Reflexiones Epistemológicas y Didácticas Acerca de la Formación de la Noción de Estructura Algebraica

Vicente Erdulfo Ortega Patiño, e-mail: veortegap@hotmail.com

Universidad de Nariño – Pasto

Resumen

Se considera la posición central que el concepto de estructura ha alcanzado en matemáticas. Se presentan argumentos históricos y epistemológicos encaminados a esclarecer que el proceso de la formación de la noción de grupo abstracto tuvo tres raíces: la teoría de ecuaciones algebraicas, la teoría de números y la geometría, a partir de las cuales la noción de estructura matemática surgió de la toma de conciencia de profundos fenómenos de isomorfismos.

Al estudiar la tendencia creciente hacia la abstracción y la generalidad que condujo al enfoque estructural del álgebra, sustentado en la concepción de Dedekind, se plantea que una visión conjuntista del álgebra se configuró a partir de la concepción conjuntista de los objetos matemáticos, la aceptación del infinito actual, la visión abstracta de grupo y el surgimiento de la noción de aplicación, presentes en la obra de Dedekind desde 1850, como rasgos básicos correspondientes a un enfoque conjuntista de la matemática pura.

Keywords: Argumentos histórico–epistemológicos, fenómenos de isomorfismos, enfoque estructural, visión conjuntista.

1. El concepto de estructura y la unidad de las matemáticas

El concepto de estructura ha alcanzado, en los últimos tiempos, una posición central en matemáticas, básicamente debido al reconocimiento de la importancia de su estudio como una noción fundamental que ha hecho posible que en matemáticas se llegue a plantear o promover, entre otras cosas, un desarrollo unificado de esta disciplina,[1] logrando así una considerable "economía de pensamiento" al evitar la repetición innecesaria de los razonamientos en diversos contextos particulares, lo cual, en concordancia con el fin esencial de la axiomática, contribuye a alcanzar la "inteligibilidad profunda de las matemáticas", mediante el discernimiento y la puesta en evidencia de "las ideas comunes sepultadas bajo el aparato exterior de los detalles propios de teorías consideradas [...], en apariencia, muy distintas" (Bourbaki 1962, pp. 39,43).

Se ha generado entonces una tendencia de pensamiento en términos de estructuras, fruto de lo cual, de manera consciente el grupo Bourbaki, para citar el caso emblemático, ha abordado el estudio de la matemáticas como una jerarquía de estructuras utilizando, de manera sistemática, la noción de estructura para obtener "una exposición unificada de todas las ramas básicas de la matemática que descansa sobre sólidos fundamentos" (Campos, 1994, pp. 561-562). Desde esta perspectiva, "Bourbaki considera la matemática moderna en sus fundamentos para edificarla sobre bases axiomáticas rigurosas según el pensamiento de Hilbert; codifica y clarifica el lenguaje matemático gracias a la lógica formal y a la teoría de conjuntos (Cantor, Dedekind); unifica esta ciencia mediante el establecimiento de estructuras comunes a sus diversas ramas" (Campos, 1994, p. 561).

[1] "Una de las características de la Matemática Bourbakista es su extraordinaria unidad; no hay apenas idea en una teoría que no tenga repercusiones notable en muchas otras; sería absurdo y contrario al espíritu mismo de nuestra ciencia quererla dividir en compartimentos rígidos, a la manera de la división tradicional en Álgebra, Análisis, Geometría, etc., totalmente caduca hoy día". (Dieudonné, 1987).

La tendencia a la unificación, ligada al surgimiento y a la evolución de las estructuras, es una de las características de la matemática moderna, que ha prevalecido hasta la época actual. Así mismo algunos de los hechos y momentos relevantes de la evolución de las matemáticas podrían interpretarse como intentos de gestación y manifestación de dicha corriente de pensamiento; tal es el caso del propósito de la escuela pitagórica expresado en su insignia fundamental "todas las cosas son número". Más concretamente, Descartes consideró también que había creado una ciencia única, al enlazar en la geometría analítica, los métodos del álgebra y la geometría, partiendo de la idea de elegir los segmentos como forma general de las magnitudes geométricas, pensando en introducir las operaciones aritméticas en la geometría, con la particularidad de que la multiplicación tendría la propiedad clausurativa, mediante la introducción de un segmento considerado como unidad y la construcción de la cuarta magnitud proporcional, donde ya se avizora, la operación en términos de ley de composición interna, lo que daría lugar a una prefiguración implícita de estructura algebraica entre los segmentos. Algo semejante haría Gauss, más de un siglo después, con la composición de formas cuadráticas. Es de destacar también el resultado que, en esta tendencia, produjeron los lazos establecidos por Félix Klein entre la geometría y la teoría de grupos, en el programa de Erlangen de 1872, con lo cual consiguió unificar y "explicar en que consiste la geometría, mediante la estructura de grupo"(Campos, 1994, p. 562); lo mismo que las aplicaciones de esta teoría al análisis, hecha por Sophus Lie, de cuya generalización surgieron las teorías de álgebras y grupos de Lie, sin olvidar, desde luego, los aportes de Lagrange, Abel, Galois, Cayley [...] "y una gran parte de las investigaciones de la escuela alemana de la segunda mitad del siglo XIX"(Campos, 1994, p. 562).

2. La formación de la estructura de grupo en la teoría de ecuaciones algebraicas

Los problemas que impulsaron el desarrollo posterior del álgebra, en el siglo XVIII, tenían que ver con el tema de la teoría de ecuaciones algebraicas, la cual incluía la formación de la teoría general de ecuaciones y la acumulación de procedimientos para su resolución. El trabajo científico alrededor de estos problemas condujo a la reestructuración de los fundamentos del álgebra, ligada con la ampliación del concepto de número, con los procedimientos del cálculo aritmético, con la teoría de números y con el perfeccionamiento del aparato algebraico simbólico–literal. A partir del desarrollo de estos aspectos, que en esencia determinaban el contenido y el objeto del álgebra de finales de dicho siglo, se requirió y a la vez fue posible avanzar hacia el tratamiento de problemas cualitativamente nuevos, los cuales estarían relacionados con el surgimiento de la teoría de Galois y la teoría de grupos. Dichos problemas, bajo la denominación de aritmética universal o general, eran los temas que constituían una ciencia única, que ocupó el centro de atención de eminentes matemáticos de aquella época, especialmente en el marco de la Aritmética Universal de Newton, publicada en 1707. De esta manera ya se podía advertir no sólo el comienzo sino el resultado y el estado de la formación del álgebra en el siglo XVIII, convirtiéndose en la ciencia de las ecuaciones algebraicas, en la cual se incluía la elaboración del aparato simbólico–literal necesario para la resolución de ecuaciones. Igualmente, conservando en su composición los métodos numéricos, por una parte, el álgebra interactuaba con la aritmética de manera muy estrecha, y por otra, había una interpretación de los métodos y problemas algebraicos y de la teoría de números, básicamente en el dominio relacionado con el análisis diofántico.

Cabe resaltar además que, desde la perspectiva de la evolución del contenido científico del álgebra y del proceso de creación de las premisas para un nuevo período de su evolución histórica, la generalidad del concepto de número determinó la generalidad y el campo de aplicaciones de los métodos algebraico-literales.

Por su parte Lagrange, precisando los trabajos de Euler, introdujo y elaboró la teoría de las funciones invariantes o semejantes únicamente para sustituciones de un mismo grupo. En la teoría de Lagrange se consideraba la semejanza de funciones simétricas de las raíces de la ecuación para el caso en el que se diferenciaban entre sí todos los $2k$ valores que ellos pueden tomar, respecto a todas las permutaciones de las raíces. Lagrange demostró, con relación a las funciones semejantes, que éstas se expresan, unas a través de las otras, en forma racional, por medio de los coeficientes de la ecuación dada. Sin embargo, en vista de que el único camino que tenían los matemáticos para resolver las ecuaciones de grado superior al cuarto eran los recursos algebraicos elementales de aquella época y el único motivo que guiaba los innumerables esfuerzos e intentos era una especie de certeza o garantía intuitiva de la posibilidad de encontrar un algoritmo similar a los de Ferrari o los de Tartaglia y Cardano, al menos para el caso de las raíces reales, se propuso entonces determinar las razones por las cuales resultaban eficaces los métodos conocidos para la resolución de las ecuaciones de tercero y cuarto grado, al igual que los hechos o señales reveladoras y susceptibles de dar luces en la investigación de métodos también eficaces para el caso de ecuaciones de grado mayor que cuatro; para tal efecto analizó rigurosamente los mencionados métodos, lo cual le reveló que las soluciones de la ecuación original se obtendrían en términos de las soluciones de ciertas ecuaciones auxiliares llamadas resolventes, estudio este que ya había iniciado Vandermonde hacia 1770.

3. Las fuentes del cambio de perspectiva y el proceso de desontologización

Lagrange planteó por primera vez la pregunta de por qué funcionan las fórmulas para los casos de segundo, tercero y cuarto grados y qué se escondía tras ello. Buscó entonces las razones del éxito alcanzado para dichos casos y las del fracaso en los de grados superiores. Encontró que el triunfo de los métodos de Del Ferro, Tartaglía, Cardano y Ferrari, para resolver ecuaciones de tercero y cuarto grados, residía en la existencia de ciertas funciones no simétricas de las raíces, las cuales poseían determinadas propiedades de invariancia por permutaciones y que el problema de resolver ecuaciones de quinto grado o mayor aún, estaba relacionado con ciertas expresiones que, de algún modo, son invariantes con respecto a las permutaciones de las raíces.

Abel, en 1824, resolvió el problema al demostrar que no había ese tipo de fórmulas para el caso de las ecuaciones de grado igual o mayor que cinco. Con esta conclusión se inauguraba una nueva era en la evolución del álgebra, esto es, los comienzos de la teoría de grupos y por consiguiente el estudio de las estructuras. Iniciando el siglo XIX, Galois estudió ciertas agrupaciones o grupos de permutaciones y las propiedades de determinados "subgrupos"que permanecían invariantes bajo ciertas transformaciones, con lo cual pudo probar que era imposible resolver, por medio de radicales, las ecuaciones de grado mayor que cuatro. El estudio de esos grupos de permutaciones de números o símbolos se llevó a cabo durante todo el siglo XIX, pero sólo al final de 1882, en los trabajos de van Dyck, Netto y Weber, se alcanzó a formular, en términos abstractos la estructura de tales grupos y a proponer los axiomas mínimos que deberían cumplir esos sistemas de transformaciones.

Cauchy, para poder generalizar los resultados logrados por Ruffini y Abel, presentó la noción de permutación con un enfoque totalmente nuevo, mediante una ley que llamó sustitución.

En el siglo XIX se fijaron de manera definitiva los conceptos fundamentales y los objetivos principales del álgebra abstracta que trataba de las colecciones de objetos de naturaleza a veces muy diferente a la de números reales o complejos. Durante este siglo el álgebra se enriqueció con creaciones tales como los vectores, los cuaterniones, las matrices, las formas cuadráticas binarias, los hipernúmeros de diferentes clases, las transformaciones y las sustituciones o permutaciones. Tales objetos se combinaron mediante operaciones y leyes de composición para desarrollar los conceptos algebraicos de base. Las investigaciones sobre los números algebraicos pusieron de presente diferentes variedades de álgebras, que se distinguían por las propiedades de las operaciones definidas en ellas. A partir de los notables trabajos de Galois se pudo establecer, de manera definitiva, la solución de las ecuaciones polinómicas en términos de operaciones algebraicas. Pero las ideas de Galois, antes de fructificar debieron esperar otros resultados tales como la comprensión clara del principio de la permanencia de las formas así como los fundamentos de una lógica de los números complejos basada en las propiedades de los números reales y de otros conceptos como los vectores y los cuaterniones.

La obra de Peacock tuvo el mérito de preparar el camino para desarrollos más abstractos del álgebra y, además, junto con Gregory y De Morgan intentaron hacer del álgebra una ciencia independiente de las propiedades de los números reales y complejos. Para tal efecto propusieron como postulado básico que las mismas propiedades fundamentales fueran válidas para cualquier clase de números.

4. El aporte de la geometría

Otra fuente del cambio en la matemática, al pasar a la época moderna, comienza con el advenimiento de las geométricas no euclidianas hacia la tercera década del siglo XIX. Su importancia radica en su valor intrínseco y en su vinculación con el método axiomático. Las características de la geometría euclidiana en relación con dicho método están plasmadas, en los Elementos de Euclides, en los cuales, los postulados eran considerados como verdades autoevidentes acerca del espacio físico y por más de veinte siglos constituidos en el modelo ideal de explicación racional de la realidad .El problema de la autoevidencia está directamente relacionado con la concepción ontológica de que el razonamiento matemático estaría siempre antecedido por la realidad del objeto del que se ocupa.

Las geometrías no euclidianas ejercieron una importante influencia y repercusión sobre las ideas que habían de conducir a la matemática de hoy, por cuanto tuvieron el mérito de socavar los fundamentos de la geometría euclidiana y de facilitar una nueva concepción de la geometría, en la que se elimina toda referencia intuitiva al espacio físico, quedando subsistente sólo la abstracción y el reconocimiento de la libre creación de los sistemas matemáticos.

Utilizando el concepto de grupo de transformaciones, Felix Klein elaboró una extraordinaria síntesis que tenía como principio unificador la idea de que una geometría es el estudio de las propiedades de un conjunto que permanecen invariantes cuando los elementos de dicho conjunto se someten a las transformaciones de un cierto grupo de las mismas, estableciéndose una jerarquía entre todas aquellas geometrías. Surgió entonces el programa de Erlangen de 1872.

En los fundamentos de la geometría, David Hilbert se propuso formalizar rigurosamente la geometría euclidiana y con tal fin consideró que era necesario no tener en cuenta la naturaleza de los objetos geométricos básicos como puntos rectas y planos, sino únicamente las relaciones entre ellos. Esta tendencia hacia la desontologización no alteraba en lo más mínimo la geometría resultante; lo que equivale a subrayar el carácter arbitrario del nombre de los objetos que se convierten en entes abstractos definidos implícitamente por los axiomas.

En consecuencia, en adelante se tendrían que aceptar resultados no autoevidentes y al mismo tiempo se pondría de presente un abandono inconsciente del control ontológico del objeto matemático y en cambio se tendría en cuenta únicamente la estructura lógica del sistema geométrico en su conjunto. El comprender la necesidad de la desontologización de los objetos matemáticos se considera uno de los resultados más importantes y productivos en el desarrollo de la axiomática y de la matemática moderna, cuya idea clave expresa que lo que cuentan son las relaciones mutuas entre objetos indefinidos. Esto constituye la tematización de la estructura como objeto de estudio. Posteriormente la obra de Hilbert cambiaría el panorama de modo sustancial.

5. Los aportes de Dedekind a la formación de la noción de estructura algebraica

Un factor importante para el surgimiento de las estructuras matemáticas fue el lenguaje conjuntista que, en principio, Dedekind no consideró necesario presentarlo en forma axiomática. Como precursor de los enfoques estructurales de la matemática moderna, en el curso de sus investigaciones se convenció del papel básico de los conjuntos en las matemáticas y en su correspondencia con Cantor tomó parte en algunos de los capítulos del nacimiento de la teoría de conjuntos.

En su libro ¿Qué son y para qué sirven los números? proponía las bases de toda una concepción de la matemática pura, capaz de abarcar la aritmética, el álgebra y el análisis, utilizando únicamente las nociones de aplicación y de conjunto. Sobre la base de la noción de ideal fundó la teoría de números algebraicos. Así mismo contribuyó a clarificar, de manera esencial, las nociones de grupo, anillo, ideal, cuerpo, módulo, es decir, los conjuntos dotados de una estructura. También formaron parte de su trabajo matemático, los fundamentos de las matemáticas, los números reales, la teoría de Galois, la teoría de las funciones algebraicas, la topología de conjuntos y los principios del análisis, entre otros temas. Trabajó de manera sistemática e independiente sobre los prerrequisitos de la teoría de grupos para la teoría de Galois. Así pudo reconocer que la teoría tenía relación con extensiones de cuerpos y presentó, por primera vez, el tema que en el lenguaje moderno hace referencia a las relaciones entre los subcuerpos del cuerpo de descomposición y los subgrupos del grupo de Galois de un polinomio, adelantándose en una visión abstracta de los grupos, unos treinta años, a la comunidad matemática de su tiempo. Así mismo llegó a realizar también una prueba del teorema de homomorfismo. Pero, en particular, su trabajo sobre la teoría de ideales es de tal importancia que es considerado su obra maestra. Una característica relevante de su exposición tiene que ver con su propuesta metodológica en la cual la teoría de conjuntos desempeña un papel esencial. En efecto, el problema de la factorización de ideales se separa del enfoque basado únicamente en términos de números al hacer su propuesta en términos de conjuntos, coherente con su enfoque conjuntista de toda la matemática.

Los cuerpos de números algebraicos en los que existe una sola descomposición de los enteros algebraicos en números primos son una excepción. Para restituir el teorema fundamental de la aritmética a los enteros de todos los cuerpos de números algebraicos, Dedekind revisó la divisibilidad de los enteros racionales. Este fue el paso crítico que condujo a la invención de los ideales. [2] Dedekind resolvió el problema básico de la factorización de enteros algebraicos definiendo las nociones de producto de ideales e ideal primo y, demostrando que, dado un cuerpo cualquiera de números algebraicos, todo ideal admite una única descomposición como producto de ideales primos. De esta manera, la descomposición de un número entero algebraico, en producto de enteros algebraicos, se redujo a la descomposición de un ideal en producto de ideales, siendo válido entonces el teorema fundamental de la aritmética. Es decir, se reemplazan los enteros del cuerpo por sus correspondientes ideales principales.

En términos generales, la clave del problema estaba en reemplazar la relación de divisibilidad aritmética por la relación de pertenencia a una clase. Así la invención de los ideales constituyó un ejemplo de la tendencia moderna de la metodología de la generalización por ampliación para regularizar las excepciones. Una característica del pensamiento de Dedekind acerca del número era resolver en términos infinitos un problema estrictamente finito. El problema de los enteros algebraicos de la descomposición única, Dedekind lo resolvió por medio de clases infinitas particulares de los enteros algebraicos llamados ideales. Esto recuerda el caso de las cortaduras.

Todas las tentativas sucesivas y el empeño para ampliar el concepto de número, desde la perspectiva de las matemáticas como un todo y con la metodología de la generalización

[2]Un ideal es un conjunto de enteros cerrado para las operaciones de suma y diferencia y también para el producto de sus elementos por enteros del cuerpo correspondiente

y de la abstracción deliberadas, a la manera de Cantor, dio como resultado culminante la estructura como nuevo objeto de la matemática moderna fundada en la concepción de Dedekind.

6. Referencias Bibliográficas

[B1] Campos, A. (1994). Axiomática y geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki, Bogotá, D.C.,Colombia: Universidad Nacional.

[B2] Dedekind, R. (1888). ¿Qué son y para qué sirven los números? y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática. Madrid: Alianza Editorial.

[B3] Dieudonné, J.(1987). Panorama de las matemáticas puras. La elección Bourbakista. Barcelona: Editorial Reverté.

[B4] Ferreirós,J (1999). Labyrinth of thought. A history of set theory and its role in modern mathematics.Berlin: Birkhauser Verlag.

[B5] Ferreirós,J., Gray, J (2006). The architecture of modern Mathematics. Essay in history and philosophy.New York: Oxford University Press

[B6] Waerden, B.L. v. d. (1985). A history of algebra. From al- Khwarizmi to Emmy Noether. Berlin: Springer-Verlag.

[B7] Wussing, H. (1984). The genesis of the abstract group concept. London: MIT Press.