FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

PROPUESTA DIDÁCTICA: TABLETAS ALGEBRAICAS COMO UNA ALTERNATIVA DE ENSEÑANZA DEL PROCESO DE FACTORIZACIÓN DE ALGUNOS POLINOMIOS DE SEGUNDO GRADO

Trabajo de grado asociado al interés profesional del estudiante

Para optar por el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presentado por:

Sandra Milena Jiménez Ardila

CC 1022374903

Viviana Paola Salazar Fino

CC 1022380298

Asesora: Lyda Constanza Mora Mendieta

Bogotá, Diciembre de 2013

1. Información General

Tipo de documento	Trabajo de Grado asociado al interés profesional del estudiante
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Titulo del documento	Propuesta didáctica: Tabletas Algebraicas como una alternativa de enseñanza del proceso de factorización de algunos polinomios de segundo grado
Autor(es)	JIMÉNEZ ARDILA, Sandra Milena; SALAZAR FINO, Viviana Paola
Director	Mora Mendieta, Lyda Constanza
Publicación	Bogotá D.C., Universidad Pedagógica Nacional, 2013, 61 p.117
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Factorización, Álgebra, Geometría

2. Descripción

Este trabajo va dirigido a aquellos docentes de matemáticas y maestros en formación interesados en el tema de factorización de algunos polinomios de segundo grado. La idea se inspira en el trabajo de los árabes (e incluso Euclides, sin ser explícito) al relacionar términos de un polinomio con áreas, usar figuras para representarlas y posteriormente encontrar la solución a algunas ecuaciones relacionadas con problemas propios de su cotidianidad. Teniendo en cuenta el potencial que tienen los materiales manipulativos en la enseñanza, se optó por proponer un material didáctico que, bajo un marco de referencia, permitiera hacer llegar a los estudiantes esta idea y que de esta manera se convierta en una alternativa para enseñar el tema.

3. Fuentes

Para este trabajo se consultaron 32 fuentes, que abarcan artículos de revistas, libros, tesis de pregrado y maestría y fuentes de internet. Las principales fuentes que nutren este documento se encuentran listadas a continuación:

Acevedo de Manrique, M. & Falk de Losada, M. (1997). *Recorriendo el álgebra: de la solución de ecuaciones al algebra abstracta*. Colombia: Colciencias.

Barreto, J. (2009). Percepción geométrica de los productos notables y de la media geométrica [Versión electrónica]. *Números*, 71, 57-74.

Bartolini, M., & Mariotti, M. (2010). Mediación semiótica en el aula de matemáticas. En Perry, P. (Traduc.). *Handbook of international research in mathematics education (segunda edición revisada*, pp. 746-783). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum. (Trabajo original publicado en 2008).

Campos, Y. & Torres, J. (2000). *Causas de los errores en el proceso de factorizar*. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Duval, R. (1999).*Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía.

Kleiner, I. (2007).*A history of abstract algebra*. New York: Birkhäuser Boston.

Puig, L. (2011). Historias de al-Khwārizmī (7ª entrega). Figuras y demostraciones. [Versión electrónica]. *Revista SUMA*, 68, 93-102.

4. Contenidos

El trabajo se compone de tres capítulos:

El primero comprende un recorrido histórico desde los babilonios hasta la época contemporánea (posterior a Dedekind) donde se formaliza la teoría de anillo de polinomios, para encontrar vestigios del uso de factorización (explícita o implícitamente), En el segundo capítulo se presenta el marco de referencia en dos secciones principales. En la primera, se encuentran referencias de algunos autores a los materiales manipulativos y a los artefactos, a la vez que se relacionan con las Tabletas Algebraicas, el material que se propone en este trabajo de grado. Ligado a la movilización y reorganización de conceptos producida por el uso de material manipulativo, y caracterizando el material como herramienta de mediación semiótica, se introduce la segunda sección referida a las representaciones y sus registros. El tercer capítulo está dedicado enteramente a las Tabletas Algebraicas, su descripción, uso y algunas tareas sugeridas. Como anexo al documento se presenta un folleto donde se encuentran las instrucciones para usar el material, reportadas en el capítulo 3, así como un paquete de 65 fichas. Finalmente se presentan las conclusiones obtenidas, algunas recomendaciones a quienes deseen aplicarlo y una invitación a continuar con este trabajo.

5. Metodología

Gracias a la influencia histórica que tiene la idea original del uso de las Tabletas Algebraicas, optamos por comenzar a consultar y recabar información de libros, revistas y documentos disponibles en la red acerca de Historia del Álgebra, especialmente donde interviniesen polinomios o ecuaciones. Dicha consulta siempre estuvo enfocada en encontrar vestigios de factorización de polinomios de grado dos, aunque se encontrara información de manera general e inclusive, estudio de factorización única para números. Luego, se consultó el marco de referencia para el uso de materiales manipulativos centrándonos en la importancia de los registros de representación. Finalmente, se organizaron unas ideas preliminares que teníamos acerca de actividades del manejo del material para consignarlas en un folleto dirigido a docentes y maestros en formación. Este Trabajo de Grado constituye la sistematización de una experiencia llevada a cabo con estudiantes de octavo grado en una institución educativa de Bogotá en el marco de la práctica inicial asociada al espacio Enseñanza y Aprendizaje del Álgebra y la Aritmética en el año 2011.

6. Conclusiones

Teniendo en cuenta los objetivos trazados y la consulta realizada a lo largo de la elaboración de este documento, se obtuvieron las siguientes conclusiones:

Al hacer la revisión histórica de la factorización de polinomios de segundo grado se halló relación con los llamados casos de factorización, sin embargo, no se encontró referencia alguna de estos en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, por lo cual es pertinente cuestionar su inclusión y justificar su uso en el aula. Además, no se encontró referencia a factorización de polinomios en dos indeterminadas, a pesar de que existen como objetos matemáticos claramente definidos (véase Pérez, Palacios & Villamizar, 2003). Por otro lado, la preocupación de los algebristas no fue la factorización en sí misma sino solucionar ecuaciones, lo que indirectamente llevó a estudiar teoremas de factorización única. Gracias a todo lo anterior, se pudo profundizar en el significado de factorizar como expresar un polinomio como producto de factores irreducibles, y la gran importancia que tienen estos últimos en la conceptualización de los anillos de los polinomios, ya que son los análogos de los números primos del anillo de números enteros; y a raíz de lo cual se puede establecer una equivalencia entre el Teorema Fundamental de la Aritmética y el Teorema de Factorización Única.

A partir de la elaboración de este trabajo de grado nos percatamos de que en muchas oportunidades nos falta precisión en la manera que utilizamos el lenguaje matemático en la enseñanza de las matemáticas; nos referimos específicamente al término factorización, pues no hallamos una teoría de factorización, sino de factorización de polinomios. Muchas veces se interpreta la factorización como "expresar un polinomio como producto de factores", olvidando que dichos factores deben ser irreducibles. Incluso en muchos casos no se tiene claro en qué conjunto están los coeficientes.

El desarrollo del documento permitió aportar un marco de referencia un poco más amplio que los antecedentes revisados (Morales (2008), Barreto (2009), entre otros) el cual esperamos aporte a las personas interesadas en profundizar en este tema.

Consideramos que las tareas propuestas en el último capítulo pueden aportar a la innovación de clases del álgebra escolar, que les permita a los estudiantes encontrar relaciones con objetos que faciliten la conexión entre conocimientos y con ello, promover la recordación. Es importante tener en cuenta que las actividades propuestas con las Tabletas Algebraicas necesitan un proceso de socialización ya que, por sí solas, no garantizan el aprendizaje, específicamente, para este caso, del proceso de factorización.
Con base en ello, esperamos que el trabajo genere el interés suficiente en lectores, principalmente estudiantes de la Licenciatura, que les aporte en la realización de, por ejemplo Unidades Didácticas.

Este Trabajo de Grado aporta de manera significativa a nuestra formación como maestras, ya que refleja nuestra capacidad para generar una propuesta educativa bajo un marco teórico y matemático orientada a realizar innovación en el aula relacionando el concepto de factorización con la geometría; y el diseño e implementación de un material didáctico, lo que busca convertirse en una alternativa de llevar la cultura matemática a los estudiantes y que se corresponde en gran medida con el perfil profesional que debe tener un egresado de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

Desde que la idea de las Tabletas Algebraicas surgió en el año 2011, se ha presentado en varios eventos nacionales e internacionales: Taller: Tabletas Algebraicas como alternativa de enseñanza del proceso de factorización; 12º ECME (Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, 2011). Armenia, Colombia; Experiencia de Aula: Tabletas Algebraicas como alternativa de enseñanza del proceso de factorización. 12º ECME, Armenia, Colombia; Evolución de la factorización. 4 ENHEM (Escuela Nacional de Historia y Educación Matemática, 2013). Cali, Colombia; Tabletas Algebraicas, una alternativa de enseñanza del proceso de factorización. I CEMACYC (I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe, 2013). Santo Domingo, República Dominicana; La factorización de polinomios de segundo grado y los personajes involucrados en su historia. I CEMACYC, Santo Domingo, República Dominicana.

Elaborado por:	Jiménez Ardila, Sandra Milena; Salazar Fino, Viviana Paola
Revisado por:	Mora Mendieta, Lyda Constanza

Fecha de elaboración del Resumen:	20	10	2013

Dedico este logro a mis padres Stelly y Antonio, a quienes amo profundamente y las palabras se quedan cortas para agradecer el infinito amor que me han brindado, una familia muy especial fundamentada en valores; el apoyo incondicional, los sacrificios y la fortaleza para las situaciones difíciles; por creer en mí y despositar sus esperanzas y sueños en mi hermana y en mí, por todos los momentos en los que han estado a mi lado para darme una voz de aliento, un consejo en el momento necesario, un abrazo y una amistad totalmente sincera.

El regalo más hermoso que me han podido brindar es darme la fuerza para saber que es posible alcanzar los sueños.

A mi hermana Carolina, que es mi mayor motivación para seguir adelante, y a quien siempre cuidaré y querré como mi hermanita menor, mi mejor amiga y compañera de aventuras para toda la vida. Gracias por todo el apoyo, la gran paciencia y los consejos. Me siento orgullosa de tí, Dios te cuide y te permita cumplir tus hermosos sueños, te quiero mucho. Sin ustedes tres, no sería lo que soy ahora.

Milena

A mi familia.

A mis padres Cecilia y José, por su amor y respeto incondicional.

A mi hermana, Laura, que tal vez sin saberlo es mi motor.

A mis abuelas, Victoria y Bertha, por sus enseñanzas y comprensión.

A todos los que con una sonrisa en los labios me esimulan para tratar una vez más.

A mis amigos Julian, Diana y Valeria por aguantarme, y aconsejarme.

Paola

Agradecimientos

Agradecemos primero con gran humildad a Dios, quien nos ha iluminado y nos ha dado sabiduría para escoger esta bella profesión y superar los muchos obstáculos que se presentaron a lo largo de la carrera, por darnos la fuerza necesaria y por poner a nuestro lado personas especiales que nos han acompañado de manera incondicional. Gracias por ese infinito amor y por permitirnos alcanzar la meta.

A nuestras familias en general, quienes con sus palabras de aliento y acompañamiento nos animaban a seguir luchando por nuestro sueño, y nos recordaban que es posible lograr nuestras metas.

A nuestra asesora de trabajo de grado, la profesora Lyda, por sus enseñanzas, orientaciones, apoyo y aportes, por su infaltable dedicación, su valiosa amistad, guía, y motivación en todo momento.

A Viviana, por permitirme hacer este viaje con ella, por todas las horas de trabajo, el esfuerzo, los aportes, gracias por esa experiencia inolvidable, ese gran trabajo en equipo que se convierte en toda una aventura de amigas.

A Sandra, por que a pesar de los malos momentos, y las infaltables faltas está allí cuando la necesito, por las experiencias vividas, y por permitirme tener su compañia en aquellas "locuras"que nos permitieron crecer como profesionales y

amigas.
A nuestros compañeros Dayana y Duvan, a quienes consideramos grandes amigos, y con quienes iniciamos esta propuesta y posteriormente la aventura de dar a conocer sus inicios a la comunidad académica, por sus aportes para establecer los cimientos y por su compañia.

A la profesora Nora Rojas, pues gracias a ella conocimos está idea, su fe y disposición a ayudar siempre fueron una gran motivación.

Al profesor Mauricio Bautista, a Chelita, y el resto de personal administrativo del Departamento de Matemáticas quienes fueron un gran apoyo especialmente en este último tramo, colaborándonos en lo que más estaba a su alcance para lograr nuestros objetivos.

A nuestros profesores que con sus enseñanzas de vida y de Matemáticas nos permitrien estar a punto de culmminar está gran etapa.

A todos nuestros compañeros, amigos, que nos acompañaron en esta aventura y a quienes agradecemos cada sonrisa, regaño, conversación, lección y compañía.

A nuestra querida Universidad Pedagógica Nacional, que a pesar de las dificultades nos acogió y fue nuestro hogar durante estos años.

¡Gracias!

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

Introducción

El presente trabajo de grado está conformado por un documento, un folleto y un paquete de fichas de las *Tabletas Algebraicas.* Un prototipo de las fichas había sido construido para la presentación de un taller en el 12º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, el cual, para esta ocasión, cuenta con características físicas para mejor manejo. Debido a la idea de proponer este material para su utilización de parte de profesores o estudiantes, se hacía inevitable incluir una guía de manejo, debido a que esto facilitaría el acceso al material, pues no siempre se dispondría del presente documento para revisar las instrucciones.

En cuanto al documento, está dividido en tres capítulos. El primero presenta un recorrido histórico que pretende exponer la presencia de factorización de polinomios como proceso y como objeto. En el segundo capítulo se incluye un marco de referencia para el uso de los materiales manipulativos, haciendo énfasis en la importancia de las diferentes representaciones logradas con las *Tabletas Algebraicas* y su rol como herramienta de mediación semiótica. Finalmente, el tercer capítulo muestra las instrucciones para manejar el material y unas actividades sugeridas para llevar al aula, dirigidas especialmente a estudiantes de grado octavo de educación formal que estudian usualmente el tema de la factorización de polinomios.

Para la elaboración del presente trabajo de grado fue necesario hacer algunas traducciones, específicamente de documentos de historia del álgebra, enfocadas en encontrar vestigios de factorización de polinomios de grado dos; se realizó el estudio de artículos de memorias de eventos de Educación Matemática y Trabajos de grado. Luego se consultó el marco de referencia para el uso de materiales manipulativos centrándonos en la importancia de los registros de representación. Finalmente, se organizaron unas ideas preliminares que teníamos acerca de tareas a abordar manejando el material para realizar una descripción detallada en el último capítulo y condensarlas en un folleto con instrucciones y tareas sugeridas, dirigido a docentes y maestros en formación. Se hace un diseño para el folleto y se colocan fotos de las *Tabletas Algebraicas* tal cual como se podrán encontrar en el paquete de fichas que se adjunta. El documento fue editado en LaTeX para ser entregado bajo esta forma en su versión final[1].

[1]La plantilla tipo libro para la edición fue obtenida de Luis. (2011) Miniejercicios con latex. Cómo escribir una tesis con LaTeX . [Fecha de consulta: 14 de junio de 2013]. Disponible en: $http://minisconlatex.blogspot.com/2011/04/como-escribir-una-tesis-con-latex.html$

Justificación

El rol que desempeña el Álgebra en las Matemáticas de la educación secundaria es de gran importancia, debido a que engloba muchos conceptos que representan el entramado con el que se escriben las matemáticas, incluso relacionadas con otras áreas del conocimiento. Así mismo, en la escuela se persigue, con gran avidez, que los estudiantes desarrollen habilidades en la manipulación de las llamadas expresiones algebraicas, haciendo caso omiso (en algunas ocasiones) a la importancia de explorar diferentes representaciones para contribuir a la comprensión de los objetos matemáticos. Como estudiantes de secundaria notamos cómo se enfatizaba el uso del álgebra simbólica solamente sin relacionarla con otras ramas de las matemáticas como la geometría, y como docentes en formación vemos el potencial que tiene realizar conexiones entre diferentes ramas para presentar contenidos más articulados y asociar dichas áreas.

A partir de nuestra experiencia durante nuestras prácticas, logramos evidenciar serios problemas en los estudiantes de grado octavo (y por consecuencia grados superiores) para factorizar polinomios, y estudios en otros países (Socas, 1989) indican que este es uno de los temas que mayor resistencia presenta entre ellos.

Teniendo en cuenta lo anterior, surge el interés por presentar una propuesta alternativa que, cabe decirlo, fue implementada en el marco de la práctica inicial del espacio académico Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra del programa Licenciatura en Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional en el año 2011 con resultados satisfactorios a primera vista, sobre los cuales no entraremos en detalle, pero que motivaron la elaboración de este escrito.

Además, es importante resaltar que, una de las propuestas de Trabajo de grado asociado a prácticas educativas, monitorías académicas o pasantías desde el grupo de álgebra es “Elaboración de actividades alrededor de la aritmética o el álgebra para las cuales sea necesario el uso de materiales didácticos”, propuesta a la cual se ciñe nuestro trabajo de grado.

Este Trabajo de Grado aporta de manera significativa a nuestra formación como maestras, ya que refleja nuestra capacidad para generar una propuesta educativa, bajo un marco teórico y matemático, orientada a realizar innovación en el aula relacionando el concepto de factorización con la geometría y el diseño e implementación de un material didáctico, lo que busca convertirse en una alternativa de llevar la cultura matemática a los estudiantes y que se corresponde en gran medida con el perfil profesional que debe tener un egresado de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

Planteamiento del problema

A pesar de la insistencia en los últimos años de disminuir el carácter algorítmico y memorístico de las matemáticas, todavía se evidencian clases en las que se recurre exclusivamente a esto. Si bien es cierto que en algún momento son necesarios dichos métodos, también es necesario llevar actividades innovadoras al aula, que promuevan razonamientos, comunicación e integren, en la medida de lo posible, los diferentes pensamientos matemáticos.

Los estudiantes presentan muchos errores cuando están aprendiendo el concepto de factorización, este se percibe usualmente como complejo, en exceso abstracto e inclusive desarticulado. Cuando deben aplicarlo en grados posteriores se evidencia la falta de comprensión del proceso a pesar de reconocer la importancia que tiene para simplificar expresiones algebraicas racionales, resolver inecuaciones o eliminar indeterminaciones. Al observar esta situación nos cuestionamos si es posible, a través del lenguaje geométrico y representaciones físicas, contribuir a mejorar el aprendizaje del tema, o, por lo menos, encontrar una alternativa de enseñanza del proceso de factorización de algunos polinomios, en particular, de segundo grado.

Objetivos

Objetivo General:

Desarrollar una propuesta de enseñanza de la factorización de algunos polinomios de segundo grado de la forma $a^2 + bx + c; a \in \mathbb{N}$ y $b, c \in \mathbb{Z}$, y de la forma $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f; a, b \in \mathbb{N}; c, d, e, f \in \mathbb{Z}$ partiendo del lenguaje geométrico a través de la manipulación de las *Tabletas Algebraicas*, favoreciendo así la conversión al lenguaje simbólico-algebraico.

Objetivos específicos:

- Profundizar en el significado de la factorización de polinomios desde las matemáticas mismas.
- Fundamentar las tareas a proponer desde algunos elementos propios del análisis de contenido (v.g. representaciones).
- Diseñar un conjunto de tareas que incluyan la utilización de las *Tabletas Algebraicas* que contribuyan a la comprensión de la factorización gracias a su manipulación.
- Organizar un material que sea útil a los profesores para la enseñanza de la factorización por medio del material Tabletas Algebraicas.

Capítulo 1

REFERENTES HISTÓRICOS Y MATEMÁTICOS

1.1. Breve historia de la factorización de polinomios

A continuación se hace una breve presentación de algunos de los momentos históricos más relevantes en la historia del álgebra, en los cuales se pueden encontrar trabajos relacionados con factorización de polinomios[1] de segundo grado o interpretaciones geométricas para este proceso, que serán los dos temas centrales sobre los cuales se aborda la información proporcionada en este capítulo y que, posteriormente, se vincularán para el diseño de las tareas que componen esta propuesta.

[1]Por ahora se aclara que se llama polinomio con coeficientes reales a una expresión de la forma $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ donde todos los a_i son números reales y el exponente n es un número entero positivo. Al final se hará la distinción entre los términos polinomio, ecuación polinómica y función polinómica que aparecen a lo largo del presente capítulo.

1.1.1. Los babilonios

Las tablillas mesopotámicas encontradas por Neugebaver en 1930 son el registro matemático más antiguo. Dichas tablillas proporcionan valiosa información sobre métodos de cálculo que usaban para resolver ecuaciones, particularmente de segundo grado. Éstas no contienen dibujos, sin embargo algunos historiadores sostienen la teoría de que las tablillas podrían ir acompañadas de disertaciones que explicarían cómo apoyarse en dibujos para aplicar dichos métodos (Sessa, 2005).

Es común encontrar problemas en los cuales aparentemente se realizan operaciones entre diferentes magnitudes, como en la expresión "he sumado el cuadrado y mi lado obteniendo $\frac{1}{2}$" (Serres, 1991, citado en Sessa, 2005). Se ha decidido reescribir el problema en términos geométricos de modo que tenga sentido la expresión, al considerar la frase "sumar un lado" como sumar un rectángulo cuyos lados son un lado del rectángulo y la *wasitum*, la unidad. Sessa (2005) explica el uso de la geometría en la expresión anteriormente citada, así:

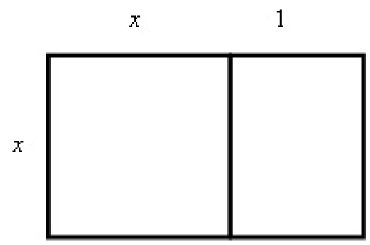


Figura 1.1: Imagen producida por la proposición

La superficie total de la figura se sabe que es $\frac{3}{4}$ y hay que hallar el valor de x. Para ello se comienza partiendo el rectángulo (de área x) en dos rectángulos de igual área y reacomodándolos. La imagen anterior se transforma en la siguiente, que tiene la misma superficie:

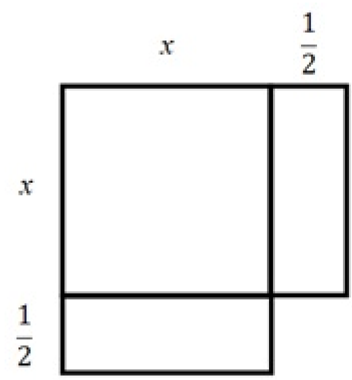


Figura 1.2: Transformación de la figura

Esta figura se completa hasta obtener un cuadrado, para lo cual se añade un cuadrado de lado $\frac{1}{2}$

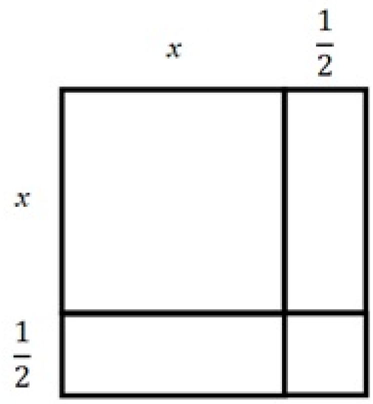


Figura 1.3: Figura completa

La nueva figura tendrá como área $\frac{3}{4}+(\frac{1}{2})^2 = 1$, por lo cual su lado medirá $\sqrt{1} = 1$. Pero tenemos que el lado de la nueva figura es $x + \frac{1}{2}$, entonces se puede igualar $x + \frac{1}{2}$ y 1, de lo cual se obtiene $x = \frac{1}{2}$.

Aún cuando el álgebra de esta época es retórica, se puede explicar el anterior procedimiento en lenguaje simbólico así: Para la ecuación $x^2 + x = \frac{3}{4}$ se completan cuadrados:

$$x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

es decir,

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

de donde resulta

$$x + \frac{1}{2} = 1$$

y entonces

$$x = \frac{1}{2}$$

Es importante resaltar que parte del procedimiento anterior se permite establecer la igualdad:

$$x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

Buscando una asociación con lo que usualmente se enseña en la escuela, destacamos que el polinomio [2] $x^2 + x + (\frac{1}{2})^2$, es conocido en la educación secundaria como ***un trinomio cuadrado perfecto*** y por ello se puede factorizar en $\mathbb{Q}$ como $(x + \frac{1}{2})^2$; desde esta perspectiva, podríamos decir que esta es una primera evidencia de factorización (con la ayuda de figuras geométricas) en la historia, lo que se conoce actualmente como caso de los trinomios cuadrados perfectos.

Del pueblo babilonio vamos ahora a las tierras balcánicas para encontrar una obra que permaneció inmutable a lo largo de muchos siglos.

1.1.2. Euclides y los *Elementos*

Elementos es una de las grandes obras de la humanidad que data del 300 a.C, en ella se compila si no toda, casi la totalidad del conocimiento matemático hasta la época. Son trece libros organizados de forma deductiva.

Las once primeras proposiciones del libro II se pueden hacer corresponder a identidades algebraicas (aunque están planteadas con nociones geométricas) para las cuales se usan relaciones entre áreas de rectángulos y cuadrados. El

[2]Aunque la expresión $x^2 + x + (\frac{1}{2})^2$ no era considerada como un polinomio para los babilonios, ni lo es estrictamente hablando, debido a que en los polinomios la x es una indeterminada, en este caso, representa un valor, determinado que es el que se quiere hallar

ejemplo más común de estas proposiciones es la II.4 que dice: “Si se corta al azar una línea recta, el cuadrado de la recta entera es igual a los cuadrados de los segmentos y dos veces el rectángulo comprendido por los segmentos”. [3].

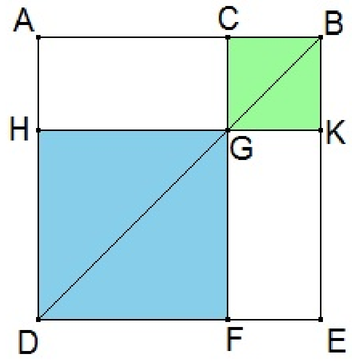


Figura 1.4: Representación de la Proposición II.4

Lo cual es usualmente interpretado como el ***cuadrado de una suma***, o lo que en lenguaje simbólico sería $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, donde a representa la longitud del $\overline{HD}$ y b representa la longitud del $\overline{BK}$.

Otro ejemplo destacado es la proposición II.5 que dice: “Si se corta una línea recta en segmentos iguales y desiguales, el rectángulo comprendido por los segmentos desiguales de la recta entera junto con el cuadrado de la recta que está entre los puntos de sección, es igual al cuadrado de la mitad”[4], que se ilustra así:

[3]Traducción al español por Francisco Vera, “Científicos griegos” (1970). Citamos la traducción al inglés de Sr Thomas L. Heath (1956) por ser una de las más aceptadas: “If a straight line be cut at random, the square on the whole is equal to the squares on the segments and twice the rectangle contained by the segments”

[4]Traducción al español por Francisco Vera, “Científicos griegos” (1970). Citamos la traducción al inglés de Sr Thomas L. (1956): “If a straight line be cut into equal and unequal segments, the rectangle contained by the unequal segments of the whole together with the square on the straight line between the points of section is equals to the square on the half”.

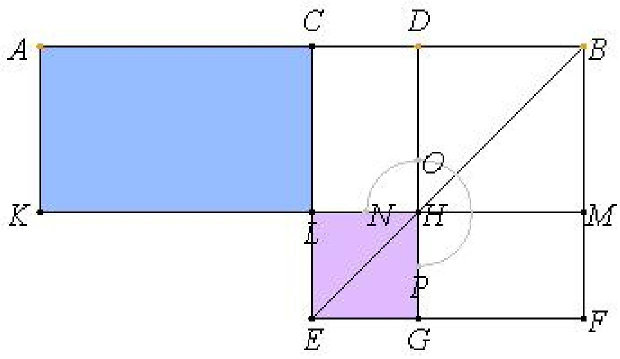
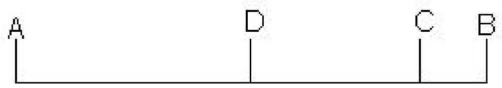


Figura 1.5: Representación de la Proposición II.5

Es decir, la proposición afirma que el área del rectángulo de lados AD y DB del cuadrado de lado CD es igual al área del cuadrado de lado CB.

La equivalencia que proporciona el enunciado puede ser escrita de varias maneras dependiendo del segmento que se tome como referencia, como describe Sessa (2005, p. 39) guiándose por la siguiente imagen:



"Si [en cambio] denominamos X a la longitud del $\overline{CB}$ e Y a la longitud del $\overline{AC}$, la fórmula [que obtendremos] es":

$$XY + \left(\frac{Y-X}{2}\right)^2 = \left(\frac{X+Y}{2}\right)^2$$

Por último, si denominamos X a la longitud del $\overline{DB}$ e Y a la longitud del $\overline{DC}$, obtenemos[5]:

$$X^2 - Y^2 = (X-Y)(X+Y)$$

He aquí el punto interesante de la proposición, pues la identidad anterior es bien conocida en el ámbito escolar como ***diferencia de cuadrados***.

[5]En este caso, no se está considerando $X^2 - Y^2$, como un polinomio, si no que x y y son allí números generalizados

Los procedimientos usados por los babilonios y por Euclides se asemejan en que comparaban y sumaban áreas y longitudes, pero difieren en que, Euclides consideraba las longitudes y las áreas como magnitudes y no asignaba números a las cantidades de magnitud.

Se han dado diversas interpretaciones históricas al trabajo de Euclides, hasta llegar a ser considerado "algebrista geométrico", al demostrar identidades usando nociones geométricas (Grattan Guinness, 2004, p.166). Algunos intérpretes de la obra de Euclides consideran que él resolvía problemas numéricos presentados como geométricos para cumplir con el rigor que implicaba hacer afirmaciones matemáticas en la época mientras otros rechazan lo anterior y sostienen que se ha hecho una interpretación algebraica de problemas netamente geométricos, como afirma el historiador Grattan Guinness (2004, p. 167): "Ahora se comprende mucho mejor que la identidad $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ pertenece a la herencia de Euclides, especialmente entre algunos árabes con su palabra base álgebra"(traducido por las autoras)[6]. Debido a esto, no es posible afirmar que las proposiciones del libro II sean álgebra o geometría, lo que sí se evidencia es la conexión que se puede establecer entre áreas y algunos polinomios, con el fin de dar un sentido geométrico a las identidades algebraicas.

1.1.3. Diofanto

Hacia el siglo III aparece Diofanto (200 – 290 a.C. aprox.) quien se conoce como el padre del álgebra ya que, entre otros aspectos, introdujo un símbolo para la incógnita: la primera sílaba de la palabra griega *arithmos*, que significa número. En la obra más importante que se conoce de Diofanto, *Arithmetica*, un tratado de 13 libros del que sólo se conocen los 6 primeros, muestra habilidad en la reducción de ecuaciones de diferentes tipos, en las que encontramos ecuaciones de segundo grado, que actualmente reconocemos como de la forma $ax^2 + bx + c$,

[6]Texto original: "It is now much better understood that identity $[(a+b)]^2 = a^2 + 2ab + b^2$ belongs to the heritage from Euclid, especially among some Arabs with their word-based algebra".

con $a, b, c \in \mathbb{Q}^{+}$.

Indagando en la Aritmetica de Diofanto, encontramos un problema, el 7 del libro IV que nos sirve de referencia para mostrar que en su obra usaba identidades que no están tratadas en el libro, y que actualmente asociamos a factorización de expresiones, aunque Diofanto no lo haga explícito; el problema se enuncia así en lenguaje moderno:

> Sumar un mismo cuadrado a un cubo y a un cuadrado y formar lo contrario, un cuadrado y un cubo respectivamente. Es decir, encontrar x, y, z tales que $x^3 + z^2 = \square$, $y^2 + z^2 =$ cubo. Solución original. Ya que $y^2 + z^2$ ha de ser un cubo, pongamos que sea precisamente igual al cubo buscado, es decir que sea $y^2 + z^2 = x^3$. En tal caso, los números $x^3 + z^2, x^3 - z^2$ deben ser cuadrados; pongamos entonces $x^3 = p^2 + q^2$ y z^2 deben ser cuadrados; pongamos entonces $x^3 \pm z^2 = p^2 + q^2 \pm 2pq = [(p \pm q)]^2$ $(\ldots)$. (Muñoz, Fernández & Sánchez et al. 2007, p. 210)

En esta última línea encontramos un claro indicio de una factorización conocida, lo que en el ámbito escolar es conocido como el ***cuadrado de una suma o de una diferencia.***

Es posible que en la obra de Diofanto haya otras evidencias del uso de identidades conocidas actualmente como casos de factorización, pero por no ser propósito de este trabajo indagar profundamente acerca de esta cuestión, sólo presentamos este problema.

Aunque el tratamiento de Diofanto a la solución de problemas es estrictamente algebraico, una interpretación geométrica de los procedimientos podría esclarecer el significado de las soluciones obtenidas.

1.1.4. Los árabes

El aporte matemático que sin duda hizo famosos a los árabes es el desarrollo del álgebra por parte de su máximo exponente, Al-Khwãrizmĩ. Sin embargo, también cabe resaltar el trabajo de Thãbit Ibn Qurra por sus trabajos relacionados directamente con la factorización de polinomios mediante áreas.

Al-Khwãrizmĩ

En su libro *Kitãb al-mukhtasar fĩ hisãb al-jabr wa' l-muqãbala* (Libro conciso de cálculo de restauración y oposición), Al-Khwãrizmĩ (780-850 aprox.) expone todo un proyecto algebraico, el cual se presenta en lenguaje retórico y utiliza tres palabras de importancia: *jidr* (raíz), *mãl* (tesoro), y *cadad mufrad* (número simple), las cuales representan, la incógnita, x (que más adelante aparece como *shay'*, cosa), la segunda potencia de la incógnita, x^2, y el término independiente, respectivamente, como se presenta en el Cuadro 1.1, las cuales dan lugar a ecuaciones lineales y cuadráticas, y para cada una presenta un algoritmo para su solución. Pero además, Al-Khwãrizmĩ no habla de cantidades positivas o cantidades negativas, esto último es simplemente impensable, sino de cantidades que se suman y cantidades que se restan a otras.

Abordaremos un problema que presenta la cuarta forma canónica, $x^2 + bx = c$:

> "Pero tesoro y raíces iguales a un número es como si dices: tesoro y diez raíces son iguales a treinta y nueve dírhams”. Cuyo significado es:“¿Qué tesoro al que se le añaden diez de sus raíces, el total que se agrega es treinta y nueve?” (Puig, 2011, p. 100).

1. Tesoro [7] igual a raíces	$x^2 = bx$
2. Tesoro igual a números	$x^2 = c$
3. Raíces iguales a números	$bx = c$
4. Tesoro y raíces igual a números	$x^2 + bx = c$
5. Tesoro y números igual a raíces	$x^2 + c = bx$
6. Raíces y números igual a tesoro	$bx + c = x^2$

Cuadro 1.1: Las seis formas canónicas de Al-Khwãrizmĩ

La solución presentada por Al-Khwãrizmĩ se presenta en el Cuadro 1.2. Posterior a la solución del problema, Al-Khwãrizmĩ demuestra su validez para lo cual recurre a figuras[8], como se presenta en el Cuadro 1.3. Y finaliza con el siguiente párrafo:

> Ahora bien, sabemos que la primera superficie es el tesoro, y las cuatro superficies que la rodean, que son diez raíces, son treinta y nueve en números. Entonces, si les añadimos veinticinco, que son los cuatro cuadrados que están en los ángulos de la superficie AB, completamos la cuadratura de la superficie mayor que es la superficie DE. Pero sabemos que todo esto es sesenta y cuatro. Uno pues de sus lados es su raíz, que es ocho. Restemos por tanto lo que es igual a dos veces un cuarto de diez de los dos extremos de la superficie mayor, que es la superficie DE, y queda de su lado tres, que es el lado de la primera superficie, que es AB, y es la raíz de ese tesoro. (Puig, 2011c. p. 100)

Lo cual en lenguaje moderno es:

[7]Siempre es uno [tesoro] porque las formas canónicas están enunciadas para un tesoro (Puig, 2010, p. 91).

[8]La figura en la cual se basa la demostración (ingenua, concepto ampliado posteriormente) es el cuadrado AB, o lo que posteriormente llama superficie.

Solución dada por Al-Khwãrizmĩ	Lenguaje moderno
"[Pero] tesoro y raíces iguales a un número es como si dices: *tesoro y diez raíces son iguales a treinta y nueve dírhams"*	$x^2 + 10x = 39$
Divides por dos las raíces, lo que en este problema resulta cinco.	$10/2 = 5$
Luego multiplícalo por sí mismo, y resulta veinticinco	$5^2 = 25$
Añádele treinta y nueve, y son sesenta y cuatro	$25 + 39 = 64$
Cuya raíz extraes, que es ocho	$\sqrt{64} = 8$
Entonces réstale la mitad de las raíces, que es cinco. Queda pues tres, que es la raíz del tesoro, y el tesoro es nueve	$8 - 5 = 3$

Cuadro 1.2: Traducción al lenguaje actual de la solución dada por Al-Khwãrizmĩ

$$x^2 + 10x = 39$$

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$$

$$(x + 5)^2 = 64$$

$$\sqrt{(x + 5)^2} = \sqrt{64}$$

$$x + 5 = 8$$

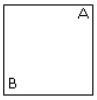
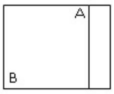
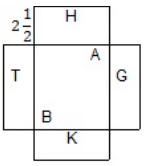
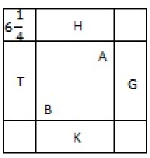
$$x + 5 - 3 = 8 - 3$$

$$x = 3$$

Así como de parte del procedimiento de los babilonios al completar cuadrados se podía establecer una igualdad, de esta demostración también se puede identificar una igualdad, pero que no está explícita y, además, parece no ser la intención del árabe:

$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$$

Piug (2011c) distingue entre demostraciones ingenuas, por usar figuras y sustentar su veracidad en ellas, demostraciones algebraicas en germen, al incluir la frase “por la expresión” y demostraciones geométricas, que siguen la axiomática de Euclides. Así, Piug afirma que las demostraciones que se encuentran en el libro de Al-Khwãrizmĩ son ingenuas y algebraicas en germen.

<table>
<tr><td>
</td><td>La causa es la siguiente. Un tesoro y diez raíces son iguales a treinta y nueve dirhams. Haz pues para ello una superficie cuadrada de lados desconocidos, que es el tesoro que queremos conocer, así como su raíz. Sea la superficie AB.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Pero cada uno de sus lados es su raíz, y cada uno de sus lados, si se multiplica por un numero cualquiera, entonces el número que se añade por ello es el número de raíces, cada una de las cuales es como la raíz de esta superficie.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Así, ya que se había dicho que había diez raíces con el tesoro, tomemos un cuarto de diez, que es dos y medio, y hagamos con cada cuarto una superficie con uno de los lados de la superficie. Se hacen así con la primera superficie, que es la superficie AB, cuatro superficies iguales cuyas longitudes son iguales cada una a la raíz de AB y cuya anchura es dos y medio, que son las superficies G, H, T, K.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Se engendra pues una superficie de lados iguales y desconocidos a la que le falta lo que se le ha quitado en los cuatro ángulos, a saber, en cada uno de los ángulos falta el producto de dos y medio por dos y medio. Lo que es necesario pues en números para completar la cuadratura de la superficie es cuatro veces el producto de dos y medio por dos y medio. Y la suma de todo ello es veinticinco.</td></tr>
</table>

Cuadro 1.3: Solución presentada por Al-Khwãrizmĩ (Tomado de Puig, 2011c, p. 100)

El aporte de Al-Khwãrizmĩ al álgebra es muy importante, en la medida que enseña, de manera elemental, a resolver ecuaciones aplicando un algoritmo para cada una de las diferentes seis formas canónicas. Si bien acompaña la solución de los problemas con figuras geométricas, solamente las usa para ilustrar la forma en la que completa cuadrados, pero no recurre a ellas para dar solución a las ecuaciones, y no se evidencia factorización de forma explícita, sin embargo de los pasos de las demostraciones que proporciona se puede identificar factorización de polinomios obtenidos de la ecuación original, como sucede en la última citada aunque, como se mencionó anteriormente, no se percibe la intención de factorizar polinomios.

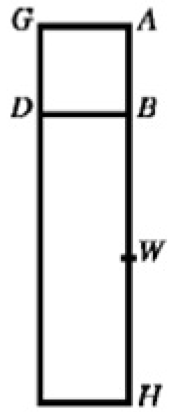
Thãbit Ibn Qurra

Este pensador que vivió entre 824 y 901 aprox., identifica una dificultad asociada con la relación entre la solución algebraica y la solución geométrica de la ecuación cuadrática. Cuando Thãbit trata de solucionar la ecuación “riqueza y raíces igual a números” que podemos interpretar como $x^2+px=n$ se da cuenta de que, desde la perspectiva euclidiana, no se puede igualar un área o un segmento de recta con un número, así que introduce una unidad de medida μ, con esto la ecuación (en términos modernos) queda de la forma $x^2+\rho\mu x=n\mu^2$, que puede interpretase geométricamente como suma de áreas (Soto, Mosquera & Gómez, 2005).

Thãbit Ibn Qurra se propone resolver el problema en la expresión general de la cuarta forma canónica tesoro mas raíces igual a números, como se muestra en el Cuadro 1.4.

Con base en la demostración y utilizando notación moderna, presentamos un ejemplo, de lo expuesto por Thãbit.

Pongamos el tesoro como un cuadrado ABGD. Pongamos en BH tantas veces la unidad con la que se miden las líneas como la cantidad dada de raíces, y completemos la superficie DH. Así la raíz es AB, porque el tesoro es el cuadrado ABGD (...)* Pero en BH hay tantas veces la unidad como la cantidad dada de raíces, así que el producto de AB por BH es también igual a las raíces del problema, en el campo de número y cálculo. Y el producto de AB por BH es la superficie DH, porque AB es igual a BD. Entonces la superficie DH también es igual a las raíces del problema [Recordar que Thãbit llama raíces a la expresión de la forma ρx]. Por tanto, la superficie total GH es igual al tesoro con las raíces añadidas. Pero el tesoro con las raíces es igual a un número conocido. Así que la superficie GH es conocida, y es igual al producto AH por AB, porque AB es igual a AG. Por tanto, el producto HA por AB es conocido y la línea BH es conocida, porque el número de sus unidades es conocido. Y así el asunto resulta ser un problema geométrico conocido: (...) Ahora bien, se ha demostrado en la proposición sexta del segundo libro de Euclides que, cuando la línea BH se corta en dos mitades en el punto W, el producto de HA por AB con el cuadrado en BW es igual al cuadrado en AW. Pero el producto HA por AB es conocido y el cuadrado en BW es conocido. Así que el cuadrado en AW es conocido y AW también es conocido, y substrayendo de él BW, que es conocido, resulta AB conocido, que es la raíz. Y multiplicado por sí mismo, el cuadrado ABGD es conocido, es decir, el tesoro. Y esto es lo que queríamos demostrar. (p. 98).

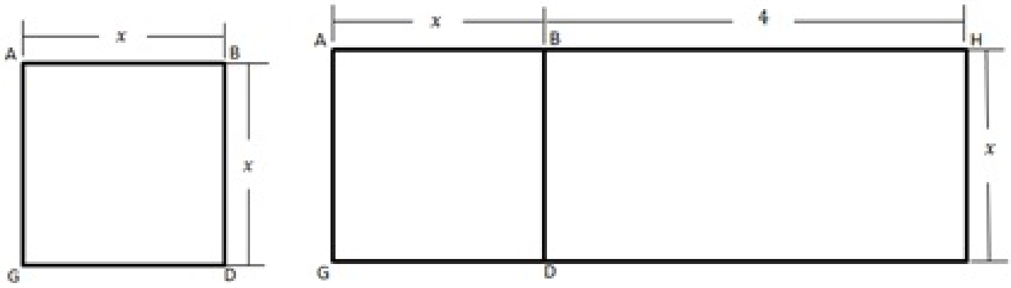


*Aunque actualmente consideremos correcta la lectura ABDG, antiguamente se nombraba el cuadrilátero como ABGD.

Cuadro 1.4: Thãbit presenta una forma para resolver ecuaciones (Tomado de Puig, 2011c, p. 98)

El tesoro será un cuadrado con longitud de lado x.

La longitud del segmento BH es 4 que corresponde al número de raíces.



Es decir que el área del rectángulo resultante es

$$AH \cdot AB = AH \cdot AG = (AB + BH) \cdot AG = (x + 4) \cdot x$$

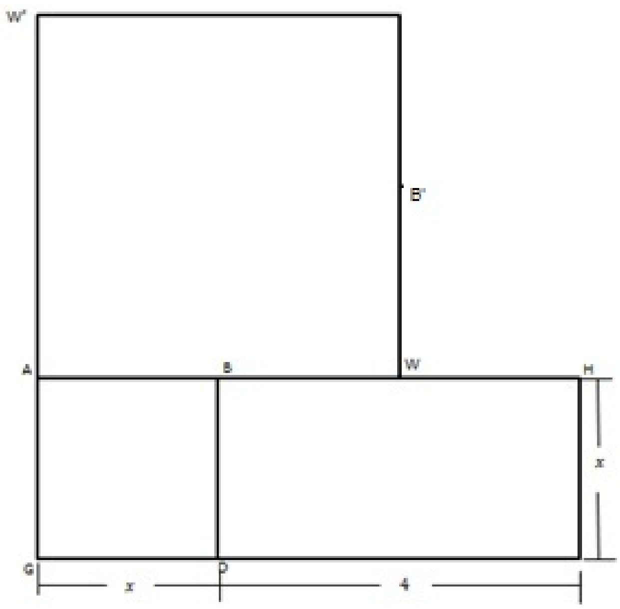
Pero $AG \cdot AH = 140$ que corresponde al tesoro unido con las raíces.

Así $x^2 + 4x = (x + 4) \cdot x = 140$

El punto w es el punto medio del BH

$BW = \frac{1}{2}BH$

Construimos un cuadrado cuya longitud sea AW

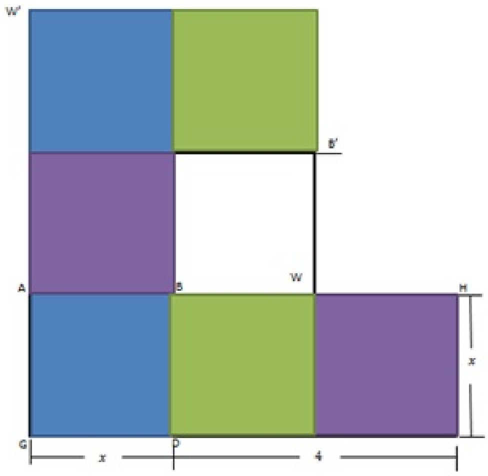


$BW = 2 = WB'$

Debido a la proposición II-6

$AH \cdot AB + (BW)^2 = (AW)^2$

Tracemos el cuadrado BB' que tiene como longitud BW



Así tenemos que:

$$(AW)^2 = AH \cdot AB + (BW)^2$$

$$(AW)^2 = 140 + 4$$

$$(AW)^2 = 144$$

$$AW = 12$$

Luego

$$AW = AB + BW$$

$$12 = AB + 2$$

$$10 = AB$$

Es decir que la longitud del cuadrado que represento el tesoro es 10.

A diferencia deAl-Khwãrizmĩ,Thãbit no parte del algoritmo, sino que plantea resolver el problema en términos generales a partir de la forma canónica.

Al parecer la idea de completar cuadrados nace de los babilonios, quienes la utilizaban para resolver ecuaciones particulares; pero la manera general se le debe a Thãbi Ibn Qurra, quien hace uso de las proposiciones planteadas por Euclides para relacionar cuadrados con rectángulos de forma tal que con ello logra plantear un método que hoy escribimos en términos simbólico-algebraicos como $x^2 + px + (\frac{p}{2})^2 = (x + \frac{p}{2})^2$.

1.1.5. Siglo XVI

A partir de esta época, debido, muy posiblemente, al surgimiento del lenguaje simbólico-algebraico, se elimina totalmente la dependencia a la figura o demostraciones que las incluyan. Otro factor importante para esta ruptura, fue la no posibilidad de asociar magnitudes geométricas a nuevas expresiones, como sugiere Kleiner (2007):

> Viète requería homogeneidad en las expresiones algebraicas (. . .) Este requerimiento de homogeneidad llevó a la antigua Grecia, donde la geometría tenía el dominio supremo. En la forma de pensar griega, el producto ab denotaba el área de una figura con lados a y b (. . .) Una expresión como $ab + c$ no tenía significado si no se podía asociar a una longitud o una área. Estas ideas fueron parte integral de la matemática práctica para cerrar dos milenios. (p.10)

El renacimiento fue una época de esplendor para la solución de ecuaciones con los trabajos de Leonardo de Pisa, Cardano, Tartaglia, Del Ferro, Viète, Harriot, Bezout y Descartes. Leibnitz usaba el método obtenido por Harriot para verificar las raíces obtenidas por la fórmula de Tartaglia-Cardano.

Niccolò Tartaglia (1499-1557) mostró a Girolamo Cardano (1501-1576) su fórmula sin demostración para resolver ecuaciones cúbicas de la forma

$$x^3 + px = q, x^3 + q = px \text{ y } x^3 = px + q,$$

la cual Cardano estudió, y con ayuda de su asistente Ludovico Ferrari, obtuvo una manera de resolver la ecuación general $x^3 + (px)^2 + qx = r$ reduciéndola mediante una transformación a una de las tres versiones que Tartaglia le había comunicado, y estos resultados los publicó en su obra *Ars Magna*, hacia el año 1545, obra considerada como la mayor contribución al álgebra.

François Viète (1540-1603) desempeñó un papel importante en la distinción entre variables y coeficientes, al usar vocales para las primeras y consonantes para las segundas. Esto contribuyó a que el álgebra se transformara de un estudio particular a uno general, lo que tuvo como consecuencia dotar de un carácter más abstracto al álgebra (Kleiner, 2007. p. 9).

Las bases del trabajo de Viète fueron las obras griegas: el libro siete de la obra de Pappus y la aritmética de Diofanto (Klein, 1992, citado en Morales, 2008). Además, como menciona Morales (2008):

> Otro método general explorado por Viète fue la factorización de polinomios de segundo grado, expresada como producto de factores de primer grado, pero fracasó parcialmente, porque rechazó las raíces negativas y porque no tenía la teoría suficiente, como el teorema de factorización, el cual está basado en un método general. (p. 24)

Sin embargo, el desarrollo de este método (que fue extendido a polinomios de grado mayor que 2) permitió la aparición de relaciones como la existente entre el grado y el número de raíces, o cuántas de estas serían positivas, negativas y complejas.

1.1.6. Siglo XVII

El siguiente personaje de nuestro recorrido histórico es el matemático inglés Thomas Harriot (1560-1621) y su obra “Artis analyticae praxis” (1631) que, como resaltan Acevedo y Falk (1997, p. 57), es la obra en la cual, por primera vez, aparece la factorización como método de solución de algunas ecuaciones cuadráticas.

La obra "Artis analyticae praxis" (1631), es "un trabajo en teoría de ecuaciones y solución de ecuaciones polinómicas numéricas" (Fox, 2000, citado en Hill, 2011, p. 153), y está influenciada por la obra *In artem analyticen isagoge*(1591) de François Viète.

En su notación, al igual que en la de Viète, las vocales representan variables y las consonantes números positivos. Esto le permite trabajar de manera simbólica, aunque con una notoria diferencia con el lenguaje moderno: las potencias no son expresadas con superíndices sino con una sucesión de letras, ejemplo: no escribe a^3 sino aaa.

Para la obra son fundamentales las ecuaciones canónicas, las cuales llama precisamente canónicas porque "están adaptadas a los cánones o reglas para encontrar raíces numéricas" (Hutton, 1815, p. 94, citado en Hill, 2011, traducción libre). Las ecuaciones canónicas se originan por multiplicación de factores binomiales, lo que Hill muestra en lenguaje moderno como sigue: Si a es la raíz de la ecuación, $x = a$
entonces, $x - a = 0$
si b es una raíz, $x = b$
entonces, $x - b = 0$
De esto se tiene que [9] $(x - a)(x - b) = 0$
por ejemplo, $x^2 - (a + b)x + ab = 0$
y $x^2 - (a + b)x = -ab$

La última expresión es una **ecuación canónica** y aquí Harriot establece que todas las ecuaciones que tengan esta forma tendrán como raíces a y b (Seltman & Goulding, 2007, p. 5, traducción libre). En la sección 2 del libro se muestra

[9] A Harriot se le atribuye el hecho de ser el primero en igualar todos los términos de una ecuación a cero.

la generación de las ecuaciones canónicas por la multiplicación de binomios y clasificadas en cuadráticas (3), cúbicas (11) y bicuadráticas (de grado 4) (18), y procede a explicar la generación de cada una. Para nuestro caso específico, nos concentramos en la obtención de ecuaciones cuadráticas. Se resumirá la proposición 1 de la sección 2 (Seltman & Goulding, 2007, p. 38):

Afirma que la ecuación canónica $aa - ba + ca = bc$ es deducida de la original $(a-b)(a+c) = aa - ba + ca - bc$ [10]; porque si se hace $a = b, a - b = 0$, entonces $(a-b)(a+c) = 0$. De las dos igualdades anteriores, se puede establecer que $aa - ba + ca - bc = 0$, por lo que $aa - ba + ca = bc$, que es la ecuación propuesta. Por lo tanto, la ecuación canónica propuesta es deducida de la ecuación original, haciendo b igual a a, como se ha dicho. Continuando la búsqueda en esta obra, nos detenemos en la sección 4, en la cual encontramos 40 proposiciones que están estructuradas según los siguientes pasos:

- Paso 1: Enunciado de la proposición: se presentan las raíces de una ecuación dada.
- Paso 2: Pruebas: se sustituyen las raíces dadas en la ecuación para mostrar que efectivamente cumple la igualdad.
- Paso 3: Enunciado del lema: establece que las raíces anteriormente dadas son únicas.
- Paso 4: Demostración del lema: se realiza por contradicción: se supone otra raíz que cumpla la condición y se llega a una contradicción de la hipótesis.

Resulta de gran interés el último paso, ya se aparentemente usa la factorización para finalizar su prueba y posteriormente llegar a la contradicción. Veamos la proposición 1 de esta sección (que parte de la misma ecuación que la proposición 1 de la sección 2):

[10] Para representar la multiplicación, Harriot no usa la forma $(a-b)(a+c)$, sino la configuración $\begin{array}{c|} a-b \\ a+c \\ \hline \end{array}$

La raíz de la ecuación: $aa - ba$
$+ca \quad = \quad +bc$ *es* b, *igual a la raíz del* a *buscado*

(Seltman & Goulding, 2007, p. 52)

	Presentación por Harriot	Traducción al lenguaje actual
PASO 1	La raíz de la ecuación $aa - ba$ $+ca \quad = \quad +bc$ es b, igual a la raíz del a buscado	La raíz de la ecuación $a^2 - ba + ca = bc$ es b.
PASO 2	Por ejemplo, $a = b$ Si en la ecuación $aa - ba$ $+ca$ $= +bc$, b se hace igual a la raíz a cambiando a por b	Si $a = b$ En la ecuación $a^2 - ba + ca = bc$ se sustituye a por b
	Entonces la ecuación se convierte en $bb - bb$ $+cb \quad = +cb$	La ecuación se convierte en $b^2 - b^2 + cb = cb$
Para la cual la igualdad es evidente. Por lo tanto, haciendo $a = b$ para tener la igualdad.		

Sin embargo, no hay otra raíz de la ecuación igual a a, excepto b, como se establece en el siguiente lema.

	Presentación por Harriot	Traducción al lenguaje actual
PASO 3	Lema: Si es posible dar otra raíz (por ejemplo positiva) de la ecuación aa, la cual no es igual a la raíz b, llámese c a esta raíz, sin alguna otra.	Supongamos que existe una raíz c de la ecuación, diferente de a
PASO 4	Por lo tanto, haciendo $c = a$, la ecuación se convierte en $cc - bc$ $+cc \quad = +bc$	Haciendo $c = a$, se obtiene $c^2 - bc + c^2 = bc$
	Por lo cual $cc + cc \quad = +bc + bc$	Entonces $c^2 + c^2 = bc + bc$
	Como $\frac{c + c}{c} \quad \frac{= c + c}{b}$ por lo tanto $c = b$	Como $c(c + c) = b(c + c)$, entonces $c = b$

Lo que es contrario a la hipótesis. Por lo tanto c no puede ser igual a a, que es el caso para cualquier valor de a excepto b, los cuales pueden ser demostrados de forma similar.

Finalizada esta proposición encontramos un comentario de Hill (2011):

> La primera ecuación resuelta es $a^2 - (b + c)a - bc = (a - b)(a + c) = 0$. El pensamiento contemporáneo (debido a Viète) que solo se debían considerar las soluciones positivas de una ecuación se aplica acá; en este caso la raíz $-c = a$ no está permitida. La forma factorizada de la ecuación cuadrática no aparece en la prueba. (p.50)

Como lo indica la última frase, la forma factorizada de la ecuación cuadrática no aparece; es importante resaltar lo que sucede en el paso 4:
Se sustituye la posible raíz c en la ecuación, y después de realizar la suma de términos, encontramos la equivalencia en lenguaje actual

$$c(c + c) = b(c + c)$$

que muestra lo que conocemos como factorización por factor común, pues ha expresado $cc + cc$ como $(c + c)c$ y $+bc + bc$ como $(c + c)b$.

Lo anterior permite establecer la igualdad $c = b$ que lo lleva a la contradicción, a la vez que se muestra que c debe ser igual a b, la única raíz de la ecuación.

Vietè intentó demostrar geométricamente algunos resultados algebraicos, lo que lo obligó a ignorar las raíces negativas o complejas. René Descartes (1596-1650) logró solventar dicho problema en su obra Geometría (1637), en la cual establece los fundamentos para la geometría analítica. En su obra, Descartes usó notación simbólica, las últimas consonantes del alfabeto para nombrar las variables y vocales para los coeficientes.

La forma en la que solventó los problemas de la aparente no relación entre álgebra y geometría en expresiones como ab+c, fue con lo que se conoce como "álgebra de segmentos". En esta, construyó segmentos de longitud $a+b$, $a-b$, ab, a/b y $\sqrt{a}$. Ahora, expresiones como ab+c sí tenían sentido dentro de la geometría, y puso fin a uno de los problemas de Vietè. Este gran aporte logró que el álgebra tomara el rol del "lenguaje de las matemáticas" que tuvo la geometría por dos milenios (Kleiner, 2007, p. 10).

Entre sus principales preocupaciones estaba la determinación de la existencia, naturaleza y número de raíces de una ecuación polinómica (Ibid.). Kleiner sintetiza estas preocupaciones a continuación:

1. ¿Todas las ecuaciones polinómicas tienen una raíz? (existencia) De ser así, ¿De qué tipo son? (naturaleza) Estas dos cuestiones fueron resueltas con el Teorema Fundamental del Álgebra (TFA).
2. ¿Cuántas raíces tiene una ecuación polinómica? (número) Y es acá, en su Geometría, que Descartes proporciona el teorema del factor, que se puede enunciar de la siguiente manera:

   Si r es raíz de $p(x) = x^n + a_n x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + ... + a_1 x + a_0$
   entonces $p(x) = (x-r)q(x)$ donde $grad\, q(x) < grad\, p(x)$,

   entendiendo $grad$ como grado del polinomio. De lo anterior, y para contestar cuántas raíces tiene la ecuación polinómica, se aplica este teorema recurrentemente y se obtiene que un polinomio de grado n tiene exactamente n raíces, no necesariamente distintas, la existencia de una es garantizada por el TFA. Entonces, el polinomio se puede expresar como producto de factores, es decir, $p(x) = (x-r_1)(x-r_2)\dots(x-r_i)$. Además, el TFA garantiza que r_i es un número complejo.

Durante el siglo XVI y XVII, se aceptaba que todos los polinomios de grado impar con coeficientes reales tenían una raíz real, lo que fue establecido formalmente en el siglo XIX como consecuencia del Teorema del valor intermedio en Cálculo. En el proceso de determinar la naturaleza (específica) de las raíces, Descartes ofrece un algoritmo para encontrar todas las raíces racionales de un polinomio $p(x)$ con coeficientes enteros[11]. También establece la prueba de los signos que sería conocida como la regla de los signos de Descartes:

> El número máximo de raíces positivas de $P(x) = 0$, con $P(x)$ un polinomio, es el número de alteraciones en el signo de los coeficientes y el máximo de las negativas es el número de veces que dos signos + o dos signos – ocurren sucesivamente[12].

1.1.7. Edad contemporánea

Hacia este siglo, el álgebra trascendió de la solución de ecuaciones al estudio de estructuras como grupos, anillos y campos, como lo mencionan Campos & Torres (2000, p. 5): "A partir de los trabajos de Lagrange, Legendre, Gauss y especialmente Abel, Evariste Galois logró determinar cuáles ecuaciones de grado superior a cuatro eran solubles por radicales y cuáles no (. . .)".
Además:

> [Así] crece el interés por encontrar mejores métodos para resolver ecuaciones de cualquier grado; así, la búsqueda de la solución de ecuaciones de grado mayor que cuatro, llevó a encontrar los teoremas de factorización en un dominio de integridad, específicamente en el dominio de integridad de los polinomios. (Campos & Torres, 2000, p. 5)

La teoría de grupos aparece en 1770 y se extiende por dos siglos. Dicha época, según Kleiner (2007, p. 17), se caracteriza por: aumento de la rigurosidad, necesidad de abstracción, renacimiento del método axiomático y visión de las

[11] Para más información, consultar Kleiner, 2007, p. 11

[12] Vale la pena resaltar que como los conceptos de grupos, anillos o campos se desarrollan posteriormente, Descartes no menciona si los teoremas son aplicables en alguna estructura algebraica particular

matemáticas como una actividad humana. Bajo este contexto, el álgebra sufrió una transición del álgebra clásica de ecuaciones polinómicas al álgebra moderna de sistemas axiomáticos. Dicha teoría tiene sus principales fuentes en el álgebra clásica de Joseph Louis Lagrange (1736–1813), la teoría de números de Carl Friedrich Gauss (1777-1855), la geometría de Félix Klein (1849-1925) y el análisis de Marius Sophus Lie (1842-1899), Henri Poincaré (1854-1912) y Klein. No entraremos en detalles por no ser objeto directo de este estudio.

La teoría de anillos aparece en el siglo XIX y presenta su auge a comienzos del siglo XX. Surgen dos ramas de esta teoría: los anillos conmutativos y los no conmutativos. La teoría de anillos conmutativos surge de los estudios de la teoría de números algebraicos, la geometría algebraica y la teoría de invariantes. Debido a la extensión del tema y conceptos relacionados que aparecen, solo citaremos los casos específicos en los cuales se evidencia el uso de la factorización

Como menciona Kleiner (2007, p. 59), Euler y muchos matemáticos intentaron realizar la prueba del último teorema de Fermat, para el cual, el primero, escribía, por ejemplo, $x^3 + y^3 = z^3$ como $(x + y)(x + y\rho)(x + y\rho^2) = z^3$, donde $\rho = \frac{(-1+\sqrt{3}i)}{2}$ es una raíz cúbica primitiva de 1, y esta es ahora una ecuación en el dominio $D_3 = \{a + b\rho : a, b \in Z\}$. Así se hace recursivamente para D_p, asumiendo que es un Dominio de Factorización Única, para llegar finalmente a una contradicción que permite probar (cabe anotar que con más elementos) el Último Teorema de Fermat. Esta forma de representar las ecuaciones se empleó también para la solución de algunos casos particulares de la ecuación de Bachet $x^2 + k = y^3$.

Posteriormente, aparecen las "formas cuadráticas binarias", expresiones de la forma $f(x, y) = ax^2 + bxy + y^2, a, b, c \in Z$. El objetivo de la teoría de formas cuadráticas binarias es encontrar un número entero m para el cual $f(x, y) = m$. Al igual que el caso anterior, estas formas cuadráticas se expresan como producto de factores, en los cuales interviene el llamado discriminante $D = b^2 - 4a$, que actualmente es una herramienta para comprobar rápidamente si una ecuación (polinómica en una variable) es factorizable en $\mathbb{R}$. Ernst Eduard Kummer (1810–1893) y Richard Dedekind (1831-1916) hicieron importantes aportes al estudio de la factorización única en algunos dominios (al establecer ideales y divisores respectivamente), que representaría la mayor ocupación de la nueva teoría de números algebraicos.

Finalmente, ya en este periodo aparecen algunos teoremas y definiciones referentes a la factorización que surgieron a lo largo del estudio de Dominios de Factorización Única, los cuales son aplicables en campos, los cuales se mencionan a continuación.

Si F es un campo, el dominio de integridad de los polinomios en x con coeficientes en F, se denota $F[x]$. Para $F[x]$ se pueden demostrar las tres proposiciones anteriores, con lo cual se puede enunciar el Teorema de Factorización Única en $F[x]$:

> Cada polinomio $p(x) \in F[x]$, de grado positivo, es el producto de un elemento diferente de cero de F y polinomios mónicos irreducibles en $F[x]$. Excepto por el orden de los factores, esta factorización es única. (Campos & Torres, 2000, p. 6)

Además:

> Del teorema fundamental del álgebra, se deriva que si $p(x) \in C[x]$ es un polinomio de grado $n > 0$, entonces $p(x)$ se puede expresar como un producto de n factores lineales (no necesariamente diferentes) y por cada uno de estos factores se obtiene un cero del polinomio o, lo que es lo mismo, una solución de la ecuación algebraica $p(x) = 0$. Así, el problema de determinar las soluciones de una ecuación algebraica es equivalente al problema de factorizar completamente el polinomio. (Campos & Torres, 2000, p. 7)

Teorema del residuo: Sea $f(x)$ una función polinómica con coeficientes de un campo F. Entonces el valor de la función $f(d)$, es igual al residuo cuando se divide $f(x)$ por $(x-d)$.

Así, terminamos un breve recorrido de más de 4000 años buscando vestigios de procesos de factorización o uso de figuras para realizarlos. Inicialmente, se empleaban figuras como un apoyo visual, después, para realizar sobre ellas demostraciones rigurosas siempre con una frontera borrosa entre álgebra y geometría, lo que implicaba interpretar los resultados de las figuras como expresiones factorizadas, sin tener garantía de que esta fuera la verdadera intención de los matemáticos de la época; lo que implicaba una conexión inseparable entre expresiones y figuras (babilonios y Euclides). La ruptura de la conexión entre figuras y expresiones se encuentra con Diofanto, quien usó las identidades para solucionar ecuaciones, sin cuestionar dichas identidades.

Sin embargo, aparecen de nuevo las figuras, en este caso como un apoyo para demostrar la veracidad de la solución de los problemas planteados de forma algebraica (con los árabes). Finalmente, los trabajos realizados en el renacimiento y los siglos posteriores formalizan el álgebra: si bien no inicialmente con lenguaje moderno (específicamente en el renacimiento), sí lo hacen imprimiendo rigurosidad y ampliando los estudios de ecuaciones particulares a generales, lo cual desembocó en la teoría formal de polinomios y su respectiva búsqueda de raíces para la ambicionada igualdad entre producto de factores y cero, proporcionando los teoremas que actualmente se usan para los estudios de factorización en anillos de polinomios y estableciendo las importantes relaciones entre aritmética y álgebra. Como se observó, aparecieron términos como: polinomio, ecuación polinómica y funciones polinómicas que vale la pena precisar, es lo que realizaremos en la segunda parte de este capítulo.

Algunas de las estrategias que aparecieron en la historia, que hoy son utilizadas para factorizar polinomios, no corresponden estrictamente a polinomios, al menos a la idea de polinomio usual, como se vio, aparece la escritura de polinomios en forma de productos, que es la idea que se quiere utilizar para la propuesta que se presenta en este trabajo, como fase inicial al tratamiento de la factorización de polinomios. Este estudio histórico aporta herramientas didácticas que pueden favorecer la construcción del concepto de factorización de polinomios, como esperamos, se evidencie más adelante.

Gracias a la redacción de este capítulo, surgen preguntas como: ¿Qué es lo que se factoriza en la escuela? ¿Polinomios en una indeterminada o en dos? ¿Se utiliza el término factorización con todo lo que ello implica (escribir como factores y que estos sean irreducibles)?, ¿Es correcta esta idea desde el punto de vista matemático, es decir «factorización de polinomios»?. Por ello, nuestra propuesta es un inicio al proceso de generalización de polinomios, haciendo una relación con la forma como surgió en la historia (relacionando expresiones algebraicas con la representación geométrica), pero también refiriendo algunos elementos propios de la factorización de polinomios como la importancia de la irreductibilidad de los factores.

1.2. Polinomios, ecuaciones polinómicas y funciones polinómicas

Se llama polinomio con coeficientes reales a una expresión de la forma:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

Donde todos los a_i son números reales y el símbolo x con un exponente (entero positivo n) es una indeterminada[13] .

A cada uno de los sumandos los llamamos términos del polinomio y el mayor valor de n para el cual a_n es diferente de 0 lo llamamos del grado del polinomio $P(x)$ y se nota

[13]Se ha llamado indeterminada ya que el símbolo x no juega papel alguno, pues todo el trabajo se realiza sobre los coeficientes (Basado en Luque, Mora & Torres, 2006).

$graP(x) = n$ o $grP(x) = n$. El grado del polinomio nulo, es decir, el polinomio cuyos coeficientes son todos cero, notado $I(x) = 0$, no está definido (Luque, Mora & Torres, 2006, p. 151).
Se puede extender la noción de polinomio en una indeterminada x a estructuras más generales que los números reales, considerando expresiones de la forma:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

Donde los coeficientes a_i pertenecen ahora a un anillo A, y se define el polinomio $I(x) = 0$ como el polinomio que tiene todos sus coeficientes iguales a cero (Luque, Mora & Torres, 2006, p. 157).

Hasta el momento los polinomios se han definido en una indeterminada, pero se encuentran también polinomios en dos indeterminadas, como definen Pérez, Palacios & Villamizar (2003, p.40) a continuación:

"Se acostumbra denotar el conjunto de polinomios junto con sus operaciones y sus propiedades con el símbolo $F[x]$, donde F representa uno de los campos numéricos $\mathbb{Q}$ de los racionales, $\mathbb{R}$ de los reales o $\mathbb{C}$ de los complejos: $F[x]$ es el dominio de polinomios en la indeterminada x con coeficientes en F. El dominio de $F[x]$ tiene las mismas propiedades algebraicas (las que tienen que ver con las operaciones) que el conjunto $\mathbb{Z}$ de números enteros, y es posible, por tanto considerar a $F[x]$ como un conjunto de coeficientes para formar nuevos polinomios. La expresión $P_3y^3 + p_2y^2 + p_1y + p_0$ donde los coeficientes p_3, p_2, p_1, p_0 son polinomios de $F[x]$ dados por

$$p_3 = p_3(x) = 2x^2 + x - 1$$
$$p_2 = p_2(x) = 5x - 1$$
$$p_1 = p_1(x) = 3x^3 - x^2 + 2$$
$$p_0 = p_0(x) = x - 1$$

Es un polinomio en y con coeficientes en $F[x]$, que también puede escribirse de la forma:

$$(2x^2 + x - 1)y^3 + (5x - 1)y^2 + (3xx^2 - x^2 + 2)y + (x - 1)$$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$(2x^2 + x - 1)y^3 + (5x - 1)y^2$$

$$+(3x^3 - x^2 + 2)y + (x - 1)$$
$$= 2x^2y^3 + xy^3 - y^3 + 5xy^2 - y^2$$
$$+3x^3y - x^2y + 2y + x - 1$$

De esta manera se construye el conjunto

$$(F[x])[y]$$

de polinomios en y con coeficiente en $F[x]$, que se denota en forma más simple como: $F[x, y]$ y es el conjunto de polinomios en x,y con coeficientes en F".

Para el caso específico del presente trabajo de grado, se trabajará con polinomios $P(x)$ cuyos coeficientes pertenecen al anillo de los números enteros $\mathbb{Z}$ (excepto el coeficiente del término cuadrático que debe pertenecer a los $\mathbb{Z}^+$) con $grP(x) = 2$.

Ecuación polinómica se llama a una expresión de la forma

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = 0$$

A través de la historia se puede evidenciar que este nombre surge cuando se hallaban las raíces que validaban la expresión.
Función polinómica f es, según Jarne, Minguillón, & Zabal (2004) toda función de dominio el conjunto de los números reales, tal que la imagen de cada número real x es:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

Donde los coeficientes a_i son números reales y n es un entero positivo. Tuvieron su origen cuando se creó la geometría analítica con Descartes.

Definición: Se dice que el polinomio $p(x) = x^n + a_n + ... + a_1x + a_0$ donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son enteros, es primitivo si el máximo común divisor de $a_0, a_1, \ldots, a_n$ es 1 (Acevedo y Falk, 1997, p. 282).

Es importante aclarar que todos los teoremas de divisibilidad en el anillo de los números enteros se aplican al anillo de los polinomios.

Irreducibilidad

Como se mencionó en un apartado anterior, cuando comenzaron los estudios de Dominios de Factorización Única (e incluso en los trabajos de Harriot y Descartes), se buscaba expresar el polinomio como producto de factores irreducibles; tal vez por el interés, siempre presente, encontrar expresiones análogas al número primo en $\mathbb{Z}$ en otros conjuntos numéricos[14], los polinomios irreducibles. Según Zalamea (2007), un polinomio se define como sigue:

> Sea $P(x) \in A[x](A = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$. $P(x)$ es irreducible en $A[x]$ si y solo si P no puede descomponerse en un producto de dos polinomios en $A[x]$ de grado estrictamente menor: no existen $S, T \in A[x]$ tales que $P = ST, grad\ (S) < grad\ (P)$ y $grad\ (T) < grad\ (P)$[15]. (p. 137).

De esto deriva que la irreductibilidad de un polinomio depende del conjunto en el que esté A, incluso depende del dominio al cual pertenezca dentro del mismo conjunto. Además, se tiene que todo polinomio de grado 1 es irreducible pero no necesariamente todo polinomio irreducible es de grado 1.

[14]La analogía que se perseguía entre números primos y polinomios irreducibles deja ver la equivalencia entre el Teorema Fundamental de la Aritmética y el Teorema de Factorización Única, pues así como se puede expresar un número como producto de números primos, salvo unidades y orden de los factores, se puede expresar un polinomio como producto de polinomios irreducibles salvo unidades y orden de los factores.

[15]Es importante resaltar que si el grado de S o T es cero, se contemplan lo valores constantes, que serán determinantes en el desarrollo del trabajo de grado.

Capítulo 2

MATERIAL MANIPULATIVO

El presente trabajo de grado, como se mencionó con anterioridad, propone una alternativa de enseñanza del proceso de factorización mediante el uso de las *Tabletas Algebraicas*. En este capítulo se hará una breve descripción del material que se propone (la ampliación de esta descripción se expone en el capítulo siguiente), seguida por el marco de referencia que sustenta el uso del mismo, y finalmente una breve mención acerca de la pertinencia del material en los procesos de aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes.

2.1. Descripción del material *Tabletas Algebraicas*

Las *Tabletas Algebraicas* son un material manipulativo nominado así por un grupo de estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la UPN, derivado de los bloques multibase (BAM), o Bloques de Dienes. Son fichas rectangulares conformadas por seis modelos básicos, un cuadrado de lado a, otro de lado b, otro de lado 1 (unidad)[1], un rectángulo de lados a y b, otro de lados a y 1, un tercer rectángulo de lados b y1, como puede verse enseguida:

[1]Para facilidad en el momento de calcular áreas, se representará en las imágenes la unidad como 1, aunque esto no implica que la unidad deba ser 1 cm

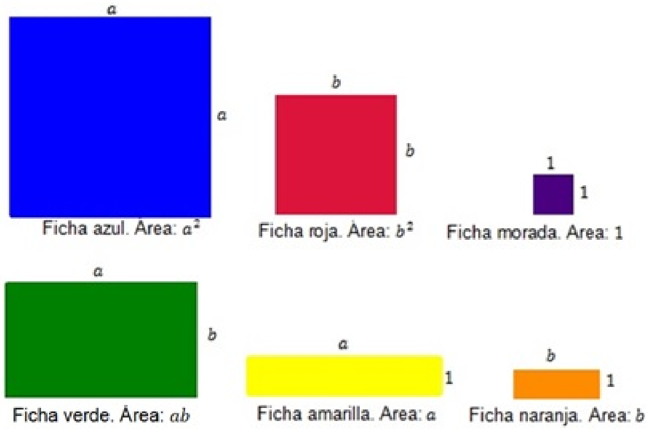


Figura 2.1: Áreas de las fichas

A continuación, se presentará de forma breve el marco de referencia dentro del cual se enmarca el manejo del material.

2.2. Materiales manipulativos

La enseñanza de las matemáticas ha ido adquiriendo un papel importante en la comunidad de profesores, teniendo como un objetivo principal crear diferentes vías para construir conocimientos en los estudiantes y además propender porque en el aula existan diferentes vías para construir conocimientos con los estudiantes. De acuerdo con esto, se han integrado al aula recursos, que Godino, Batanero & Font (2003, citado en Uicab, 2009, p. 1010) han clasificado en dos grupos: ayudas al estudio (libros, tutoriales, etc.) y materiales manipulativos, estos últimos enfocados en apoyar y potenciar el razonamiento matemático: manipulativos tangibles (concretos) los cuales “propician un marco para la resolución de problemas, discusión, comunicación y reflexión”, y manipulativos gráfico-textuales-verbales, en los cuales “participan la percepción visual y/o auditiva; graficas, símbolos, tablas, etc.”.

Con base en lo anterior, las Tabletas Algebraicas clasifican como recurso manipulativo tangible debido al énfasis que se da a los elementos visuales y táctiles (forma, color, tamaño).

Los materiales tangibles aparecen con las publicaciones de Zoltan Dienes y Jerome Bruner, lo cual desató una oleada de investigaciones que articulaban materiales que involucraban simultáneamente la percepción táctil (como ábacos, regletas, balanzas, etc.) y temas matemáticos (como conteo, fracciones, suma y resta), que arrojaron resultados satisfactorios, sobretodo en estudiantes de primaria (Uicab, 2009). Es importante resaltar que la implementación de dichos materiales se hizo con el fin de contribuir a procesos de abstracción, buscando ayudar a que los estudiantes pudieran hacer el tránsito de lo tangible a lo abstracto y a partir de ello, asignarán significado a conceptos matemáticos, sin pretender generar dependencia al material. Para el caso particular de las Tabletas Algebraicas, se busca que el estudiante asuma los términos de un polinomio, en una o dos variables, como áreas que pueden representarse con las fichas, y por medio de su unión, y la posterior conformación de un rectángulo (etapa que corresponde a manipulación directa del material), se pueda concluir que, al encontrar la longitud de los lados del rectángulo construido, se está realizando un proceso algebraico usando nociones de área (etapa de transición geometría-álgebra), y que este proceso, dejando de lado las representaciones geométricas, equivale a factorizar un polinomio (etapa de abstracción). Como valor agregado, la manipulación del material propicia comunicación entre estudiantes y reflexión a nivel grupal, ya que el profesor responsable de la clase cumple con su papel de orientador y permite que los estudiantes por medio de la exploración infieran información que se confirma con él.

2.3. Artefactos e instrumentos

Se han hecho estudios sociológicos acerca de la influencia de los artefactos en el desarrollo cultural de la humanidad, un ejemplo de ello es la escritura y la forma en la que fortaleció las capacidades de la mente y cambió los esquemas tradicionales de comunicación. En términos de Bartolini & Mariotti (2008, p.1):

> [el ejemplo] lo conduce a uno a reflexionar sobre el papel cognitivo de las representaciones y a la consideración básica de que cualquier representación se origina debido a una construcción humana que la hace posible; en otras palabras, cualquier representación está sustentada por un artefacto

En este sentido es importante determinar qué se entiende por artefacto, término que es diferenciado con el de instrumento desde el enfoque instrumental de Rabardel (citado en Bartolini & Mariotti, 2008, p. 4), así:

- Artefacto: "objeto material o simbólico en sí mismo".
- Instrumento: "entidad mixta hecha de componentes de tipo artefacto y componentes esquemáticos que podemos llamar esquemas de utilización. Esta entidad mixta surge del sujeto y del objeto". Esto es, desde nuestra interpretación, un artefacto es un instrumento cuando es utilizado por algún sujeto, con un fin particular.

Tomamos el siguiente ejemplo de Del Castillo & Montiel (2009, p.460):

> Cuando Van Gogh utiliza cañas, talladas como una pluma de ganso. La caña se convierte en el instrumento de sus dibujos. Le da la posibilidad de profundizar sus hojas y de inspirar los contornos. Este artefacto le permite imitar el gesto ancho de los pintores japoneses, que no utilizan la caña, sino el pincel. Particularmente flexible, la caña da origen a una manera de hacer, que traduce todo un vocabulario de signos: punteados, plumeados, redondeados y sobre todo los remolinos que se convierten en una de las técnicas principales del pintor.

Relacionando estos conceptos con las Tabletas Algebraicas, vemos que el "artefacto" se podría asociar con las fichas rectangulares en general, el material manipulativo en sí mismo y el "instrumento" es en lo que se convierte dicho artefacto cuando el estudiante, a partir de las fichas de dimensiones y colores determinados, realiza las tareas específicas propuestas por el profesor. Ahora, queremos hacer una pausa en "instrumentos" para mencionar lo que Bartolini & Mariotti (2008) llaman "génesis instrumental", lo cual puede evidenciarse en el uso de las Tabletas Algebraicas. A partir del artefacto, se origina y evoluciona el instrumento, este proceso tiene dos fases (Bartolini & Mariotti (2008):

- Instrumentalización, en el cual se explora los componentes del artefacto, sus características físicas y la cantidad de cada una de ellas.

- Instrumentación, en el cual aparecen y se desarrollan los esquemas de utilización, estructuras en las cuales se organizan e incorporan experiencias pasadas que permiten analizar información posteriormente, y que son orientadas por las actividades propuestas. Permite establecer las potencialidades y limitaciones que posee el artefacto, lo que en las Tabletas Algebraicas equivale a:
  - Permite entender un coeficiente como el número de veces que se debe emplear una expresión (o área).
  - Crea una conexión directa y tangible entre expresiones algebraicas y geometría, de modo que el estudiante cuenta con mayor número de representaciones de un concepto matemático.
  - Determinar el número límite de fichas que se pueden unir debido a las dimensiones y como consecuencia limita el número de polinomios en una y dos variables que se pueden representar.
  - Se evidencia que el coeficiente del término cuadrático debe ser positivo necesariamente.

Estos dos procesos son muy importantes en la medida en que generan en los estudiantes procesos de reorganización de conceptos, y se construyen estructuras cognitivas que permiten establecer relaciones entre las representaciones manejadas, los elementos físicos presentes y el concepto que se quiere abstraer con el uso del instrumento.

Artefactos y mediación semiótica[2]

Al mencionar la reorganización de conceptos y la construcción de estructuras cognitivas (instrumentación), notamos que el material actúa como mediador, lo que ampliamos acudiendo a Bartolini & Mariotti (2008): “El término [mediación] se usa precisamente para referirse a la potencialidad de fomentar la relación entre alumnos y el conocimiento

[2]No profundizaremos en la perspectiva vygotskiana de los signos y las implicaciones culturales que estos tienen, solo resaltaremos algunos ejemplos de los que se considera sistemas de signos: lenguaje natural, sistemas algebraicos y aritmética. Para ampliar el tema de mediación recomendamos la lectura de Bartolini & Mariotti (2008), donde, además, se hace una descripción de la relación entre la polisemia del artefacto y el surgimiento de los signos.

matemático y está muy relacionado con la realización de una tarea" (pg. 9). Entonces, en el aula se evidencia que el profesor usa las *Tabletas Algebraicas* para poder enseñar a los estudiantes el proceso de factorización, es decir, usa el artefacto como mediador entre los estudiantes y el contenido matemático. Para finalizar, bajo una perspectiva vigotskiana catalogaremos a las *Tabletas Algebraicas* como "herramienta de mediación semiótica" porque "[es] intencionalmente usado por el profesor para mediar un contenido matemático a través de una intervención didáctica diseñada" (Bartolini & Mariotti 2008, pg. 13).

En estas mediaciones se ven implicadas diferentes representaciones, ya que la naturaleza particular de los objetos matemáticos requiere de representación(es) externa(s) que medien su manipulación y de esta manera diseñar las tareas que permitirán al estudiante hacer una aproximación conceptual al objeto. Bajo esta idea, las representaciones, en particular, referidas a las matemáticas, han sido abordadas por muchos autores, uno de los más destacados es Jerome Bruner (1990), quien afirma que el sujeto transforma la información que le llega mediante tres tipos de representación, y otro, Raymond Duval (1999), quien enfatiza que la meta principal de la enseñanza de las matemáticas es conseguir que los estudiantes sean capaces de pasar desde una representación a otra, ya que de esta manera se tiene una mayor comprensión del objeto matemático.

2.4. Representaciones

Jerome Bruner (citado en Orton, 1998), identificó tres etapas en el aprendizaje de conceptos matemáticos: la enactiva, que es en la que se manipula un aparato concreto, en nuestro caso la manipulación de las Tabletas Algebraicas, la icónica, que se evidencia cuando se emplean imágenes de algún tipo o dibujos, gracias a ella se pueden sustituir los objetos concretos reales por sus imágenes, y el simbólico a través del lenguaje en los que se pueden utilizar símbolos de naturaleza matemática.

Orton (1988, p. 178) dice: "Alternativamente, pueden considerarse las tres formas de representación, como tres enfoques diferentes de aprendizaje, con su adecuación relacionada con las características específicas del que aprende como la experiencia y los conocimientos previos”

Dienes, inspirado, entre otros, en Bruner, creía que no se podían aprender matemáticas de modo de estímulo-respuesta, ya que no era el contexto matemático el que proporcionaba el problema sino el hecho de que el aprendizaje se hallara tan ligado con el entendimiento de su estructura. Dienes recomendaba el uso de Material de Experiencia Algebraica (AEM por sus siglas en inglés), del igualador y de los bloques lógicos, ya que permitían el aprendizaje como una actividad constructiva. “El aprendizaje es un proceso activo, por ello, la formación de conceptos se promueve proporcionando un entorno adecuado de aprendizaje con el que los niños pueden interactuar” (Orton, 1988, p. 178).

Dienes basado en Piaget, propuso tres etapas en la formación de un concepto y las describió como etapa del juego, que consiste en una actividad no estructurada, lo que en nuestro caso se refiere al reconocimiento del material, o juego previo con las tabletas, la etapa de la estructura, que sucede cuando se inicia el desarrollo de la comprensión de la estructura y comienza la intervención del profesor, que con las *Tabletas Algebraicas*, consiste en la conformación de los rectángulos con las fichas dadas, y etapa de la práctica, que ocurre cuando se llevan a cabo prácticas de la estructura, en donde se manifiestan con mayor claridad actividades aritméticas o algebraicas, haciendo la analogía con las Tabletas Algebraicas, esta etapa se refiere a la deducción de las longitudes del rectángulo resultante.

De otro lado, Duval en sus obras ha enfatizado en la importancia de hacer tránsito entre diferentes representaciones (circunscritas en el campo de la semiótica) de un objeto matemático, ya que esto le permite al estudiante tener una mayor comprensión del mismo, además, “las representaciones semióticas no solo son indispensables para fines de comunicación, sino que también son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma” (Duval, 1999, p. 15). Además, argumenta que en la medida en que se usen representaciones de conceptos matemáticos o de elementos asociados a ellos, se promueven relaciones que dan mayor sentido a los estudiantes.

Registros de representación [3]

Las configuraciones hechas con las *Tabletas Algebraicas* representando los polinomios son lo que para Duval *representación(es) que facilita(n) la interiorización de un objeto*, pues lo que se persigue con las fichas es que se pueda tener mayor comprensión de lo que significa factorizar un polinomio. Se utilizarán básicamente dos registros de representación: físico (representación del polinomio con fichas) y algebraico (escritura del polinomio en términos algebraicos y como producto de factores). De esta manera, se ofrece una alternativa al estudiante para interpretar la factorización por medio de manipulación geométrica y tangible de los términos del polinomio.
Duval (1999) menciona tres actividades cognitivas fundamentales de la representación ligadas a la semiosis[4]: formación, tratamiento y conversión, de las cuales nos enfocaremos en las últimas dos.

El tratamiento es una transformación que se da dentro de un mismo registro, como por ejemplo, expresar el polinomio $a^2 + 2ab + b^2$ como $(a + b)(a + b)$ o como $(a + b)^2$, que es el orden en que se espera que se den las transformaciones usando las *Tabletas Algebraicas*. Incluso se presenta cuando el polinomio tiene dos formas diferentes de representarse con las fichas, por ejemplo, al representar el polinomio $12a^2 + 14ab + 4b^2$ con las fichas, pueden construirse dos rectángulos de longitudes de lados diferentes: uno de lados $(6a + 4b)$ y $(2a + b)$ y otro de lados $(3a + 2b)$ y $(4a + 2b)$. Así, cuando se pida construir una configuración diferente a la primera se dará un tratamiento dentro del registro físico.

La otra actividad cognitiva es la conversión, una transformación externa relativa al registro de representación de partida, requiere coordinación por parte del sujeto que la efectúa, y que permite realizar el anhelado cambio de registro físico a registro alge-

[3]Según Duval, los sistemas pueden ser no semióticos –redes neuronales (...) o instrumentos físicos –; opueden ser semióticos (mediante el uso de signos).El término registro (nótese que no se especifica “semiótico” por la presencia del sistema físico) hace referencia a un sistema que permite realizar las tres actividades cognitivas fundamentales de la representación (Rojas, 2009).

[4]Una acción, una influencia, la cual es, o involucra, una cooperación de tres aspectos, tales como un signo, su objeto y su interpretante, esta influencia tri-relativa no es de ninguna manera resoluble en acciones entre pares (Rojas, 2009).

braico. Incluso, durante las actividades a desarrollar con el material se presentan varias conversiones: primero de algebraico a físico al asociar los términos del polinomio con fichas organizadas en rectángulo, luego de físico a algebraico cuando, con ayuda de la configuración, se obtienen los factores que dan origen al polinomio original, y finalmente se expresa el polinomio como producto de factores.

Es importante resaltar que los tratamientos y las conversiones se pueden dar simultáneamente y se pueden presentar otros registros, como el verbal. Cuando se hace una reflexión acerca de las actividades propuestas y se pide a los estudiantes comunicar sus ideas, realizan un cambio de los dos registros mencionados al verbal para expresar las ideas matemáticas.

Aprehensión conceptual de un objeto

Otra cuestión propuesta por Duval (1998, citado en Barreto, 2009) que tiene fuerte influencia en el presente marco teórico es el concepto de aprehensión[5] conceptual de un objeto, de la cual afirma hay tres tipos:

Aprehensión perceptiva: en la cual se asocian elementos de la vida cotidiana con figuras geométricas.
Aprehensión discursiva: en la cual se asocian configuraciones identificadas con afirmaciones matemáticas.
Aprehensión operativa: el sujeto realiza una modificación a la configuración inicial.

Ampliaremos un poco los dos últimos tipos de aprehensión según lo que sucede al implementar las *Tabletas Algebraicas*.

La aprehensión discursiva propicia el cambio en las dos direcciones entre lo que Du-

[5]Según la RAE (2001), "La que capta las formas de las cosas sin hacer juicio de ellas o sin afirmar ni negar", lo que en este contexto equivale al polinomio que surge de la suma de las áreas de las fichas que constituyen el rectángulo igual al producto de la longitud de la base por la altura de dicho rectángulo.

val llama anclaje visual (configuraciones identificadas) y anclaje discursivo (afirmaciones matemáticas), que se torna fundamental en este trabajo ya que sustenta el cambio de expresión del polinomio mediante una configuración rectangular con las fichas (anclaje visual) a producto de factores representando el área del rectángulo formado anteriormente (anclaje discursivo).

La aprehensión operativa es clasificada en dos tipos: operativa de cambio físico (cuando se realizan construcciones auxiliares) y operativa de reconfiguración, en la cual se manipulan las subconfiguraciones iniciales como piezas de un rompecabezas. En esta está implicada la creatividad del estudiante y está presente en el momento en el que debe organizar las fichas para obtener un rectángulo, y gracias a la cual se pueden establecer conjeturas acerca de la equivalencia entre el polinomio original y el producto de los factores obtenidos con las longitudes de los lados del rectángulo, para ser finalmente comprobada vía álgebra.

Así, se han presentado de manera breve tres cuestiones fundamentales en las cuales se fundamenta el manejo de las *Tabletas Algebraicas*: los materiales manipulativos y su importancia en la educación matemática, los instrumentos como la herramienta con la que cuenta el estudiante y el profesor (manejadas de formas diferentes) para mediar entre el estudiante y el contenido matemático, y finalmente los registros de representación, que, analizándolos junto a las actividades cognitivas que las acompañan, permiten evidenciar y retroalimentar el potencial que tienen las *Tabletas Algebraicas* como alternativa de enseñanza del proceso de factorización.

Capítulo 3

TABLETAS ALGEBRAICAS

En este capítulo, se hará una descripción de la propuesta de enseñanza en la que se usa el material Tabletas Algebraicas, idea que surge en el marco del diseño de la práctica inicial del espacio académico Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra del programa Licenciatura en Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional en el año 2011.

3.1. Objetivos de la propuesta de enseñanza

Esta propuesta didáctica, tiene diferentes objetivos, uno general y tres específicos.

Objetivo General

Contribuir a la enseñanza de la factorización de algunos polinomios de segundo grado de la forma $x^2 + bx + c$; $a \in \mathbb{N}$ y $b, c \in \mathbb{Z}$, y de la forma $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$; $a, b \in \mathbb{N}; c, d, e, f \in \mathbb{Z}$ utilizando lenguaje geométrico y lenguaje simbólico-algebraico.

Objetivos Específicos

- Aportar a la conceptualización de la idea de factorización de polinomios de segundo grado y de factores irreducibles.
- Diseñar un conjunto de tareas que incluyan la utilización de las Tabletas Algebrai-

cas que contribuyan a la comprensión de la factorización gracias a su manipulación.

- Poner a disposición de maestros y estudiantes ejemplos de tareas que se pueden llevar al aula de clase utilizando las *Tabletas Algebraicas*.

Es importante resaltar que, si bien la forma general de los polinomios que se factorizarán están en términos de x (para polinomios en una indeterminada) o en términos de x e y (para polinomios en dos indeterminadas) esta puede cambiarse por a o b o por a y b, respectivamente, sin alterar las condiciones expuestas para los coeficientes.

3.2. Descripción del material

Las ***Tabletas Algebraicas***[1] son un material manipulativo derivado de los bloques multibase (BAM), o *Bloques de Dienes*. Son fichas rectangulares conformadas por seis modelos básicos, un cuadrado de lado a, otro de lado b, un rectángulo de lados a y b, otro de lados 1 (unidad) y a, otro de lados 1 y b y finalmente un cuadrado de lado 1, como puede verse enseguida:

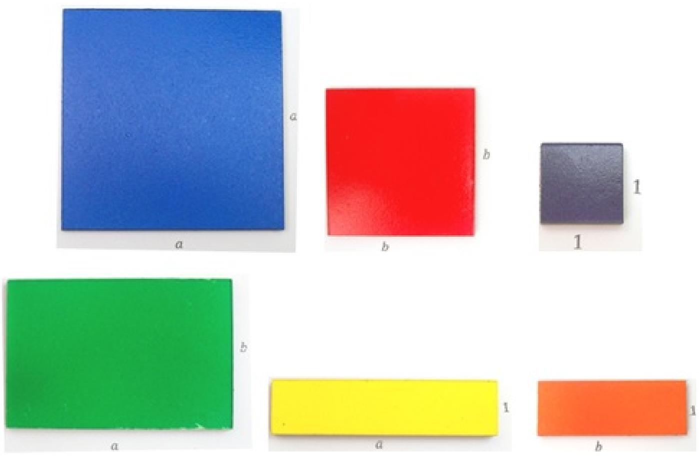


Figura 3.1: Fichas que conforman las Tabletas Algebraicas

[1]Nombre asignado por los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional Dayana Guantiva, Sandra Jiménez, Kevin Parra, Viviana Salazar, Duván Sánchez en 2011

Las medidas de las longitudes de lados de las fichas son: $a = 59mm, b = 41mm$, unidad$= 17mm$.

Aunque estas medidas (tomando como unidad de medida los milímetros) pueden ser arbitrarias, lo importante es tener en cuenta que las medidas de las longitudes a y b deben ser primos relativos, e incluso, que estos números no tengan tampoco factores en común (excepto el 1) con el número de la medida de longitud unidad. Por ejemplo, si $a = 60mm, b = 20mm, unidad = 12mm$, puede presentarse una situación en la que cinco fichas unidad cubran la superficie de una ficha de área a, o que la superficie de una ficha de área ab sea cubierta por tres fichas de área b^2. Esto podría generar confusiones entre los estudiantes.

3.3. Génesis de material

El primer acercamiento a la idea de *Tabletas Algebraicas* fue en un taller llamado “Áreas mágicas” de la Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín diseñado por Montoya & Montoya (1999) e implementado en el espacio académico Materiales Didácticos para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas del programa Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional orientado por la profesora Nora Rojas. Esta idea se materializó en el marco del diseño de la práctica inicial del espacio académico Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra aplicado a estudiantes de grado octavo de una institución educativa de Bogotá, y seguidamente se aplicó en la Jornada del Educador Matemático del mismo año. Posteriormente fue presentado un taller usando las Tabletas Algebraicas en el 12º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa celebrado en el año 2011.

Dicha idea se inspira en los trabajos de los árabes, quienes, como ya se presentó en el capítulo 1, relacionaban áreas con términos de polinomios buscando su solución.

El material trae consigo un folleto que condensa lo presentado en este capítulo, contiene las reglas para su uso y unas actividades sugeridas que serán detalladas a continuación.

3.4. Manejo del material

3.4.1. Unión de Fichas

Solo se pueden ubicar fichas consecutivas cuando los lados compartidos sean de la misma longitud [2]. Esto aplica para cada plano (o piso) construido porque, como se verá más adelante, se pueden sobreponer fichas a otras, lo que constituiría un segundo plano.

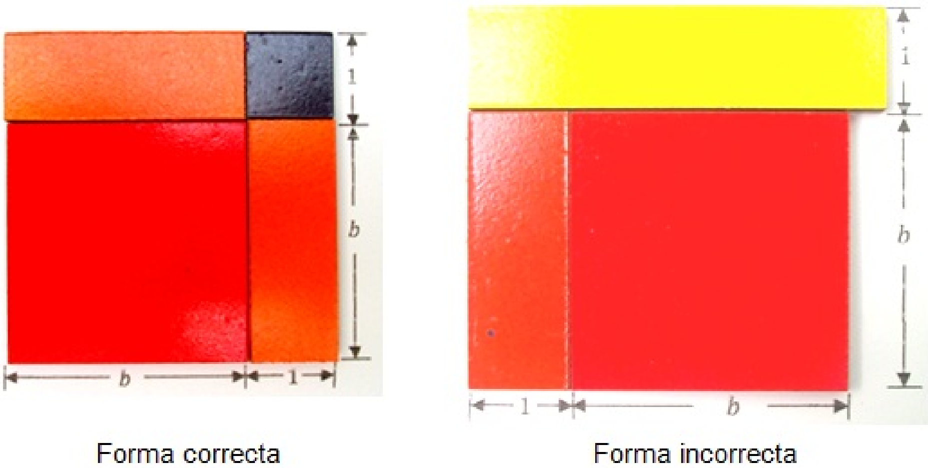


Figura 3.2: Forma correcta e incorrecta de unir fichas

El objetivo de cada configuración es formar rectángulos con las Tabletas Algebraicas de manera tal que no queden espacios vacíos entre ellas. Una vez formado el rectángulo, se debe deducir las longitudes de los lados (comúnmente llamados base y altura) de acuerdo a las longitudes de los lados de los rectángulos que lo conforman; para esto, se sumará la longitud de cada uno de los lados que componen el lado total, ilustrado más adelante.

[2] Entendiendo longitud como una magnitud, definida esta última por Batanero, Godino y Roa (2002) como "los atributos o rasgos que varían de manera cuantitativa y continua (longitud, peso, densidad, etc.) (. . .); las cantidades son los valores de dichas variables". Así, siendo rigurosos, el término correcto es "cantidad de longitud", sin embargo, se usará el término longitud por ser más común

3.4.2. Sobreposición de Fichas

Si se quiere representar un término negativo de un polinomio se colocará la ficha que representa el término negativo sobre otra ficha de mayor área, siempre y cuando compartan, al menos, la longitud de uno de sus lados y la ficha que se sobrepone está toda ella sobre algun área cubierta en el plano de abajo. En la siguiente imagen se muestra la representación del polinomio $a^2 - a$ (siendo $-a$ el término negativo a representar) con las *Tabletas Algebraicas* como muestra la Figura 3.3.
Nota aclaratoria: para la optimización del material se trabajarán máximo 2 planos o pisos.

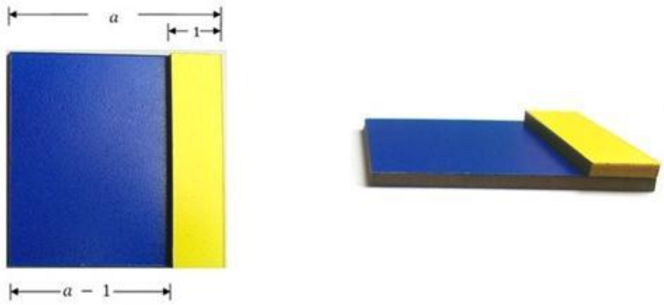


Figura 3.3: Vistas

3.4.3. Unir y sobreponer fichas simultáneamente

Se pueden unir y sobreponer fichas simultáneamente, como se explica en la Figura 3.4.

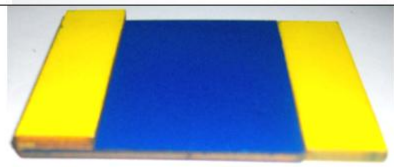
Dada una ficha, si se sobrepone a ella una de igual área, la suma de las áreas es cero	
Así mismo, se pueden unir y sobreponer dos fichas de igual área a otra dada, y se conservará el área original	
Cómo se había mencionado anteriormente, la unión de fichas se cumple por plano, entonces, aunque en el Caso 1 se cumple que las fichas sobrepuestas comparten al menos un lado con la ficha de abajo, es prioritario que se cumpla la regla de unión por planos como en el Caso 2	 Caso 1  Caso 2

Figura 3.4: Unir y sobreponer fichas simultáneamente

3.4.4. ¿Cómo hallar la longitud de los lados?

Como lo muestra la siguiente imagen, se formó un rectángulo con las siguientes fichas: 2 fichas de área 1, 3 fichas de área b y una ficha de área b^2

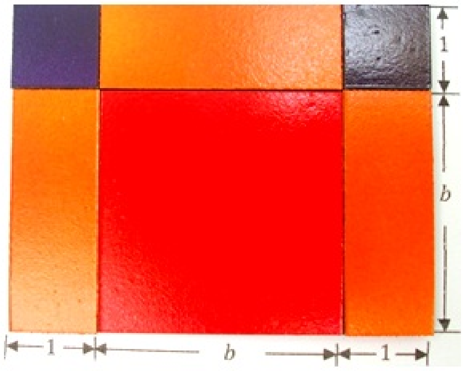


Figura 3.5: Hallar longitudes de los lados de una configuración

Para hallar la longitud de los lados se suman las longitudes que componen la longitud total del lado reduciendo los términos semejantes si es posible, por ejemplo:
Vertical: $1+b$
Horizontal: $1+b+1=b+2$

3.4.5. Representaciones equivalentes

Dos o más representaciones son equivalentes si las longitudes de los lados correspondientes entre estas son iguales.
Ejemplo 1:

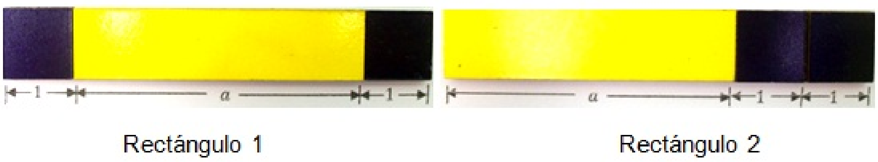


Figura 3.6: Representaciones equivalentes

La longitud de los lados del rectángulo 1 es: $(1+a+1)$ y 1 y del rectángulo 2 es $(a+1+1)$ y 1; es decir que las longitudes de ambos rectángulos son: $(a+2)$ y 1.

Ejemplo 2:

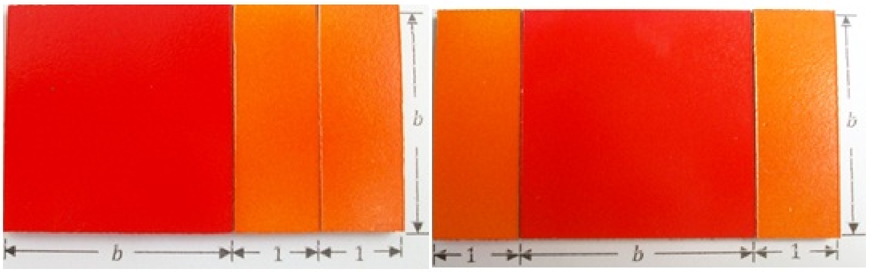


Figura 3.7: Longitudes de representaciones equivalentes

En el caso de las representaciones anteriores las longitudes de los lados son, para el rectángulo 1, $(b+1+1)$ y b, y para el rectángulo 2 son $(1+b+1)$ y b, es decir, que las longitudes de uno de los lados de ambos rectángulos es $b+2$ y b.

3.4.6. Reorganización de fichas

Terminada la representación del polinomio a factorizar, dado que haya fichas sobrepuestas a otras, debemos reorganizarlas para que la forma de la figura del primer plano no cubierta vista desde arriba sea un rectángulo utilizando las reglas anteriormente dadas. Se aplicará esto en el ejemplo siguiente.

3.4.7. Factorización de un polinomio dado

Para factorizar el polinomio $b^2 + ab + 3a + 3b$, se necesitan las siguientes fichas: 1 ficha de área b^2, 3 fichas de área a, 3 fichas de área b, y 1 ficha de área ab. Conformar un rectángulo con las fichas como se muestra en la Figura 3.8. Luego, se deducen las longitudes de los lados del mismo (llamados de ahora en adelante **factores**). En este caso las longitudes son $(a+b)$ y $(b+3)$, como se muestra en la Figura 3.9.

Figura 3.8: Representación con las fichas del polinomio $b^2 + ab + 3a + 3b$

La expresión $(a + b)(b + 3)$ corresponde a la factorización de dicho polinomio.

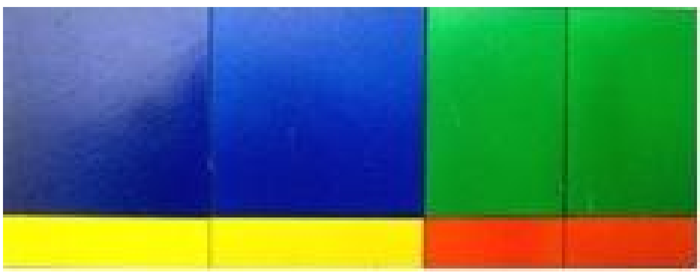
Se puede verificar que esta expresión corresponde al polinomio dado realizando el producto que así se indica: $(a + b)(b + 3) = ab + 3a + b^2 + 3b$.

3.4.8. Factores reducibles

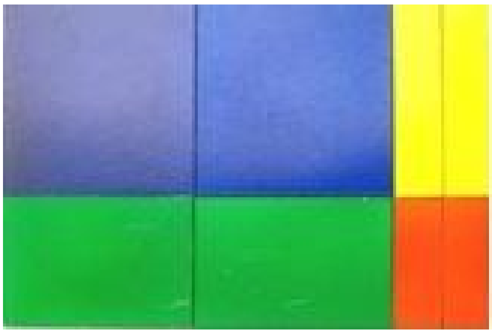
¿Existe más de una configuración (no equivalentes) con las fichas? Algunas veces sí. Entonces, es necesario introducir la siguiente definición

Un polinomio (o un factor) es reducible cuando tiene al menos dos representaciones no equivalentes con las tabletas.

Ejemplo:
Para el caso de la factorización del polinomio $2a^2 + 2a + 2b + 2ab$, se obtienen dos pares de factores, $(a + 1)(2a + 2b)$ y $(a + b)(2a + 2)$.



I. $(a + 1)(2a + 2b)$



II. $(a+b)(2a+2)$

Se debe decidir cuál par será el aceptado como resultado parcial del proceso de factorización. Para eso cada factor se representará con las fichas como lo indica la Figura 3.9.

Los factores irreducibles se identifican porque se pueden obtener dos configuraciones no equivalentes con las fichas. Si la intención es expresar el polinomio como producto de factores irreducibles, ¿Qué hacer con los factores reducibles que quedan?

Se escoge un par, por ejemplo, el primero (con el otro par el proceso es análogo). Como el segundo factor $(2a+2b)$ es reducible, se buscan los dos factores que le dan origen, de los cuales se escoge el que no tiene como factor inmediato a una de las variables (con coeficiente 1) o al 1, que para este caso corresponde a la "configuración no equivalente # 2".

Así, del primer par se tomarán los factores $(a+1)$ (irreducible) y $2(a+b)$ (reducido). Para el segundo par se tomarán los factores $(a+b)$ (irreducible) y $2(a+1)$ (reducido). Es evidente la equivalencia entre las respuestas anteriores, ya que el orden de los factores no altera el producto, entonces, la factorización correcta del polinomio $2a^2+2ab+2a+2b$ es $2(a+1)(a+b)$.

Si bien se puede enunciar desde el comienzo un caso de factor común, es importante mantener la relación geometría-álgebra y hacer notar que el concepto de factor irreducible tratado en esta actividad es abordable a través de representaciones físicas.

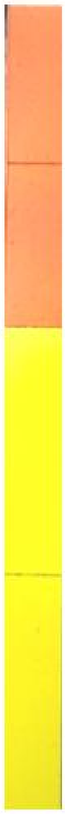
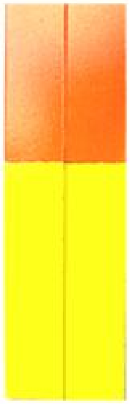
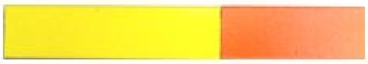
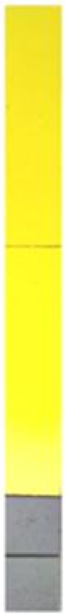
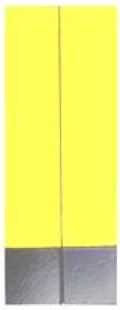
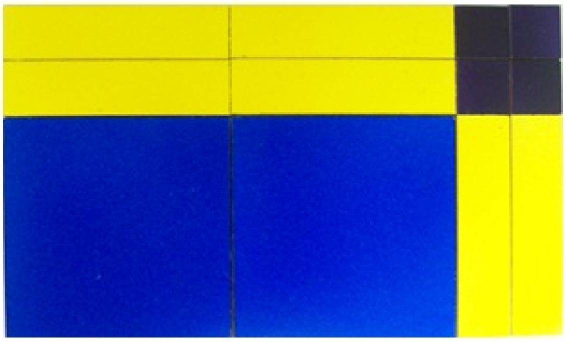
Par	Factores del par correspondiente	Configuración no equivalente # 1	Configuración no equivalente # 2
Primero (I.)	$(a+1)$	$1(a+1)$ 	
	$(2a+2b)$	$1(2a+2b)$ 	$2(a+b)$ 
Segundo (II.)	$(a+b)$	$1(a+b)$ 	
	$(2a+2)$	$1(2a+2)$ 	$2(a+1)$ 

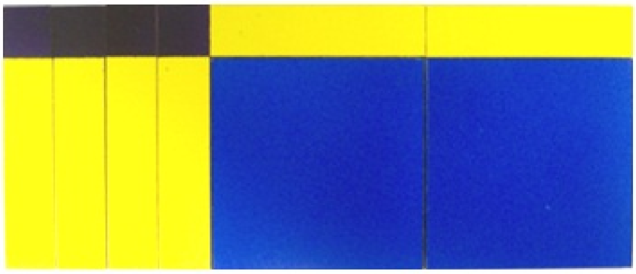
Figura 3.9: Análisis de los pares de factores

Ejemplo de factorización de un polinomio con factores reducibles

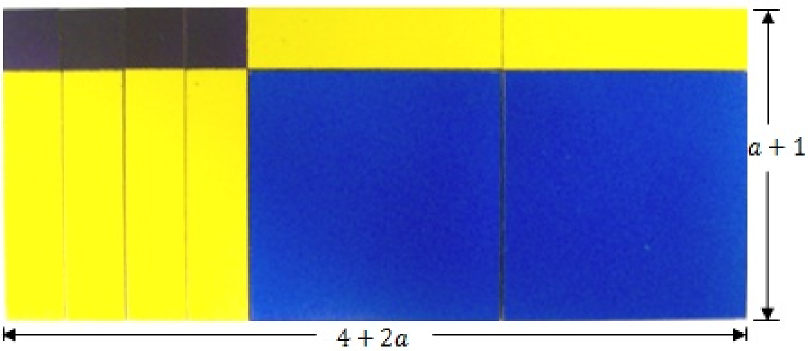
Factorizar el polinomio $2a^2 + 6a + 4$ Para realizar este ejercicio necesitaremos 2 fichas de área a^2, 6 fichas de área a, y 4 fichas de área 1. Conformar un rectángulo con las fichas como se muestra en la figura, por ejemplo:



Pero existe una configuración equivalente; esta es:

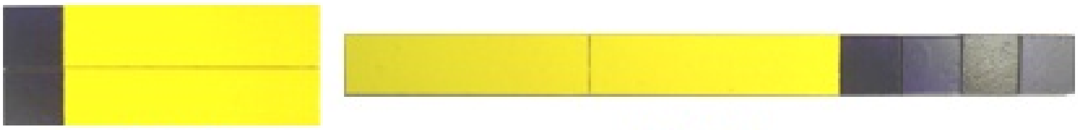


Al tener dos representaciones no equivalentes el polinomio es reducible. Podemos escoger cualesquiera de las representaciones anteriores, para este caso escogeremos la última para llevar a cabo el proceso.
Deducir las longitudes de los lados del rectángulo: $(a + 1)$ y $(2a + 4)$



Ahora verificamos si las longitudes de los lados representan factores reducibles.

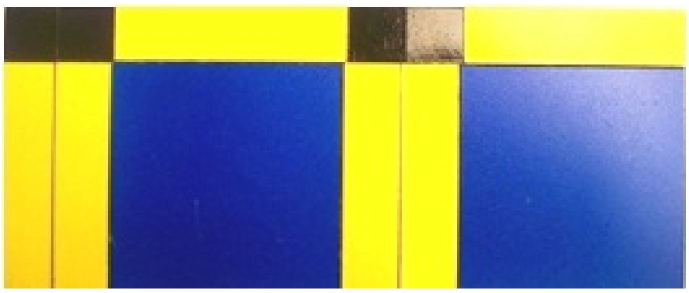
- El factor $a+1$ es reducible porque no tiene una configuración no equivalente con las fichas.
- En el caso del factor $(2a+4)$ obtenemos dos representaciones no equivalentes, las cuales son:



$2(a+2)$ $1\,(2a+4)$

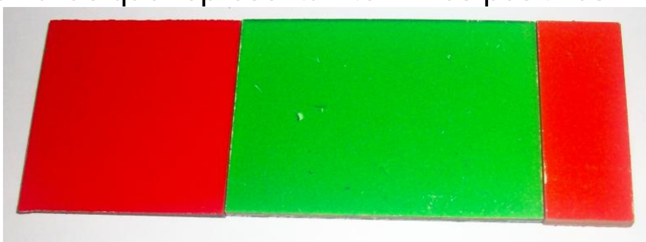
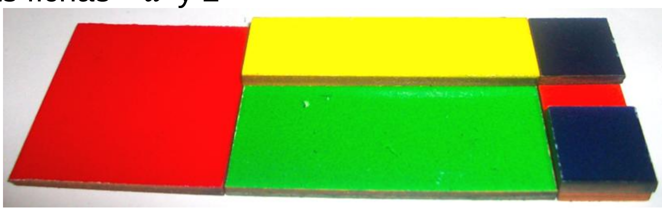
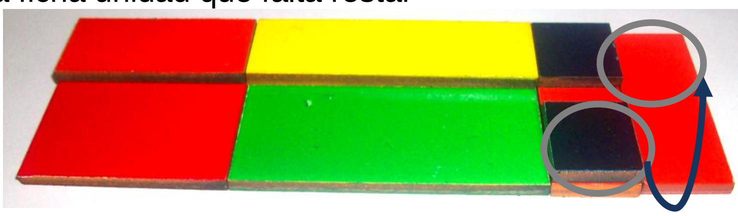
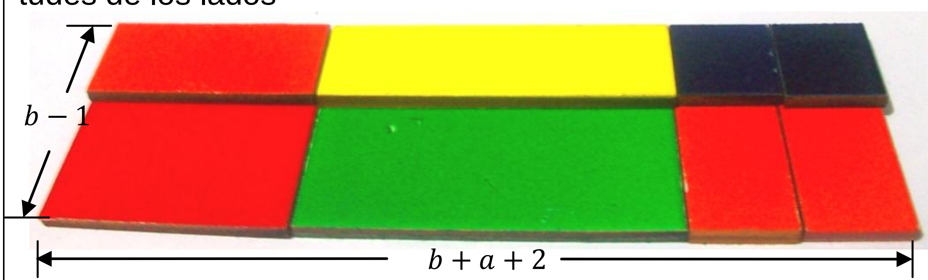
Entonces, como se mencionó anteriormente, escogemos la representación que no tiene como factor una de las variables o a la unidad, es decir, escogemos
$2(a+2)$.
Así, la expresión factorizada del polinomio será: $(a+1)2(a+2)$
Se puede verificar la equivalencia entre la anterior expresión y el polinomio inicial $2a^2+6a+4$ mediante las fichas. A pesar de haber tres factores, se puede hacer la representación con las fichas de $(a+1)(a+2)$ que se vería así:

y el doble de su área (es decir, multiplicándola por el factor 2), es equivalente a la representación 2 que analizamos como se ve en las imágenes.



Ejemplo de factorización de un polinomio con términos negativos

Factorizar el polinomio $b^2 + ab + b - a - 2$.

Ubicar las fichas que representan términos positivos 	Unión
Ubicar las fichas $-a$ y 2 	Sobre-posi-ción
Como la figura conseguida en el primer plano no es un rectángulo, se deben reorganizar las fichas del segundo plano	Necesidad de reorgani-zación
Se sobrepone y une simultáneamente para crear el espacio para la ficha unidad que falta restar 	Unir y sobre-poner simultá multá-nea-mente
Como el área es un rectángulo se hace la lectura de las longi-tudes de los lados 	Longi-tudes de los lados
Finalmente, se pueden hallar las longitudes de los lados para realizar el paso final de la factorización, que nos deja como resultado: $\boldsymbol{b^2 + ab + b - a - 2 = (b - 1)(b + a + 2)}$	

3.5. Tareas propuestas

Ahora que conocemos lo básico de las *Tabletas Algebraicas*, proponemos una secuencia de tareas para implementar en el aula, es lo que llamamos propuesta de enseñanza.
Se hará un trabajo de apropiación del material, en el cual se explorarán las reglas de manejo y posteriormente se solicitará la factorización de algunos polinomios dados.
Los recursos empleados son una secuencia de tareas en una hoja con espacios adecuados para resolver en la misma y paquete de 65 fichas como las descritas al comienzo del capítulo. La forma de trabajo en el aula será en parejas. Se entrega a cada pareja una hoja donde encuentran las secciones resaltadas en letra cursiva. Es importante resaltar que la propuesta implica trabajo autónomo del estudiante, ya que se busca que conjeturen y construyan definiciones.

SESIÓN 1

Objetivo: Interiorizar las reglas para manejar las *Tabletas Algebraicas* mediante la exploración con las mismas.
Primero, es necesario que observen la regla de unir las fichas, y con la siguiente tarea ellos establecen las diferencias por medio de la visualización y construyen una definición.

- *A continuación encontrarás unas configuraciones con las Tabletas Algebraicas. Están clasificadas en “Forma correcta” y “Forma incorrecta”*

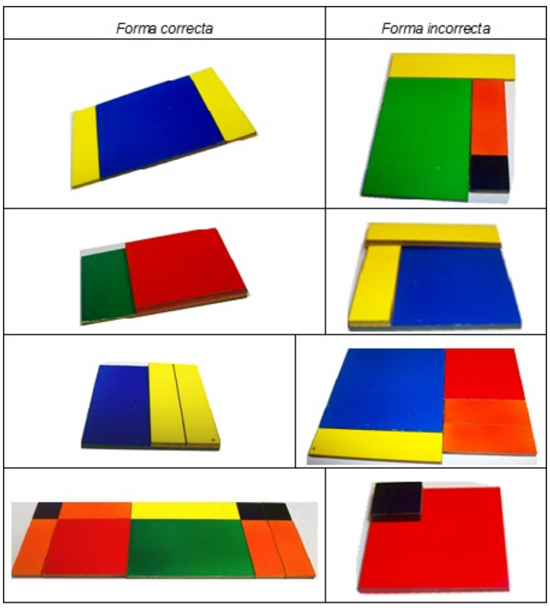


Figura 3.10: Configuraciones correctas e incorrectas

a. *¿Qué diferencia a las formas correctas de las incorrectas?*

b. *Según lo que observaste, ¿Qué es una configuración correcta con las Tabletas Algebraicas?*

Luego, se encontrará la longitud de los lados de las configuraciones por medio de la siguiente tarea. Para encontrarlas se propone que los estudiantes construyan configuraciones y usen las medidas que las conforman para llegar a la longitud total de los lados. A su vez, se orientará a los estudiantes a pensar en la resta de áreas, ya que se necesitará para factorizar polinomios que incluyan términos con coeficientes negativos.

Vamos a encontrar las longitudes de los lados. Toma dos fichas de área a^2 y una ficha de área ab y construye una configuración correcta. Ahora. Mira la siguiente imagen:

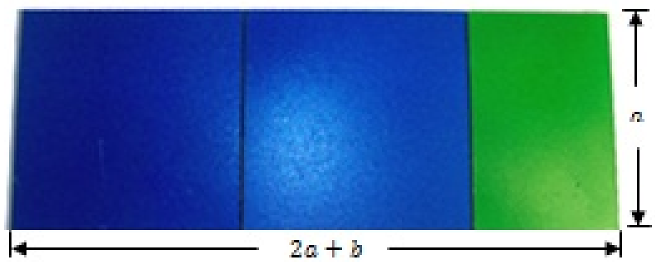


Figura 3.11: Longitudes de los lados de una configuración

c. *¿De dónde salen las longitudes que allí aparecen? Justifica.*

d. *Construye tres configuraciones usando diferentes fichas y realiza el dibujo indicando la longitud de los lados.?*

Se le pedirá a los estudiantes que reflexionen: si observan cuidadosamente, los lados se obtienen sumando las longitudes que la componen. Entonces, ¿Cómo interpretarían el siguiente caso?

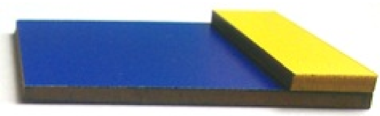


Figura 3.12: Fichas sobrepuestas, vista en perspectiva

Sobreposición de fichas

Una ficha se puede colocar sobre otra siempre y cuando compartan, al menos, la longitud de uno de sus lados.

Aquí, tomamos una ficha de área a^2 y sobreponemos una ficha de área a, y las longitudes las podemos ilustrar así:

Figura 3.13: Fichas sobrepuestas vista superior

La nueva región tiene por lados a y $a - 1$. Se puede asumir este proceso como resta de longitudes de lados.

e. *De acuerdo con el anterior ejemplo representa con el material, un caso en donde se muestre una forma correcta y otra incorrecta de sobreposición de fichas indicando las longitudes de los lados como muestra la figura.*

f. *Si colocar una ficha sobre otra significa restar del área de la ficha de abajo el área de la ficha de arriba, ¿Qué significaría colocar 3 fichas apiladas, es decir, una sobre otra? ¿Y si fuesen más de tres? Haz una conjetura.*

Ahora, se manejará un concepto muy importante para el posterior trabajo con factores reducibles. Las representaciones equivalentes permiten que los estudiantes encuentren equivalencias entre áreas representadas con las fichas. Lo importante de esta tarea es usar (sin ser evidente) la propiedad asociativa de la suma para mostrar que, independiente de la forma en la que se dispongan las fichas, las longitudes de los lados son iguales para diferentes configuraciones.

Toma una ficha de área b^2 y tres de área b. Realiza configuraciones correctas con ellas y dibújalas indicando la longitud de sus lados.

g. ¿Qué tienen en común esas configuraciones que realizaste?

Comenta con tus compañeros de curso lo que acabas de observar.
Esas configuraciones se denominan equivalentes. Entonces, definan lo siguiente: Representaciones equivalentes son ...

h . Construye y dibuja dos representaciones equivalentes y dos no equivalentes

---

SESIÓN 2

Objetivo:
Expresar como producto de factores irreducibles un polinomio dado.
Forma de trabajo en el aula: Se manejará igual que en la sesión 1, con la diferencia que se socializarán los problemas que vayan resolviendo los estudiantes para llevar un proceso similar y que las dudas que aparezcan sean compartidas para retroalimentar la clase.

En la siguiente sección se busca que los estudiantes hagan un acercamiento a la definición de factorización encontrando el área de la configuración correspondiente.

i. *¿Qué polinomio está representado con las anteriores fichas?*

j. *¿Cuáles son las longitudes de los lados de la configuración?*

Si el área de un rectángulo se halla multiplicando las longitudes de sus lados,

k. *¿Cómo se hallaría el área de la anterior configuración?*

Ahora, construye una configuración con las siguientes fichas: una azul, una naranja, dos amarillas, una morada y una verde.

l. *¿Qué polinomio está representado con las anteriores fichas?*

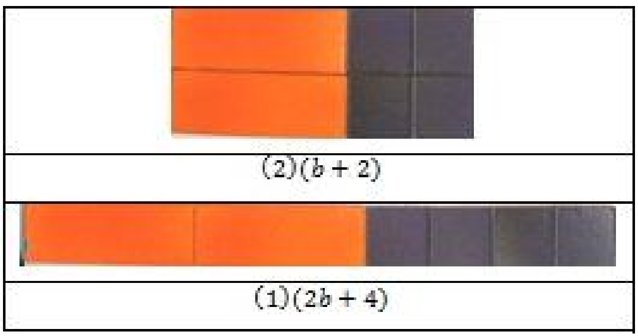
m. *¿Cómo se halla el área de la configuración? (es decir, multiplicación de longitud de base por altura.)*

Terminado este momento, se hará una socialización del trabajo realizado, con el objetivo de que los estudiantes realicen correctamente las configuraciones.

La longitud de cada lado del rectángulo será llamada a partir de ahora factor.

Definición: Un polinomio (o un factor) es reducible cuando tiene al menos dos representaciones no equivalentes con las tabletas.

El polinomio $2b + 4$ tiene las siguientes representaciones con las fichas



Como vemos, las longitudes de los lados correspondientes de las dos representaciones no son iguales, entonces las representaciones no son equivalentes.

Entonces el binomio $2b + 4$ es reducible.

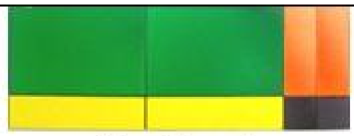
Como es reducible, debemos escoger una de las dos expresiones para su área, pero ¿Cuál?

Vamos a elegir aquella en la cual una de las longitudes no sea a, b ni 1.

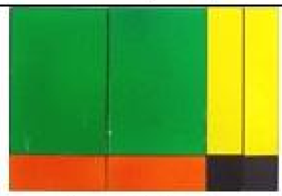
Según la anterior instrucción, ¿Cuál es el par de factores que vamos a escoger?
En el siguiente bloque se muestra el proceso de factorización de polinomios reducibles con un ejemplo, y se proponen tareas que recogen lo explicado anteriormente. Definición:

Factorización es el proceso de expresar un polinomio como producto de factores irreducibles

Ejemplo 1: factorizar el polinomio $2ab + 2a + 2b + 2$. Usa las fichas correspondientes para seguir el proceso paso a paso. ¿Cuántas representaciones no equivalentes tiene? Hay dos, son las siguientes:

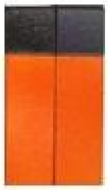
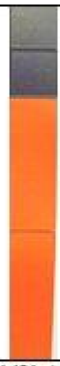


$(b+1)(2a+2)$



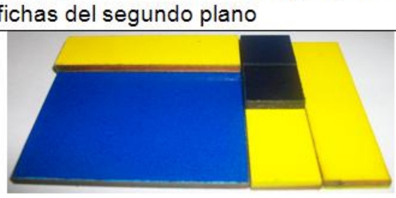
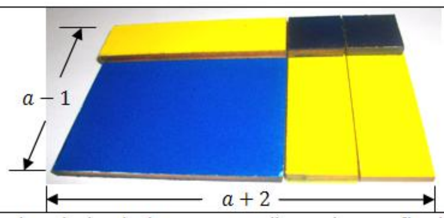
$(a+1)(2b+2)$

Escogeremos una de las representaciones, por ejemplo, la segunda.
Recordando la definición de factor reducible, se reduce el factor que sea necesario, en este caso, $(2b + 2)$. Entonces tenemos:

		
$(a+1)$	$2(b+1)$	$(1)(2b+2)$

Se elige la forma correcta que, si recordamos, es en la cual una de las longitudes no es a, b *ni 1. Entonces obtenemos que* $2ab + 2a + 2b + 2 = (a+1)2(b+1)$.

Ejemplo 2: factorizar el polinomio $b^2 + b - 2$. *Usa las fichas correspondientes para seguir el proceso paso a paso*

<table>
<tr><td colspan="2">Cuando se factorizan polinomios con término negativos, se hace indispensable el uso de fichas auxiliares, como se mostrará a continuación. Inicialmente se necesita una ficha azul, una amarilla y dos moradas.</td></tr>
<tr><td>Se colocan las fichas que representan términos positivos</td><td></td></tr>
<tr><td>Se sobreponen la fichas que representan los términos -2</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Como la figura conseguida en el primer plano no es un rectángulo, se deben reorganizar las fichas del segundo plano</td></tr>
<tr><td>Se sobrepone y une simultáneamente una ficha para crear el espacio para la ficha unidad que se debe reorganizar</td><td></td></tr>
<tr><td>Ya organizadas las fichas, se deducen las longitudes de los lados</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Así, se pueden hallar las longitudes de los lados para realizar el paso final de la factorización, que nos deja como resultado:
$\boldsymbol{a^2 + a - 2 = (a-1)(a+2)}$</td></tr>
</table>

Así, se pueden hallar las longitudes de los lados para realizar el paso final de la factorización, que nos deja como resultado:

$b^2 + b - 2 = (b - 1)(b + 2)$

¡AL FIN! Logramos factorizar completamente el polinomio dado, ahora inténtalo tú siguiendo los pasos.

Representa con las tabletas los siguientes polinomios mostrando el paso a paso. Se dará la respuesta a algunos ejercicios que posteriormente se contrastarán con los dibujos.

- $3a^2 + 5a + 2$
- $b^2 + a + b + ab$
- $b^2 + ab - 2a - 2b$ ***respuesta:*** $(a + b)(b - 2)$
- $a^2 - 4$ ***respuesta:*** $(a - 2)(a + 2)$
- $6ab + 6a^2 + 3a + 3b$ ***respuesta:*** $3(2a + 1)(a + b)$
- $6a^2 + 10a + 4$ ***respuesta:*** $2(3a + 2)(a + 1)$

Conclusiones

Teniendo en cuenta los objetivos trazados y la consulta realizada a lo largo de la elaboración de este documento, se obtuvieron las siguientes conclusiones:

Si bien, al hacer la revisión histórica de la factorización de polinomios de segundo grado se halló relación con los llamados casos de factorización, atendiendo a que se enfatiza en ellos en la educación secundaria, no se halló referencia explícita alguna de estos en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Es pertinente cuestionar su inclusión y justificar su uso en el aula, quizá como una herramienta que les permita simplificar expresiones e incluso eliminar indeterminaciones. Además, no se encontró referencia a factorización de polinomios en dos indeterminadas, a pesar de que existen como objetos matemáticos claramente definidos (véase Pérez, Palacios & Villamizar, 2003).

En la indagación histórica, se hizo evidente la relación entre álgebra y geometría lo cual, ha sido transpuesto a la educación, pues se puede encontrar muestras de ello en libros como el clásico de Álgebra (de Aurelio Baldor) u otros más actualizados como Alfa 8. La preocupación de los algebristas no fue la factorización en sí misma sino solucionar ecuaciones, lo que indirectamente llevó a estudiar teoremas de factorización única.

Gracias a todo lo anterior, se pudo profundizar en el significado de factorizar como expresar un polinomio como producto de factores irreducibles, y la gran importancia que tienen estos últimos en la conceptualización de los anillos de los polinomios, ya que son los análogos de los números primos del anillo de números enteros; y a raíz de lo cual se puede establecer una equivalencia entre el Teorema Fundamental de la Aritmética y el

Teorema de Factorización Única.

A partir de la elaboración de este trabajo de grado nos percatamos de que en muchas oportunidades nos falta precisión en la manera que utilizamos el lenguaje matemático en la enseñanza de las matemáticas, principalmente las escolares, y que es necesario profundizar en los objetos matemáticos que se enseñan (o que enseñamos), en particular, nos referimos a que nos percatamos del mal uso que hacemos del término factorización, pues no hallamos una teoría de factorización, sino de factorización de polinomios o de manera más general de factorización en anillos. Es más, muchas veces se interpreta la factorización como "expresar un polinomio como producto de factores", olvidando que dichos factores deben ser irreducibles, además sin especificar en qué conjunto están los coeficientes. Para el caso que nos compete, la escuela secundaria, es usual decir que $(x-1)^2$ es la factorización de $p(x) = x^2 - 2x + 1$, refiriéndonos muy posiblemente a que $(x-1)^2$ es la factorización completa del polinomio $p(x)$ con coeficientes en Z, pero cuando decimos que $(a-b)(a+b)$ es la factorización de $a^2 - b^2$, ¿Se está factorizando de la misma manera, o lo mismo? La respuesta es no, pues en este último caso se estaría haciendo referencia a un polinomio en dos indeterminadas, con entradas en Z; y eso sin considerar que en muchos casos no se tiene claro, ni siquiera en qué conjunto están los coeficientes; en este caso, por ejemplo, si el polinomio en una indeterminada $q(x) = x^2 - 2$ tiene entradas en Z, no es factorizable, es decir, es irreducible; en cambio, si estuviera definido en R, sí sería reducible como $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$.

El desarrollo del documento permitió aportar un marco de referencia un poco más amplio que los antecedentes revisados (Morales (2008), Barreto (2009), entre otros) el cual esperamos aporte a las personas interesadas en profundizar en este tema y proporcione herramientas para justificar el uso de las Tabletas Algebraicas en el aula.

Consideramos que las tareas propuestas en el último capítulo pueden aportar a la innovación de clases del álgebra escolar, permitiendo a los estudiantes el desarrollo de actividades fuera de las tradicionales (simbólico algebraicas principalmente) y que les permitan encontrar relaciones con objetos que faciliten su relación con otros conocimientos y con ello, promueva la recordación (para este caso las configuraciones con las fichas de colores). Con base en ello, esperamos que el trabajo genere el interés suficiente en lectores, principalmente estudiantes de la Licenciatura que les aporte en la realización de, por ejemplo Unidades Didácticas.

Es importante tener en cuenta que las actividades propuestas con las Tabletas Algebraicas no se pueden quedar como una tarea desarrollada en lo que Brousseau podría denominar una situación adidáctica (definida como). Las actividades desarrolladas con material didáctico necesitan un proceso de socialización ya que, por sí solas, no garantizan el aprendizaje, específicamente, para este caso, del proceso de factorización.

A pesar que las reglas son sencillas, se complejiza su escritura.

Desde que la idea de las Tabletas Algebraicas surgió en el año 2011, se ha presentado en varios eventos nacionales e internacionales:

- Taller: Tabletas Algebraicas como alternativa de enseñanza del proceso de factorización. 12º ECME (Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, 2011). Armenia, Colombia.

- Experiencia de Aula: Tabletas Algebraicas como alternativa de enseñanza del proceso de factorización. 12º ECME (Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, 2011). Armenia, Colombia.

- Evolución de la factorización. 4 ENHEM (Escuela Nacional de Historia y Educación Matemática, 2013). Cali, Colombia.

- Tabletas Algebraicas, una alternativa de enseñanza del proceso de factorización. I CEMACYC (I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe, 2013). Santo Domingo, República Dominicana.

- La factorización de polinomios de segundo grado y los personajes involucrados en su historia. I CEMACYC (I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe, 2013). Santo Domingo, República Dominicana.

Este Trabajo de Grado aporta de manera significativa a nuestra formación como maestras, ya que refleja nuestra capacidad para generar una propuesta educativa bajo un marco teórico y matemático orientada a realizar innovación en el aula relacionando el concepto de factorización con la geometría; y el diseño e implementación de un material didáctico, lo que busca convertirse en una alternativa de llevar la cultura matemática a los estudiantes y que se corresponde en gran medida con el perfil profesional que debe tener un egresado de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

Bibliografía

Acevedo de Manrique, M. & Falk de Losada, M. (1997). *Recorriendo el álgebra: de la solución de ecuaciones al algebra abstracta*. Colombia: Colciencias.

Barreto, J. (2009). Percepción geométrica de los productos notables y de la media geométrica [Versión electrónica]. *Números*, 71, 57-74.

Bartolini, M., & Mariotti, M. (2010). Mediación semiótica en el aula de matemáticas. En Perry, P. (Traduc.). *Handbook of international research in mathematics education (segunda edición revisada,* pp. 746-783). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum. (Trabajo original publicado en 2008).

Campos, Y. & Torres, J. (2000). *Causas de los errores en el proceso de factorizar.* Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Del Castillo, A.,& Montiel, G. (2009). ¿Artefacto o instrumento? Esa es la pregunta. [Versión electrónica]. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, (22).* México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía.

Godino, J., Batanero, C., Roa, R. (2002). *Medida de magnitudes y su didáctica para maestros*. España: Universidad de Granada. [Fecha de consulta: 4 de marzo de 2013 extraído de
$http://www.ugr.es/\ jgodino/edumat-maestros/manual/5_Medida.pdf$

Grattan-Guinness, I. (2004). The mathematics of the past: distinguishing its history from our heritage [Versiónelectrónica]. *Historia Mathematica, 31*(2), 163-185.

Heath, T. & Heiberg, J. (1956) *The Thirteen Books of Euclid's Elements, Vol. 1.* EUU: Cambridge: The University Press.

Hill, R. (2011) Thomas Harriot's Artis Analyticae Praxis and the Roots of Modern Algebra. Kansas City: University of Missouri. [Fecha de consulta: 4 de marzo de 2013 extraído de $http://www.homsigmaa.org/Hill.pdf$

Jarne, G., Minguillón, E. & Zabal, T. (2004). *Ecuaciones polinómicas con una incógnita.* Extraído el día 10 de octubre de 2013 de $http://www.unizar.es/aragon_tres/unidad2/Ecuaciones/u2ecute20.pdf$

Jiménez, S., Guantiva, D., Sánchez, D. (2011). Taller: uso de las Tabletas Algebraicas como alternativa de enseñanza del proceso de factorización. *Memorias 12º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, (2), 574-584.

Kleiner, I. (2007). *A history of abstract algebra.* New York: Birkhäuser Boston.

Luque, C., Mora, L. & Torres, J. (2006). *Estructuras análogas a los números reales.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Montoya, E. & Montoya, J. (1999). *Áreas mágicas* (Proyecto matemáticas y física básicas en Antioquia). Medellín: Universidad Nacional de Colombia.

Morales, I. (2008). Propuesta de enseñanza para la Factorización algebraica. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, México.

Muñoz, M., Fernández, E. & Sánchez, M. (2007). *Diofanto de Alejandría. La Aritmética y el libro Sobre los números poligonales. Tomo I.* España: NIVOLA libros y ediciones, S.L.

Orton, A. (1988). *Didáctica de las matemáticas. Cuestiones, teoría y práctica en aula.* Madrid. Ediciones Morata.

Pérez, E., Palacios, E. & Villamizar, A. (2003). *Matemática Mega.* Bogotá: Terranova Editores, Ltda.

Puig, L. (2010). Historias de Al-Khwãrizmĩ (4ª entrega). El proyecto algebraico. [Versión electrónica]. *Revista SUMA, 65*, 87-94.

Puig, L. (2011a). Historias de Al-Khwãrizmĩ (5ª entrega). La cosa. [Versión electrónica]. *Revista SUMA, 66*, 89-100.

Puig, L. (2011b). Historias deAl-Khwãrizmĩ (6ª entrega). El cálculo con la cosa. [Versión electrónica]. *Revista SUMA, 67*, 101-110.

Puig, L. (2011c). Historias de Al-Khwãrizmĩ (7ª entrega). Figuras y demostraciones. [Versión electrónica]. *Revista SUMA, 68*, 93-102.

Rojas, P. (2009). Relación entre objeto matemático y sentidos en situaciones de transformación entre representaciones semióticas [Versión electrónica]. *Memorias 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/757/1/relacion.pdf.

Rojas, P. (2012). Sistemas de representación y aprendizaje en matemáticas [en línea]. Revista digital Matemática, Educación e Internet, *(12).*

Seltman, M., Goulding, R. (2007). *Thomas Harriot's Artis Analyticae Praxis. An english translation with Commentary.* California, EEUU: Springer Science+Business Media, LLC.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra: orígenes y perspectivas.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Socas, M.; Camacho, M.; Palarea, M. & Hernández, J. (1989). *Iniciación al álgebra*. Madrid: Editorial Síntesis.

Soto, F.; Mosquera, S. & Gómez, C. (2005). La caja de polinomios. [Versión electrónica]. *Revista ERM, 13* (1), 83-97.

Uicab, G. (2009). Materiales tangibles. Su influencia en el proceso enseñanza y aprendizaje de las matemáticas [Versión electrónica]. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, (22)*. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Vera, F. (1970). *Científicos griegos Vol I.* España: Aguilar.

Zalamea, F. (2007). *Fundamentos de Matemáticas* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

ANEXOS

Folleto *Tabletas Algebraicas*

El siguiente folleto condensa lo presentado en el capítulo 3 y constituye una guía de instrucciones y tareas sugeridas para quien desee implementar el material didáctico Tabletas Algebraicas. Se entregará uno por cada paquete de fichas.

Tabletas algebraicas como alternativa de enseñanza del proceso de factorización

SANDRA JIMÉNEZ
VIVIANA SALAZAR
LYDA MORA

Tabla de Contenido

Objetivos

Objetivo Principal

Contribuir a la enseñanza y al aprendizaje de la factorización de algunos polinomios de segundo grado, utilizando lenguaje geométrico y lenguaje simbólico-algebraico.

Polinomios de segundo grado de la forma

$x^2 + bx + c;\ a \in \mathbb{N}$ y $b, c \in \mathbb{Z}$,

y de la forma

$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f;$

$a, b \in \mathbb{N}; c, d, e, f \in \mathbb{Z}$

Objetivos Específicos

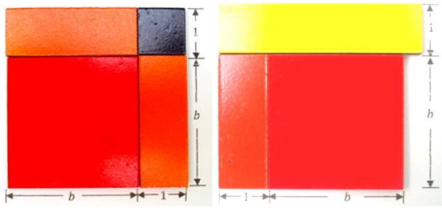
- Aportar a la conceptualización de la idea de factorización de polinomios de segundo grado y de factores irreducibles.
- Diseñar un conjunto de tareas que incluyan la utilización de las Tabletas Algebraicas que contribuyan a la comprensión de la factorización gracias a su manipulación.
- Poner a disposición de maestros y estudiantes ejemplos de tareas que se pueden llevar al aula de clase utilizando las Tabletas Algebraicas.

Tabletas Algebraicas

Las ***Tabletas Algebraicas*** (nombre asignado por estudiantes[1] de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional en 2011) son un material manipulativo derivado de los *bloques multibase (BAM),* o *Bloques de Dienes.* Son fichas rectangulares conformadas por seis modelos básicos, un cuadrado de lado a, otro de lado b, un rectángulo de lados a y b, otro de lados 1 (unidad) y a, un tercer rectángulo de lados 1 y b y finalmente un cuadrado de lado 1, como puede verse enseguida:

Unión de fichas

Solo se pueden ubicar fichas consecutivas cuando los lados compartidos sean de la misma longitud[2]. Esto aplica para cada plano (o piso) construido porque, como se verá más adelante, se pueden sobreponer fichas a otras, lo que constituiría un segundo plano.



Forma correcta Forma incorrecta

El objetivo de cada configuración es formar rectángulos con las ***Tabletas Algebraicas*** de manera tal que no queden espacios vacíos entre ellas. Una vez formado el rectángulo, se debe deducir las longitudes de los lados (comúnmente llamados base y altura) de acuerdo a las longitudes de los lados de los rectángulos que lo conforman; para esto, se sumará la longitud de cada uno de los lados que componen el lado total, ilustrado más adelante.

Construye configuraciones de unión de fichas de forma adecuada

Sobreposición de fichas

Si se quiere representar un término negativo de un polinomio (por ejemplo

[1]Dayana Guantiva, Sandra Jiménez, Viviana Salazar, Duván Sánchez, Kevin Parra

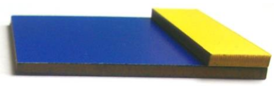
[2]Entendiendo longitud como una magnitud, definida esta última por Batanero, Godino y Roa (2002) como "los atributos o rasgos que varían de manera cuantitativa y continua (longitud, peso, densidad, etc.) (…); las cantidades son los valores de dichas variables". Así, siendo rigurosos, el término correcto es "cantidad de longitud", sin embargo, se usará el término longitud por ser más común.

$a^2 - \boldsymbol{a}$) se colocará la ficha que representa el término negativo sobre otra ficha de mayor área, siempre y cuando compartan, al menos, la longitud de uno de sus lados.

En la siguiente imagen se muestra la representación del polinomio $a^2 - \boldsymbol{a}$ (siendo $-$a el término negativo a representar) con las ***Tabletas Algebraicas.***

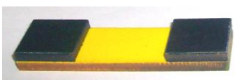
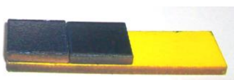
Nota aclaratoria: para la optimización del material se trabajarán máximo 2 planos o pisos.

Vista superior



Vista lateral

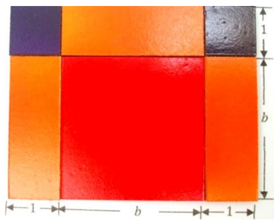
Unir y sobreponer simultáneamente

<table>
<tr><td>Dada una ficha, si se sobrepone a ella una de igual área, la suma de las áreas es cero</td><td></td></tr>
<tr><td>Así mismo, se pueden unir y sobreponer dos fichas de igual área a otra dada, y se conservará el área original</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Cómo se había mencionado anteriormente, la unión de fichas se cumple por plano, entonces, aunque en el Caso 1 se cumple que las fichas sobrepuestas comparten al menos un lado con la ficha de abajo, es prioritario que se cumpla la regla de unión por planos como en el Caso 2
 
Caso 1 Caso 2</td></tr>
</table>

PARE Intenta diseñar un rectángulo de lados *a-b* y *a* respectivamente

¿Cómo hallar la longitud de los lados?

Como lo muestra la siguiente imagen, se formó un rectángulo con las siguientes fichas: 2 fichas de área 1, 3 fichas de área b y una ficha de área b^2



Para hallar la longitud de los lados se suman las longitudes que componen la longitud total del lado reduciendo los términos semejantes si es posible, por ejemplo:

-Vertical: $1 + b$
-Horizontal: $1 + b + 1 = b + 2$

PARE Realiza diferentes uniones y sobreposiciones con las fichas y encuentra las longitudes los lados de los rectángulos resultantes

Representaciones equivalentes

Dos o más representaciones son equivalentes si las longitudes de los lados correspondientes entre estas son iguales.

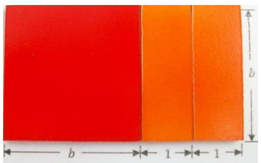
Ejemplo 1:

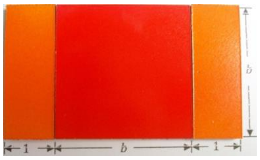
Rectángulo 1

Rectángulo 2

La longitud de los lados del rectángulo 1 es: $(1 + a + 1)$ y 1 y del rectángulo 2 es $(a + 1 + 1)$ y 1; es decir que las longitudes de ambos rectángulos son: $(a + 2)$ y 1

Ejemplo 2:





En el caso de las representaciones anteriores las longitudes de los lados son, para el rectángulo 1, $(b + 1 + 1)$ y b, y para el rectángulo 2 son $(1 + b + 1)$ y b, es decir, que las longitudes de uno de los lados de ambos rectángulos es $b + 2$.

PARE

Realiza representaciones equivalentes con las fichas que tengan por lados $(a+b+1)$ y a

Reorganización de fichas

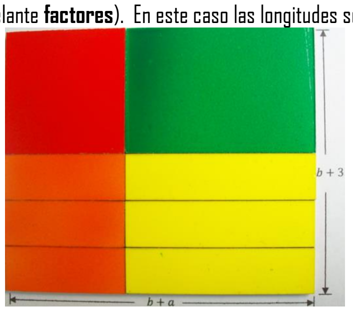
Terminada la representación del polinomio a factorizar, dado que haya fichas sobrepuestas a otras, debemos reorganizarlas para que la forma de la figura del primer plano no cubierta vista desde arriba sea un rectángulo utilizando las reglas anteriormente dadas.

Factorización de un polinomio dado

Factorizar el polinomio $b^2 + ab + 3a + 3b$.

Para ello se necesitan las siguientes fichas: 1 ficha de área b^2, 3 fichas de área a, 3 fichas de área b, y 1 ficha de área ab. Conformar un rectángulo con las fichas como se muestra en la figura.

A continuación deducir las longitudes de los lados del mismo (llamados de ahora en adelante **factores**). En este caso las longitudes son.



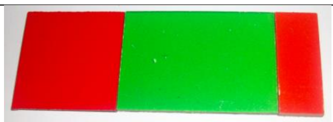
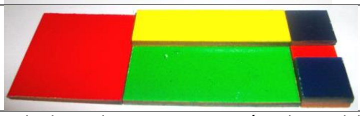
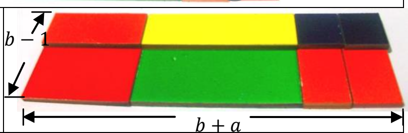
La expresión $(b + a)\ (b + 3)$ corresponde a la factorización de dicho polinomio.

Se puede verificar que esta expresión corresponde al polinomio dado realizando el producto que así se indica: $(b + a)\ (b + 3) = b^2 + 3b + ab + 3a$.

PARE

Usando las ***Tabletas Algebraicas*** expresa como producto de factores el siguiente polinomio: $2a^2+3ab+b^2+2b+3a+1$

Factorizar el polinomio $b^2+ab+b-a-2$

Ubicar las fichas que representan términos positivos	
Ubicar las fichas $-a$ y 2	
Como la figura conseguida en el primer plano no es un rectángulo, se deben reorganizar las fichas del segundo plano.	
Se sobrepone y une simultáneamente para crear el espacio para la ficha unidad que falta restar 	
Como el área es un rectángulo se hace la lectura de las longitudes de los lados	
Finalmente, se pueden hallar las longitudes de los lados para realizar el paso final de la factorización, que nos deja como resultado: $\boldsymbol{b^2+ab+b-a-2=(b-1)(b+a+2)}$	

Factores reducibles

Representar con las fichas el polinomio $2a^2+2a+2b+2ab$ y expresarlo como producto de factores.

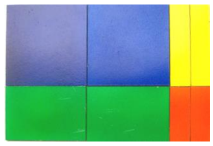
¿Existe más de una configuración (no equivalentes) con las fichas? Sí. Entonces se introduce la siguiente definición

Un polinomio (o un factor) es reducible cuando tiene al menos dos representaciones no equivalentes con las tabletas.

Ejemplo:

Para el caso de la factorización del polinomio $2a^2+2a+2b+2ab$, se obtienen dos pares de factores, $(a+1)(2a+2b)$ y $(a+b)(2a+2)$.

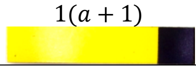
I. $(a+1)(2a+2b)$

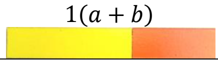


II. $(a+b)(2a+2)$

Se debe decidir cuál par será el aceptado como resultado parcial del proceso de factorización. Para eso cada factor se representará con las fichas:

Se debe decidir cuál par será el aceptado como resultado parcial del proceso de factorización. Para eso cada factor se representará con las fichas:

Par	**Factores del par correspondiente**	**Configuración no equivalente # 1**	**Configuración no equivalente # 2**
Primero (I.)	$(a+1)$	$1(a+1)$ 	
	$(2a+2b)$	$1(2a+2b)$	$2(a+b)$

			
Segundo (II.)	$(a+b)$	$1(a+b)$ 	
	$(2a+2)$	$1(2a+2)$ 	$2(a+1)$ 

Los **factores irreducibles** se identifican porque no se pudo obtener dos configuraciones no equivalentes con las fichas. Si la intención es expresar el polinomio como producto de factores reducibles, ¿Qué hacer con los factores reducibles que quedan?

Se escogerá un par, por ejemplo, el primero (con el otro par el proceso es análogo). Como el segundo factor $(2a + 2b)$es reducible, se buscan los dos factores que le dan origen, de los cuales se escoge el que no tiene como factor inmediato a una de las variables (con coeficiente 1) o al 1, que para este caso corresponden a la "configuración no equivalente # 2".

Así, del primer par se tomarán los factores $(a + 1)$ (irreducible) y $2(a + b)$ (reducido).

Para el segundo par se tomarán los factores $(a + b)$ (irreducible) y $2(a + 1)$ (reducido).

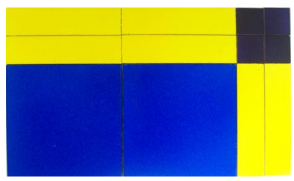
Es evidente la equivalencia entre las respuestas anteriores, ya que el orden de los factores no altera el producto, entonces, la factorización correcta del polinomio $2a^2 + 2ab + 2a + 2b$ es $2(a + 1)(a + b)$.

Si bien se puede enunciar desde el comienzo un caso de factor común, es importante mantener la relación geometría-álgebra y hacer notar que el concepto de factor irreducible tratado en esta actividad es abordable a través de representaciones físicas.

<u>Ejemplo de factorización de un polinomio con términos reducibles</u>

Factorizar el polinomio $2a^2 + 6a + 4$

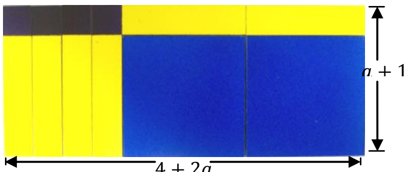
Para realizar este ejercicio necesitaremos 2 fichas de área a^2, 6 fichas de área a, y 4 fichas de área 1. Conformar un rectángulo con las fichas como se muestra en la figura.



¿Existe una configuración no equivalente? Sí.

Al tener dos representaciones no equivalentes el polinomio es reducible. Escogeremos esta última para llevar a cabo el proceso.

Deducir las longitudes de los lados del rectángulo: $(a+1)$ y $(2a+4)$



Ahora verificamos si las longitudes de los lados representan factores reducibles.

En el caso del factor $(2a+4)$ obtenemos dos representaciones equivalentes, las cuales son:

$2(a+2)$

$1\,(2a+4)$

Entonces escogemos la representación que no tiene como factor una de las variables o la unidad, es decir, escogemos $2(a+2)$.

Así, la expresión factorizada será: $(\boldsymbol{a}+\mathbf{1})\cdot\mathbf{2}\cdot(\boldsymbol{a}+\mathbf{2})$

Se puede verificar la equivalencia entre la anterior expresión y el polinomio inicial $2a^2+6a+4$ mediante las fichas. A pesar de haber tres factores, se puede hacer la representación con las fichas de $(a+1)(a+2)$ que se vería así:

y el doble de su área (es decir, multiplicándola por el factor 2), es equivalente a la representación 2 que analizamos como se ve en las imágenes.

Que es equivalente a:

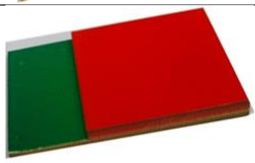
Ahora encontrarás algunas tareas pensadas para desarrollar con las Tabletas Algebraicas en el aula de clase, para poder socializar ideas con los compañeros.

SECUENCIA DE ACTIVIDADES

Primera parte

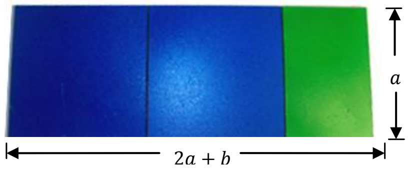
Objetivo: Interiorizar las reglas para manejar las Tabletas Algebraicas mediante la exploración con las mismas.

A continuación encontrarás unas configuraciones con las Tabletas Algebraicas. Están clasificadas en "Forma correcta" y "Forma incorrecta"

Forma correcta	Forma incorrecta
	
	
	
	

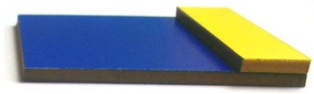
a. ¿Qué diferencia a las formas correctas de las incorrectas?
b. Según lo que observaste, ¿Qué es una configuración correcta con las Tabletas Algebraicas?

Vamos a encontrar las longitudes de los lados. Toma dos fichas de área a^2 y una ficha de área ab y construye una configuración correcta. Ahora. Mira la siguiente imagen:



c. ¿De dónde salen las longitudes que allí aparecen? Justifica
d. Construye tres configuraciones usando diferentes fichas y realiza el dibujo indicando la longitud de los lados.

REFLEXIONA ¿Cómo interpretarías el siguiente caso?



Sobreposición de fichas

Una ficha se puede colocar sobre otra siempre y cuando compartan, al menos, la longitud de uno de sus lados.

Aquí, tomamos una ficha de área a^2 y sobreponemos una ficha de área a, y las longitudes las podemos ilustrar así:

La nueva región tiene por lados a y $a-1$. Se puede asumir este proceso como resta de longitudes de lados.

e. De acuerdo con el anterior ejemplo representa con el material, un caso en donde se muestre una forma correcta y otra incorrecta de sobreposición de fichas indicando las longitudes de los lados como muestra la figura.

f. Si colocar una ficha sobre otra significa restar del área de la ficha de abajo el área de la ficha de arriba, ¿Qué significaría colocar 3 fichas apiladas, es decir, una sobre otra? ¿Y si fuesen más de tres? Haz una conjetura

Toma una ficha de área b^2 y tres de área b. Realiza configuraciones correctas con ellas y dibújalas indicando la longitud de sus lados.

g. ¿Qué tienen en común esas configuraciones que realizaste?

Comenta con tus compañeros de curso lo que acabas de observar. Entonces, definan lo siguiente:

Representaciones equivalentes son…

h. Construye y dibuja dos representaciones equivalentes y dos no equivalentes

Segunda parte

Objetivo: Expresar como producto de factores irreducibles un polinomio dado.

i. ¿Qué polinomio está representado con las anteriores fichas?

j. ¿Cuáles son las longitudes de los lados de la configuración?

Si el área de un rectángulo se halla multiplicando las longitudes de sus lados,

k. ¿Cómo se hallaría el área de la anterior configuración?

Ahora, construye una configuración con las siguientes fichas: una azul, una naranja, dos amarillas, una morada y una verde.

l. ¿Qué polinomio está representado con las anteriores fichas?

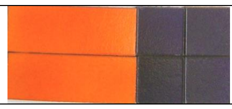
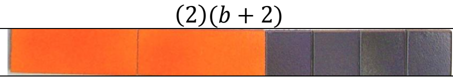
m. ¿Cómo se halla el área de la configuración? (es decir, multiplicación de longitud de base por altura.)

La longitud de un lado del rectángulo será llamada a partir de ahora **factor**.

Definición:

Un polinomio (o un factor) es reducible cuando tiene al menos dos representaciones no equivalentes con las tabletas.

El polinomio $2b + 4$ tiene las siguientes representaciones con las fichas


$(2)(b+2)$

$(1)(2b+4)$

Como vemos, las longitudes de los lados correspondientes de las dos representaciones no son iguales, entonces las representaciones no son equivalentes.

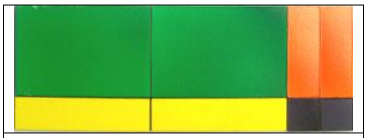
Entonces el binomio $2b + 4$ es reducible.

Como es reducible, debemos escoger una de las dos expresiones para su área, pero ¿Cuál?

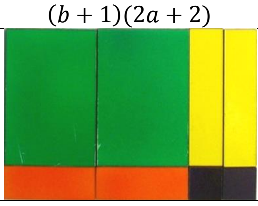
Vamos a elegir aquella en la cual una de las longitudes no sea a, b ni 1.
Según la anterior instrucción,
¿Cuál es el par de factores que vamos a escoger?
Definición:

Factorización es el proceso de expresar un polinomio como producto de factores irreducibles

Ejemplo 1: factorizar el polinomio $2ab + 2a + 2b + 2$. Usa las fichas correspondientes para seguir el proceso paso a paso
¿Cuántas representaciones no equivalentes tiene? Hay dos, son las siguientes:



$(b+1)(2a+2)$



$(a+1)(2b+2)$

Escogeremos una de las representaciones, por ejemplo, la segunda.

Recordando la definición de factor reducible, se reduce el factor que sea necesario, en este caso, $(2b+2)$. Entonces tenemos:

		
$(a+1)$	$2(b+1)$	$(1)(2b+2)$

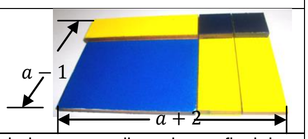
Se elige la forma correcta que, si recordamos, es en la cual una de las longitudes no es a, b ni 1.

Entonces obtenemos que

$$\mathbf{2ab + 2a + 2b + 2 = (a+1)2(b+1)}.$$

Ejemplo 2: factorizar el polinomio $b^2 + b - 2$. Usa las fichas correspondientes para seguir el proceso paso a paso

Cuando se factorizan polinomios con término negativos, se hace indispensable el uso de fichas auxiliares, como se mostrará a continuación. Inicialmente se necesita una ficha azul, una amarilla y dos moradas.	
Se colocan las fichas que representan términos positivos	

Se sobreponen la fichas que representan los términos -2	
Como la figura conseguida en el primer plano no es un rectángulo, se deben reorganizar las fichas del segundo plano	
Se sobrepone y une simultáneamente una ficha para crear el espacio para la ficha unidad que se debe reorganizar	
Ya organizadas las fichas, se deducen las longitudes de los lados	
Así, se pueden hallar las longitudes de los lados para realizar el paso final de la factorización, que nos deja como resultado: $\boldsymbol{a^2+a-2}=(\boldsymbol{a-1})(\boldsymbol{a+2})$	

¡AL FIN! Logramos factorizar completamente el polinomio dado, ahora inténtalo tú siguiendo los pasos.

Representa con las tabletas los siguientes polinomios mostrando el paso a paso. Se dará la respuesta a algunos ejercicios que posteriormente se contrastarán con los dibujos.

i. $3a^2+5a+2$

ii. $b^2+a+b+ab$

iii. $b^2+ab-2a-2b$ respuesta: $(a+b)(b-2)$

iv. a^2-4 respuesta: $(a-2)(a+2)$

v. $6ab+6a^2+3a+3b$ respuesta: $3(2a+1)(a+b)$

vi. $6a^2+10a+4$ respuesta: $2(3a+2)(a+1)$