de F:E. pero ya que D es la denominación de F:E, entonces D·E = F. Pero esta última expresión indica que la denominación de A:C es el producto de la denominación de A:B por la denominación de B:C, por tanto, por la tercera definición la proporción A:C se compone de la proporción de A:B y de la proporción de B.C. Por lo tanto, convirtiendo a las denominaciones, multiplicando, y volviendo a las proporciones, se demuestra la regla para componer dos proporciones continuas sin multiplicar proporciones como tal. Sobre esta base Richard puede derivar los modos aceptables de la composición de un modo original.

> *II. 5. Cuando, de seis cantidades, la relación de la primera a la segunda está compuesta de las razones de la tercera a la cuarta y de la quinta a la*

> *sexta, hay 360 maneras de composición, de las cuales 36 son de utilidad, pero las 324 restantes son de ninguna utilidad.*

Aquí, por "ninguna utilidad" según Richard debe interpretarse que no sigue de la primera relación. He pasado por obras medievales para saber que tienen que decir en la composición de proporciones para mostrar cómo la tradición teórica euclidiana pre-Teonica y una segunda tradición Teonica se relacionan con la cuestionable definición 5 del libro VI, y convivieron entremezcladas antes de *De proportionibus* de Bradwardine en 1328. Parece pues que la exclusión que hizo Bradwardine de la composición del enfoque Teonico de proporciones mediante la multiplicación de denominaciones fue una estrategia consciente en la obra *On the ratios of velocities in motions* y no algo accidental.

LA INTRODUCCIÓN DE LA TEORÍA DE BRADWARDINE SOBRE LAS PROPORCIONES DE LOS MOVIMIENTOS

Incluso si Bradwardine estaba o no familiarizado con el método de composición de proporciones multiplicando sus denominaciones, eligió no mencionar e ignorar cualquier implicación que podría tener para la naturaleza de la composición en su obra *De proportionibus.*

Confiando solamente en el enfoque de pre-Teonico sobre las composiciones, el resta una proporción de otra encontrando un medio entre los extremos y luego agrega proporciones para buscar tres términos A, B, C, tales que la primera proporción es la misma que A:B y la segunda igual a B:C. De hecho, las matemáticas de las proporciones encontradas en los elementos de Euclides, libros V y VI, proporcionaron una herramienta confeccionada para elevar significativamente el nivel de las matemáticas aplicadas al movimiento terrenal. Lo que Bradwardine tuvo que hacer en *De proportionibus* debía convencer a sus lectores de las ganancias que se tenía de seguir constantemente el enfoque teórico pre-Teonico. Una ventaja es que su regla dio al parecer una medida de velocidad *como con la causa* en un instante. En el contexto medieval, la velocidad no podría ser medida fácilmente por la proporción de la distancia recorrida a el tiempo transcurrido, para los autores medievales no había ninguna proporción de distancia a tiempo, porque proporciones existen sólo entre cantidades homogéneas, mientras que la distancia es bastante diferente del tiempo. Esto significaba que debían mantener la distancia o tiempo fijo: ellos dirían que las velocidades (constantes) son proporcionales a las distancias recorridas en el mismo tiempo, o que las velocidades son inversamente proporcionales al tiempo necesario para recorrer una distancia determinada.

Bradwardine, en cambio, propone medir la velocidad instantánea (*como con la causa*) por la proporción de la fuerza que actúa sobre la resistencia, algo que era posible porque tomó fuerza y resistencia como cantidades homogéneas (en caída natural, por ejemplo, la gravedad de la tierra en un cuerpo mixto podría ser la fuerza que causa el movimiento, mientras que la levedad de aire en el cuerpo podría ser la resistencia). De manera semejante, la ley de Bradwardine podría para ser útil en un contexto teórico.

En filosofía natural o mecánica escolar esta limitación a la tradición pre-teonica de la composición de proporciones fácilmente podría parecer teóricamente justificada. Por un lado, la tradición pre-Teonca de la composición de proporciones se aplica a todas las magnitudes, conmensurables o inconmensurables, considerando que la definición interpolada 5 del libro VI de los elementos asume que cada relación tiene un tamaño o una denominación expresable en números o fracciones. Puesto que en la mecánica de las cantidades podrían no tener ninguna medida común, sería correcto no a asumir que la multiplicación por denominaciones fuese siempre posible. Por lo tanto, evitar el uso de definición 5 del libro VI tenía sentido.

El enfoque exclusivamente pre-Teonico de Bradwardine también tenía, para bien o para mal, consecuencias adicionales. En consecuencia, por ejemplo, no hay comparación entre proporciones de mayor desigualdad, proporciones de igualdad y proporciones de menor desigualdad. Como la abreviación del trabajo de Bradwardine:

> *No hay ninguna proporción mayor o menor que una proporción de igualdad porque [una] proporción de igualdad es ni más ni menos que la proporción [otra] igualdad, todas las proporciones de igualdad son iguales y por lo tanto ninguna es superior a otra. Tampoco hay una proporción de desigualdad mayor que una proporción de igualdad, porque si es así, entonces una proporción de igualdad podría incrementarse hasta ser igual a la primera (es decir, a una proporción de mayor desigualdad). El consecuente es falso, porque sin embargo por mucho que se aumente una proporción de*

igualdad, seguirá siendo siempre una proporción de igualdad. En consecuencia, será ni más ni menos que ahora.

Algunos eruditos pueden mostrar resistencia a esta afirmación, por un sentimiento de sentido común, una proporción, por ejemplo, de 2:1 es más grande que una proporción de 1:1. Si los estudiantes debían aprender a utilizar la función de Bradwardine, debían, en primer lugar, impartir sus presuposiciones matemáticas en la medida en que los estudiantes no estaban familiarizados. Tuvieron que desarrollar el hábito de componer proporciones para encontrar una serie de términos crecientes o decrecientes, de tal manera que la proporción de los extremos se entendería naturalmente como una proporción mayor que las proporciones entre los términos intermedios. El beneficio es que si la proporción F:R se entiende de esta manera, entonces decir que las velocidades son proporcionales a las proporciones F:R no más complicado que decir que las velocidades son proporcionales a las distancias recorridas en un tiempo determinado: cuando una se duplica, entonces la otra se duplica; Cuando una es triplicada entonces la otra se triplica; Cuando una es dividida en dos la otra es reducida a la mitad y así sucesivamente en ambos casos.

John Dumbleton expresa así la regla de Bradwardine:

La tercera opinión de Aristóteles y el comendador, que se llevará a cabo, es que el movimiento sigue una proporción geométrica y se incrementa o disminuye teniendo en cuenta que la proporción es mayor o menor en comparación con la anterior. Así un movimiento excede a otro de acuerdo a como una proporción está relacionada con otra proporción cuando se producen los movimientos desiguales por esas proporciones.

Un poco más tarde, Dumbleton explicó además:

El movimiento sigue una proporción y lo primero es explicar usando ejemplos de tal forma que quienes no son expertos en geometría puedan acercarse a la verdad a través de ejemplos simples y perceptibles y puedan ver su causa. . .La cuarta suposición [es] que la latitud de la proporción y el movimiento son igualmente adquirido y perdido entre sí [ínter se]. Como si un espacio fuera uniformemente adquirido en un día, una gran parte del movimiento es requerido, a partir del espacio precisamente adquirido y *tanto tiempo transcurrido. De la misma manera, si la latitud de proporción es adquirida por un movimiento uniforme de intensión, precisamente como gran parte de la latitud de la proporción será adquirida (que es por así decirlo el espacio del movimiento de intensión), como de la latitud del movimiento le corresponde.*

Cuanto se refiere a física, algunos podrían argumentar contra la regla de Bradwardine que doble una fuerza debe causar doble velocidad y no una doble proporción de fuerza a la resistencia. De manera que Dumbleton respondió a la discusión que 6 debería producir dos veces como mucho en un cuerpo actuado como 3:

> A continuación para resolver el argumento que es la base de la posición contraria, cuando se supone que 3 actúa sobre un cuerpo que tiene un valor de 2 y otro con valor de 3 luego actúa sobre la misma resistencia 2 igualmente; y que se deduce que los dos agentes que actúan en conjunto producirán dos veces tanto como uno produce por sí mismo, puesto que ningún agente se lo impide al otro. Por lo tanto, si los 3 primeros produce una unidad de la latitud de alguna cualidad en 2, sigue que 6 producirá dos veces tanto como 3 produjo previamente. ambién 3 produce un cierto movimiento local. Sea A movimiento y ese movimiento en medio de B igual a 2. Se deduce que 6 produce dos veces el movimiento que es el movimiento A, ya que ninguno se lo impide al otro.
>
> [Respuesta:] Para estos y similares argumentos se debe suponer en cada acción la acción total es la acción del agente total y de cualquiera de sus partes con respecto a esa acción.

Así, el argumento que agregar físicamente dos fuerzas que no se impiden mutuamente deben añadir sus efectos fue contrarrestado por el argumento de que un agente actúa como un todo y no como la suma de sus partes. Podría tenerse en cuenta que Dumbleton no propuso probar experimentalmente que teoría se ajuste mejor a su observación.

Así la regla de Bradwardine para la relación de fuerzas, resistencias y velocidades rápidamente fue aceptada porque era elegante y correspondiente con los hechos conocidos de movimiento local mucho mejor que el punto de vista estándar aristotélico, pero, además, *De proportionibus* probablemente se hizo parte del plan de estudios en varias universidades porque proporcionó a los estudiantes un útil instrumento de análisis que podrían utilizar en una amplia gama de temas. Las matemáticas De proportionibus proporcionaron soluciones a las clases de rompecabezas que se presentaron en la práctica de discusiones de la Universidad – soluciones que eran impresionantes y ayudaron a ganar argumentos. Desde que los típicos estudiantes o profesores en las universidades medievales finales no esperaban realmente para medir cualquier cosa o resolver problemas prácticos usando sus disciplinas, eran libres para estudiar *De proportionibus velocitatum in motibus* por sí mismos o para desarrollar habilidades de pensamiento crítico. La sub-disciplina medieval *De proportionibus velocitatum in motibus*, según lo representa, por ejemplo, Richard Swineshead *Liber calculationum*, típicamente aborda problemas espinosos que la aplicación del enfoque Bradwardinine resolvieron, en lugar de la adecuación empírica de los resultados. Hacer frente a estos problemas podría conducir a avances matemáticos, por ejemplo avances en métodos de suma de series infinitas, mientras que pensaban experimentos tales como ¿qué pasaría si un objeto pesado se lanzaron a través de un túnel cavado a través del centro de la tierra, conforme lo discutido por Swineshead in el Tratado XI de *Liber calculationum.*

LA RECEPCIÓN DE LA OBRA DE BRADWARDINE *DE PROPORTIONIBUS VELOCITATUM IN MOTIBUS*

Si no fue accidental pero estratégico para desarrollar el enfoque clásico pre-Teonico sobre las proporciones, al suprimir el enfoque Teonico sobre multiplicar denominaciones, sin embargo el acercamiento a la composición de proporciones que adoptó Bradwardine comenzaron a crear obras en las proporciones de las velocidades de los movimientos de una manera muy natural. De hecho, Elzbieta Jung ha argumentado que Richard Kilvington, en sus preguntas sobre la física de Aristóteles, tenía una "Función de Bradwardine" antes de *Proportionibus* de 1328. La base de su cronología es que Kilvington probablemente escribió sus preguntas sobre la física antes que sus preguntas sobre la ética, que cita el trabajo anterior, y que escribió dos de estas obras antes sus preguntas sobre las *oraciones*, que cita las preguntas sobre la ética y la física, y que resulta probablemente de una serie de conferencias sobre las oraciones en los años 1333 - 1334.

Agregando a la fecha probable de conferencias de Kilvington sobre las oraciones, los estatutos de Oxford sobre la longitud prescrita del estudio teológico (siete años) y la opinión de James Weisheipl que "no ha demostrado que muchos maestros, de haberlas estudiado, enseñaron Artes mientras estudiaba teología", Jung llega a la conclusión de que las lecturas sobre artes ocurrieron antes de 1327, es decir antes de la obra de Bradwardine *On the ratios of velocities in motions* de1328.

Como evidencia contra la opinión de Weisheipl es solamente necesario observar, sin embargo, que, como informa Jung, supone que Thomas Bradwardine pudo haber leído *las frases* en Oxford entre 1332–1333, mientras que sabemos que su obra *On the ratios* fue escrita en 1328, menos de siete años antes. Parece más razonable, por lo tanto, asumir que Bradwardine y Kilvington han estado trabajando en paralelo y que cada uno sabía el trabajo de los otros antes de completar las versiones editadas de su propia obra. De hecho, en los reportes de Jung aparece que Kilvington pueden haber rechazado la función de Bradwardine en sus preguntas en *De generatione*, realizadas antes de las preguntas de *Physics,* pero aceptado por el tiempo de Physics (¿). En sus preguntas *On generation and corruption,* Kilvington sostiene que en el caso de las magnitudes A, B, C, en proporción continua, la proporción de A C es de hecho *duplicata* a la proporción de A a B, pero no necesitan ser *dupla* o double. Esto ocurre porque las tres magnitudes pueden ser iguales, en cuyo caso la proporción de A a C es igual la proporción de A a B; o A puede ser la más pequeña de las magnitudes y C la más grande, en cuyo caso la proporción de A a C es menor que la de A a B y por lo tanto es doble. De hecho, en varios de sus argumentos, Kilvington parece tratar las proporciones como si fuera irrelevante hablar de la proporción de A a B o de B a A, como podría ser el caso con armonías musicales. También parece estar pensando en interacciones cualitativas en las que hay, por ejemplo, acciones simultáneas y reacciones entre el fuego y el agua.

Si las preguntas de Kilvington del *De generatione* resultaron ser demostradas antes de Bradwardine en *De proportionibus*, todavía se podría afirmar que, a pesar de que él sabe sobre composición de proporciones en la forma pre-Teonica, esto no prueba que el tenga la ley de Bradwardine, ya que las definiciones de Euclides de una proporción duplicada y triplicada habían existido mucho antes de Bradwardine. Es, sin embargo, imposible negar que, dentro de sus preguntas sobre la física, en la cuestión "Utrum en omni motu potentia motoris excedit potentiam rei mote", Kilvington rechaza la opinión de que las velocidades son proporcionales al exceso de la fuerza sobre la resistencia y sostiene la opinión de que las velocidades son proporcionales a la proporción de la fuerza de resistencia entendida en el sentido Bradwardiniano, representado, por ejemplo, en la afirmación de que la proporción de 9:1 es el doble de la proporción de 3:1. Si el trabajo se dio antes o después de 1328, es en todo caso significativo que Kilvington asuma sin discusión que las proporciones son compuestas en el sentido pre-Teonino o Bradwardiniano, y defienda una ley como las objeciones en contra de Bradwardine lo que significa que lo que Aristóteles dijo acerca de una fuerza doble que conduce a duplicar la velocidad y cosas por el estilo es falso a menos que el que reinterpreta el significado de su texto de acuerdo con la opinión de los "Bradwardinianos" (que, de hecho, Kilvington hace, diciendo que por "la mitad de los móviles", la parte del móvil que tiene la proporción necesaria para el motor, etc. Una vez que Jung ha publicado las obras completas de Kilvington debería ser posible establecer el orden de los trabajos de Kilvington y de Bradwardine más firmemente.66

De obras que son sin duda después de Bradwardine De proportionibus, la más distribuida fue Alberto de la Sajonia De proportionibus velocitatum en motibus, que fue usado como texto universitario en varias universidades y fue impreso en Padua en 1482 y 1484 y en Venecia en 1494. La obra de Albert es en un sentido algo así como una nueva y revisada edición de la obra de Bradwardine. Se propone la regla dinámica de Bradwardine sólo en los mismos términos que Bradwardine había defendido. En términos de Albert la norma de Bradwardine establece que la proporción de las velocidades en los movimientos depende de la proporción de las proporciones de las fuerzas de movimiento sobre sus resistencias. Esto es lo que suele ser dicho: que la proporción de las velocidades sigue una proporción geométrica.67 Cuando hay tres términos de proporcionalidad continua, Albert llama a la proporción de la primera a la tercera "dupla" la proporción de la primera a la segunda, más que "duplicada". En el caso de los cuatro términos de proporción constante él llama la proporción de la primera a la cuarta "tripla" la proporción de la primera a la segunda.68 Antes de probar los resultados a la regla de Bradwardine, Albert comienza con una suposición diciendo que cuando hay una serie de cantidades decrecientes de forma continua, la proporción de los extremos (teniendo la más grande a la más pequeña) está compuesta (o compuestos) de la proporción de los extremos a los medios y de los medios entre sí, si hay más de un medio.69 Se debe recordar que en las obras De proportionibus velocitatum en motibus tales como las de Albert, las reglas son asumidas normalmente para aplicar sólo cuando la proporción de los extremos es una de la desigualdad más grande, la cual encaja con el hecho de que, físicamente, el movimiento se produce sólo cuando la fuerza es mayor que la resistencia. Del mismo modo, se supone que los medios son más pequeños que el extremo más grande y mayor que el extremo menor, y para ser repetitivo decreciente de la fuerza más grande en un extremo a la menor resistencia en el otro. Algunos autores se quejaron acerca de la definición de Composita si se aplicó a proporciones de menor desigualdad, de modo que la proporción de los extremos sería menor que la proporción de los medios.70 En el enfoque Bradwardiniano, sin embargo, se da por sentado que se está tratando con proporciones de mayor desigualdad y con términos medios que son menos que el extremo más grande y más que el más pequeño.

Nicole Oresme *De proportionibus proportionum* extiende el enfoque Bradwardinian porque su objetivo principal es el de refutar la practicidad de la astrología, mostrando que los movimientos planetarios son muy probablemente inconmensurables entre sí. Su interés, por lo tanto, es comparar una proporción a otro para ver la frecuencia relativa de los casos en los que hay una proporción racional de uno a otro como proporción en comparación con todas las posibles relaciones entre una y otra proporción. La estrategia de Oresme en De proportionibus proportionum sólo funciona porque asume la verdad de la regla de Bradwardine, porque, dada la regla de Bradwardine, las velocidades son inconmensurables si las proporciones de proporciones, en el sentido Bradwardinian especial, son irracionales. Por otra parte, sus definiciones de la inconmensurabilidad de proporciones sólo se aplican, si la proporción es, o las proporciones son, en la manera Bradwardiniana.

En comparación con Bradwardine de Albert y de las obras de Sajonia De proportionibus, el trabajo de Oresme tiene varias características notables más allá del hecho de que él se extiende la teoría que tienen en común para mostrar que las velocidades celestiales son probablemente inconmensurables. A diferencia de Albert, Oresme utiliza duplicado en lugar de una proporción dupla compuesta de dos partes iguales, y triplicata para una parte compuesta de tres partes iguales. 71 Por otra parte, Oresme habla de la composición de proporciones como "adición" y de la toma de distancia de una proporción de otros, como "sustrayendo":

> *Para substraer [subtrahere] una razón de otra es necesario asignar una media entre los términos de la razón más grande de tal manera que cuando la media está relacionada con el término más pequeño, o el término más grande está relacionado a la media, se forma una razón que es igual a la*

razón que debe substraerse. Para agregar [addere] una razón a otra, [primero] expresa una de ellas en términos [ponere in terminis] y luego busca un tercer término que se relacione con el mayor término como la razón que desea añadir, o encontrar un tercer término para el que el término más pequeño se relaciona como la razón que debe ser añadida.

De dos maneras, sin embargo, Oresme no sustenta la pretensión Bradwardiniana que sus matemáticas de proporciones es lo único. En primer lugar, él admite que hay otra forma de proporciones compuestas, es decir, multiplicando sus denominaciones como en la ambigua definición 5 del Libro VI de los Elementos de Euclides. Él llama a este enfoque "de arte":

No obstante, si usted desea agregar una razón de desigualdad más grande a otra por medio de algoritmos [per artem], es necesario multiplicar la denominación de una razón por la denominación de la otra. Y si desea restar una razón de otra, lo hará dividiendo la denominación de una razón por la denominación de la otra. El [método] de búsqueda de denominaciones se impartirá después. La multiplicación y la división de las denominaciones son hechas por algoritmo [per algorismum].

Así, el filosófico, por así decirlo, el método de composición implica restar y sumar, teniendo medios y extremos, mientras que al mismo tiempo hay un enfoque práctico o algorítmico calcular usando la división y la multiplicación de denominaciones. La decisión de Bradwardine de escribir como si no existiera este último enfoque no limitan a Oresme, aunque en el resto de su discusión él no utilizó el enfoque algorítmico.

La segunda divergencia de Oresme sobre Bradwardine implica tratar de ampliar el enfoque Bradwardiniano a composición de proporciones de las proporciones de mayor desigualdad a proporciones de menor desigualdad. Allí él enfrenta la dificultad de que si, por ejemplo, se tiene en cuenta las proporciones de menor desigualdad en la serie 1, 2, 4, entonces parece que la proporción de los extremos 1:4 se compone de las proporciones de 1:2 y 2:4, ambos de los cuales son más grandes que la proporción de los extremos. En consecuencia, Oresme intenta invertir los procedimientos utilizados para las proporciones de mayor desigualdad, por lo que uno aumentaría (en lugar de disminuir) una proporción de menor desigualdad mediante la inserción de una media entre su extremos.74 Los que se opusieron al enfoque Bradwardiniano a proporciones tan a menudo lo hicieron con el argumento de que no tiene sentido cuando se aplica a las proporciones de la igualdad o de menor desigualdad. Quizá habría sido más sabio para Oresme tratar proporciones de menor desigualdad como si fueran, en realidad, lo mismo que las proporciones de mayor desigualdad, como fue el caso de la armonía musical.

El mismo Oresme, al tratar de extender el enfoque Bradwardiniano, no está de acuerdo con la opinión intencionada de Bradwardine. Él afirma, por ejemplo, que la proporción de proporciones no es la misma que la proporción de sus denominaciones, excepto en el caso de las razones 4:1 y 2:1.75 Por otro lado, al intentar extender un enfoque Bradwardiniano a las razones de menor desigualdad, Oresme aumentó su vulnerabilidad a los ojos de los matemáticos posteriores.

En su De proportione proportionum et proportionalitate, publicado junto con las obras de Alberto de Sajonia, Themon Judeus y Juan Buridan en 1518, George Lokert ratificó una interpretación de la composición de proporciones como de Bradwardine. En cuanto a la proporción de proporciones, de acuerdo con Oresme, él escribe que la proporción de proporciones no siempre es la misma que la proporción de los números denominando las proporciones - de hecho, casi nunca sucede, excepto con la proporción de dos a uno.76 Para la cuestión de si cada parte es "proporcionable" para todos los demás, Lokert responde que solamente las proporciones del mismo tipo, como las proporciones de mayor desigualdad son proporcionables. Si una proporción se compone de dos proporciones iguales, es doble (dupla) cada uno de ellas, y si se está compuesta de tres proporciones iguales, es el triple (tripla) cada una de ellas. Así, uno puede conocer las proporciones de las proporciones.

Lokert no aplica sus matemáticas de proporciones de las proporciones a la dinámica, pero ha mantenido una concepción de la proporción de las proporciones como el que expone Bradwardine.

Todavía en 1528, en su De proportionibus libri duo, Jean Fernel defendió la matemática de la proporcionalidad que ha dado la base para el estudio en 1328 de Bradwardine en De proportionibus velocitatum in motibus 200 años antes. Aunque la obra de Fernel parece ser principalmente matemática, él la abrió con una declaración de la importancia de las proporciones para comparar velocidades, ya sea en los cielos o en la tierra, y otros efectos de los agentes naturales.78 Esbozando la obra de Euclides, Jordanus y Campanus, entre otros, Fernel hizo hincapié en que existen proporciones sólo entre cosas del mismo tipo, de modo que, por ejemplo, no hay ninguna razón entre una velocidad y un numero. Aunque las proporciones entre pesos o entre velocidades pueden estar denominadas por números o magnitudes, dijo, la proporción en sí pertenece a la categoría de la relación e implica por lo menos dos cosas diferentes respecto a otras.81 Una proporción, dijo (en referencia a Campanus y Bradwardine), es una cierta relación (habitudo), pero esto no significa que sea conocido o cognoscible - puede haber un número infinito de proporciones irracionales.

Fernel divide su trabajo en dos libros, el primero sobre las proporciones y el segundo sobre proporcionalidades. En el Libro I, define las diferentes especies de proporciones de una manera Boeciana estándar, incluyendo las proporciones de la igualdad y la desigualdad, múltiple, superparticular, superparciente, racional, irracional, y así sucesivamente. En el camino él se detiene para hacer frente a la comparación de fracciones vulgares, diciendo que su discusión no será completa si sólo se refiere a la proporción de números enteros - y el dibujo no presta atención a la naturaleza matemática de las fracciones en lugar de las proporciones.

En el libro II, sobre proporcionalidades, a continuación, abre con una declaración de la regla de Bradwardine que podría ser invisible para el lector no familiarizado con su significado:

> *La idoneidad de las proporcionalidades está en uso frecuente no sólo en los cálculos astronómicos o geométricos, sino también en las discusiones filosóficas, ya que no es posible concebir que un solo movimiento es más rápido o más lento que el otro sin él. Cuando se comparan las velocidades de los movimientos entre sí, que son como proporciones, para cada velocidad depende la proporción del agente a la resistencia, y la comparación de las velocidades no es otro que la comparación o relación de proporciones que llamaremos proporcionalidad. La proporcionalidad es por lo tanto una cierta relación de más de una proporción, una a la otra.*

Aquí podemos ver cuán natural e incluso oculta la regla Bradwardiniana de la dinámica podría ser cuando se suponía su comprensión de proporciones y su variación – los lectores modernos no podrían haber sabido que la regla Bradwardiniana estaba aquí en cuestión ellos no habían sido instruidos por Anneliese Maier, Marshall Clagett, y otros después de sus pasos.

En ninguna parte en el libro II Fernel apoya la regla de Bradwardine con argumentos físicos, sino que se esfuerza en refutar los autores Bassanus Politus y Volumnio Roldulphus, quienes habían rechazado la comprensión Bradwardiniana de la proporcionalidad en el sentido de las proporciones de las proporciones - un entendimiento que Fernel no atribuye a Bradwardine en particular, sino más bien a Euclides, Campanus, Jordano, y otros matemáticos distinguidos.

Para duplicar una proposición, él dice, que no se multiplica por dos, sino más bien se multiplica por sí mismo. Del mismo modo que triplicar una proporción se multiplica la proposición por sí misma tres veces, así que triplicar una proporción de 3 a 1 es la proporción de 27 a 1. En apoyo de este punto de vista, Fernel se refiere al comentario de Campanus sobre Euclides, Libro V, definición 11. Él también se refiere a esta comprensión de la multiplicación de las proporciones a su discusión previa de la adición de las proporciones, según la cual si la proporción de 3 a 1 se añade a la proporción de 3 a 1 el resultado es de 9 a 1, el cual es el doble de la proporción de 3 a 1. O, en referencia a Jordanus, De Elementis arithmetice artis, libro II, las definiciones, dice, uno puede decir que en cada proporción la proporción de los extremos se compone de la proporción de un extremo a uno de los términos medios, de las proporciones de estos términos medios entre sí a cada uno, si hay más de uno, y del último término medio al otro extremo.

Después de explicar la correcta comprensión de las proporciones de las proporciones, Fernel retorna a una refutación de la falsa opinión respecto a las proporcionalidades que habían sido propuestas por Bassanus Politus y Volumnio Rodulphus. Estos autores tratan proporciones como cantidades, por lo que las proporciones de las proporciones son las mismas que las proporciones de las cantidades – lo cual ellos no podrían haber hecho ni prestado atención a los Elementos de Euclides, Libro V. Al decir que las proporciones de las proporciones son las mismas que las proporciones de sus denominaciones, estos autores dicen erróneamente que la proporción óctuple es el doble de la cuádruple, y el séxtuple el doble de la triple. Casi ningún teorema de Euclides sobre proporciones y proporcionalidades es consistente con la teoría de la Bassanus Politus de acuerdo a Fernel. Él no habría creído necesario decir más para refutar la discusión tenida por Bassanus Politus en el De proportionum proportionibus de Volumnio Rodulphus, pronunciado en una sesión pública en Roma (publicado en 1516), el cual renovó los mismos errores, caído en sus manos después de haber terminado su libro.88 Fernel entiende que para agregar proporciones sus denominaciones pueden ser multiplicadas juntas (o más exactamente sus numeradores multiplicados para hacer el numerador del resultado y sus denominadores multiplicados para hacer el denominador) Si una proporción triple y una proporción cuádruple se "multiplica" en el sentido impropio que sus numeradores y denominadores son multiplicados, una proporción de 12 a 1 se traducirá, como Euclides, Jordanus y otros matemáticos célebres estarían de acuerdo, pero nunca llamarían a la proporción de 12 a 1 triple una proporción cuádruple, sino más bien decir que una proporción de 12 a 1 se compone (consititui; componitur) a partir de una triple y una quadruple.

En el resto de la discusión de Fernel, una de sus principales preocupaciones es que la visión falsa de las proporciones de las proporciones presentadas por Bassanus Politus y Volumnio Rodulphus conduce a resultados erróneos en cuanto a las proporciones de las proporciones en el sentido de esta falle para ver cuándo estas proporciones de las proporciones son irracionales (el conocimiento del cual había sido uno de los mayores logros de Nicole Oresme en su De proportionibus proportionum). Para mis propósitos aquí, lo importante es que al defender lo que él considera como el punto de vista de la composición de las proporciones en poder de Euclides, Jordanus y Campanus, Fernel estaba defendiendo implícitamente las bases de la regla de Bradwardine para las relaciones de las velocidades y las proporciones de fuerza a resistencia. Él no dijo nada acerca de lo que le sucede a las velocidades cuando las fuerzas o resistencias aumentan o disminuyen, pero cuando el campo de Fernel perdió la batalla sobre cómo las proporciones de las proporciones se ha de entender, como iba a suceder en el próximo siglo, los fundamentos matemáticos del enfoque Bradwardiniano a las proporciones de velocidades en movimientos serían socavados también.

AUTORES QUE RECHAZARON LA LEY DE BRADWARDINE

Finalmente, ¿qué hay de los autores que rechazaron la regla de Bradwardine? Uno de los primeros en hacerlo fue Blasius de Parma, que, en un comentario sobre *DE Proportionibus* de Bradwardine, al parecer rechazó la comprensión de la composición de proporciones y la regla. De hecho, hay dos versiones de las preguntas de Blasius, una primera versión que se encuentra en un manuscrito de Milán, que pudo haber escrita mientras Blasius estaba en París probablemente antes de 1382, y una versión posterior (recientemente publicada por Joel Biard y Sabine Rommevaux), agregando una larga pregunta undécima, escrita probablemente en relación con la enseñanza de Blasius entre 1389 y 1407 en distintas universidades en Italy. En adición a Bradwardine, Blasius critica Albert de Sajonia y Oresme sobre bases matemáticas .

Irónicamente, aunque Blasius es conocido por haber rechazado la ley de Bradwardine, parece asumir su verdad en muchas secciones de la obra. Al abordar la cuestión de la relación de fuerzas, resistencias, y velocidades en movimientos, Blasius concluye:

> *Tomando la velocidad de aceleración [es decir, velocidad], generalmente en cada movimiento la proporción de las velocidades depende de la proporción de las denominaciones de las potencias de movimiento a las resistencias.*

Esta conclusión está expresamente en contra de Bradwardine ya que se refiere a las denominaciones de las proporciones en lugar de las proporciones como tal. Antes, Blasius había rechazado expresamente el putno de vista celebrada de Bradwardine, Oresme y Albert de Sajonia:

> Ahora sigue otra posición sobre la proposición, una que los modernos sostienen comúnmente como verdad. Ponen a esta conclusión: la velocidad del movimiento sigue la proporción de la potencia a la resistencia , y la proporción de velocidades sigue la proporción de la proporción de las potencias a las resistencias. Esto debe ser comprendido como proporción geométrica y no de otra manera. Esta posición sobre todo parece ser del maestro en su tratado *De proportionibus*. . . Aunque comúnmente se sostiene esta posición, debe ser rechazada. . .

Las dos primeras razones que Blasius da para rechazar la posición de Bradwardine son físicas. En primer lugar, como un agente de alteración asimila otro cuerpo, la resistencia del otro cuerpo se convierte cada vez menor, para que la proporción del agente a la resistencia llegaría a ser infinita y una latitud infinita ser inducida. Y si algo como esto sucede, un agente finito produciría un efecto infinito. Este es el último argumento de Blasius que sin embargo, es sorprendente:

> *Por último, en una cuestión en la que se le preguntó si dado cualquier dos extremos y un medio interpuesto, la proporción del primero al último se compone de la proporción de la primera a la segunda, etc. , se dijo y se concluyó que la proporción de 9 a 1 es precisamente el doble a un cuádruple con medio (dupla ad quadruplam cum dimidio). Pero la velocidad que surge de la proporción de 9 a 1 no es precisamente el doble de la velocidad que surge de una proporción de un cuádruple y medio (una cuádruple proportione cum dimidio). Por lo tanto la velocidad no es como la proporción de proporciones. El antecedente se establece debido a la velocidad que surge de una proporción (nonecupla) (ninefold) es precisamente el doble es la velocidad que surge de una proporción triple, por lo tanto, etc.*

Por lo tanto, en esta supuesta refutación de punto de vista de Bradwardine, Blasius rechaza su opinión sobre que es una media proporción de 9 a 1, pero no su punto de vista que una proporción de 9 a 1 producirá el doble de la velocidad que se produce por una proporción de 3 a 1.

En la siguiente pregunta, además, Blasius abandona la posición que acaba de tomar y asume como verdad de la teoría de Bradwardine, sobre la base que esa teoría es comúnmente aceptada y también sus estudiantes quieren asumirla en sus argumentos. De hecho, en la mayor parte de su comentario, él sigue aprobando la opinión de Bradwardine en lugar de rechazarla. Solamente en una sección extendida se desarrolla una visión alternativa, según la cual el producto de proporciones debe ser entendido diferentemente de la composición de proporciones. Cualquier proporción de mayor o menor desigualdad puede multiplicarse entre sí para producir un producto, concluye. Solamente las proporciones de mayor desigualdad, Monótonamente decreciente de un extremo a otro pueden ser compuestas juntas de tal manera que el todo siempre es mayor que las partes.

Pero ¿Que está sucediendo aquí? ¿Blasius entendido el putno de vista de Bradwardine? En su sexta pregunta, de hecho, Blasius da una descripción clara de la visión de Bradwardine sobre la composición de proporciones bajo el título de un punto de vista para ser rechazado. Como la verdad, presenta la opinión de que si hay un número de medios entre dos extremos, la proporción de los extremos es *producida*, pero no necesariamente compuesta, de las proporciones entre los extremos y los medios. En defensa de sus conclusiones, hace uso de denominaciones y sus multiplicaciones. Dice que componer una proporción con el otra es multiplicar sus denominaciones juntas, algo que suena como a la falsa definición 5, libro VI, de los elementos de Euclides, pero que él atribuye a Euclides, libros V y VII y al autor de *De proportione et proportionalitate*. La razón de por qué la proporción de los extremos no siempre se compone de las proporciones entre los medios es que la proporción de los extremos puede ser menor que algunas de las proporciones entre los medios. Aunque para producir y para componer son con frecuencia los mismos, no son siempre así. Y es aqui donde Blasius dice que Oresme, Bradwardine y Albert de Sajonia erran en su trabajo sobre las proporciones. Al final de la pregunta 6, Blasius repite que la ley de Bradwardine debe ser rechazada por esta razón matemática:

> *La última conclusión, irrelevante para nuestro trabajo aquí (impertinens facto nostro): la proporción de las velocidades en movimientos no sigue la proporción de las proporciones de las potencias a sus resistencias. Queda demostrado: la velocidad de una proporción de 9 a 1 es doble de la velocidad derivada de una proporción triple, y, como se ha demostrado, la proporción 9:1 (nonecupla) no es el doble de una proporción triple. De hecho, como se ha demostrado, la proporción 9:1 es doble la proporción 4½:1 (quadruplam sexquialteram). Y de esta raíz, muchas conclusiones con respecto a las velocidades de movimientos se están negando, pero en esto una pregunta general se abordarán en su lugar, y yo se tratará más aquí.*

Poniendo todo esto junto, se llega a la conclusión que Blasius no rechaza ley de Bradwardine, en cuanto a su significado físico, pero él rechaza los fundamentos matemáticos que Bradwardine había creado. Incluso en este caso no es consistente. En respuesta a su pregunta 7, donde hay una proporción mayor que una proporción de igualdad, por ejemplo, Blasius dice que cualquier respuesta a la pregunta puede ser defendida y procede a dar los argumentos para cada lado. Entonces pasa a dar reglas para sumar y restar proporciones racionales e irracionales y concluye que sobre la base de sus reglas se pueden dibujar muchas conclusiones en el supuesto de que la velocidad sigue una proporción. Por ejemplo, si alguna potencia mueve algún móvil con una cierta velocidad y la potencia aumenta uniformemente mientras que la resistencia se mantiene igual, entonces la velocidad no aumentará uniformemente.

La conclusión ineludible es que Blasio entiende y acepta, por lo menos en parte, la ley de Bradwardine y sabe cómo sacar conclusiones de ella, a diferencia de aquellas en *Calculationes* de Richard Swineshead. Al mismo tiempo dice que debe ser rechazada (ipsa est reprobanda). Entonces, lo que ha hecho es rechazar los fundamentos matemáticos elegantes que Bradwardine había creado para su regla usando los elementos de Euclides libro V. Esto lo obligó, al igual que los historiadores del siglo XX, a intentar lograr el mismo resultado por métodos matemáticos más engorrosos. Sus motivos son matemáticos y no son filosofía natural: los argumentos físicos que usa contra la el punto de vista de Bradwardine van igualmente contra su propia punto de vista. Después de Blasius de Parma, su estudiante John Marliani rechazó la ley de Bradwardine con motivos similares. Curiosamente, Marliani escribe que cuando enseñaba Bradwardine o Albert de Sajonia sobre proporciones, el siempre se sorprendio de los argumentos débiles que dieron a su teoría, pero asumió que tenían algunas razones que él desconocía. Pero ahora ha concluido que tiene argumentos más fuertes en sentido contrario, y así obtuvo la opinión contraria.

Otro autor que intentó socavar los cimientos de la regla de Bradwardine fue, irónicamente, Bassanus Politus, en su *Tractatus proportionum introductorius ad calculationes suisset* publicado en Venecia en 1505, el mismo año que la publicación de la traducción de Zamberti de Lops elementos Euclides en griego. Ya hemos visto que era Bassanus Politus quien, junto con Volumnius Rodophus, habían estimulado a Jean Fernel en la defensa del enfoque Euclides - Campano - Bradwardine en 1528. Politus no menciona la ley de Bradwardine, pero extrañamente en una obra que pretende ser una introducción a *Calculationes* de Swineshead, rechaza la terminología de la composición de proporciones que soslayan la regla de Bradwardine. Así, dice que a diferencia de líneas u otras cantidades que son el doble de las mitades que ellos componen, las proporciones no son el doble de las mitades de sus componentes, porque las proporciones se son compuestas por multiplicaciones en lugar de sumas. Si las relaciones de proporción entre sí se entienden de esta manera, la regla de Bradwardine ya no puede expresarse simplemente como una proporcionalidad geométrica.

Después Politus, Alessandro Achillini también rechazó el planteamiento de Bradwardinine Igual de Blasius de Parma, argumenta que la proporción de proporciones es igual a la proporción de las denominaciones de esas proporciones, si bien reconoce que casi todos los modernos, incluyendo Bradwardine, Swineshead y Oresme creen lo contrario. El título de su pregunta, publicado en 1545, es "Si los matemáticos más recientes han descubierto que Aristóteles estaba en un error de enseñanza de las reglas de proporción por que los movimientos se comparan entre sí". Su punto es que producir algo por multiplicación no es lo mismo que producir algo por composición, porque los factores de una multiplicación pueden ser mayores que el producto. Por esta razón, lo que los modernos como Paul de Venecia, Albert de Sajonia, Thomas Bradwardine y otros dicen, es un error.

No sólo Achillini piensa que es un abuso hablar de composición de proporciones cuando el producto puede ser menor que sus componentes, pero – el va más allá de Blasius – argumenta que en dinámica de las velocidades han de variar, no como la proporción de proporciones en el sentido Bradwardinine, sino como la proporción de denominaciones. Si, por ejemplo, una relación de 3:1 produce una cierta velocidad, entonces la relación de 6:1 producirá la velocidad doble, no la relación 9:1, o agentes como 8 producirán el doble del efecto de agentes como 4, no agentes actuando como 16 a 1. Para ello que apela a experiencias naturales (experientiae naturales), de una piedra que se movió en un barco en movimiento, donde las velocidades de suman, o de grupos de hombres que trabajan en alguna máquina (artificial), para concluir que ocho hombres, en igualdad de condiciones, trabajarán dos veces tan rápidamente como cuatro hombres. Por supuesto, uno puede dudar si Achillini realmente a llevado a cabo experimentos en lugar de simplemente apelar a lo que parecía plausible.

A principios del siglo XVII Christopher Clavius rechazó también el enfoque de Bradwardine. En su edición de 1611 de Euclides, Clavius incluye la definición 5 del libro VI, en la traducción de Zamberti, seguido de una larga explicación apoyando la composición de proporciones por la multiplicación de las denominaciones, citando a Teon, Eutocio, Apolonio y Witelo. Él luego conecta las pruebas de Teon, Eutocio, y Euclides, libro VI, Proposición 23. Antes, comentando el libro V, definición 10, Clavius había rechazado los que identificaron una *ratio duplicata* con una *ratio dupla,* con lo que ha llegado a negar la regla de Bradwardine. Si un agente con una fuerza de 10 podría lograr algún resultado, quién pensaría que un agente con una fuerza de 100, en lugar de una fuerza de 20 se requeriría para lograrlo dos veces como mucho?

En Clavius, la regla de Bradwardinian para las proporciones de las velocidades y los movimientos fue rechazada por medio de rechazar su concepción de las relaciones de proporciones entre sí, así como por la referencia a ejemplos físicos.

John Wallis, hacia el final del siglo XVII, representa un paso más en esta progresión. En su *A Treatise of Algebra, both Historical and Practical* de 1685, John Wallis dedica un capítulo aparte sobre la "Composición de proporciones y otras operaciones relacionadas con ellas". Su propósito es explícitamente rechazar la interpretación Bradwardinne de la *composición:*

> *Habiendo dicho esto. . . que lo que allí se dice de las fracciones, debe entenderse también de proporciones: este capítulo podría ser separado, no habría sido necesario obviar algunos errores, que son aptos para presentarse de diferente sentido en el que diversos escritores utilizar algunas palabras relacionadas: Euclides en su definición 5, libro. 6, nos ha dado esta definición de. . . Proporción compuesta. . . Se dice que una proporción está compuesta de otras proporciones, cuando el exponente es adquirido por la multiplicación de los exponentes de estos, uno en otro. Así el Compound of the Treble and Double (cuyos exponentes son 3 y 2) es el Treble of the Double (cuyo exponente es el 3 x 2,) es decir, la séxtuple (porque 3 x 2 = 6.) Que es manifiestamente un trabajo de multiplicación.*

Después de alguna explicación adicional, prosigue: pero ahora porque Euclides da el nombre de composición, qué palabra se conoce para impartir muchas veces una adición;

> *(Como cuando decimos que la línea ABC esta compuesta de AB y BC;) algunos de nuestros más antiguos escritores han acertado en llamarlo adición de proporciones; y otros, siguiéndolos, han seguido esta forma de expresión, que permanece (en escritores) incluso hasta el día de hoy: Y la disolución de esta composición la llaman subducción de proporción. (Considerando que debe tener algo llamado división y multiplicación). Y luego pasar a las siguientes preguntas, ¿cómo puede ser, que una proporción puede, mediante la adición de otra, hacer una menor?, y que*

¿una proporción por la adición de los dos puede ser menor que cualquiera de ellas?. . . (confieso. . . es un gran indecencia: hace la parte mayor que el todo). Considerando que ellos deben haberlo considerado, que composición en Euclides algunas veces significa Adición y que en otras significa multiplicación.

Lo que Euclides dice sobre la composición de proporciones debe ser entendido como composición por multiplicación:

Esto se basa, (y es fácil de demostrar) en que si entre dos términos propuestos (como la A, F,) nosotros nunca entremezclamos tantos términos intermedios (como B, C, D, E), cualquiera sea (si todo mayor, o menos, o algunos más y algunos menos, que sea A o F,) la proporción de los extremos se compone de todos los intermedios, cada uno con su siguiente consecuente:

Es decir:

$$\frac{A}{B} \times \frac{B}{C} \times \frac{C}{D} \times \frac{D}{E} \times \frac{E}{F} = \frac{A}{F}$$

Para todos los términos intermedios que se encuentran por encima y por debajo de la línea, ellos realizan una multiplicación continua eliminándose a sí mismos, e único resultado que se obtendrá será $\frac{A}{F}$.

Luego sigue la argumentación de Euclides "*ex aequo*"

En la interpretación de Wallis de la composición de proporciones por multiplicación, las proporciones de proporciones son las mismas que las proporciones de sus exponentes:

Las proporciones de una a otra están en la misma proporción que son sus exponentes [es decir, denominaciones]; Esa proporción es mayor que la que tiene el mayor exponente y menor que la que tiene el menor; y en tal proporción mayor o menor están los exponentes.

En este contexto, Wallis distingue entre "doble" y "duplicata", "triple" y "triplicata", por lo que resulta evidente que elevando al cuadrado o al cubo y multiplicar por 2 y por 3 es cuestión de proporciones. Así al explicar el significado de Euclides basándose en el libro VI, definición 5, Wallis ayudó a minar las bases matemáticas de la regla de Bradwardine.

CONCLUSIÓN

En este trabajo he intentado mostrar cómo la introducción y el destino de la regla de Bradwardine fue entrelazada con la historia de las matemáticas, en particular con ideas sobre proporciones, proporcionalidades y razones. Más tarde, Thomas Bradwardine, quien probablemente conocía la definición interpolada sobre la composición de proporciones a través de la multiplicación de las denominaciones, decidió excluirla para presentar una teoría matemática consistente en que pareció matemáticamente muy simple, derivada de la versión pre-Teonica de los elementos de Euclides traducida por Campanus. En la atmósfera teórica de la Universidad medieval, la elaboración de una teoría tan elegante primaba sobre cualquier cuestión de mediciones reales o cálculo de cantidades absolutas. Los pocos individuos que rechazaron el punto de vista de Bradwardine doscientos años después de que se propuso, en su mayor parte, como Blasius de Parma, rechazan sus fundamentos matemáticos en el concepto pre-Teonico sobre la composición de proporciones, en lugar de encontrarla incompatible con experiencia. (En cuanto a experiencia, muchos de los argumentos contra la función de Bradwardine aplicada igualmente a la posición aristotélica.)

Cuando los elementos de Euclides fue impreso por vez primera por Ratdolt en 1482, fue en la traducción de Campanus. Pero la nueva traducción del griego publicada por Zamberti en 1505 fue basada en la versión Teonica y así incluyó en la definición 5 del libro VI. Esto comenzó a tener un efecto en aquellos que utilizan la traducción de la Zamberti, aunque la perspectiva en cocientes compuestos encontrados allí fue resistida por los que seguían prefiriendo la versión Campanus. La marea se convirtió finalmente por la traducción de Commandino, publicada en 1572, quien trabajó a partir de un texto Teonico. La mayor parte del trabajo sobre elementos se basó en el texto latino de Commandino o en un texto Teonico, hasta que François Peyrard encontró lo que parecía ser un texto pre-Teonico griego a principios del siglo XIX.

El renacimiento y la revolución moderna temprana en la comprensión del concepto de razón que se produjo en los siglos XVI y XVII tuvieron su origen en la creencia de que texto de Commandino representaba el texto euclidiano "verdadero" y, en consecuencia, esa definición 5 del libro VI representaba el "verdadero" significado euclidiano de la composición de proporciones. Hasta hace poco los estudiosos no han estudiado esta segunda revolución en la misma forma en que han estudiado la Revolución griega porque, como herederos de la comprensión de la concepción de proporción que surgió de esta revolución moderna temprana, toman la comprensión de razón que surgió, involucrando la aritmetización de las proporciones y la extensión del concepto de número racional y luego a los números reales, como correcta o verdadera. Esto ha significado que, en retrospectiva, la concepción de Bradwardine sobre la composición de proporciones parece muy extraña y confusa, esto usando las palabras de Dijksterhuis, citadas al principio de este artículo. Recientemente hemos comenzado a estudiar esta revolución moderna temprana – por ejemplo, 1993 *Euclides Reformatus* de Enrico Giusti es rica en información relevante, así que ahora estamos en una mejor posición para entender la ley de Bradwardine.

Cuando nuevas ediciones y traducciones de Euclides y otras obras griegas condujeron a un cambio en la interpretación de proporciones o razones y el concepto de número comenzó a extenderse más allá de los números enteros, los fundamentos matemáticos que Bradwardine uso en su teoría se debilitaron, y junto a ellos su regla, todo en la separación de los avances en física alejándose de la idea aristotélica que una fuerza es necesaria para el movimiento, y hacia la ley de la inercia, incluso hacia la segunda ley de Newton, que la fuerza es proporcional a la aceleración, pero la velocidad no lo es. Así la ley de Bradwardine desapareció silenciosamente, así como ganó aceptación por sus matemáticas que por motivos físicos.

Capítulo 7. REFERENCIAS

Biography,D.o.(26 de septiembre de 2011).*Universidad de Arizona. Obtenido de:* http://www.u.arizona.edu/~aversa/scholastic/Dictionary%20of%20Scientific%20Biography/07.%20Bradwardine%20b.%20ca.%201290%20%28Murdoch%29.pdf

Celeyrette, J. (2008). Bradwardine's rule: a mathematical law? En Walter,R (Ed.). & Sophie, R. (Ed.). *Mechanics and Natural Philosophy Before the Scientific Revolution,* (pp. 51 – 66). Springer Netherlands.

Guacaneme, E. A. (2011). La Historia de las Matemáticas en la educación de un profesor: razones e intenciones. Conferencia presentada en La Tercera Escuela Nacional de Historia y Educación Matemática (ENHEM3). Santiago de Cali, 27 al 29 de octubre.

Guacaneme, E. (2012).*Teoría euclidiana de la proporción en la construcción de los números reales: ¿un asunto útil para un profesor?* Revista Tecné, Epistemé y Didaxis. 31, 113–131.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá: Revolución Educativa Colombia Aprende.

Puertas, M. L. (1994). *Euclides. Elementos Libros V-IX* (Vol. II). Madrid. Ed. Gredos S.A.

Parra, E. & Vargas, E. (2012). *¿Puede la conmensurabilidad cerrar el cerco a la inconmensurabilidad?* Tesis de pregrado no publicada. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Sylla, E. (2008). The origin and fate of Thomas Bradwardine's de proportionibus velocitatum in motibus in relation to the history of Mathematics. En Walter,R. & Sophie, R. (Ed.). *Mechanics and Natural Philosophy before the Scientific Revolution,* (pp. 67 – 119). Springer Netherlands.