UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

RESIGNIFICANDO LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA UNA MIRADA DESDE LA COVARIACIÓN Y EL ENFOQUE SOCIOEPISTEMOLÓGICO**:** UNA PROPUESTA DIDÁCTICA

MARÍA INÉS CANO VILLAMIL

DIANA CAROLINA GARCÍA CARO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D.C.

2016-II

RESIGNIFICANDO LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA UNA MIRADA DESDE LA COVARIACIÓN Y EL ENFOQUE SOCIOEPISTEMOLÓGICO**:** UNA PROPUESTA DIDÁCTICA

MARÍA INÉS CANO VILLAMIL

CÓDIGO: 2012140010

CC: 1074888568

DIANA CAROLINA GARCÍA CARO

CÓDIGO: 2012240036

CC: 1019097876

Trabajo de grado presentado ante el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Asesor:

ORLANDO AYA CORREDOR

Trabajo de grado asociado al estudio de un asunto de interés profesional del estudiante

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D.C.

2016-II

Nota de aceptación

Jurado

Jurado

Jurado

Bogotá, D.C.

A Dios, quien en su infinita misericordia ha permitido que este sueño se convirtiera en una gran realidad.

A mis padres Pablo Cano y María Villamil, los pilares más importantes de mi vida. Gracias por su esfuerzo, apoyo, dedicación y buen ejemplo.

A mis amigos y compañeros de estudio Britany Salazar, Carolina Delgado y Jhon Gómez, apasionados por las matemáticas y la educación.

MARÍA CANO

A Dios y a mi madre Marlén Rosalba Caro Porras por su fortaleza y apoyo para terminar este trabajo de la mejor forma. A mi familia quienes con su motivación impulsaron mi vida académica.

A Juan David Serrano por su incondicional ayuda, apoyo y cariño en los momentos de alegría y dificultad. A María Cano mi compañera de tesis por su paciencia y ayuda en los momentos difíciles que enfrenté.

Y por último a mis amigos que me alentaron en esta travesía: Jhon Tami, Alejandra Bernal, Miguel Méndez, Krupskaia Quintero, Laura López, Daniela Ropero, Diana Quintero, Cristian Raigoso y Vicente Muñoz.

CAROLINA GARCÍA

AGRADECIMIENTOS

Es importante, en primer lugar, dar gracias a Dios por permitirnos llevar a cabo este trabajo, por colmarnos de sabiduría y guiarnos en este proceso de formación.

Resaltamos la valiosa ayuda y disposición de aquellas personas que enriquecieron y contribuyeron de gran forma en la realización de este trabajo, y en general en nuestra formación académica y personal. Especialmente, agrademos al profesor Orlando Aya, quien asumió la responsabilidad de dirigir este trabajo de grado; gracias por su paciencia y dedicación, por orientarnos, y por brindarnos la posibilidad de trabajar a su lado; sus enseñanzas y aprendizajes son de gran importancia para nuestra vida profesional.

También queremos dar un agradecimiento especial a nuestro compañero Jhon Gómez, por sus aportes y disposición, por brindarnos un espacio en su clase, permitiendo que la propuesta fuera reestructurada y de esta manera mejorar el diseño de este trabajo. De igual modo, agrademos al Profesor Edgar Guacaneme por su ayuda bibliográfica.

Finalmente agradecemos a nuestros compañeros Britany Salazar, Carolina Delgado y Juan Serrano; por sus consejos, apoyo y aportes; su ayuda contribuyo en todas las labores necesarias para la culminación exitosa de este trabajo.

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN – RAE

1. *Información General*	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Biblioteca Central, Universidad Pedagógica Nacional
Título del documento	RESIGNIFICANDO LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA UNA MIRADA DESDE LA COVARIACIÓN Y EL ENFOQUE SOCIOEPISTEMOLÓGICO**:** UNA PROPUESTA DIDÁCTICA
Autor(es)	Cano Villamil, María Inés; García Caro, Diana Carolina
Director	Orlando Aya Corredor
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2016, 126 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	FUNCIÓN LOGARÍTMICA, PENSAMIENTO VARIACIONAL, RAZONAMIENTO COVARIACIONAL, TEORÍA SOCIOEPISTEMOLÓGICA.

2. *Descripción*

En este escrito se presenta el trabajo de grado motivado por el interés de las autoras, sobre algunos cuestionamientos acerca de la enseñanza de la función logarítmica en las aulas, de tal modo que se plantea como objetivo diseñar una secuencia didáctica que responda a las características de dicho concepto e incorpore una visión apoyada en el enfoque socioepistemólogico.

La secuencia didáctica va dirigida a los docentes, y se constituye una guía para la enseñanza de dicho concepto, en la cual se plantean diferentes actividades situadas en algunos momentos históricos en el desarrollo del concepto asociado a esta función. Cada actividad está acompañada de un objetivo, una descripción general y unas sugerencias a tener en cuenta por parte de cada docente. Adicionalmente, cada actividad cuenta con un material (tangible o en un entorno tecnológico) y un taller diseñado para los estudiantes. Las actividades están diseñadas para diferentes grados de escolaridad, teniendo en cuenta su grado de complejidad y que cada actividad requiere de algunos conceptos previos.

3. Fuentes

Para la elaboración de esta monografía se consultaron diferentes documentos entre los cuales se encuentran cinco (5) tesis, de las cuales tres (3) son de maestría y dos (2) son tesis de doctorado; además se revisaron catorce (14) artículos de revistas, ocho (8) libros de Matemáticas e Historia de las Matemáticas, se tuvieron en cuenta dos (2) documentos oficiales, ocho (8) artículos de Memorias de eventos referentes a Matemática Educativa, por último se consultaron tres (3) investigaciones académicas.

A continuación, se presentan las principales fuentes bibliográficas:

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., & Montiel, G. (2014). Socioepistemología, matemática y realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7*(3), 91-116.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA, 8*(2), 121-156.

Ferrari, M. (2008). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo.* CINVESTAV-IPN, México. Obtenido de http://www.clame.org.mx/documentos/tesis/rferrari.pdf

Ferrari, M. y Farfán, R. (2008). Un estudio socioepistemológico de lo logaritmico: La construcción de una red de modelos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(3), 309-354.

Ferrari, M. y Farfán, R. (2010). Una socioepistemología de lo logarítmico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4), 53-68.

Gacharná, O. (2012). *Algunas consideraciones didácticas sobre el concepto de logaritmo y de función logarítmica y sus posibilidades en la educación básica y media.* Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

González, M. y Vargas, J. (2007). Segmentos de la historia: La función logarítmica. *Educación e Historia, 15*(2), 129-144.

Hernández, M. y Ferrari , M. (2005). Los logaritmos a partir de la covariación de sucesiones. (J. Lezama, M. Sánchez, y J. Molina, Edits.) *Acta Latinoamericana de Matmática Educativa, 18*, 531-536.

Montiel, G. y Buendía, G. (2011). Propuesta metodológica para la investigación Socioepistemológica. *Memoria de la XIV Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, 443-454.

4. Contenidos

Este trabajo de grado consta de 5 capítulos, a saber:

- **Capítulo 1:** Da a conocer la justificación y los objetivos que orientan el presente trabajo.
- **Capítulo 2:** En él se presenta el desarrollo histórico de la función logarítmica y aquellos aspectos de carácter matemático y didáctico, que se consideran importantes para la estructuración y desarrollo de la propuesta didáctica. En primer lugar, se muestra el desarrollo histórico de dicha función; seguidamente, se presenta el marco matemático, teniendo en cuenta diferentes definiciones tomadas de algunos textos de matemáticas de uso universitario. Finalmente, se muestra el contenido didáctico, que aporta en el diseño de la secuencia de actividades, y que esencialmente hace referencia al pensamiento variacional, al razonamiento covariacional, y la Teoría Socioepístemológica de la Educación Matemática.
- **Capítulo 3:** Se describe la metodología que se asumió para el diseño del trabajo, la cual está basada en el enfoque socioepistemológico.
- **Capítulo 4:** Se presenta la propuesta didáctica, la cual cuenta con 8 actividades que están sustentadas en etapas históricas de dicha función y que buscan resignificar el concepto de función logarítmica en el aula. Cada actividad cuenta con una descripción guía para el docente y un taller dirigido a los estudiantes, y además están acompañadas de material tangible o en entorno tecnológico.
- **Capítulo 5:** Se presentan las conclusiones del trabajo desarrollado.

5. *Metodología*
La metodología de este trabajo se enmarca en el enfoque socioepistemológico, se consideran unas pautas y etapas que se deben tener en cuenta para el desarrollo de la secuencia de actividades y acciones que se llevan a cabo en una propuesta de aula, y es en ellas en las que se sustentan las actividades diseñadas. En este sentido, se parte de un análisis y documentación sobre el desarrollo histórico, social y cultural de la función logarítmica, se exponen las prácticas que dieron origen a este concepto, se describe la forma como es trabajado este concepto en algunos libros de texto; se propone la resignificación y algunos aspectos que pueden resultar relevantes en los procesos de enseñanza de ese saber a través de las consideraciones anteriores, por medio de la secuencia de actividades.
6. *Conclusiones*
A continuación se presentan algunas de las conclusiones a las cuales se llegó durante el desarrollo del trabajo: ➢ Es importante reconocer la naturaleza de cada función y particularizar la enseñanza de las mismas, esto atendiendo a cada una de sus características, pues en el caso de la función logarítmica se evidencio que su forma de covariación es diferente y es esencial su comprensión para la modelación de diversos fenómenos de la vida real. ➢ Reconocer y documentar aquellos aspectos históricos, sociales y culturales que dieron origen a la función logarítmica y a cualquier objeto matemático en general; da la posibilidad de plantear otro tipo de propuestas, las cuales buscan reestructurar la forma usual como se enseñan las matemáticas en la actualidad. ➢ El análisis de textos de matemáticas y de matemáticas escolares, permitió evidenciar que el tratamiento que se le da a la función logarítmica y a los logaritmos es limitado y en general solo se proporciona una definición formal, algunas propiedades, ejemplos de notación y en algunos textos se ejemplifican aplicaciones pero sin dar mayor relevancia a estas. ➢ El desarrollo de este trabajo permitió un aprendizaje tanto didáctico como matemático de la función logarítmica, en donde se evidenciaron aspectos de la función logarítmica

que hasta hace poco nos eran desconocidos. particularmente, su evolución histórica nos permitió identificar aspectos útiles, que pueden cambiar la forma como se trabajan estos conceptos en el aula.

- El paso del trabajo con las progresiones geométricas y aritméticas, hacia incluir otros valores numéricos a los cuales también se les quería calcular el logaritmo, es decir el intentar dar un paso a la continuidad, siempre se tornó como una dificultad para la elaboración de la secuencia de actividades.
- Trabajar desde el desarrollo del razonamiento covariacional, atendiendo a la covariación entre una progresión geométrica y una aritmética, permite hacer una aproximación a los logaritmos que facilita la compresión de los mismos.

Elaborado por:	CANO VILLAMIL, María Inés GARCÍA CARO, Diana Carolina.		
Revisado por:	Orlando Aya Corredor		
Fecha de elaboración del resumen:	25	10	2016

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN 1

1. ASPECTOS GENERALES 3

1.1. JUSTIFICACIÓN 3

1.2. OBJETIVOS 5

1.2.1. Objetivo general 5

1.2.2. Objetivos específicos 5

2. MARCO DE REFERENCIA 6

2.1. MARCO HISTÓRICO 6

2.1.1. Exploración algorítmica 7

2.1.1.1. Arquímedes 7

2.1.1.2. Chuquet y Stifel (Siglo XV y XVI) 8

2.1.1.3. Prostaféresis 11

2.1.2. Numérica utilitaria 12

2.1.2.1. John Napier 12

2.1.2.2. Jobst Bürgi 17

2.1.2.3. Henry Briggs 18

2.1.3. Gráfico-Geométrica 20

2.1.3.1. Gregory de Saint-Vicent 20

2.1.3.2. María Agnesi 22

2.1.4. Analiticidad 25

2.1.4.1. Mengoli 25

2.1.4.2. Desarrollo de los logaritmos como series de potencias 26

2.1.5. Simbolización 27

2.1.6. Formalismo 28

2.2. MARCO MATEMÁTICO 28

2.2.1. Conceptos matemáticos asociados a la función logarítmica 29

2.2.2. Definiciones de logaritmo y función logarítmica 30

2.3. MARCO DIDÁCTICO ... 34
2.3.1. Pensamiento variacional ... 35
2.3.2. Covarición y razonamiento covariacional ... 36
2.3.3. Socioepístemología y función logarítmica ... 38
3. METODOLOGÍA DE TRABAJO ... 42
4. PROPUESTA DIDÁCTICA “RESIGNIFICANDO LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA UNA MIRADA DESDE LA COVARIACIÓN Y EL ENFOQUE SOCIOEPISTEMOLÓGICO” ... 46
4.1. Actividad 1 (Transformaciones numéricas): *Relación entre las progresiones aritméticas y geométricas* ... 46
4.2. Actividad 2 (Transformaciones numéricas y objetos teóricos*): Relación entre las progresiones aritméticas y geométricas y el concepto de logaritmo* ... 49
4.3. Actividad 3 (Transformaciones numéricas): *Deducción de la propiedad del logaritmo de un producto* ... 52
4.4. Actividad 4 (Transformaciones numéricas): *Deducción de la propiedad del logaritmo de un cociente* ... 55
4.5. Actividad 5 (Modelizadores): *Situaciones que se modelan con el uso de logaritmos* ... 58
4.6. Actividad 6 (Modelizadores): *Aproximación a la función logarítmica* ... 61
4.7. Actividad 7 (Modelizadores): *Hipérbola equilátera y su relación con la función logaritmo natural* ... 63
4.8. Actividad 8 (Objetos teóricos) ... 66
5. CONCLUSIONES ... 73
5.1. Conclusiones con respecto a la estructura global del trabajo y marco de referencia ... 73
5.2. Conclusiones con respecto a la propuesta de actividades ... 74
6. BIBLIOGRAFÍA ... 75
7. ANEXOS ... 79
7.1. Anexo 1: Taller actividad 1 ... 79
7.2. Anexo 2: Taller actividad 2 ... 81

7.3. Anexo 3: Taller actividad 3 84
7.4. Anexo 4: Taller actividad 4 87
7.5. Anexo 5: Taller actividad 5 90
7.6. Anexo 6: Taller actividad 6 92
7.7. Anexo 7: Taller actividad 7 96
7.8. Anexo 8: Taller actividad 8 parte a. 99
7.9. Anexo 9: Taller actividad 8 parte b 102
7.10. Anexo 10: Algunas evidencias de la aplicación de actividades previamente diseñadas 104

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Representación del modelo mecánico de Napier 15
Figura 2. Hipérbola equilátera y relación de Saint Vicent 22
Figura 3. Problema de Debeaune 23
Figura 4. Construcción geométrica de María Agnesi 24
Figura 5. Justificación de la construcción geométrica de María Agnesi 25
Figura 6. Aproximación a algunos logaritmos mediante series de potencia 27
Figura 7. Unidad de análisis tomado de Montiel y Buendía (2011) 44
Figura 8. Esquema Metodológico adaptado de Montiel y Buendía (2011) 44
Figura 9. Material: Fichas de doble entrada con progresión geométrica y aritmética 47
Figura 10. Material: Secuencia de fichas hacia la izquierda 48
Figura 11. Material: Secuencia de fichas hacia la derecha 48
Figura 12. Material: Fichas de doble entrada para completar 48
Figura 13. Material: Fichas logaritmo en base 2 reescritas 50
Figura 14. Material: Fichas logaritmo en base 10 primera cara 50
Figura 15. Material: Fichas logaritmo en base 10 segunda cara 51
Figura 16. Material: Nuevas fichas logaritmo en bases 10 51
Figura 17. Material: Pares de fichas para deducir la propiedad 53
Figura 18. Material: Pares de fichas para deducir la propiedad 53
Figura 19. Material: Fichas logaritmo en base 2 para deducir la propiedad 54

Figura 20. Material: Pares de fichas para deducir la propiedad 56
Figura 21. Material: Pares de fichas para deducir la propiedad 56
Figura 22. Material: Fichas logaritmo en base 2 para deducir la propiedad 57
Figura 23. Vista de la aplicación en GeoGebra actividad 6 62
Figura 24. Vista de la aplicación en GeoGebra actividad 7 65
Figura 25. Gráfica función área de la Hipérbola Equilátera... 66
Figura 26. Vista de la aplicación en GeoGebra actividad 8 parte a**¡Error! Marcador no definido.**
Figura 27. Vista de la aplicación en GeoGebra actividad 8 parte b**¡Error! Marcador no definido.**

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Progresión geométrica y aritmética y regla de Arquímedes.................................... 7
Tabla 2: Progresión geométrica y aritmética y regla de Arquímedes (Ejemplo) 8
Tabla 3: Tabla de logaritmos de Stifel 9
Tabla 4: Método de multiplicación de Stifel 10
Tabla 5: Método de potenciación de Stifel.. 10
Tabla 6: Relación progresión geométrica y aritmética de Bürgi 18
Tabla 7: Comparación progresión geométrica y aritmética de Briggs 19
Tabla 8: Definiciones función logarítmica Spivak (1996) 30
Tabla 9: Definiciones función logarítmica Apostol (2001)... 31
Tabla 10: Definiciones función logaritmo Stewart, Redlin y Watson (2007)....................... 32
Tabla 11: Definiciones función logarítmica Larson y Edwards (2010) 33
Tabla 12: Momentos y etapas de desarrollo de la función logarítmica............................... 41
Tabla 13: Actividad 1 47
Tabla 14: Actividad 2 49
Tabla 15: Actividad 3 52
Tabla 16: Actividad 4 55
Tabla 17: Actividad 5 58
Tabla 18: Actividad 6 61
Tabla 19: Actividad 7 63
Tabla 20: Actividad 8 parte a 66
Tabla 21: Actividad 8 parte b 70

INTRODUCCIÓN

El estudio y tratamiento de la función en las aulas, se centra en un concepto global y muy general que pretende recoger diversos modelos en una única definición. Esto sin embargo no permite analizar ciertos aspectos particulares y relevantes de ciertas funciones específicas; un caso particular lo ofrece la función logarítmica, que por su forma de covariación adquiere importancia, pues desde sus orígenes fue empleada para resolver algunos problemas de cálculos numéricos, y fue evolucionando conceptualmente hasta convertirse en una herramienta importante en la modelación de fenómenos.

De otra parte, se ha visto que la enseñanza de los logaritmos se realiza usualmente de manera algorítmica y descontextualizada, esto en los casos en que en la escuela este tipo de funciones alcanza a ser abordadas como objeto de estudio. Se ha encontrado que tradicionalmente se parte de la definición acompañada de algunos ejemplos, seguidamente se exponen sus propiedades, y finalmente se realizan algunos ejercicios, que se reducen al cálculo de listas exageradas de logaritmos (Abrate y Pochulo, 2007). Que usualmente podrían ser evaluados con la ayuda de una calculadora o de una hoja que trabaje SAC (Sistema Algebraico Computacional).

Así surge, en la comunidad de educadores matemáticos, la necesidad de establecer elementos que contribuyan a la elaboración de una propuesta didáctica útil para abordar y resignificar la función logarítmica, atendiendo a aspectos históricos, didácticos y matemáticos que aporten en la compresión del concepto de logaritmo y de función logarítmica, lo cual se constituye el centro de estudio del presente trabajo.

El documento de la propuesta se divide en cinco capítulos; en el primero se da a conocer la justificación y los objetivos de esta monografía; en el segundo, se exponen aquellos argumentos teóricos que sustentan la secuencia de actividades. En este apartado se realiza una documentación y análisis del desarrollo histórico de la función logarítmica, el cual se presenta en seis etapas que marcan la evolución de esta función y sus representaciones; además se da a conocer algunas de las definiciones sobre este concepto, las cuales son extraídas de diferentes libros de texto, y se presentan algunas consideraciones sobre las mismas; finalmente se alude a aspectos didácticos como el pensamiento variacional, la covariación y el razonamiento covariacional y el enfoque socioepistemológico en relación con la función logarítmica.

En el tercer capítulo se presenta la metodología que se siguió para el desarrollo del trabajo, la cual está sustentada en el enfoque socioepistemológico y recoge algunos de los aspectos considerados en el capítulo anterior. En el siguiente capítulo, se da a conocer la propuesta didáctica dirigida a profesores de matemáticas, la cual consiste en una secuencia de 8 actividades, las cuales se presentan con una descripción general, un objetivo, la actividad propiamente dicha, y unos aspectos a considerar por el docente en el momento de la aplicación. En el último capítulo, se presentan las conclusiones obtenidas durante el desarrollo del trabajo, y finalmente se incluye la bibliografía.

1. ASPECTOS GENERALES

1.1. JUSTIFICACIÓN

Según el MEN (2004), Del Castillo y Montiel (2007), López y Sosa (2008), y Hecklein, Engler, Vrancken y Müller (2011), en el contexto escolar, la definición de función que prevalece, es aquella que hace referencia a una regla de correspondencia, en la cual subyace un carácter estático, algebraico y algorítmico; esta, sin embargo, ha sido cuestionada desde hace varios años por diversos investigadores en educación matemática, ya que si se analiza el desarrollo histórico del concepto de función, así como los análisis epistemológicos realizados por diversos teóricos, se evidencia que el concepto ha sufrido cambios.

Inicialmente el concepto de función se asoció con un término que describe una idea de carácter geométrico, sin embargo, con el paso del tiempo se creó una definición más formal, que llevó a generar una idea estática de la misma, ya que en este periodo se incorporó, además, la representación algebraica (Del Castillo y Montiel, 2007). Esta formalización particular, que privilegia el status algebraico de la función, se ha reflejado en las prácticas de aula, pues es justo la representación algebraica la más utilizada, pero a su vez la que más ha generado una compresión restringida del concepto.

Del Castillo y Montiel (2007) sostienen que si bien el concepto de función es fundamental en matemáticas, puesto que mediante esta se puede modelar la realidad, no se ha privilegiado este aspecto en el tratamiento en el aula de este concepto y este se hace de manera limitada, y se restringe usualmente a las funciones polinomiales, dejando de lado, o descuidando, el tratamiento de otro tipo de funciones que se requieren en la modelación de diferentes situaciones, como es el caso de la función logarítmica.

Ferrari y Farfán (2008) destacan la importancia de reconocer la naturaleza de cada función y, contrario a lo que usualmente se hace en el aula, no abordar la noción de función de manera general, dado que el comportamiento de las mismas no es único. Para estas autoras, el querer abordar el concepto de función de modo general impide reconocer las funciones desde sus particularidades y además conlleva a que se promuevan argumentos que al ser apropiados para algunas funciones se vuelven obstáculos para otras. En cuanto a la función logarítmica, dadas sus características y su forma particular de covariación, su introducción en el aula se debe hacer con mayor detenimiento, atendiendo a aquellos aspectos que la identifican y la diferencian de otras funciones.

Bocanegra, Galeano y Huérfano (2013), particularizan la situación para el caso de la función logarítmica, destacando que la inclusión de esta en el aula resulta ser de gran importancia, dado que se ajusta a diferentes fenómenos de la vida real, siendo útil en disciplinas como la economía, la física, la biología, las artes, entre otras. Pese a ello, no se le da suficiente relevancia en el currículo de matemáticas, lo que conlleva a una escasa comprensión de este concepto por parte de los estudiantes. Autores como Hernández y Ferrari (2005) y Bocanegra et al.(2013) observan que particularmente se ha venido presentando un problema en la enseñanza de los logaritmos y sus propiedades, y citan que esto se da incluso desde los mismos textos escolares de matemáticas; y reportan que en ellos se trabaja una definición asociada con los términos exponente y base, se realizan algunas ejemplificaciones de notación, se dan conocer sus propiedades, se muestran algunas aplicaciones y se plantea una serie de ejercicios de carácter algorítmico que conlleva, usualmente, a la perdida de significado.

Farfán y Ferrari (2002) plantean la necesidad de modificar la forma en como se trata el concepto de logaritmo en el contexto escolar, pues en el trabajo con este, usualmente se hace énfasis en la parte axiomática, lo cual impide que se establezca una conexión entre lo aritmético y lo analítico.

Por lo expuesto anteriormente, surge la necesidad de diseñar una propuesta didáctica, que permita evidenciar las características propias de los logaritmos y de la función logarítmica, teniendo en cuenta el vínculo que se establece entre los logaritmos y las progresiones geométricas y aritméticas, y tomando como referencia el desarrollo histórico general del concepto. La propuesta se desarrolla a partir de la conexión de las diversas representaciones de la función logarítmica, lo cual la dota de mayor significado y deja de lado el tratamiento tradicional que se le suele dar en el aula de clase.

1.2. OBJETIVOS

1.2.1. Objetivo general

Diseñar una propuesta didáctica que tenga como eje central estudiar las características propias de la función logarítmica, especialmente desde la covariación entre progresiones, y atendiendo al desarrollo histórico de esta.

1.2.2. Objetivos específicos

- Documentar el desarrollo histórico de la función logarítmica y aquellos aspectos matemáticos y didácticos que aporten en el desarrollo de la propuesta didáctica.
- Plantear actividades secuenciales mediante el uso de diferentes recursos (Material tangible, software de cálculo simbólico, y cuestionarios entre otros), que favorezcan la comprensión de la función logarítmica.
- Establecer algunos aspectos a considerar por parte del docente en el momento de aplicación de las actividades.

2. MARCO DE REFERENCIA

En este capítulo se presenta el desarrollo histórico de la función logarítmica y aquellos aspectos de carácter matemático y didáctico, que se consideran importantes para el desarrollo de la propuesta didáctica. En primer lugar, se muestra la evolución a través de la historia de dicha función, teniendo en cuenta aquellos momentos y personas que aportaron en su construcción y que mediante sus trabajos le dieron el estatus de función. Seguidamente, se presenta el marco matemático; teniendo en cuenta diferentes definiciones, propiedades y representaciones propuestas en algunos textos, y adicionalmente se presenta una postura frente a la forma como este concepto es presentado. Finalmente, se describen aquellos aspectos y herramientas didácticas, que aportan en el diseño de la secuencia de actividades, esencialmente se hace referencia al pensamiento variacional, al razonamiento covariacional, la teoría Socioepístemológica de la educación matemática y los aportes de algunos autores pertenecientes a este enfoque en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de los logaritmos.

2.1. MARCO HISTÓRICO

Desde nuestra perspectiva, y en consonancia con la postura de muchos educadores matemáticos, es de vital importancia tener presente cual fue el desarrollo histórico de la función logarítmica, de tal manera que se identifiquen aquellos momentos que son cruciales para la formalización de este concepto y la adquisición de su estatus como función. Para esta descripción nos basaremos en las etapas propuestas por Ferrari (2008, p. 12), a saber: Exploración algorítmica, numérica utilitaria, gráfico-geométrica, analiticidad, simbolización y formalismo. A continuación se muestran los sucesos más importantes en cada una de estas etapas, mencionando aquellas personas que se destacaron en el desarrollo de este proceso.

2.1.1. Exploración algorítmica

Este primer momento está enmarcado por la relación existente entre las progresiones aritméticas y geométricas, y la necesidad de facilitar algunos cálculos, es aquí en donde empieza a aparecer la elaboración de tablas (Ferrari, 2008).

2.1.1.1. Arquímedes

La idea de logaritmo surge de algunos de los trabajos realizados por Arquímedes (287-212 a. C.), en los cuales se aborda el tratamiento con los "números gigantescos" y se hace alusión a que la suma de los órdenes de algunos números (equivalentes a sus exponentes en base 100.000.000), es correspondiente con el producto de dichos números (Torija, 2003, citado por González y Vargas, 2007). Arquímedes es quien enuncia la regla que relaciona las progresiones aritméticas con las geométricas, la cual dice que:

> Para multiplicar entre sí dos números cualesquiera de la sucesión de abajo, debemos sumar los dos números de la sucesión de arriba situados encima de aquellos dos. Luego debe buscarse en la misma sucesión de arriba dicha suma. El número de la sucesión inferior que le corresponda debajo será el producto deseado (Tapia, 2003, p. 6).

Para comprender lo enunciado por la regla de Arquímedes, consideremos las sucesiones presentadas en la Tabla 1, leída por filas:

Tabla 1: Progresión geométrica y aritmética y regla de Arquímedes

1	2	3	4	5	6	7	8
3	9	27	81	243	729	2187	6561

En la primera fila se encuentra ubicada una progresión aritmética con diferencia 1 y en la segunda una progresión geométrica con razón 3. Si deseamos multiplicar dos números de la segunda, por ejemplo el 9 y el 81, debemos sumar los dos números que se ubican arriba de estos, es decir el 2 y el 4, luego buscamos el resultado de la suma, esto es 6, en esta misma fila, y el número de abajo será el producto correspondiente a 9 por 81. Tal como se ilustra en la Tabla 2.

Tabla 2: Progresión geométrica y aritmética y regla de Arquímedes (Ejemplo)

1	2	3	4	5	6	7	8
3	9	27	81	243	729	2187	6561

$$2 + 4 = 6,$$

$$9 \times 81 = 729.$$

El surgimiento de los logaritmos depende en gran parte de la regla de Arquímedes, pero su construcción está asociada a un trabajo de exploración y rigurosidad de mayor profundidad.

2.1.1.2. Chuquet y Stifel (Siglo XV y XVI)

Entre el periodo de los siglos XV y XVII, vuelve a aparecer la idea de explorar la relación existente entre las progresiones geométricas y aritméticas. Los precursores de esta idea son Nicolas Chuquet (1445-1500) y Michael Stifel (1487-1567), los cuales hacen alusión a los exponentes como los términos pertenecientes a la progresión aritmética (Gacharná, 2012).

En cuanto al trabajo desarrollado por Chuquet, en el primer capítulo de su libro "*Triparty en la Science des Nombres (1484)*", se hace referencia a la relación que existe entre las progresiones geométricas y aritméticas, partiendo de una progresión geométrica de razón 2. Chuquet, mediante lo expuesto en su libro, dio a conocer la regla de los exponentes que empleaba exclusivamente para números enteros y presentó una tabla que relacionaba una progresión aritmética y una progresión geométrica. Esta relación entre las progresiones $0, 1, 2, 3 \ldots$ y $1, 2, 4, 8, \ldots$ fue retomada por Chuquet de los trabajos de Arquímedes, sin embargo él no intento "llenar los vacíos" en la serie geométrica, sugiriendo la imposibilidad de esto, por lo que es difícil ver el "origen" de los logaritmos en su acercamiento a la relación de las dos progresiones (Gregg, Hay y Moss, 1995, citado por Gacharná, 2012).

Por otro lado, Stifel en su libro "*Arithmetica Integra (1544)*", da a conocer la relación entre las progresiones geométricas y aritméticas, afirmando que la progresión geométrica:

$$1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, \ldots,$$

se corresponde con los términos de la progresión aritmética $0, 1, 2, 3, 4, 5$; la cual se forma con los exponentes de la misma (González y Vargas, 2007). Stifel realiza una exploración para calcular potencias con exponentes racionales y negativos, ampliando así, el trabajo que hasta el momento había desarrollado Chuquet (Durán, 1996, citado por González y Vargas, 2007). Adicionalmente, es él quien enuncia la regla de la multiplicación $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (siendo m y n números racionales), y da a conocer la primera tabla de logaritmos, la cual sin embargo no es muy completa (Tapia, 2003). En la tabla se ubican los números enteros de -3 a 6 incluidos y las correspondientes potencias de dos. En la Tabla 3 se presenta la correspondiente tabla de logaritmos de Stifel:

Tabla 3: Tabla de logaritmos de Stifel

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Así, es Stifel quien logra establecer diferentes relaciones entre las dos progresiones; dando los parámetros para realizar multiplicaciones, divisiones, y trabajar la potenciación y la radicación. En su libro realiza la siguiente afirmación:

> La adición, en la sucesión aritmética, corresponde a la multiplicación en la geométrica, lo mismo que la sustracción en aquélla corresponde a la división en ésta. La simple multiplicación en la sucesión aritmética, corresponde a la multiplicación por sí mismo, potenciación, en la geométrica; y la división en la primera corresponde a la extracción de la raíz en la segunda, algo así como la división por dos, corresponde a la extracción de la raíz cuadrada (Stifel, 1544, citado por Tapia, 2003, p. 7).

A continuación se ejemplifica cómo se realizan las distintas operaciones, a partir de los planteamientos de Stifel:

a) ***Multiplicación:*** Para multiplicar dos números de la segunda fila, por ejemplo $\frac{1}{2}$ y 16, se realiza la suma de los dos números que se ubican encima de estos, en este caso -1 y 4, se ubica este resultado en la primera fila, y el número de abajo será el producto correspondiente, tal y como se ilustra en la Tabla 4.

Tabla 4: Método de multiplicación de Stifel

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

$$(-1) + 4 = 3,$$

$$\frac{1}{2} \times 16 = 8.$$

b) División: Si se quiere dividir dos número de la segunda fila, se debe ubicar los dos números correspondientes de la primera fila, seguidamente se resta del primero el segundo y, análogamente a la multiplicación, se busca el respectivo resultado en la tabla.

c) Potenciación: Para hallar determinada potencia de un número de la segunda fila, se ubica el número que le corresponde de la primera fila, y se multiplica este número por la potencia que se desea hallar, se busca este resultado en la primera fila, y la potencia correspondiente será el número de abajo. Por ejemplo, si se quiere calcular $4^3 = (2^2)^3$, se multiplica $2 \times 3 = 6$, y se busca este resultado en la tabla, de donde se concluye que $4^3 = 64$, tal y como se ilustra en la Tabla 5.

Tabla 5: Método de potenciación de Stifel

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

d) Radicación: La radicación de dos números de la primera fila es similar a la potenciación, la diferencia radica en dividir el número de la primera fila por la raíz que se desea hallar.

Los resultados obtenidos por Stifel fueron de gran relevancia en su época, periodo correspondiente al renacimiento; puesto que se realizaron aportes, al estudio de las leyes naturales y de la variación. Es así como Stifel contribuye de una manera indirecta a la Astronomía, que en esta época fue una ciencia en pleno desarrollo, la cual necesitaba en gran parte del cálculo de operaciones con números grandes (Merzbach y Boyer, 1991).

2.1.1.3. Prostaféresis

En la Europa del siglo XVI, y como fruto del trabajo de los matemáticos árabes, pero también gracias a las invasiones se difundieron e hicieron populares diferentes identidades trigonométricas, las cuales buscaban simplificar cálculos astronómicos (González y Vargas, 2007). Los astrónomos de la época debían realizar muchos cálculos, y el método más común era hacer las cuentas en papel y lápiz, lo cual resultaba ser una labor dispendiosa, pues pasaban la mayor parte de su tiempo desarrollando complejas operaciones. Es por ello que se buscó un mecanismo sencillo, que permitiera realizar cálculos exactos que redujeran significativamente los tiempos empleados para ello.

La Prostaféresis es un método usado para aproximar multiplicaciones y divisiones de números por medio de algunas identidades trigonométricas, a partir del uso de sumas y restas, aplicando las propiedades de estas identidades. Este método se desarrolló antes de la existencia de los logaritmos, y era apropiado para realizar los cálculos necesarios de productos, con un grado de exactitud aceptable y una gran rapidez, como lo afirma Pierce (1997). La Prostaféresis se construye a partir de las necesidades de la época, especialmente para orientarse en los mares a través de la navegación astronómica, en donde para dar las coordenadas, era indispensable la posición y la dirección, de tal manera que los astrónomos daban la posición de los astros a lo largo del tiempo. Para realizar los cálculos de estas posiciones se manejaba la trigonometría esférica, la cual se relaciona con los ángulos y las longitudes de arco de un triángulo esférico, así las ubicaciones se podían determinar mediante las siguientes relaciones:

- $2\cos x \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$.
- $2\sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$.

Puesto que la medida de un ángulo está dada entre 0° y 180°, x e y son ángulos que se asocian a los valores numéricos grandes que se desean operar.

Los matemáticos que construyeron este método fueron Ibn-Yunus (950-1009) y Johannes Werner (1468-1522). La prostaféresis se consolido como una de las bases para la construcción de los logaritmos, puesto que utilizaba la idea de convertir multiplicaciones y divisiones en sumas y restas. Este instrumento conceptual fue utilizado por John Napier (1550-1617), el cual terminó sustituyéndolo por los logaritmos que permitieron realizar cuentas con más números, dejando ver que este método, aun cuando era funcional, terminaba siendo obsoleto (Pierce, 1977).

2.1.2. Numérica utilitaria

A partir de los logros alcanzados en la primera etapa, surge un segundo momento, en el cual se establece por primera vez una definición de los logaritmos, sin hacer alusión a una base determinada (Ferrari, 2008).

2.1.2.1. John Napier

A finales del siglo XVI, Dinamarca se logró establecer como uno de los centros más importantes de estudio sobre situaciones asociadas a la navegación; y en este momento se da la necesidad de implementar algunas tablas trigonométricas para minimizar cálculos. Estas tablas, inspiraron el trabajo de John Napier, quien propuso un mecanismo más sencillo para multiplicar senos de ángulos realizando sumas directamente (Tapia, 2003). La palabra logaritmo es empleada por primera vez por John Napier, y proviene del griego logos (razón) y arithmos (número), que significa número de la razón, y describe el número de veces que la razón aparece (González y Vargas, 2007).

En 1614 se publica la obra de Napier "*Mirifici logarithmorum canonis descriptio*" (Descripción de la maravillosa regla de los logaritmos), en donde se hace una corta descripción de los logaritmos y se da algunas pautas para su cálculo. Sin embargo es en 1619 cuando aparece una nueva publicación denominada "*Mirifici logarithmorum canonis constructio*" (Construcción de la maravillosa regla de los logaritmos), donde aparecen las tablas de logaritmos y su proceso de construcción. Estas publicaciones fueron rápidamente aceptadas por astrónomos y navegantes, ya que reducían el cálculo de multiplicaciones y divisiones a sumas y restas (González y Vargas, 2007).

El trabajo de Napier fue más completo que el que hasta el momento había realizado Stifel; uno de los aspectos que sobresalen de este, es el intento por completar aquellos espacios que estaban presentes en las progresiones geométricas (Gacharná, 2012). En el intento por llenar dichos vacíos, Napier decide usar como razón un término próximo a la unidad, de tal manera que las potencias enteras de un número dado fuesen cercanas entre sí. El número que utilizó como razón fue $1 - 10^{-7} = 0{,}9999999$, cuya elección se cree, viene del uso que se le daba al término 10^7 en trigonometría esférica, en donde se exploraba en un círculo de radio 10^7 para evitar utilizar fracciones (González y Vargas, 2007). Además, para no caer en la necesidad de usar decimales, Napier multiplica cada una de las potencias por 10^7.

Partiendo de las consideraciones que previamente realiza Napier, se tiene que, si $N = 10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L$, entonces L será el logaritmo de Napier del número N, es decir:

$$N \to \log N = L.$$

Con base en la definición planteada se cumplirá que:

- El logaritmo de 10^7 será 0.
- El logaritmo de $10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)$ será 1.
- A medida que N crece el logaritmo de N decrece, dado que se está tomando una base que es menor a la unidad.
- Si $N' = 10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{L'}$ si tiene que $\frac{N}{N'} = \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{L-L'}$, por tanto la diferencia de los logaritmos L y L' depende de la razón entre N y N', de donde se deduce que si $N_1, N_2, \dots, N_n$ es una progresión geométrica la sucesión de logaritmos será una progresión aritmética. La progresión geométrica para este caso es:

$$10^7(1-10^{-7})^0, 10^7(1-10^{-7})^1, 10^7(1-10^{-7})^2, \dots, 10^7(1-10^{-7})^L.$$

Además, si se realiza el cociente de los números y los logaritmos entre 10^7, se establece un sistema de logaritmos de base $\frac{1}{e}$, dado que la diferencia entre $\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^L$ no es mucha en comparación con $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}$ (Boyer, 2003, citado por González y Vargas, 2007). Entonces, si se dividen tanto N y L por 10^7, se tendría que:

$$\frac{N}{10^7}\to\frac{\log N}{10^7}=\frac{L}{10^7},$$

y esta relación se asemeja a

$$\frac{N}{10^7}\ \to \log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{N}{10^7}\right),$$

pues

$$\log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{N}{10^7}\right)=\frac{10^7\log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{N}{10^7}\right)}{10^7},$$

$$=\frac{\log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{N}{10^7}\right)^{10^7}}{10^7},$$

reemplazando N en la expresión anterior

$$=\frac{\log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{10^7(1-10^{-7})^L}{10^7}\right)^{10^7}}{10^7},$$

$$=\frac{\log_{\frac{1}{e}}((1-10^{-7})^L)^{10^7}}{10^7},$$

$$=\frac{L\cdot\log_{\frac{1}{e}}(1-10^{-7})^{10^7}}{10^7},$$

$$= \frac{L \cdot \log_{\frac{1}{e}} \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7}}{10^7},$$

y partiendo de la idea inicial se tiene que:

$$\frac{L \cdot \log_{\frac{1}{e}} \left(\frac{1}{e}\right)}{10^7} = \frac{L}{10^7}.$$

El trabajo desarrollado por Napier, buscó ir más allá de la exploración algorítmica, tanto así que estableció un modelo mecánico, en donde relacionó concepciones de lo aditivo con lo multiplicativo (Confrey y Smith, 1994, citado por González y Vargas, 2007). Este modelo mecánico se explica de la siguiente manera:

> Sea el segmento AB y una semirrecta CDE (Figura 1). Sea un punto P que parte de A y se mueve a lo largo de $\overline{AB}$ con velocidad variable que decrece en proporción a su distancia B; supongamos que un punto Q parte al mismo tiempo de C y se mueve a lo largo de la semirrecta CDE con velocidad uniforme igual a la velocidad inicial del punto P; entonces Napier llama a la distancia variable CQ el logaritmo de la distancia PB (Boyer, 2003, citado por González y Vargas, 2007, p. 134).

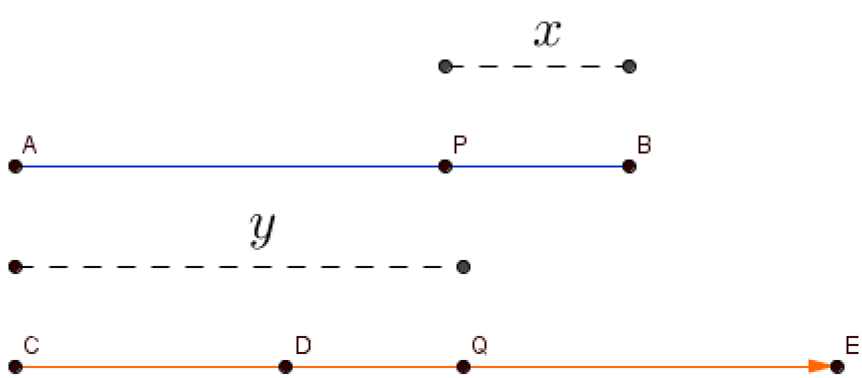


Figura 1. *Representación del modelo mecánico de Napier*

Si $y = \log x$, supongamos que $AB = 10^7$ y que la constante de proporcionalidad es 1, entonces la velocidad inicial en A será 10^7. Basados en el modelo de Napier, y utilizando la notación actual, se tendrán las siguientes igualdades:

$$\frac{dx}{dt} = -x \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = 10^7,$$

por tanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{10^7}{x},$$

$$\frac{dy}{-10^7} = \frac{dx}{x},$$

e integrando a ambos lados de la igualdad

$$-\frac{y}{10^7} = \ln x + \ln c,$$

despejando y

$$y = -10^7 \ln(cx),$$

bajo las condiciones iniciales, cuando $x = 10^7 \ \rightarrow \ y = 0$, se tiene que

$$0 = -10^7 \ln(c10^7),$$

$$1 = c10^7,$$

$$c = \frac{1}{10^7},$$

entonces

$$y = -10^7 \ln\left(\frac{x}{10^7}\right)$$

Resultado que permite evidenciar la relación existente entre el logaritmo natural y el logaritmo de Napier.

Con la definición de logaritmos en 1617, Napier desarrolla la "*Napier´s bonds*" o *"Rejillas de cálculo de Napier"* o simplemente los huesos, que es una máquina de cálculo desarrollada como un ábaco con piezas sueltas, y que se usaba para realizar con rapidez los cálculos de productos y divisiones (Cervera, 2004). Con lo descrito anteriormente, él intentó mecanizar los cálculos logarítmicos, lo cual puede verse como el antecedente a las modernas máquinas de calcular.

2.1.2.2. Jobst Bürgi

Jobst Bürgi (1552-1632) fue un relojero y reparador de instrumentos astronómicos, que trabajó como colaborador con Kepler (1571-1630), en el observatorio astronómico de Praga. Antes que Napier, Bürgi trabajó ideas similares a las que este desarrolló, hay algunas referencias que permiten ver que Bürgi desarrollo su idea de logaritmo seis años antes, sin embargo sus logros solo fueron publicados hasta 1620, en la obra denominada "*Aritmetishe und geometrische Progress-Tabulen"* (González y Vargas, 2007). Su obra también estuvo sustentada en el uso del método de Prostaféresis, el cual utilizó como herramienta para realizar cálculos astronómicos (Gacharná, 2012). Sin embargo, las circunstancias de la época y el contexto en el que él estaba inmerso, impidieron que sus ideas se dieran a conocer y se difundieran de manera favorable para él.

Bürgi, de manera análoga a Napier, empleo un término pequeño como razón de la progresión geométrica, pero en su caso fue mayor a la unidad. El valor utilizado fue $1 + \frac{1}{10^4} = 1{,}0001$, y para evitar encontrarse con fracciones decidió multiplicar cada término de la progresión geométrica por 10^8 (González y Vargas, 2007). Bürgi hace corresponder cada valor de la progresión geométrica con la progresión aritmética $0, 10, 20, 30, \ldots$, como se muestra en la Tabla 6.

Tabla 6: Relación progresión geométrica y aritmética de Bürgi

10^8	$10^8(1+10^{-4})$	$10^8(1+10^{-4})^2$	$10^8(1+10^{-4})^3$	...
0	10	20	30	...

Los números de la primera progresión se imprimieron en tinta negra y fueron llamados números negros, y los números de la segunda progresión fueron impresos en tinta roja y se denominaron números rojos (González y Vargas, 2007). Los números rojos son entonces los logaritmos de los números negros.

De la forma como son propuestas las tablas de Napier y las de Bürgi, se ve que en las primeras se cumple que si $m > n$ entonces $\log m < \log n$, mientras que en las segundas se da que si $m > n$ entonces $\log m > \log n$. Además, las tablas de Napier, dada la cantidad de valores, son más completas y muestran un acercamiento a la noción de continuidad (Gacharná, 2012).

2.1.2.3. Henry Briggs

El desarrollo de los logaritmos que hasta el momento había realizado Napier, fue bien aceptado y logró llamar la atención de muchos en Europa. Henry Briggs (1561-1630), un profesor de geometría de Oxford, fue uno de los atraídos por el trabajo de Napier (Tapia, 2003). En 1615 Briggs decidió visitar a Napier en Edimburgo, en donde ambos consideraron crear un mejor sistema de logaritmos, el cual fuera más fácil de usar y que partiera del uso de la numeración decimal, lo que dio origen a los logaritmos actuales (Domínguez, Forner y Forner, 2012). Antes a este encuentro, Napier sugirió el uso de una nueva tabla en donde se cumpliera que $\log 1 = 0$ y $\log 10 = 10^{10}$, de tal forma que no hubiera la necesidad de utilizar fracciones, pero finalmente, durante su encuentro, se concluyó que el logaritmo de uno debía ser cero y que el logaritmo de diez sería 1 (González y Vargas, 2007).

En 1617 Briggs publicó los "*Logaritnmorun chilias prima"*, en donde estaban los logaritmos de los números del 1 al 1000, con catorce cifras decimales exactas (Tapia, 2003). En 1624 aparece "*Arithmetica logarithmica"*, en donde se encontraban los logaritmos del 1 al 20000

y del 90000 al 100000, e igualmente tenían 14 cifras decimales (Domínguez et al., 2012). Su trabajo se sustentó en comparar las progresiones que se muestran en la Tabla 7.

Tabla 7: Comparación progresión geométrica y aritmética de Briggs

$\log = L$	...	-2	-1	0	1	2	...
N	...	$0'01$	$0'1$	1	10	100	...
N	...	10^{-2}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	10^{2}	

En esta tabla se deduce que:

- $\log_{10} 1 = 0$,
- $\log_{10} 10^{10} = 10$,
- $N = 10^{L} \leftrightarrow \log_{10} N = L$,

lo que es consistente con lo que conocemos de los logaritmos actuales.

Para la construcción de las tablas de logaritmos, Briggs parte de escribir una progresión aritmética cualquiera y una geométrica de razón 10, y a partir de la extracción de raíces le fue posible determinar la proximidad entre cada término.

Adicional al trabajo de Briggs, John Speidell, realiza algunos cambios a las tablas de Napier, de tal forma que a partir de funciones trigonométricas introduce los logaritmos naturales, resultados que son publicados en 1619 en la obra "*New logarithmes*". Además, William Oughtred (1574-1660), en 1650 crea las primeras regletas de cálculo, y enuncia las siguientes propiedades de los logaritmos:

- $\log mn = \log m + \log n$,
- $\log \frac{m}{n} = \log m - \log n$,
- $\log x^{n} = n \log x$.

2.1.3. Gráfico-Geométrica

Esta etapa se caracteriza por el interés de algunos matemáticos en determinar gráficas y áreas bajo diferentes curvas, especialmente se hace énfasis en el análisis de la hipérbola equilátera (Ferrari, 2008). En el siglo XVII los problemas de cuadratura de una curva cobraron gran interés, el proceso consistía en calcular áreas bajo una curva plana, sin embargo determinar la cuadratura correspondiente a la hipérbola equilátera inicialmente presentó dificultades, pero fue esto lo que dio paso a diferentes hallazgos con respecto a dicha curva.

2.1.3.1. Gregory de Saint-Vicent

Entre los hallazgos de más importancia con respecto a la hipérbola equilátera y la relación con los logaritmos, se encuentran los realizados por Gregory de Saint-Vicent (1584-1667), quien en 1630 redactó su obra "*Opus geometricorum quadrature circuli et sectionum coni*", en donde se exponía una supuesta respuesta al problema de la cuadratura del círculo y la hipérbola equilátera, su publicación solo se hizo en 1647, dejando ver errores en lo referente a la cuadratura del círculo (González y Vargas, 2007). Estos errores llevaron a que él perdiera la credibilidad, lo cual impidió que sus hallazgos fueran tenidos en cuenta por un buen periodo de tiempo.

Hacia 1629, Fermat (1601-1665) había establecido la forma de obtener el área bajo la curva $y = x^n$, entre los valores $x = 0$ y $x = a$. Según González y Vargas (2007), este resultado lo halló dividiendo el intervalo $[0, a]$ en una cantidad infinita de sub-intervalos, en donde se tomó como abscisas los puntos de la progresión geométrica $a, aE, aE^2, \dots, aE^m, \dots$, para E menor a 1, y los relaciono con las ordenadas correspondientes; aproximando el área con el método de rectángulos circunscritos. Las áreas de cada uno de estos rectángulos forman la progresión geométrica $a^n(a - aE), a^nE^n(aE - aE^2), \dots, a^nE^{mn}(aE^m - aE^{m+1})$, cuyo $m-$ésimo término se puede expresar de la siguiente forma $a^{n+1}(1 - E)(E^{n+1})^m$, de tal manera que su suma infinita corresponde a:

$$\frac{a^{n+1}(1 - E)}{1 - E^{n+1}},$$

y teniendo en cuenta lo siguiente

$$\frac{1}{1+E+E^2+\cdots+E^n}\left(\frac{1-E}{1-E}\right)=$$

$$\frac{1-E}{1-E+E-E^2+E^2-E^3+\cdots+E^n-E^{n+1}}=$$

$$\frac{1-E}{1-E^{n+1}},$$

esta suma puede ser expresada de la siguiente manera

$$\frac{a^{n+1}(1-E)}{1-E^{n+1}}=\frac{a^{n+1}}{1+E+E^2+\cdots+E^n},$$

ahora, si los rectángulos se hacen cada vez más pequeños, lo cual implica que E tiende ha 1, el resultado se reduce a:

$$\frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Fermat logra demostrar esta expresión para exponentes naturales, fraccionarios y negativos; sin embargo no le fue posible para el valor $n=-1$, que precisamente es el caso de la hipérbola equilátera (González y Vargas, 2007). Fue exactamente el olvidado Gregory de Saint-Vicent, quien dio solución a dicho problema. Él parte de la idea, que cuando se toman abscisas en donde los intervalos que se forman crecen en progresión geométrica, si se establecen las respectivas ordenadas y se determina el área bajo la curva de dos abscisas consecutivas, dichas áreas serán iguales. Es decir, si por ejemplo se toma la progresión geométrica $1,2,\ldots,2^n$ y se ubican cada uno de estos términos sobre el eje x, al graficar las ordenadas correspondientes y determinar el área bajo la curva para cada uno de estos intervalos, se obtiene un valor constate (Figura 2).

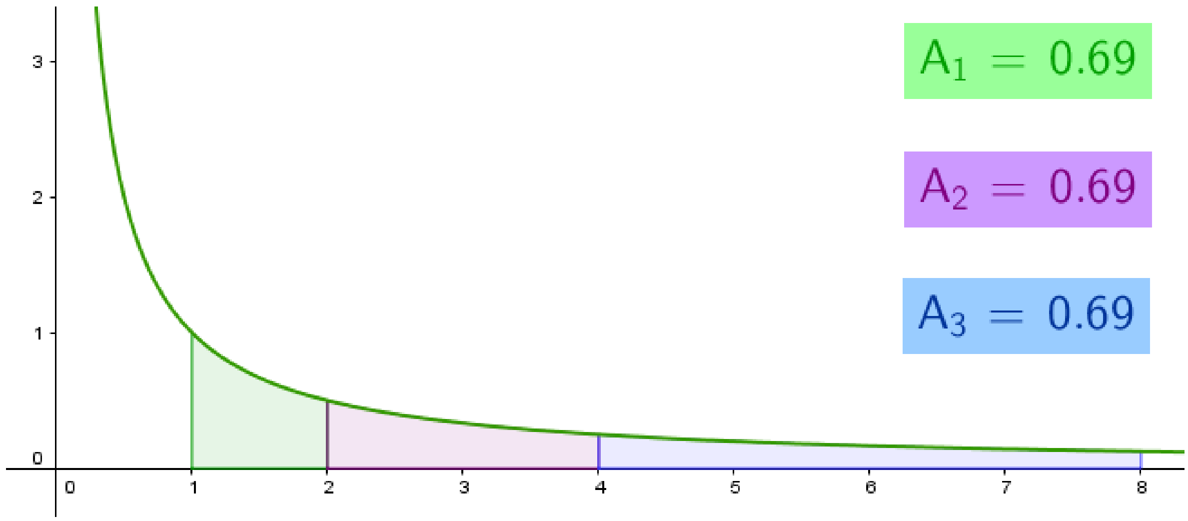


Figura 2. *Hipérbola equilátera y relación de Saint Vicent*

Con esta idea, se llega a que cuando las abscisas crecen en progresión geométrica, el área bajo la curva crece en progresión aritmética, de donde se deduce que la relación entre la abscisa y el área es de tipo logarítmico. Es decir, el valor del área bajo la curva corresponde al logaritmo de la abscisa. Sin embargo, la relación explícita que hay entre los logaritmos y la hipérbola equilátera, no es planteada por Gregrory Saint-Vicent, pues es Sarassa (1618-1687), defensor de Saint-Vicent, quien hace alusión a que las áreas hiperbólicas pueden tener relación con los logaritmos (Dunham, 2000, citado por González y Vargas, 2007).

El haber hallado la relación entre la hipérbola equilátera y los logaritmos, generó una nueva perspectiva alrededor de estos, ya no solo eran instrumentos facilitadores de cálculos, con este descubrimiento adquirieron un valor de tipo analítico, lo que dio paso a su desarrollo en series, es decir se pasa de las exploraciones de tipo geométrico al campo analítico y esto dota a los logaritmos de un nuevo carácter.

2.1.3.2. María Agnesi

En 1637, Debeaune (1601-1652), propone a Descartes el siguiente problema: “Encontrar una curva $y(x)$ tal que para cada punto P la distancia entre V y T, los puntos donde la vertical y la línea tangente cortan al eje x, sean siempre iguales” (López y Ferrari, 2005, p. 554) (Figura 3).

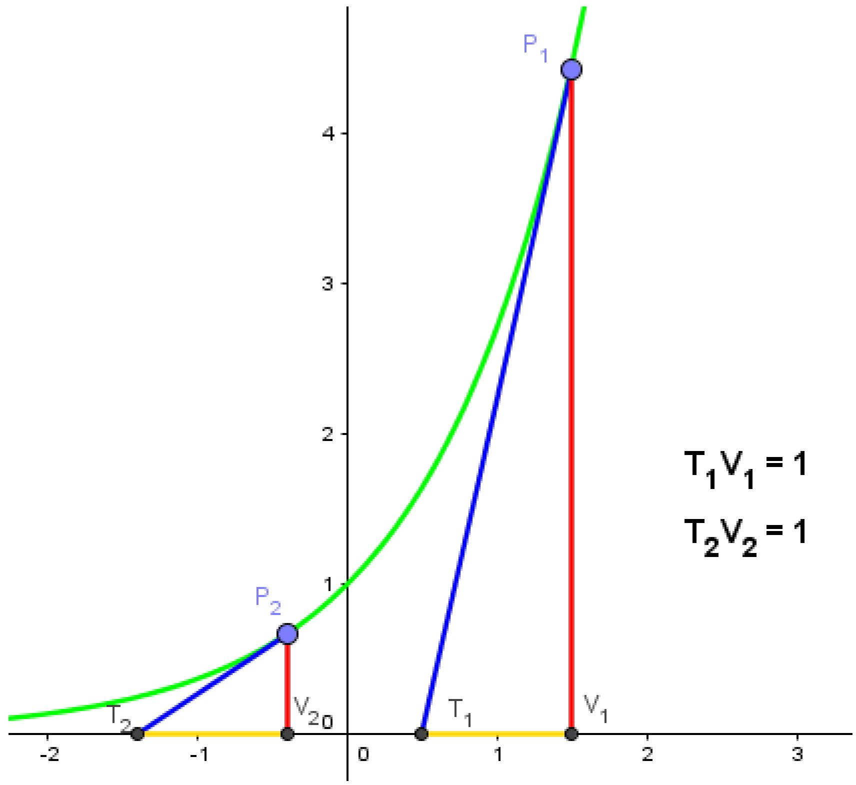


Figura 3. *Problema de Debeaune*

En 1684 Leibniz, plantea la siguiente solución: Dados los puntos x e y, para determinar la curva, se debe incrementar x por pequeños incrementos de b, de tal forma que y incremente por $\left(1+\frac{b}{a}\right)$, si se repite el proceso se llegan a los siguientes valores, los cuales son obtenidos a partir de la semejanza de triángulos:

$y, \left(1+\frac{b}{a}\right) y, \left(1+\frac{b}{a}\right)^2 y, \left(1+\frac{b}{a}\right)^3 y, \ldots,$ que corresponden a las ordenadas y $x, x+b, x+2b, x+3b, \ldots,$ que corresponden a las abscisas (López y Ferrari, 2005).

Hacia 1748, María Agnesi (1718-1799) realiza una publicación de un libro didáctico que aborda aspectos de la enseñanza del cálculo, en el cual retoma el planteamiento anterior, para así dar solución al problema de la hipérbola equilátera. Ella alude a que para este caso, se necesita recurrir a dos métodos: En el primero se debe utilizar una curva llamada *logarítmica* o *logística*, y en el segundo se deben utilizar las series (López y Ferrari, 2005).

Agnesi propone una construcción para este tipo de curva. Esta parte de trazar una recta cualquiera MH, y tomar segmentos congruentes desde M ($\overline{MN}, \overline{NB}, \overline{BK}, \overline{KI}, \overline{IA}$ ...), luego de esto se traza una perpendicular a $\overleftrightarrow{MH}$ por K, sobre dicha perpendicular se toma un punto O y se determina la recta MO. Después de esto, se traza una perpendicular a $\overleftrightarrow{MH}$, por el punto I y se determina su intersección con la recta MO y se denota como C a este punto de intersección. Luego de esto, se traza la recta NC y una recta perpendicular por el punto A a $\overleftrightarrow{MH}$, a continuación se determina la intersección entre $\overleftrightarrow{NC}$ y la perpendicular. Al repetir el proceso se establece que los puntos $O, C, D, F, \ldots$ estarán sobre la curva logarítmica (Figura 4), pues en esa época al hacer alusión a una progresión geométrica y aritmética inmediatamente se hablaba de una curva logarítmica (López y Ferrari, 2005).

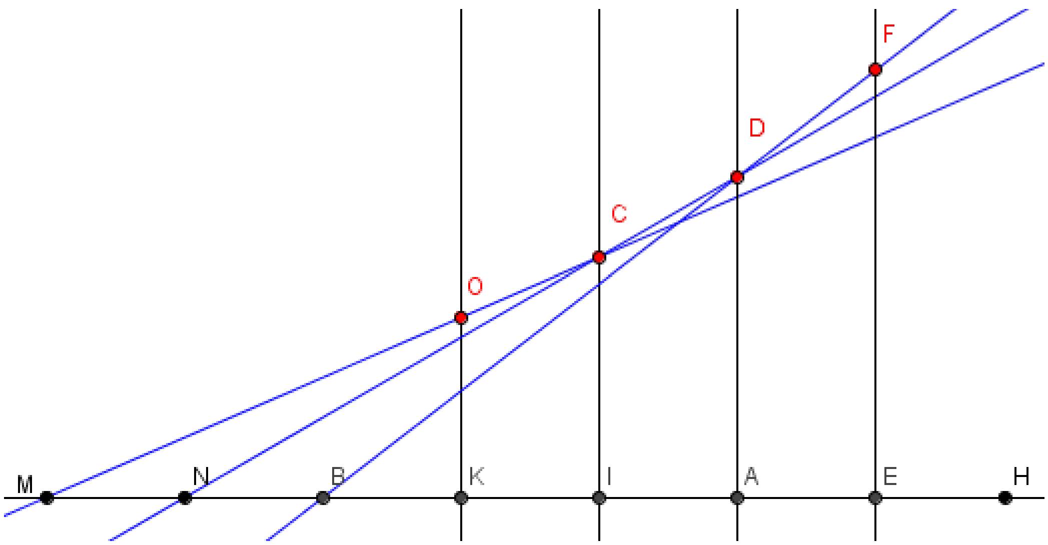


Figura 4. *Construcción geométrica de María Agnesi*

La construcción propuesta por María Agnesi se basa en la semejanza de triángulos y el uso de diferenciales. Agnesi traza el segmento DT, asigna el valor de a al segmento MK y denomina con dx a cada una de las divisiones que se determinaron en la recta MH; de ahí que $AE = dx$, además establece que $AD = y$ y $TF = dy$. A partir de lo anterior se cumple que $DT = AE = dx$ y $BA = a$, y por semejanza de triángulos se tiene que $\frac{y}{a} = \frac{dy}{dx}$ (Figura 5), lo cual es una aproximación a una expresión que modela la curva logarítmica.

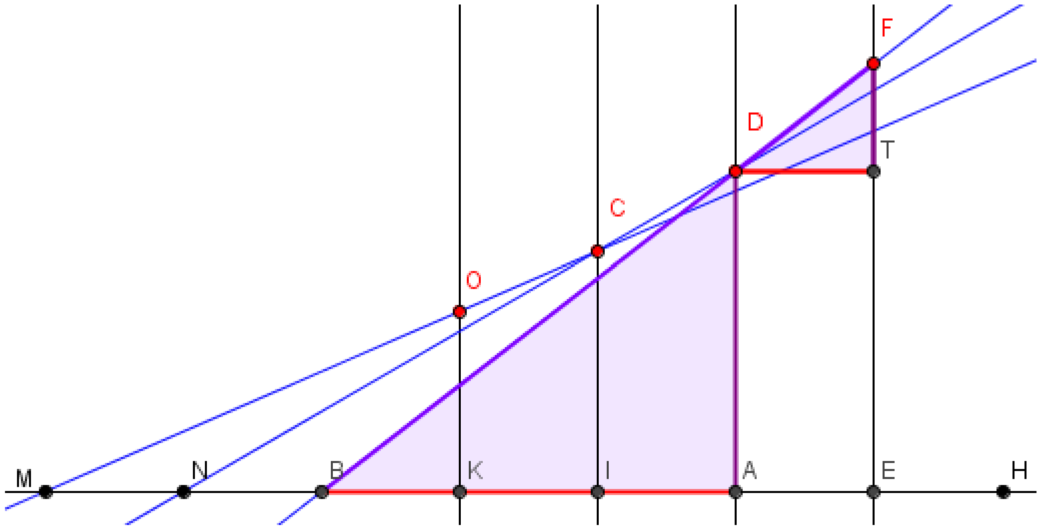


Figura 5. *Justificación de la construcción geométrica de María Agnesi*

El análisis de María Agensi, permite ver que no hay distinción entre la función logarítmica y la exponencial, ella presenta la curva logarítmica como aquella en donde las abscisas se encuentran en progresión aritmética y las ordenadas en progresión geométrica (Ferrari, 2008).

2.1.4. Analiticidad

La etapa de desarrollo geométrico, permitió extender la idea de logaritmo, de tal forma que se buscó asociar un número con su respectivo logaritmo, esto se hizo mediante el trabajo con las series de potencias, que conllevo a darle a los logaritmos el estatus de función y los hizo susceptibles al análisis (Ferrari, 2008). Adicionalmente, en este momento se establecen algunas aplicaciones y usos de los logaritmos, lo cual aumenta el interés de los matemáticos de la época por los mismos (Gacharná, 2012).

2.1.4.1. Mengoli

Pietro Mengoli (1626-1685) decide apartarse de la definición proporcionada por Napier y de las concepciones geométricas propias de esa época, llegando a establecer que mediante la suma de fracciones es posible construir números que cumplen con propiedades logarítmicas (Ferrari, 2008). En 1659 Mengoli realiza la publicación del libro "*Geometriae Speciosae Elementa"*, en donde hace un apartado dedicado a la relación logarítmica teniendo en cuenta cálculos con logaritmos y la hipérbola equilátera, además, en 1670 publicó la obra "*Speculationi di música"* en donde se justifica la teoría auditiva por medio del uso de los logaritmos, lo cual se convirtió en una de las primeras situaciones que se modelaron mediante la relación logarítmica (Gacharná, 2012).

2.1.4.2. Desarrollo de los logaritmos como series de potencias

La obtención de logaritmos a partir de series infinitas, fue llevada a cabo por medio de James Gregory (1638-1675), Lord Brouncker (1620-1684), Nicholas Mercator (1620-1687), Wallis (1616-1703), Newton (1642-1727) y Edmond Halley (1656-1742) (González y Vargas, 2007). En 1668 Mercator publicó su obra "*Logarithmotechnia"*, en donde se mencionan métodos de cálculo de logaritmos que se basan en las ideas de Napier y Briggs, además se establecen algunas fórmulas de aproximación para calcular logaritmos, que se basan en la idea que el área bajo la hipérbola $y = \frac{1}{1+x}$ desde $x = 0$ hasta $x = x$ es igual a $\ln(1 + x)$ (González y Vargas, 2007). Teniendo en cuenta que $y = \frac{1}{1+x}$, se corresponde con la siguiente serie de potencias:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots,$$

se establece que

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x (1 - x + x^2 - x^3 + \cdots)dx = \ln(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots,$$

lo cual se consolida como un método para calcular logaritmos (Figura 6).

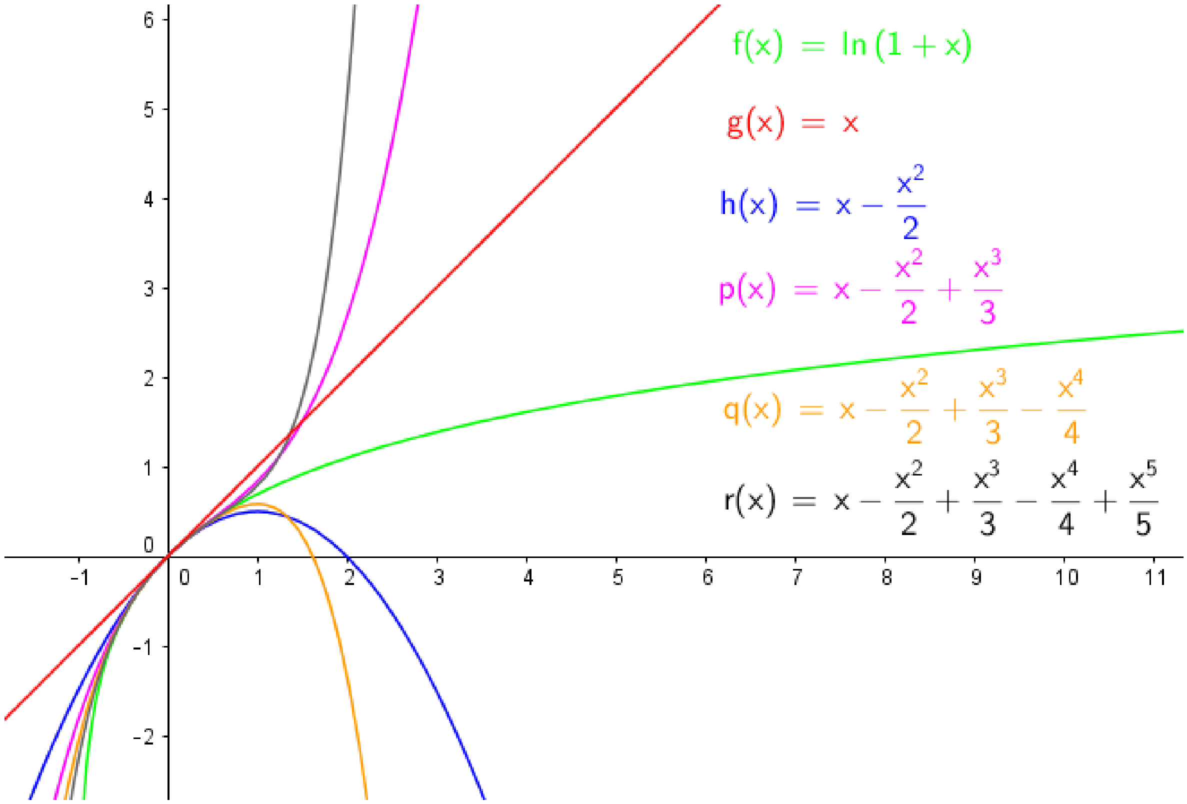


Figura 6. *Aproximación a algunos logaritmos mediante series de potencia*

Mercator es quien decide denominar como natural, a la relación logarítmica que se encuentra en la hipérbola equilátera (Gaharná, 2012). Estos cálculos que mostraban la relación entre los logaritmos y la hipérbola equilátera, son desarrollados de forma independiente por Mercator y Newton, pero fue Mercator el primero en realizar la publicación de su trabajo (Domínguez et al., 2012).

2.1.5. Simbolización

En esta etapa se relaciona la función logarítmica con la exponencial, esto se da gracias a los aportes de Euler (1707-1783), es así como se establecen como funciones inversas, una de la otra, y se asocian con el modelaje de situaciones presentes en la naturaleza (Ferrari, 2008). En 1748 Euler escribió la obra "*Introductio in analysin infinitorum*", en donde se estudian las funciones, su clasificación, propiedades, métodos de desarrollo de funciones en series y productos infinitos, en fracciones continuas y en suma de fracciones simples, es así como él plantea la siguiente definición de función exponencial *"Potencia de la cantidad constante a,* *que tiene por exponente la variable z"* (González y Vargas, 2007, p. 141). Adicional a esto, plantea lo siguiente: *"Dado un valor afirmativo cualquiera de y vendrá dado el valor de z conveniente para que sea $a^z = y$; este valor de z contemplado en cuanto función de y, se llama **LOGARITMO** de y"* (González y Vargas, 2007, p. 141). Finalmente, es él quien enuncia la regla para el cambio de base de los logaritmos, en donde conociendo $\log_a y$ es posible obtener $\log_b y$, mediante la expresión (González y Vargas, 2007):

$$\log_b y = \frac{\log_a y}{\log_a b}.$$

En este momento se instauran los aspectos algorítmicos y simbólicos que permiten trabajar con estas funciones de manera analítica, lo cual da la posibilidad de construir formas más sencillas de calcular logaritmos y de realizar tablas, además de que se les incorpora al campo de las funciones analíticas, las cuales se pueden expresar con series de potencias y adquieren status dentro de una teoría (Ferrari, 2008).

2.1.6. Formalismo

Finalmente, en el desarrollo histórico de la función logarítmica, se encuentra la etapa de rigurosidad y formalismo, en donde es concebida como la antiderivada del reciproco de una función y como aquella función que cumple que $f(xy) = f(x) + f(y)$, dándole así un enfoque más analítico y estructural, que permite incorporarla definitivamente en la matemática, lo cual convierte a esta función en un objeto formalmente definido (Ferrari, 2008).

2.2. MARCO MATEMÁTICO

A continuación se presentan aquellos conceptos que están relacionados con la función logarítmica, algunas definiciones del concepto de logaritmo y función logarítmica y sus diferentes propiedades; todos estos conceptos se muestran desde las perspectivas expuestas en diversos libros de matemáticas; paso seguido se da a conocer una postura frente a la forma como se plantean estos conceptos y su influencia en la enseñanza de los mismos.

2.2.1. Conceptos matemáticos asociados a la función logarítmica

Partiendo de la descripción del desarrollo histórico de la función logarítmica, se identificaron algunos conceptos que fueron de gran importancia en la consolidación de dicha función y que sirven como fundamento para la elaboración de la propuesta didáctica. A continuación se presentan las definiciones tomadas como referente.

Progresión aritmética: Una progresión aritmética, se define como una progresión de la forma

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, \ldots$$

El número *a* es el primer término, y *d* es la diferencia común de la progresión.

El *n*-ésimo término de una progresión aritmética está dado por:

$$a + (n - 1)d.$$

Progresión geométrica: Una progresión geométrica, se define como una progresión de la forma

$$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \ldots$$

El número *a* es el primer término y *r* es la razón común de la progresión. El *n*-ésimo término de una progresión geométrica está dado por:

$$ar^{n-1}.$$

Hipérbola: Según Lehmann (1989) una hipérbola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es siempre igual a una cantidad constante, positiva y menor que la distancia entre los focos.

Hipérbola equilátera: Según Quintanilla (1983) la hipérbola equilátera, es una hipérbola en la cual los semiejes son de la misma medida. En particular se puede mostrar que la función

$y = \frac{1}{x}$ tiene por representación gráfica una hipérbola equilátera de ecuación estándar $\frac{X^2}{2} - \frac{Y^2}{2} = 1$, con $x = \frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y$ e $y = \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y$.

2.2.2. Definiciones de logaritmo y función logarítmica

Haciendo la revisión de diferentes libros de matemáticas y de matemáticas escolares se encuentran diversas formas de presentar las definiciones sobre el concepto de logaritmo y la función logarítmica, además de las propiedades de la misma. En la Tabla 8 se reporta la forma en que es presentado por Spivak (1996).

Tabla 8: Definiciones función logarítmica Spivak (1996)

Cálculo Infinitesimal segunda edición (Spivak, 1996).
Definiciones Inicia definiendo la función logarítmica así: "Dada la función $f(x) = 10^x$, esta función se supone definida para todo x y que posee función inversa, definida para x positivo la cual es el logaritmo de base 10" (p. 465). $$f^{-1}(x) = \log_{10} x.$$ Adicionalmente el autor define la función logaritmo de base 10 de la siguiente manera: $$\log_{10} x = \frac{1}{\alpha}\int_1^x t^{-1}dt \text{ con } x > 0,$$ Como α es un valor desconocido se reescribe la anterior expresión de la siguiente forma: $$\log x = \int_1^x t^{-1}dt \text{ con } x > 0,$$ asumiendo que la integral es el logaritmo en alguna base. A partir de lo anterior se define la función exponencial "exp" como $\log^{-1}$ y se establece que $e = \exp(1)$, lo cual es equivalente con la ecuación: $$1 = \log e = \int_1^e \frac{1}{t}dt,$$ y se define que para todo número x, $e^x = \exp(x)$.
Propiedades A continuación se enuncian las propiedades planteadas: **Teorema 1:** Si $x, y > 0$, entonces $\log(xy) = \log x + \log y$. **Corolario 1:** Si n es un número y $x > 0$, entonces $\log x^n = n \log x$. **Corolario 2:** Si $x, y > 0$, entonces $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$.

Adicional a las propiedades anteriores se plantea y demuestra la veracidad de la siguiente expresión: $$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$
Observaciones   Se presenta la función logarítmica como la inversa de la función exponencial, a partir de esta definición de función logarítmica se introduce una nueva definición que está vinculada con la hipérbola equilátera a través de la integral. Adicional a lo anterior, las propiedades son enunciadas en forma de teoremas y corolarios, los cuales son demostrados partiendo de la derivada de la función logarítmica. Además, se evidenció que solo se hace alusión directa a la función logaritmo en base 10 y lo que conocemos como logaritmo natural, las demás se abordan desde la propiedad de cambio de base.

En la Tabla 9, se presenta la forma en que se es tratado por Apostol (2001).

Tabla 9: Definiciones función logarítmica Apostol (2001)

Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal segunda edición (Apostol, 2001)
Definiciones   Apostol hace referencia a la definición usual para logaritmo de base 10, la cual enuncia de la siguiente manera: "Si $x > 0$, el logaritmo de x en base 10, indicado por $\log_{10} x$ es un número real u tal que $10^u = x$" (p. 277). Adicional a lo anterior, se plantea la posibilidad de tomar cualquier entero positivo diferente como base de tal manera que se cumple la siguiente relación: $$u = \log_b x \leftrightarrow x = b^u.$$ Por otro lado el autor muestra otra posibilidad para definir la función logarítmica, por medio de una integral, partiendo de la idea que se quiere una función que satisfaga la siguiente condición: $$f(xy) = f(x) + f(y) \text{ donde } x, y, xy \text{ pertenecen al dominio de la función } f.$$ Bajo esta condición plantea lo siguiente: "Si x es un número real positivo, definimos el logaritmo natural de x, designado provisionalmente por $L(x)$, como la integral $L(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$" (p. 281). Y se nombra como e al número que satisface que $L(e) = 1$.   Ahora, para hacer referencia a otras bases propone esta definición: "Si $b > 0, b \neq 1$, y si $x > 0$, el logaritmo de x en base b es el número $\log_b x = \frac{\log x}{\log b}$, donde los logaritmos del segundo miembro son logaritmos naturales" (p. 285).
Propiedades   Mediante la primera definición que presenta se deduce la siguiente propiedad: $$\log_{10}(xy) = \log_{10} x + \log_{10} y,$$

que de manera general se expresa así: $$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y.$$ A partir de la segunda definición que expone el autor, se plantean las siguientes propiedades: 1. $L(1) = 0$. 2. $L'(x) = \frac{1}{x}$ para todo $x > 0$. 3. $L(ab) = L(a) + L(b)$ para todo $a > 0, b > 0$.
<u>Observaciones</u> Se muestra la dificultad que se desprende de plantear la definición de la función logaritmica a partir de la idea de exponente, dado el inconveniente que se presenta al definir b^u siendo u un número irracional, a partir de esto se busca definir la función logarítmica mediante el uso de la integral y de esta manera se presentan las propiedades que cumple dicha función. Es de resaltar, que Apostol (2001) destaca la importancia para facilitar cálculos de tipo multiplicativo, de la propiedad que se deduce de la primera definición, lo cual rescata una de las principales razones que dio origen a los logaritmos.

A continuación, en la Tabla 10, se analiza la forma en que los logaritmos son abordados en uno de los textos universitarios más utilizados en los primeros semestres universitarios y de grado décimo y undécimo en Colombia, el *Precálculo* de Stewart, Redlin y Watson (2007).

Tabla 10: Definiciones función logaritmo Stewart, Redlin y Watson (2007)

Precálculo, matemáticas para el cálculo quinta edición (Stewart, Redlin y Watson, 2007)
<u>Definiciones</u> Los autores plantean la siguiente definición de función logarítmica: "Sea a un número positivo con $a \neq 1$. La función logarítmica con base a, denotada por $\log_a$, se define $\log_a x = y \leftrightarrow a^y = x$. Así, $\log_a x$ es el exponente a que se debe elevar la base a para dar x" (p. 342). Por otro lado, se presentan los logaritmos comunes como los logaritmos en base 10 e introduce una nueva notación $\log x = \log_{10} x$, y define el logaritmo natural como aquel cuya base es el número e dando su notación como $\ln x = \log_e x$.
Propiedades Se enuncian las siguientes propiedades tal y como se muestra a continuación: 1. $\log_a 1 = 0$, se debe elevar a a la potencia 0 para obtener 1. 2. $\log_a a = 1$, se debe elevar a a la potencia 1 para obtener a. 3. $\log_a a^x = x$, se debe elevar a a la potencia x para obtener a^x. 4. $a^{\log_a x} = x$, $\log_a x$ es la potencia a la cual se debe elevar a para obtener x. Adicionalmente, plantea las mismas propiedades de modo particular para los logaritmos naturales.

Aparte de las propiedades enunciadas anteriormente, se plantean las leyes de los logaritmos de la siguiente manera: Si a es un número positivo diferente de 1 y A, B y C son números reales cualesquiera con $A > 0, B > 0$ entonces, 1. $\log_a(AB) = \log_a A + \log_a B$. 2. $\log_a\left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$. 3. $\log_a A^C = C \log_a A$.
Observaciones La definición que se presenta corresponde a la que se enuncia usualmente y que se relaciona con la inversa de la función exponencial. Además, se muestran algunas demostraciones de las propiedades, las cuales se realizan mediante la aplicación de las propiedades de los exponentes.

Otro texto utilizado en los primeros cursos universitarios es el Cálculo en una variable de Larson y Edwards (2010), en la Tabla 11 se reporta lo encontrado en el mismo.

Tabla 11: Definiciones función logarítmica Larson y Edwards (2010)

Cálculo 1 de una variable novena edición (Larson y Edwards, 2010)
Definiciones Larson y Edwards comienzan dando una definición de la función logaritmo natural tal y como se enuncia a continuación: "La función logaritmo natural se define como $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt, x > 0$. El dominio de la función logaritmo natural es el conjunto de los números reales positivos" (p. 324). Además, los autores hacen referencia a algunas propiedades de la función logaritmo natural teniendo en cuenta el dominio y el rango y aludiendo a que la función es continua, creciente e inyectiva. Por otro lado, hacen referencia al número e como la base de los logaritmos naturales y propone la siguiente definición: "La letra e denota el número real positivo tal que $\ln e = \int_1^e \frac{1}{t} dt = 1$" (p. 327). Adicionalmente, presentan una definición para la función logarítmica de base a, de la siguiente manera: "Si a es un número real positivo ($a \neq 1$) y x es cualquier número real positivo, entonces la función logarítmica base a se denota $\log_a x$ y se define como $\log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x$ " (p. 363).
Propiedades Partiendo de la definición propuesta, se enuncian algunas propiedades de los logaritmos naturales, las cuales se demuestran teniendo en cuenta la misma definición. A continuación, se presentan las propiedades propuestas por estos autores: 1. $\ln 1 = 0$.

2. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ 3. $\ln(a^n) = n \ln a$ 4. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ En donde a y b son números positivos y n es un número racional. Las anteriores propiedades también son enunciadas para las funciones logarítmicas base a.
Observaciones Se presenta la definición de la función logaritmo natural mediante la integral, pero no se realiza una demostración como en los otros textos donde se enuncia de esta misma forma. Larson y Edwards (2010), a diferencia de otros autores no muestran la función logaritmo natural como la inversa de la función exponencial natural, sino que por el contrario usan la primera y definen la segunda como su inversa.

En las definiciones presentadas en los diferentes textos analizados, se evidencia que no se hace referencia a la relación que existe entre las progresiones geométricas y aritméticas, sino que por el contrario siempre se muestra una definición formal, se hacen algunas demostraciones y aclaraciones con respecto a la misma, y se enuncian teoremas y propiedades que en algunos casos se demuestran. Por otro lado, no se hace un énfasis significativo en las aplicaciones que tiene dicha función, sino que su manejo y presentación se hace de modo formal y algorítmico. Desde nuestra perspectiva, es importante que se reconozca la forma particular de covariación de dicha función y como está la hace tan esencial en la modelación de fenómenos de la vida real; lo cual es posible mediante la inclusión de las progresiones geométricas y aritméticas, y la relación entre estas y el concepto de logaritmo. Cambiar el modo de presentación de estos conceptos puede contribuir a que los estudiantes les den un mayor significado e importancia.

2.3. MARCO DIDÁCTICO

En este apartado se muestran aquellos aspectos didácticos que son de importancia en la justificación del diseño de la propuesta didáctica. Inicialmente se exponen aquellas ideas relacionadas con las políticas educativas propuestas en Colombia, seguidamente se hace referencia a la covariación y el razonamiento covariacional, y se mencionan los componentes de mayor importancia de la teoría Socioepistemológica de la educación matemática, así como su enfoque en el desarrollo de propuestas para abordar el concepto de logaritmo.

2.3.1. Pensamiento variacional

Desde los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, se propone como eje central de la educación matemática, favorecer el pensamiento matemático por medio de la vivencia en espacios de aplicación, tanto en la vida real y en las propias matemáticas, específicamente se resalta los aspectos asociados al estudio de la variación (MEN, 2004).

El pensamiento variacional desde los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), es entendido como aquel que está asociado con reconocer y caracterizar la variación y el cambio en diversos contextos, en donde además se incorpora la modelación y la representación a partir de registros semióticos (Geométrico, verbal, icónico, tabular, gráfico, y algebraico). Teniendo en cuenta lo anterior, según el MEN (2004) El término pensamiento variacional, surge con el objetivo de tratar más a fondo los conceptos asociados con las funciones y la modelación, tanto desde el campo educativo como el matemático.

El MEN (2006) señala la importancia del desarrollo del pensamiento variacional, puesto que se apoya en la resolución de problemas, en donde se ve implícito el análisis de la variación y el cambio; y la modelación en distintos contextos. Adicionalmente, el proceso de implementación del pensamiento variacional en el aula, conlleva a que el estudiante potencie habilidades en relación con otros aspectos de las matemáticas. Para Vasco (2003) establecer un cambio que permita pasar de la enseñanza de las matemáticas puras a la promoción del pensamiento variacional, de tal manera que se retome el uso de las matemáticas dinámicas y aplicadas, es la mejor decisión que se debe considerar a la hora de diseñar el currículo, secuencias didácticas, materiales, textos, entre otros.

En este sentido, resulta apropiado cuestionarse sobre las metodologías y estrategias que se implementan en las aulas para trabajar en torno a la variación, buscando crear propuestas, que permitan favorecer el aprendizaje de los estudiantes. Según la propuesta presentada en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), se debe partir del estudio de regularidades y patrones, los cuales están presentes en el trabajo con números y figuras geométricas, esto permitirá dotar de significado a los sistemas algebraicos y su simbolización. Por otro lado, analizar fenómenos de variación a través de las distintas representaciones, como el uso de tablas, gráficos, expresiones algebraicas, y simulaciones; y aspectos en los que está involucrada la variación, como magnitudes, el tratamiento de los números reales y la función como dependencia, también es fundamental para promover el pensamiento variacional en las aulas (MEN, 2004).

2.3.2. Covarición y razonamiento covariacional

La covariación en términos de una función, y en general en el contexto de las magnitudes físicas, se establece como la dependencia que existe entre dos variables y el cambio que se genera al mismo tiempo entre ellas (Carlson et al., 2003). La importancia de la covariación en el presente trabajo radica en que el objeto matemático a tratar tiene dos variables que poseen un comportamiento especial, puesto que la variación de cada una de ellas se puede describir por medio de progresiones de diferente tipo. Dadas las características particulares de la función logarítmica, es importante que los estudiantes entiendan y establezcan cómo cambia una variable con respecto a la otra, esto es como se relacionan las variaciones previamente establecidas, por esta razón nos apoyamos en el razonamiento covariacional, que promueve y brinda herramientas para el desarrollo de la definición de covariación anteriormente presentada.

En general Carlson et al. (2003), establecen el razonamiento covariacional como "las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra" (p. 124), y exponen un referente teórico que implica un conjunto de cinco acciones mentales y cinco niveles, con los cuales se describe la manera como los estudiantes razonan cuando se enfrentan a problemas de sucesos dinámicos (Villa-Ochoa, 2012).

Para ello, se incorporan diferentes factores, que son tenidos en cuenta cuando un estudiante realiza una actividad que involucra covariación; así cada nivel se asocia con una de las acciones mentales, de tal manera que justifican cómo llegar a dicho nivel y la forma en que estos pueden ser alcanzados de manera progresiva (Carlson et al., 2003). Según Tall (2009), la importancia del razonamiento covariacional, radica en que los procesos de variación están involucrados con varios conceptos matemáticos, en especial el concepto de función, y además permite establecer el potencial de la modelación. Tal es el caso de la función logarítmica, pues con ella se modelan diferentes fenómenos de la vida real.

Para la creación de las actividades en este trabajo, se tomó en cuenta el razonamiento covariacional, entendido en los términos anteriormente presentados, y se vincula con el constructo teórico de visualización matemática, la cual se define como: "las imágenes mentales que nos formamos sobre ideas matemáticas y que involucran iconos, dibujos, graficas, entre otros" (Carrasco, 2005, p. 14). Así se busca que los estudiantes adquieran diferentes nociones, que se han forjado de la función logarítmica a lo largo de la historia, a través de actividades de visualización, en donde está presente el movimiento y magnitudes que covarían en diferentes contextos.

En este sentido, las representaciones cobran un papel relevante para que el estudiante logre conceptualizar de mejor forma la función logarítmica, es por esto que se quiere que los estudiantes realicen una traducción de un registro a otro en distintas representaciones (verbal, icónica, tabular, gráfica, y algebraica) y eventualmente al interior de un mismo registro; que pueden estar apoyadas del acompañamiento de material físico (concreto) y tecnológico.

Por último, nos referimos al razonamiento covariacional en la función logarítmica, como el comprender la dependencia entre dos cantidades que varían al mismo tiempo, con una característica especial, en donde la covariación se refleja en la relación que existe entre la progresión geométrica y aritmética (Ferrari y Farfán, 2008). A partir de la idea anterior, el razonamiento covariacional permite potenciar la comprensión de la función logarítmica y dotarla de un nuevo significado. Finalmente, por medio del razonamiento covariacional se busca que el estudiante de cuenta de las características particulares de este objeto matemático, es decir, que podrá establecer las peculiaridades del crecimiento de la función, partiendo de la hipótesis epistemológica que se menciona en el siguiente apartado y que es la base de las actividades propuestas.

2.3.3. Socioepístemología y función logarítmica

La teoría socioepistemológica de la matemática educativa, se centra en la *construcción social del conocimiento matemático* y el de su *difusión institucional*. Como lo afirma Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel (2014), se da una interpretación más cercana a la enseñanza, en donde se toma un conocimiento que se ha establecido desde el estudio de diferentes autores en la sociedad, obteniendo un resultado específico con el fin de llevarlo al aula. Dicho conocimiento experimenta una serie de transformaciones que permiten modificar diferentes características del objeto a tratar, con el objetivo de crear vínculos y discusiones entre el profesor y el estudiante. Para ello, se debe hacer un estudio detallado que permita extraer algunas particularidades, que se necesitan para crear las propuestas de enseñanza, dándole sentido a los objetos y dejando ver su potencial desde la historia de cada uno de ellos.

El enfoque sociepistemológico a grandes rasgos debe tener en cuenta algunas nociones para su desarrollo, Martínez (2005, citado por Crespo, 2007) describe estas nociones, que son parte de la estructura de esta teoría, de la siguiente manera:

- La noción de la actividad humana, que describe el conocimiento como una construcción propia de las personas, que surge de distintas necesidades que llevaron a crear matemáticas para resolver aquellos conflictos y facilitar la vida.
- La noción de resignificación, que se sustenta en presentar los conocimientos con una esencia propia, es decir conocer su historia, porqué surgen en un contexto determinado y que impulsa a los autores a crear estos objetos, y cuál es la intensión al estudiarlos.
- La noción de práctica social, que es el eje central de la socioepistemología, esta hace referencia a aquellas acciones intencionadas que realizan las comunidades con el fin de transformar la realidad social y material.

La causa que produce la creación de esta teoría, es el conflicto que se da en los estudiantes para aprender un concepto, este enfoque permite ver diferentes alternativas desde las prácticas sociales, partiendo de características culturales y sociales del saber matemático que instauren una nueva perspectiva que contribuya al aprendizaje (Cantoral, 2013). Los elementos presentados anteriormente cobran sentido con la realidad que hay en la mayoría de aulas en Colombia y es que las matemáticas son adquiridas por un grupo selecto de estudiantes que entiende de mejor manera, pero se realiza un gran interrogante ¿y los que no entienden o no encuentran sentido a los objetos presentados?, en general se ve que el conocimiento es exclusivo para unos pocos.

Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel (2014) dan a conocer que la teoría sociepistemológica trata estas problemáticas a través de dar significado por medio de compartir el conocimiento, siendo más concretos se refieren a lo que ellos denominan la *democracia del conocimiento* (o democratización del conocimiento), lo cual tiene implícito que el aprender matemáticas no sea un dolor de cabeza para el estudiante, por el contrario se debe convertir en una oportunidad para construir un conocimiento, por medio de actividades que permitan un aprendizaje óptimo.

Dadas estas características se establece que este enfoque permite que el objeto matemático, en este caso la función logarítmica, tome un punto de vista diferente en relación con la enseñanza tradicional, puesto que este enfoque admite tomar varias concepciones que aparecen desde su desarrollo histórico; de tal manera que se privilegian aquellas que dotan de significado a esta función, pues son más accesibles a los estudiantes y permiten crear una secuencia de actividades que puede ser más eficaz. Adicionalmente, debemos reconocer que los objetos matemáticos se desarrollaron en una época histórica, donde se dieron condiciones de tipo social y cultural que condicionan la explicación y el origen de dichos objetos (Cantoral, 2001).

El presente trabajo hace uso de este enfoque por dos razones fundamentales; la primera, es que al tomar la historia como referente, se atiende a la construcción social del conocimiento; y la segunda razón, es que con ayuda de la historia se extraen elementos fundamentales que permiten que los estudiantes comprendan mejor el objeto en cuestión, realizando ajustes a las etapas históricas que se reportaron en el apartado 2.1. y estructurando la construcción de actividades dentro de un entorno de exploración.

Sin embargo hay otra razón que nos impulsa a escoger este enfoque, y es que el tratamiento de la función logarítmica en las aulas, se desarrolla de una manera netamente algorítmica y no da cuenta de la potencialidad que tiene esta función para modelar fenómenos y promover el razonamiento covariacional. Según Candela (citada por Carrasco, 2004) se busca que esta construcción social, delimitada por procesos específicos, tenga en cuenta las formas de comunicación, la manera como se expresan las ideas, la argumentación, la visualización, y la declaración; que establezca la veracidad del saber.

El enfoque socioepistemológico permite el tratamiento de la función logarítmica ya que la aborda desde su desarrollo histórico, el cual la dota de significado. Es por ello que Ferrari y Farfán (2010) reconocen la importancia de la naturaleza de esta función, estableciendo la teoría socioepistemológica como la más apropiada para transformar y diseñar tareas en las aulas; es así como se toma como punto de partida la *hipótesis epistemológica* mencionada por las autoras que incorpora el desarrollo histórico de esta función:

> *lo logarítmico emerge al percibir la covariación entre dos patrones de crecimiento diferentes, uno regido por la multiplicación y otro por la adición*, cercana a la definición primigenia de *logaritmo* alejado del ambiente escolar, y que nos incentivara a analizar ciertas investigaciones sobre covariación (Ferrari y Farfán, 2010 p. 55).

Bajo esta hipótesis, se busca aplicar lo que plantea la socioepistemología para llegar a la construcción del concepto de la función logarítmica con un mayor significado. Cantoral y Farfán (2004) sugieren un estudio a profundidad del conocimiento que se despliega en diferentes contextos como el matemático, histórico y social; en donde se da a conocer la construcción de la función logarítmica, su necesidad de surgir como objeto matemático y como una ayuda para resolver problemas específicos en el contexto social de la época.

Como lo afirma Ferrari y Farfán (2008), se establece que el verdadero sentido de la covariación de los logaritmos, en diferentes estudios, potenció la matemática y dio pie a otros resultados en su exploración.

Ferrari (2008) da a conocer, desde el enfoque socioepistemológico, tres momentos fundamentales en el desarrollo histórico de la función logarítmica, los cuales son parte esencial en el diseño de la propuesta, a saber:

- ***Logaritmos como transformación numérica***: Momento que se enmarca en los registros numéricos, en donde se busca facilitar cálculos numéricos, a partir de la exploración de nuevas relaciones, tal es el caso del uso de las progresiones geométricas y aritméticas.
- ***Logaritmos como modelizadores:*** En este momento se plantea una definición de la noción de logaritmo, se dan algunas características de la misma y se extiende esta idea a otras representaciones y contextos. En este sentido, se presenta una curva con subtangente constante, se da una construcción de su gráfica, se asocia con la cuadratura de la hipérbola equilátera y se utiliza para modelar fenómenos de la vida real.
- ***Logaritmos como objetos teóricos:*** Finalmente, bajo la idea de incorporarlos a la estructura matemática, dotando estas ideas de rigor y abstracción, los logaritmos pasan a convertirse en un objeto teórico. Es así como se plantea una definición formal, en donde se muestra como la función inversa de la función exponencial, y como aquella que convierte productos en sumas.

Los momentos mencionados anteriormente, se relacionan con las seis etapas, que son reportadas en la Tabla 12, y tomadas como referente para la elaboración del marco histórico presentado en la sección 2.1.

Tabla 12: Momentos y etapas de desarrollo de la función logarítmica

Logaritmos como transformación numérica	Exploración algorítmica
	Numérica utilitaria
Logaritmos como modelizadores	Gráfico-geométrica
	Analiticidad
Logaritmos como objetos teóricos	Simbolización
	Formalismo

Partiendo de los anteriores momentos y de la idea de resignificar la naturaleza de la función logarítmica, se busca que los estudiantes reconstruyan la esencia de dicha función, mediante el diseño de actividades que sustentan dichos momentos.

3. METODOLOGÍA DE TRABAJO

Desde el enfoque socioepistemológico y en particular en lo que concierne al campo investigativo, se consideran unas pautas y etapas que se deben tener en cuenta para el desarrollo de la secuencia de actividades y acciones que se llevan a cabo en una propuesta de aula, y es en ellas en las que se sustentan las actividades diseñadas. A grandes rasgos este enfoque surge con el objetivo de tratar el problema que se presenta en las aulas en torno al significado de objetos matemáticos; esto desde una visión que incorpore la cultura, la sociedad y el desarrollo histórico, además de ampliar la cobertura, esto es lograr que un mayor número de estudiantes puedan acceder al aprendizaje de las matemáticas (Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014).

Montiel y Buendía (2011) dan a conocer un esquema metodológico que se fundamenta en la socioepistemología, y de manera general expone una ruta de investigación que gira en torno a la construcción del conocimiento en relación con su desarrollo histórico, social y cultural. Desde este enfoque hay un propósito fundamental que es reconocer al objeto matemático, en nuestro caso la función logarítmica, desarrollar un análisis alrededor de este y dar a conocer su estatus en distintos escenarios de uso, centrados en la construcción y difusión (transmisión) del conocimiento.

Montiel y Buendía (2011) dan a conocer tres dimensiones de análisis, en las cuales la teoría socioepistemológica ha problematizado el saber matemático y propuesto diversas investigaciones, las cuales se enuncian a continuación y se asocian con el estudio de la función logarítmica:

- **Su naturaleza epistemológica:** Es un aspecto esencial en el estudio de la construcción del saber, el cual da a conocer contextos y escenarios específicos, y se logra a través de la interacción de la epistemología y los elementos sociales (Cordero, 2001), esta dimensión se desarrolla a profundidad en el marco histórico.

- **Su resignificación:** La problematización de la función logarítmica, surge del tratamiento general del concepto de función, es por esto que se da un interés particular por conocer el proceso evolutivo de este concepto; a través de unas etapas históricas, las dificultades presentes en su desarrollo y sus aplicaciones (Montiel, 2005). Esta problemática cuestiona la enseñanza y el tratamiento que se le da actualmente a la función logarítmica, para ello se realizó dos análisis importantes:
    - Comparación de las definiciones presentadas sobre el objeto y algunas de sus propiedades en libros de matemáticas y textos escolares.
    - Contraste de las definiciones con la hipótesis epistemológica.

  Ahora, la resignificación se debe entender como un proceso continuo que dota de significado a los conceptos matemáticos, por medio de su origen y el uso que se le da (Montiel y Buendía, 2011), bajo esta idea se plantean actividades ligadas a su desarrollo histórico, con las cuales se busca cambiar la forma como son abordados estos conceptos en el aula.
- **Sus procesos de transmisión:** Las actividades se enfocan en alguna etapa o momento histórico, descritos en capítulos anteriores, de tal forma que el estudiante pueda construir algunas características propias de la función logarítmica. Buscando que la transmisión del conocimiento sea apropiada, la estructura de la secuencia didáctica propuesta, está determinada por los siguientes parámetros:
    - Un objetivo.
    - Los recursos (Material concreto o tecnológico).
    - Una descripción general de las actividades.
    - La secuencia propuesta de cada actividad, junto con algunas preguntas orientadoras.
    - Algunos aspectos a considerar por el docente dentro del desarrollo de cada actividad.
    - Talleres guía para uso del estudiante.

Bajo estas dimensiones se han planteado algunas unidades de análisis. En particular se propone una unidad (Figura 7) en donde se busca analizar la actividad observable del ser humano, la intención que existe al momento de transmitir un conocimiento y el conocimiento matemático que está asociado al escenario desde el cual se enseña (Montiel y Buendía, 2011).

Figura 7. *Unidad de análisis tomado de Montiel y Buendía (2011)*

En este trabajo de grado se toma un escenario particular, las aulas escolares en Colombia, dicho trabajo está dirigido a la enseñanza de la función logarítmica, en donde la actividad está sujeta a las condiciones de estos espacios, y la transmisión se enmarca en el uso que se le da a este conocimiento, para lo cual se plantean una serie de actividades propuestas desde la teoría de la socioepistemología.

Bajo esta unidad de análisis, se presenta el esquema metodológico, que en este caso parte de la enseñanza de la función logarítmica (Figura 8).

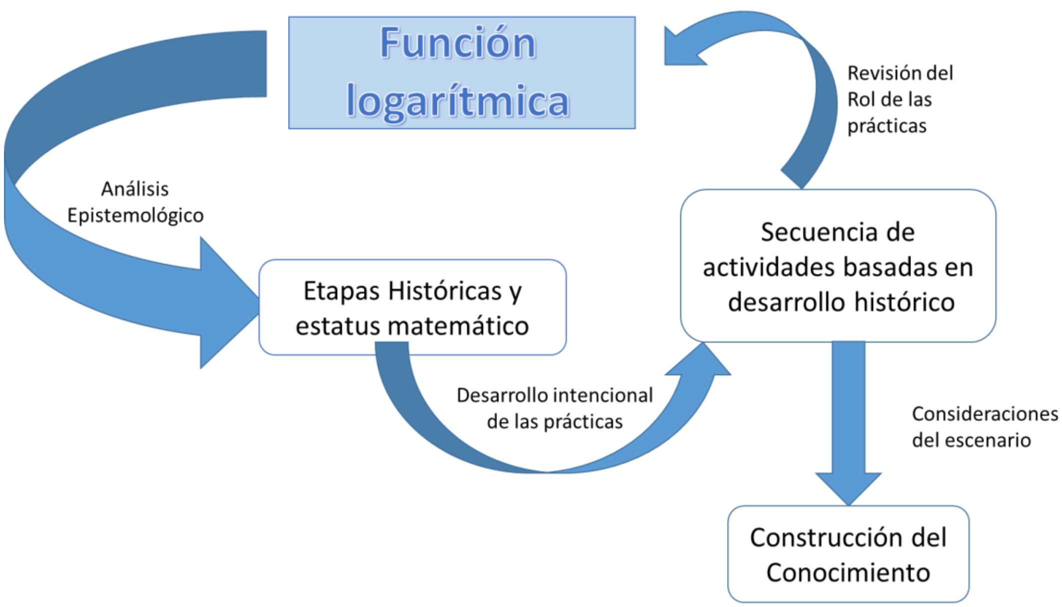


Figura 8. *Esquema Metodológico adaptado de Montiel y Buendía (2011)*

Dado que este trabajo de grado se fundamentó en el análisis propuesto por la teoría de la socioepistemología, se realizó un estudio de las etapas históricas de la función logarítmica a través de una revisión documental, de tal manera que se intenta recopilar diferentes momentos en el ámbito cultural y social, además de las causas que le dieron su origen y el estatus que adquirió en cada época. Basados en este análisis se consideran las etapas para la elaboración y adaptación de las actividades, donde se quiere mostrar a la función logarítmica desde su naturaleza y evolución que tuvo a través del tiempo, y en cuanto a la trasmisión del conocimiento, se dota al profesor con una serie de recomendaciones que ayudaran a la enseñanza de este objeto matemático en el aula y a sortear situaciones que se presenten cuando se apliquen las mismas.

En resumen, este trabajo se ajusta a la metodología propuesta desde el enfoque socioepistemológico, puesto que da la posibilidad de plantear una ruta para la enseñanza de una función con una naturaleza particular, como lo es la función logarítmica, teniendo en cuenta el uso específico de cada época y las práctica que dieron origen a su desarrollo.

4. PROPUESTA DIDÁCTICA "RESIGNIFICANDO LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA UNA MIRADA DESDE LA COVARIACIÓN Y EL ENFOQUE SOCIOEPISTEMOLÓGICO"

La propuesta didáctica se sustenta en los tres momentos propuestos por Ferrari (2008) y el enfoque socioepistemológico, de tal manera que se brinda una alternativa a las metodologías implementadas en la actualidad en las aulas, para la enseñanza de la función logarítmica, y se da a conocer una nueva perspectiva sobre la manera como podrían ser abordados los conceptos relacionados con esta. Es de resaltar que la propuesta va dirigida a los docentes, y se constituye como una guía que puede ser utilizada en distintos niveles escolares, que busca contribuir en la enseñanza de las matemáticas, y que se espera sea también un apoyo a los procesos de aprendizaje.

A continuación se presenta la propuesta de actividades, haciendo referencia al momento en el cual se ubican y dando a conocer el objetivo e importancia de cada una. Adicionalmente, se realizan algunas observaciones que se deben tener en cuenta en el momento de aplicación de cada actividad. Es de aclarar, que algunas de las actividades presentadas son adaptadas de las propuestas de Hernández y Ferrari (2005) y Ferrari y Farfán (2008, 2010). Adicionalmente, para cada una de las actividades se diseñaron talleres para los estudiantes, los cuales están ubicados en los anexos.

4.1. Actividad 1 (Transformaciones numéricas): *Relación entre las progresiones aritméticas y geométricas*

En la Tabla 13 se presenta la primera actividad, su objetivo, los recursos, la descripción general, la secuencia propuesta y algunos aspectos a considerar dentro del desarrollo de la misma.

Tabla 13: Actividad 1

Objetivo

Establecer una relación entre una progresión aritmética y una geométrica.

Recursos

Para el desarrollo de la actividad se hace uso de seis fichas de doble entrada, en las cuales se ubica una progresión geométrica de razón dos en la parte superior y una progresión aritmética de diferencia uno en la parte inferior (Figura 9). Adicionalmente, se tienen fichas, de doble entrada en blanco para complementar el trabajo que se quiere desarrollar.

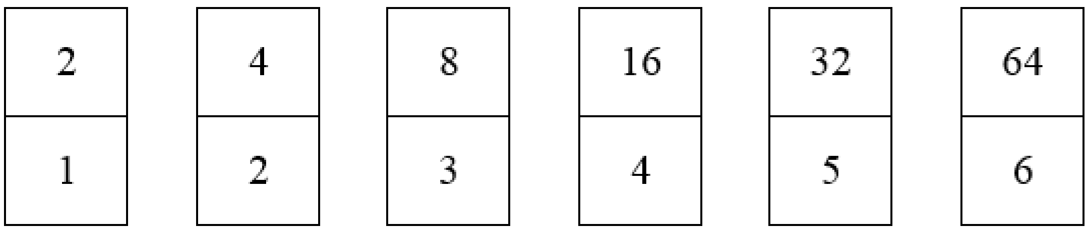


Figura 9. Material: Fichas de doble entrada con progresión geométrica y aritmética

Descripción general de la actividad

La actividad está orientada a determinar la relación que existe entre una progresión geométrica y una progresión aritmética, para esto se proporciona el material especificado anteriormente, en el cual se presentan las dos progresiones de forma vinculada, da tal manera que sea más fácil ver la relación entre las dos y aproximar la noción de logaritmo.

Secuencia a desarrollar

1. Inicialmente se debe proporcionar las seis primeras fichas a los estudiantes y hacer la solicitud de ordenarlas como ellos crean pertinente, sin embargo se espera que dichas fichas sean ordenadas como se muestra en la Figura 9. Ante cualquier orden presentado por los estudiantes, se debe indagar por la forma como fueron ordenadas y el porqué de este orden.
2. Luego se proporcionan seis fichas en blanco para extender las progresiones o valores dados, el objetivo es que se ubiquen tres fichas a la derecha y tres fichas a la izquierda, para esto, es importante cuestionar a los estudiantes sobre el comportamiento de los valores de la primera fila y el de los de la segunda fila, algunas preguntas que pueden orientar esta actividad son:

- ¿Cómo a partir del primer término obtengo el segundo?
- ¿Cómo a partir del segundo término obtengo el tercero?
- ¿Cómo a partir del tercer término obtengo el cuarto?

- ¿Qué relación existe entre dos términos consecutivos de cada fila?

Es importante tener en cuenta que los valores hacía la izquierda deben ser proporcionados como fracción. A continuación se muestra como se deben completar las fichas hacia la izquierda (Figura 10) y hacia la derecha (Figura 11):

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
-2	-1	0

Figura 10. *Material: Secuencia de fichas hacia la izquierda*

128	256	512
7	8	9

Figura 11. *Material: Secuencia de fichas hacia la derecha*

3. Se presentan a los estudiantes fichas que solo tienen un valor numérico y se les cuestiona sobre cuál es el otro valor y cómo se puede obtener, algunos ejemplos de estas fichas pueden ser:

$\frac{1}{16}$		1024		$\frac{1}{32}$
	-6		12	

Figura 12. *Material: Fichas de doble entrada para completar*

<u>Aspectos a considerar</u>

- El orden proporcionado por los estudiantes no siempre va ser el que se espera, es por esto que es importante indagar sobre las razones que dan los estudiantes en su planteamiento y propiciar que se dé el orden adecuado.
- Completar la secuencia de fichas hacía la izquierda requiere mayor atención por parte del docente.

4.2. Actividad 2 (Transformaciones numéricas y objetos teóricos): *Relación entre las progresiones aritméticas y geométricas y el concepto de logaritmo*

En la Tabla 14 se presenta la segunda actividad, su objetivo, la descripción general, la secuencia propuesta y algunos aspectos a considerar dentro del desarrollo de la misma.

Tabla 14: Actividad 2

Objetivo

Establecer una relación entre una progresión aritmética y una geométrica, y el concepto de logaritmo.

Descripción general de la actividad

Establecida la relación entre las progresiones geométricas y aritméticas dadas; se asociará este trabajo con el concepto de logaritmo, de tal manera que se haga una aproximación a la definición del mismo, teniendo en cuenta el término base.

Secuencia a desarrollar

1. Para dar inicio a la actividad se realizarán las siguientes preguntas, con las cuales se busca que la relación encontrada en la actividad anterior, se asocie con el concepto de logaritmo:
    - ¿A qué exponente debo elevar el 2 para obtener como resultado 2?
    - ¿A qué exponente debo elevar el 2 para obtener como resultado 4?
    - ¿A qué exponente debo elevar el 2 para obtener como resultado 8?
    - ¿A qué exponente debo elevar el 2 para obtener como resultado 16?
    - ¿A qué exponente debo elevar el 2 para obtener como resultado 32?
2. A partir de los valores hallados anteriormente, se debe asociar la actividad de las fichas con estos, de tal modo que se identifique como están relacionados los valores de la parte superior con los valores de la parte inferior de las fichas, esto en términos de exponentes y de la razón de la progresión geométrica. Para esto, se deberá hacer la siguiente pregunta:
    - Teniendo en cuenta los valores hallados anteriormente y las fichas dadas en la primera actividad ¿cuál es la relación que existe entre cada uno de los términos de la parte superior y los términos de la parte inferior de cada ficha?

    Se espera que los estudiantes aludan al término de la parte inferior de cada ficha, como el exponente al que se debe elevar el número dos para obtener el correspondiente valor de la parte superior.

3. Se introduce la definición de logaritmo teniendo en cuenta el trabajo desarrollado anteriormente, para esto se deberán hacer algunos ejemplos haciendo referencia a que el exponente al que debo elevar el número 2 para obtener determinado número, corresponde al logaritmo en base 2 de dicho número. Finalmente, se propone reescribir las fichas en la parte de atrás tal y como se muestra a continuación:

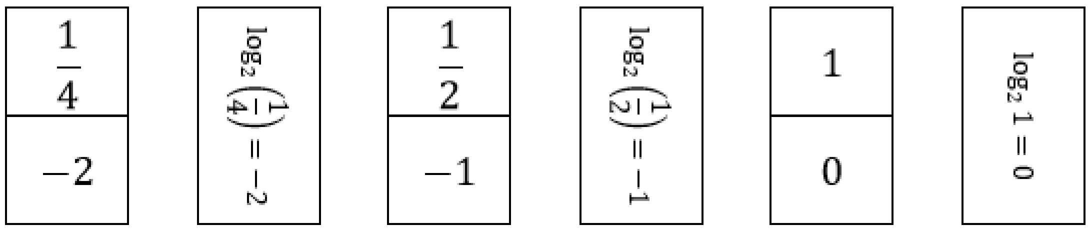


Figura 13. *Material: Fichas logaritmo en base 2 reescritas*

4. Se propone a los estudiantes construir fichas para logaritmos en base 10, de tal modo que en la parte superior ubiquen una progresión geométrica de razón diez, en la parte inferior una progresión aritmética de diferencia uno, y en la parte trasera la respectiva notación. En total se proporcionan ocho fichas en blanco para que sean completadas por los estudiantes. Se recomienda que se construyan las siguientes fichas, para así garantizar que se tenga en cuenta una cantidad apropiada de números negativos y positivos en la parte inferior:

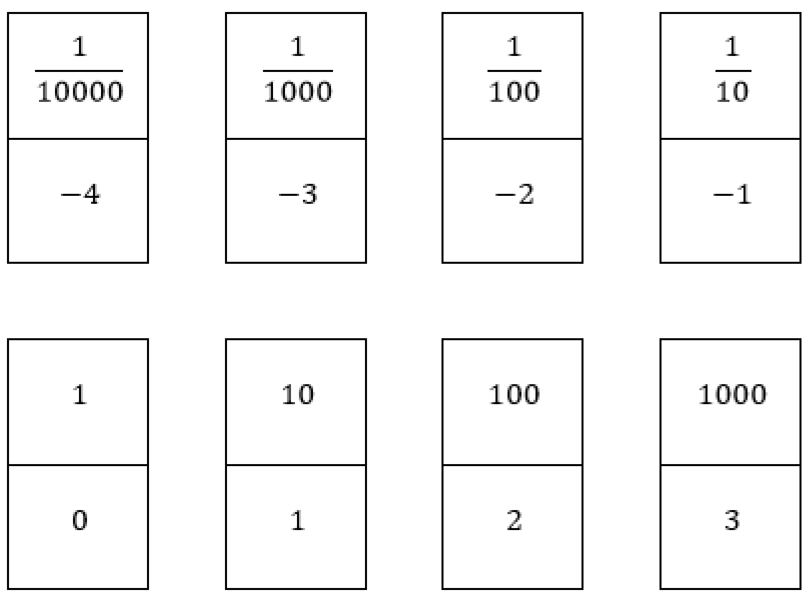


Figura 14. *Material: Fichas logaritmo en base 10 primera cara*

$\log_{10}\left(\frac{1}{10000}\right) = -4$	$\log_{10}\left(\frac{1}{1000}\right) = -3$	$\log_{10}\left(\frac{1}{100}\right) = -2$	$\log_{10}\left(\frac{1}{10}\right) = -1$
$\log_{10} 1 = 0$	$\log_{10} 10 = 1$	$\log_{10} 100 = 2$	$\log_{10} 1000 = 3$

Figura 15. *Material: Fichas logaritmo en base 10 segunda cara*

Es importante que haciendo uso de recursos tecnológicos, por ejemplo la calculadora, el docente de la instrucción a los estudiantes de comprobar que efectivamente los valores dados en la segunda cara de las fichas, efectivamente corresponden a los logaritmos, y así facilitar el siguiente momento de la actividad.

5. Habiendo construido las fichas para logaritmo en base 10, se cuestionará a los estudiantes por la posibilidad de introducir las siguientes fichas:

$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{10}$	3	π	5

Figura 16. *Material: Nuevas fichas logaritmo en bases 10*

De esta manera se espera que los estudiantes evidencien que es posible calcular el logaritmo en base 10 de otros números, que no necesariamente hacen parte de la progresión geométrica y su logaritmo no es un número entero.

<u>Aspectos a considerar</u>

- Es importante que el docente sea precavido en el momento de introducir la notación y el concepto de logaritmo, para esto es necesario que realice varios ejemplos y que evidencie que realmente los estudiantes comprendieron el significado de los logaritmos y la forma correcta de notación. Esta tarea es de una alta complejidad conceptual y por lo tanto deben darse diferentes momentos para introducir la definición y la notación. Una de las mayores dificultades y riesgos están en el vínculo que se establece entre el objeto y su representación ya que se puede convertir en un simple juego simbólico carente de significado.

- En la última parte de la actividad el docente puede motivar a los estudiantes para usar recursos tecnológicos que permitan determinar si es posible dar solución a esta actividad.

4.3. Actividad 3 (Transformaciones numéricas): *Deducción de la propiedad del logaritmo de un producto*

En la Tabla 15 se presenta la tercera actividad, su objetivo, la descripción general, la secuencia propuesta y algunos aspectos a considerar dentro de la misma.

Tabla 15: Actividad 3

Objetivo Deducir la propiedad del logaritmo de un producto, a partir de la exploración de las fichas construidas en las actividades anteriores.
Descripción general de la actividad En esta actividad se abordará la propiedad del logaritmo de un producto, la cual se hará evidente mediante el uso de las fichas trabajadas en las actividades anteriores. En este sentido, se comenzará realizando una exploración numérica, basada en la regla de Arquímedes y las observaciones de Stifel, y finalmente se buscará llegar a una generalización de esta propiedad.
Secuencia a desarrollar **1.** Del material que se ha elaborado en las actividades anteriores, se tomaran algunos pares de fichas y se deberá solicitar a los estudiantes realizar el producto de los valores de la parte superior, cada vez que se efectué la operación, se deberá buscar en el material, la ficha cuyo valor en la parte superior corresponde a este producto y finalmente el docente deberá indagar sobre la relación que existe entre los valores de la parte inferior de las tres fichas. El objetivo es establecer que el valor de la parte inferior de la tercera ficha corresponde a la suma de los valores de los números presentes en las partes inferiores dos las primeras fichas, a continuación se muestran las posibles parejas que se pueden proponer en la actividad:

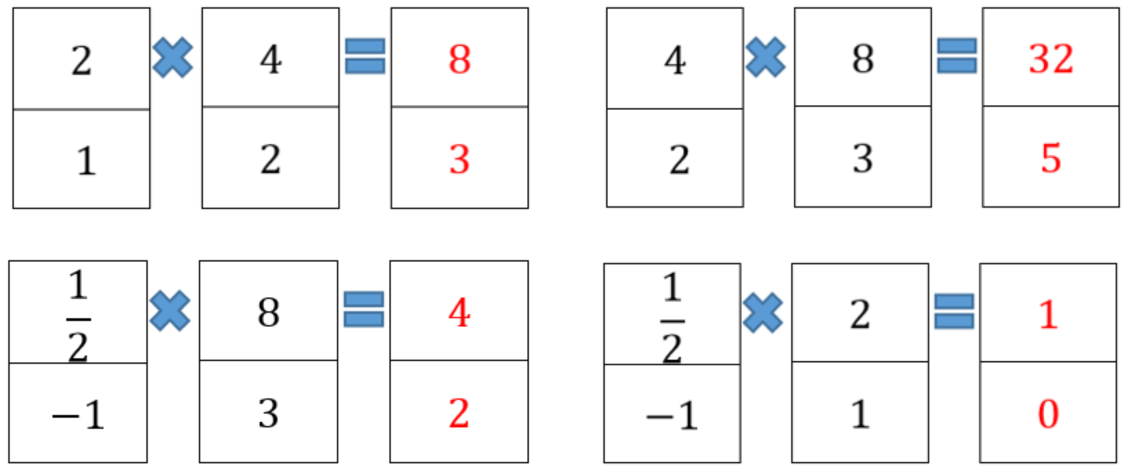


Figura 17. *Material: Pares de fichas para deducir la propiedad*

2. Cuando los estudiantes hayan comprobado que la relación se mantiene, es decir que la suma de los valores de la parte inferior de las dos primeras fichas corresponde al valor de la parte inferior de la tercera ficha, se deberá proponer realizar productos con valores que presentan mayor complejidad, para que así los estudiantes encuentren la ficha que se corresponde con el producto haciendo uso de la relación hallada inicialmente. A continuación se muestran los posibles pares de fichas que se pueden utilizar:

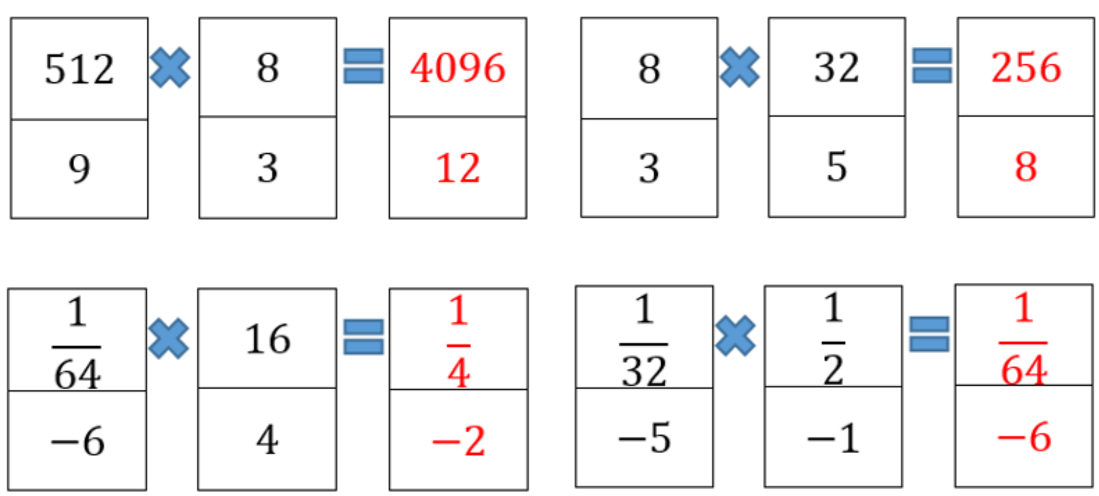


Figura 18. *Material: Pares de fichas para deducir la propiedad*

3. A partir de la exploración anterior y mediante la relación encontrada, se buscará generalizar la propiedad para logaritmo en base 2, para esto se hará uso de la segunda cara de las triplas de fichas trabajadas anteriormente. Se deberá indicar a los estudiantes trabajar con las triplas de fichas encontradas, pero en esta oportunidad el trabajo se realizará con la segunda cara, para esto es necesario hacer el ejercicio con cada tripla e ir estableciendo la relación. A continuación se muestra las triplas de fichas que se deben usar en esta parte de la actividad:

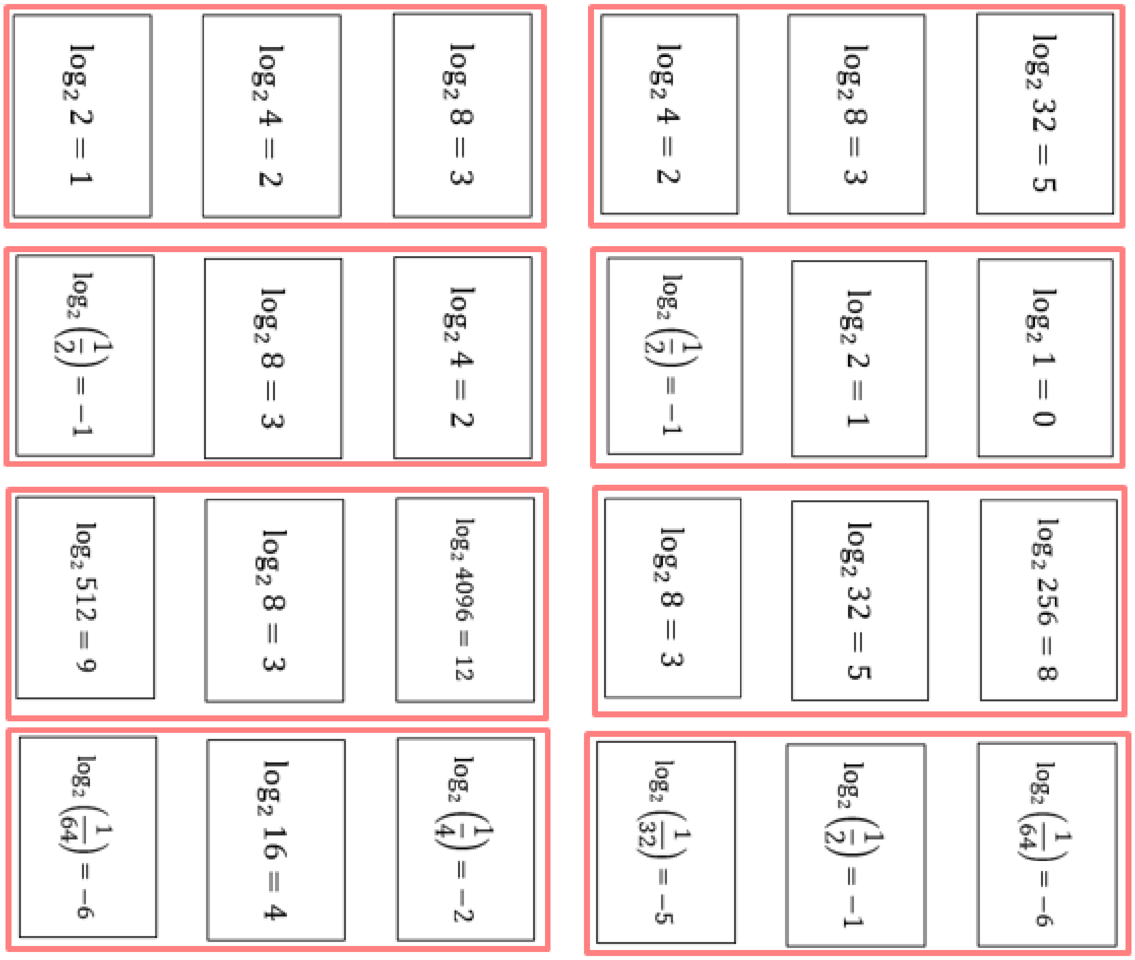


Figura 19. *Material: Fichas logaritmo en base 2 para deducir la propiedad*

Para guiar la actividad, a medida que se toman las triplas de fichas, se deben realizar las siguientes preguntas, que permitirán establecer la propiedad:

- Observe las tres fichas y diga ¿cuál es la relación entre los valores a los que se le calcula el logaritmo en base dos de las dos primeras fichas con el valor al que se le calcula el logaritmo en base dos de la tercera ficha?
- Observe las tres fichas y diga ¿Cuál es la relación entre los resultados de las dos primeras fichas y el resultado de la tercera ficha?

Se espera que los estudiantes en la primera pregunta, establezcan que el producto entre el primer valor y el segundo corresponde al tercero, ahora, en cuanto a la segunda pregunta, se espera que se establezca que la suma entre el primer valor y el segundo corresponde al tercero. Teniendo en cuenta esto, se hará la solicitud

a los estudiantes de plantear o proponer una propiedad para los logaritmos, con base en las exploraciones anteriores.
Aspectos a considerar • El docente debe recalcar a los estudiantes la importancia de expresar el resultado del producto como una fracción irreducible, para de este modo poder establecer el valor correspondiente. • Es importante que el docente extienda la propiedad a otras bases mediante algunos ejemplos numéricos.

4.4. Actividad 4 (Transformaciones numéricas): *Deducción de la propiedad del logaritmo de un cociente*

En la Tabla 16 se presenta la cuarta actividad, su objetivo, la descripción general, la secuencia propuesta y algunos aspectos a considerar dentro del desarrollo de la misma.

Tabla 16: Actividad 4

Objetivo Deducir la propiedad del logaritmo de un cociente, a partir de la exploración de las fichas construidas en las actividades anteriores.
Descripción general de la actividad En esta actividad se trabajará la propiedad del logaritmo de un cociente, en este sentido, se comenzará realizando una exploración numérica, basada en la regla de Arquímedes y las observaciones de Stifel, y finalmente se buscará llegar a una generalización de esta propiedad.
Secuencia a desarrollar **1.** Del material que se ha elaborado en las actividades anteriores, se tomaran algunos pares de fichas y se deberá solicitar a los estudiantes realizar el cociente de los valores de la parte superior, cada vez que se efectué la operación, se deberá buscar en el material, la ficha cuyo valor en la parte superior corresponde a este cociente y finalmente el docente deberá indagar sobre la relación que existe entre los valores de la parte inferior de las tres fichas. El objetivo es establecer que el valor de la parte inferior de la tercera ficha corresponde a la resta de los valores de las dos primeras fichas, a continuación, se muestran las posibles parejas que se pueden proponer en la actividad:

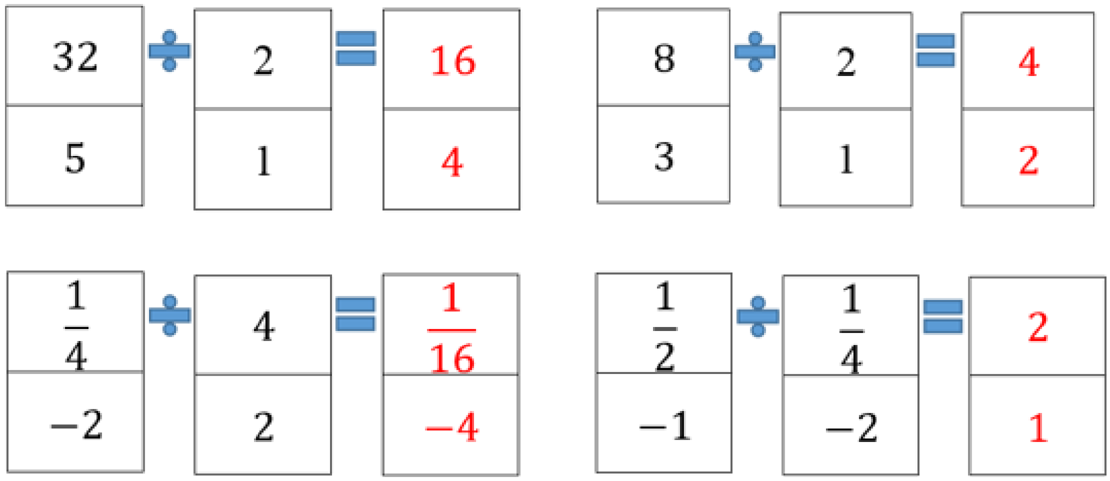


Figura 20. *Material: Pares de fichas para deducir la propiedad*

2. Cuando los estudiantes hayan comprobado que la relación se mantiene, es decir que la resta de los valores de la parte inferior de las dos primeras fichas corresponde al valor de la parte inferior de la tercera ficha, se deberá proponer realizar cocientes con valores que presentan mayor complejidad, para que así los estudiantes encuentren la ficha que se corresponde con el cociente. A continuación, se muestran los posibles pares de fichas que se pueden utilizar:

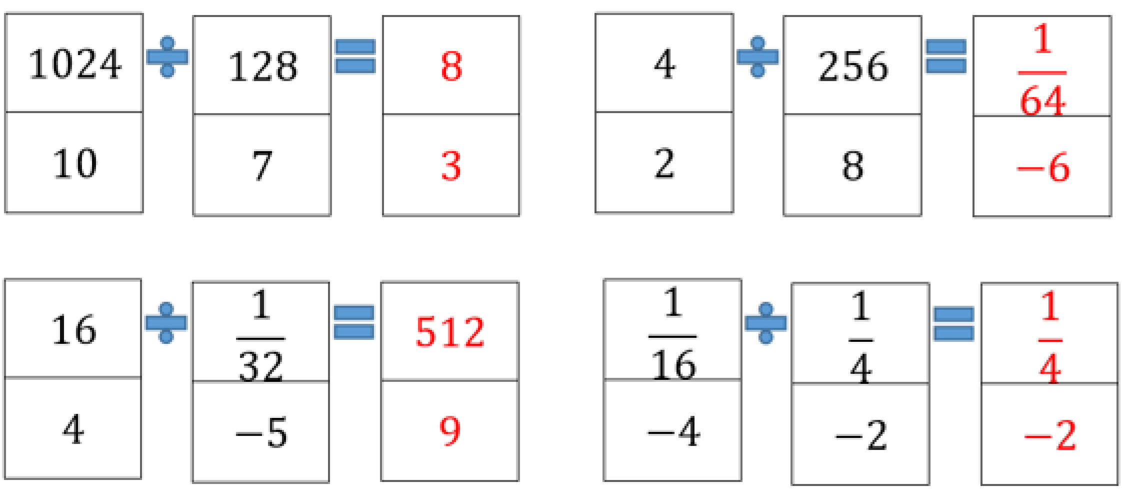


Figura 21. *Material: Pares de fichas para deducir la propiedad*

3. A partir de la exploración anterior y mediante la relación encontrada, se buscará generalizar la propiedad para logaritmo en base 2, para esto se hará uso de la segunda cara de las triplas de fichas trabajadas anteriormente. Se deberá indicar a los estudiantes trabajar con las triplas de fichas encontradas, pero en esta oportunidad el trabajo se realizará con la segunda cara, para esto es necesario hacer el ejercicio con cada tripla e ir estableciendo la relación. A continuación, se muestra las triplas de fichas que se deben usar en esta parte de la actividad:

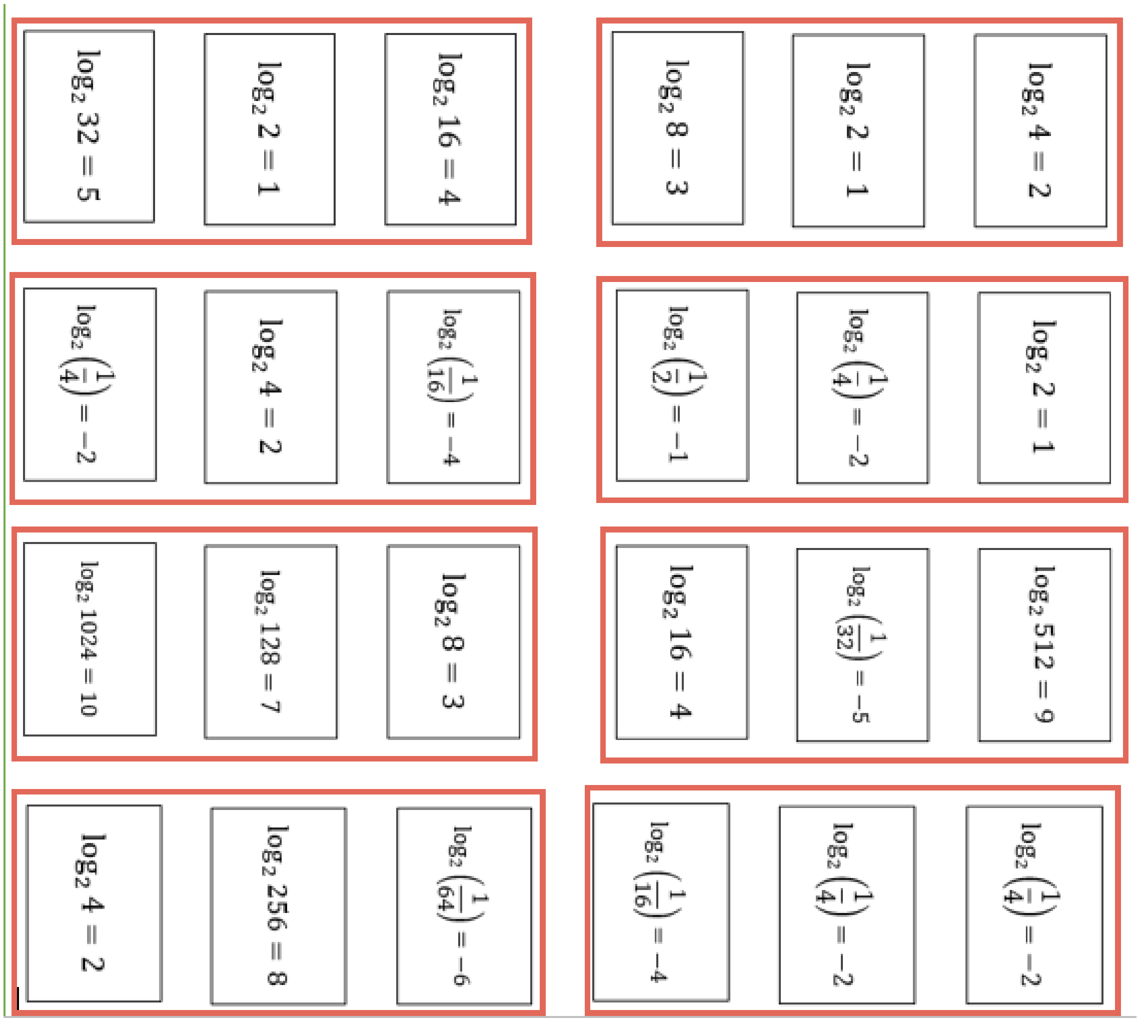


Figura 22. *Material: Fichas logaritmo en base 2 para deducir la propiedad*

Para guiar la actividad, a medida que se toman las triplas de fichas, se deben realizar las siguientes preguntas, que permitirán establecer la propiedad:

- Observe las tres fichas y diga ¿cuál es la relación entre los valores a los que se le calcula el logaritmo en base dos de las dos primeras fichas con el valor al que se le calcula el logaritmo en base 2 de la tercera ficha?
- Observe las tres fichas y diga ¿Cuál es la relación entre los resultados de las dos primeras fichas y el de la tercera ficha?

Se espera que los estudiantes en la primera pregunta, establezcan que el cociente entre el primer valor y el segundo corresponde al tercero, ahora, en cuanto a la segunda pregunta, se espera que se establezca que la resta entre el primer valor y el segundo corresponde al tercero. Teniendo en cuenta esto, se hará la solicitud a los estudiantes de plantear o proponer una propiedad para los logaritmos, con base en las exploraciones anteriores.

Aspectos a considerar

- El docente debe recalcar a los estudiantes la importancia de expresar el resultado del cociente como una fracción irreducible, para de este modo poder establecer el valor correspondiente.
- Es importante que el docente extienda la propiedad a otras bases mediante algunos ejemplos numéricos.
- A partir del material elaborado para logaritmo en base 2 y logaritmo en base 10, el docente tiene la posibilidad de trabajar otras propiedades, como lo son:

$$\log_a b^m = m \log_a b$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

4.5. Actividad 5 (Modelizadores): *Situaciones que se modelan con el uso de logaritmos*

En la Tabla 17 se presenta la quinta actividad, su objetivo, la descripción general, la secuencia propuesta y algunos aspectos a considerar dentro del desarrollo de la misma.

Tabla 17: Actividad 5

Objetivo

Observar el uso y aplicación de los logaritmos y de la función logarítmica, en la modelación de algunas situaciones problema.

Descripción general de la actividad

Mediante esta actividad, se plantearán a los estudiantes dos situaciones, las cuales están relacionadas con las progresiones aritméticas y geométricas, y se modelan mediante la función logarítmica. A medida que transcurre la actividad, se irán planteando estas situaciones acompañadas de algunas preguntas orientadoras, para que mediante las mismas los estudiantes hagan uso de las actividades anteriores y del concepto de logaritmo, buscando de esta forma dar solución a los interrogantes que se plantean en estas situaciones.

Secuencia a desarrollar

1. Para dar inicio a la actividad se empezará planteando a los estudiantes una situación problema, la cual se modela a partir del uso de logaritmos en base dos y específicamente a partir de la función logarítmica en

base dos. Dicha situación será presentada a partir de un ejemplo e ira acompañada de algunas preguntas orientadoras, a continuación se presenta esta situación:

❖ Se tiene una bacteria que se divide cada hora, de tal manera que: Después de una hora se tienen dos bacterias, después de dos horas estas dos bacterias se dividen obteniendo cuatro bacterias nuevas, después de tres horas estas cuatro bacterias se dividen obteniendo ocho bacterias nuevas, y así el proceso puede continuar de forma indefinida. En la siguiente tabla se muestra el proceso de reproducción de estas bacterias:

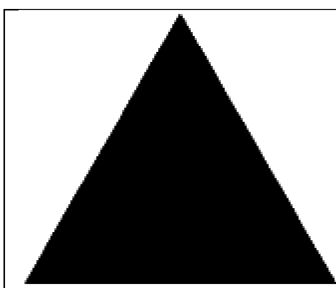
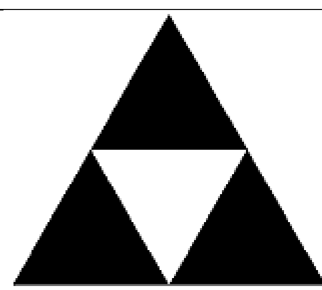
Cantidad de bacterias	1	2	4	8	16	32			
Tiempo en horas	0	1	2	3	4	5			

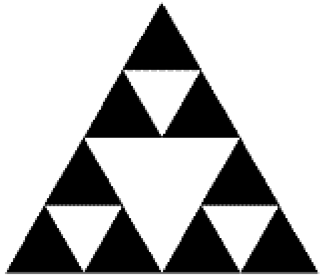
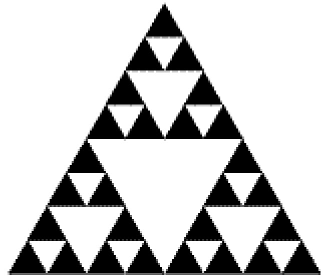
Planteada la situación, el docente a cargo puede proponer a los estudiantes las siguientes preguntas guía, de tal forma que ellos relacionen la situación con el cálculo de logaritmos en base dos:

- Completa la tabla dada ¿Cómo obtuviste los valores faltantes?
- ¿En qué hora se obtienen 2048 bacterias?
- ¿En qué hora se obtienen 32768 bacterias?
- ¿En qué hora se obtienen 536870912 bacterias?
- Determina una fórmula general para saber en qué instante se obtienen x bacterias.
- Comprueba si la fórmula dada es consistente con los valores dados en la tabla.

2. Seguidamente se propondrá a los estudiantes una nueva situación, pero en este caso esta será modelada mediante logaritmos en base 3 y la función logarítmica en base 3. La situación deberá ser presentada de la siguiente manera:

❖ A continuación se muestra una serie de figuras, las cuales son construidas en diferentes momentos, a partir de la primera figura. Observa la forma como se construye cada figura y la cantidad de triángulos negros obtenidos en cada momento.

	
Momento cero	Momento 1

	
Momento 2	Momento 3

Presentada la situación a los estudiantes, el docente deberá plantear a los estudiantes las siguientes preguntas, las cuales serán una guía para esta parte de la actividad:

- Dibuje la figura correspondiente al momento cuatro, ¿cuántos triángulos negros tiene esta nueva figura?

Momento 4

- ¿En qué momento se obtendrá una figura con 243 triángulos negros?
- ¿En qué momento se obtendrá una figura con 19683 triángulos negros?
- Determine una fórmula general para saber en qué momento se obtiene una figura con x triángulos negros.
- Comprueba si la fórmula dada es consistente con la cantidad de triángulos negros obtenidos en cada momento.

<u>Aspectos a considerar</u>

- Es posible que debido a factores de tiempo, se deba proporcionar al estudiante el momento cuatro construido, o hacer la solicitud que lo elabore sobre el mismo momento 3, esto queda a criterio del docente.

• Se puede dar la posibilidad de cuestionar a los estudiantes sobre la existencia de un número de triángulos que no sea potencia de 3, de tal modo que se tengan en cuenta otros valores numéricos para la variable.

4.6. Actividad 6 (Modelizadores): *Aproximación a la función logarítmica*

En la Tabla 18 se presenta la sexta actividad, su objetivo, la descripción general, la secuencia propuesta y algunos aspectos a considerar dentro del desarrollo de la misma.

Tabla 18: Actividad 6

Objetivo Realizar una aproximación a la función logarítmica, por medio de la exploración con el software GeoGebra.
Descripción general de la actividad En esta actividad se hará una exploración geométrica en el software educativo GeoGebra de tal forma que, por medio de la presentación de una aplicación elaborada en el mismo, los estudiantes relacionen los logaritmos con la función logarítmica, viendo que para cualquier valor positivo es posible determinar su respectivo logaritmo, sin importar la base.
Secuencia a desarrollar **1.** La actividad iniciará con la exploración de una aplicación elaborada en GeoGebra (Figura 23), por medio de la cual los estudiantes deberán dar respuesta a las siguientes preguntas: • ¿Qué relación se puede establecer entre las coordenadas en x de cada uno de los puntos? • ¿Qué relación se puede establecer entre las coordenadas en y de cada uno de los puntos? • ¿Qué relación existe entre la coordenada en y con respecto a la coordenada en x de cada punto?

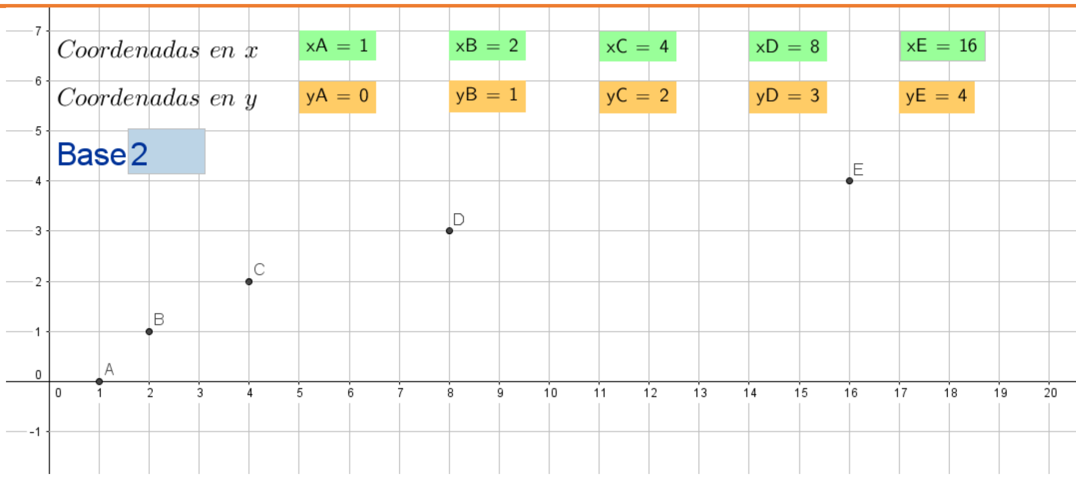


Figura 23. *Vista de la aplicación en GeoGebra actividad 6*

En la representación gráfica que se presente, se espera que los estudiantes determinen que las coordenadas en x de cada punto son potencias de 2 o que cada valor es obtenido multiplicando el anterior por 2, en cuanto a las coordenadas en y, se espera que se haga alusión a que cada valor es obtenido sumando al anterior 1. Finalmente, se espera que determinen que la covariación entre la coordenada en y con respecto a la coordenada en x de cada punto, corresponde al logaritmo en base 2, es decir que las coordenadas en y son los logaritmos en base 2 de las coordenadas en x :

$$\log_2 x = y$$

con $x, y \in \mathbb{N}$.

2. Encontrada esta relación, se pide a los estudiantes graficar con ayuda del software, puntos específicos de la forma:

$$(x, \log_2 x),$$

los cuales serán tomados estratégicamente, de tal forma que sean valores intermedios a los ya representados, para que así los estudiantes vean otros puntos de la curva logarítmica y comprendan que para cualquier número real positivo es posible determinar su logaritmo en base 2. Los valores dados serán los siguientes:

Coordenadas en $\boldsymbol{x}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$	π	6	$\frac{37}{3}$
Coordenadas en $\boldsymbol{y}$	$\log_2\left(\frac{1}{16}\right)$	$\log_2\left(\frac{1}{2}\right)$	$\log_2 \sqrt{2}$	$\log_2 \pi$	$\log_2 6$	$\log_2\left(\frac{37}{3}\right)$

3. Se les pedirá a los estudiantes realizar en su cuaderno la respectiva representación gráfica, apoyados en los puntos que hasta el momento han sido representados en el software. Por último, los estudiantes determinarán la expresión algebraica correspondiente a la gráfica y comprobarán mediante el uso del software si su representación gráfica es consistente con la proporcionada por el software.

4.	El ejercicio de exploración se realizará para base 2, 3 y 4.

Aspectos a considerar:

- Es importante que el docente enlace esta actividad con las realizadas anteriormente, recalcando la relación que hay entre las coordenadas de los puntos proporcionados por el software y los valores de las fichas elaboradas previamente.
- La aplicación que se elaboró en GeoGebra debe tener una explicación previa de algunas herramientas de la misma, por ejemplo: Cómo graficar puntos, cómo escribir la notación y calcular logaritmos dependiendo de la base, y cómo introducir algunos números irracionales. Adicionalmente, se debe ser cuidadoso en el hecho de que cualquier número irracional empleado en el software es en realidad una aproximación racional del mismo.

4.7. Actividad 7 (Modelizadores): *Hipérbola equilátera y su relación con la función logaritmo natural*

En la Tabla 19 se presenta la séptima actividad, su objetivo, la descripción general, la secuencia propuesta y algunos aspectos a considerar dentro del desarrollo de la misma.

Tabla 19: Actividad 7

Objetivo

Establecer una relación entre la hipérbola equilátera y la función logarítmica, atendiendo a las progresiones geométricas y aritméticas.

Descripción general de la actividad

En esta actividad se trabajará con la hipérbola equilátera y su respectiva integral, de tal manera que los estudiantes vean la relación que existe entre el área bajo la curva para determinados intervalos, y las progresiones geométricas y aritméticas. A partir de lo anterior, se retomará la función logarítmica desde estas progresiones buscando que se comprenda que cuando se relaciona una progresión geométrica y aritmética, la función logarítmica debe estar presente.

Secuencia a desarrollar

1. La actividad iniciará dando a conocer a los estudiantes la siguiente expresión que modela la hipérbola equilátera sujeta a una rotación de 45°:

$$y = \frac{1}{x}$$

Seguidamente se propone a los estudiantes las siguientes preguntas:

- Hallar el área bajo la curva en el intervalo $[1, a]$.

Se espera que los estudiantes interpreten el área bajo la curva para ese intervalo, como la siguiente integral definida:

$$\int_1^a \frac{1}{x}\, dx = \ln x \,|_1^a = \ln a$$

- Determinar el intervalo $[1, b]$, de forma que el área bajo la curva en dicho intervalo sea el doble del área hallada en el punto anterior.

Se espera que los estudiantes definan una nueva integral que cumpla con la siguiente característica:

$$\int_1^b \frac{1}{x}\, dx = 2\int_1^a \frac{1}{x}\, dx$$

- Determinar el intervalo $[1, c]$ de forma que el área bajo la curva en dicho intervalo sea el triple del área hallada en el primer punto.

E igualmente al ejercicio anterior, se espera que los estudiantes realicen el siguiente planteamiento:

$$\int_1^c \frac{1}{x}\, dx = 3\int_1^a \frac{1}{x}\, dx$$

- Determinar el intervalo $[1, d]$ de forma que el área bajo la curva en dicho intervalo sea el cuádruple de la primera área.

Para esta pregunta se espera que los estudiantes planteen la siguiente igualdad:

$$\int_1^d \frac{1}{x}\, dx = 4\int_1^a \frac{1}{x}\, dx$$

- Habiendo determinado los valores para b, c y d que satisfacen los enunciados ¿Qué relación se puede establecer a partir de la secuencia obtenida y el valor de cada una de las respectivas áreas?

En esta última pregunta se debe buscar que los estudiantes lleguen a la siguiente relación, la cual podrá ser organizada en una tabla, como se muestra a continuación:

a	a^2	a^3	a^4
1 vez el área	2 veces el área	3 veces el área	4 veces el área

- ¿Qué relación se puede establecer entre los términos de cada fila y como la clasificaría en términos de progresiones?

Esta pregunta es diseñada con el fin de involucrar las progresiones geométricas y aritméticas en la actividad.

2. A continuación se le presentará a los estudiantes una aplicación en GeoGebra (Figura 24), en la cual se muestra la gráfica de la hipérbola equilátera, pero además se encuentran las áreas bajo la curva para algunos valores ubicados en el eje *x*, los cuales coinciden con una progresión geométrica, que depende del valor de a. En este momento se hará la solicitud de variar la progresión geométrica y a partir de esto determinar si la relación encontrada inicialmente corresponde a la misma relación que se encuentra en la representación gráfica.

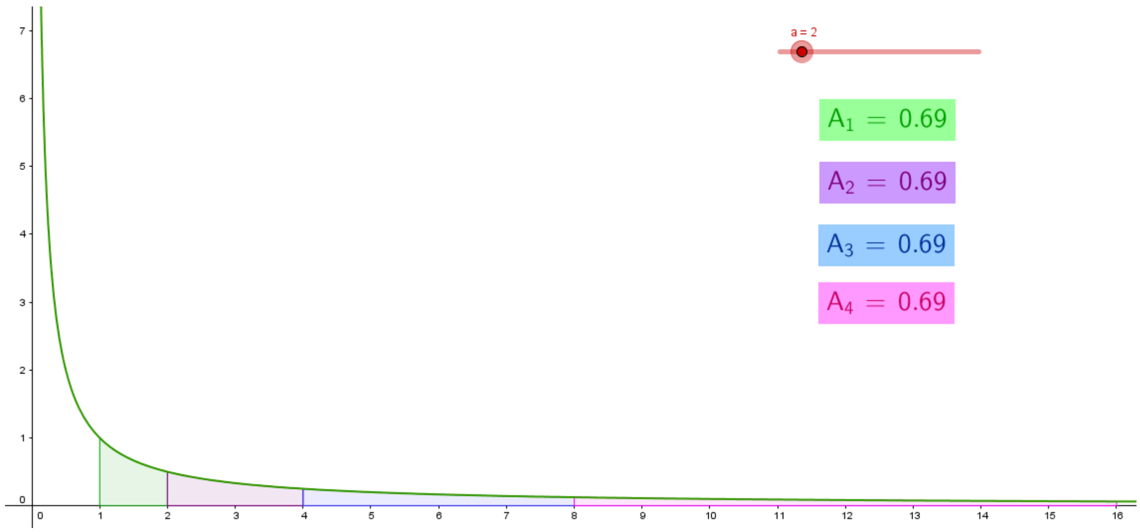


Figura 24. *Vista de la aplicación en GeoGebra actividad 7*

3. Sobre la aplicación presentada, se pedirá a los estudiantes graficar los siguientes puntos y proponer una función que se corresponda con dichos puntos:

$$(a, A_1)$$
$$(a^2, 2A_1)$$
$$(a^3, 3A_1)$$
$$(a^4, 4A_1)$$

4. Finalmente, a partir del software, se pedirá a los estudiantes graficar la función área (Figura 22), para un intervalo entre 1 y *t*, de tal forma que comprueben si la función propuesta es consistente con la función área, y se hará la solicitud de proponer una expresión para la función área.

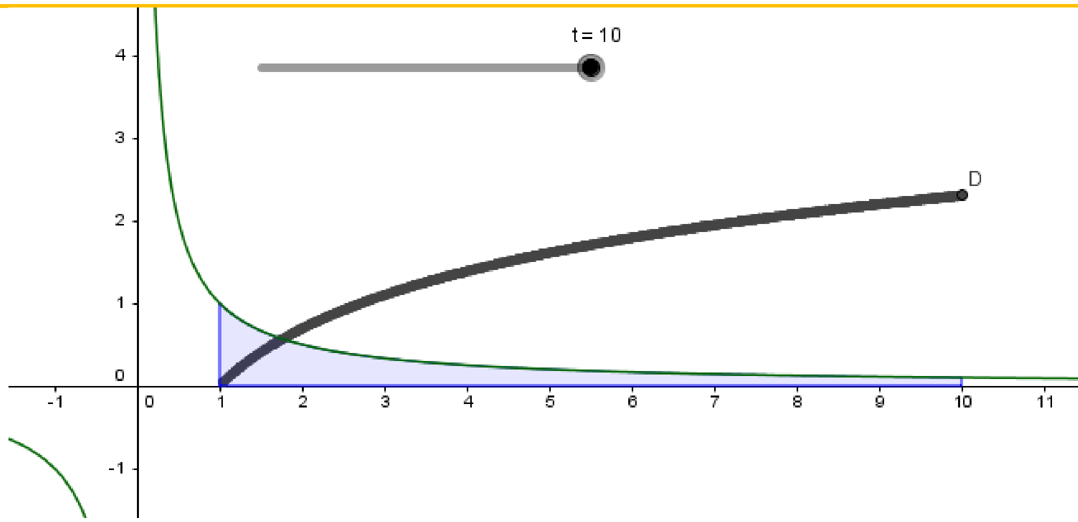


Figura 25. *Gráfica función área de la Hipérbola Equilátera*

Aspectos a considerar: • Cuando los estudiantes hallan determinado los valores de b, c y d el docente podrá socializar esta actividad, para constatar que todos los estudiantes realizaron correctamente la actividad. • En el momento de establecer la relación entre las progresiones geométricas y aritméticas con los logaritmos, el docente podrá apoyarse en algunos ejemplos particulares, como los propuestos en las fichas para logaritmo en base 2 y logaritmo en base 10. Esto para mostrar, que esta relación está ligada a todas las funciones logarítmicas.

4.8. Actividad 8 (Objetos teóricos)

En las Tablas 20 y 21 se presenta la octava actividad la cual se divide en dos partes; y viene acompañada de su objetivo, la descripción general, la secuencia propuesta y algunos aspectos a considerar dentro del desarrollo de la misma.

Tabla 20: Actividad 8 parte a

Objetivo Identificar el comportamiento de la razón de cambio de la función logarítmica.
Descripción general de la actividad A través de un aplicativo en GeoGebra se busca que los estudiantes identifiquen algunas propiedades de la función logaritmo a partir de explorar la razón de cambio instantánea en diferentes puntos de un intervalo

de la función. La información que registrarán los estudiantes corresponde a la coordenada x del punto y la razón de cambio, vista esta como la pendiente m de la recta tangente en ese punto; al comparar los datos obtenidos para el logaritmo de una determinada base se espera que los estudiantes deduzcan la siguiente relación:

$$m \propto \frac{1}{x}$$

Alrededor de este resultado, se plantean preguntas con el objetivo de que los estudiantes identifiquen que la función logaritmo es siempre creciente o siempre decreciente dependiendo de si la base es mayor o menor a 1. Adicionalmente se puede describir la razón de cambio como positiva (o negativa dependiendo del caso) pero que su valor absoluto siempre es decreciente, es decir que la función logaritmo disminuye su tasa de crecimiento (o decrecimiento) pero esta nunca es cero.

Secuencia a desarrollar

Se les presenta a los estudiantes un aplicativo en GeoGebra (Figura 26) en el cual se encuentra la gráfica de la función logaritmo en una base a, la cual puede ser modificada con un deslizador. El punto P pertenece a la gráfica de la función logaritmo, sobre este punto se puede usar el arrastre, además anclado a este se encuentra un triángulo rectángulo cuya hipotenusa está contenida en la recta tangente a la gráfica y que contiene a P, el lado del triángulo que es paralelo al eje x mide 1, esto con el fin de que el lado opuesto al ángulo que forma con la horizontal indique directamente la medida de la pendiente como se muestra en la siguiente figura

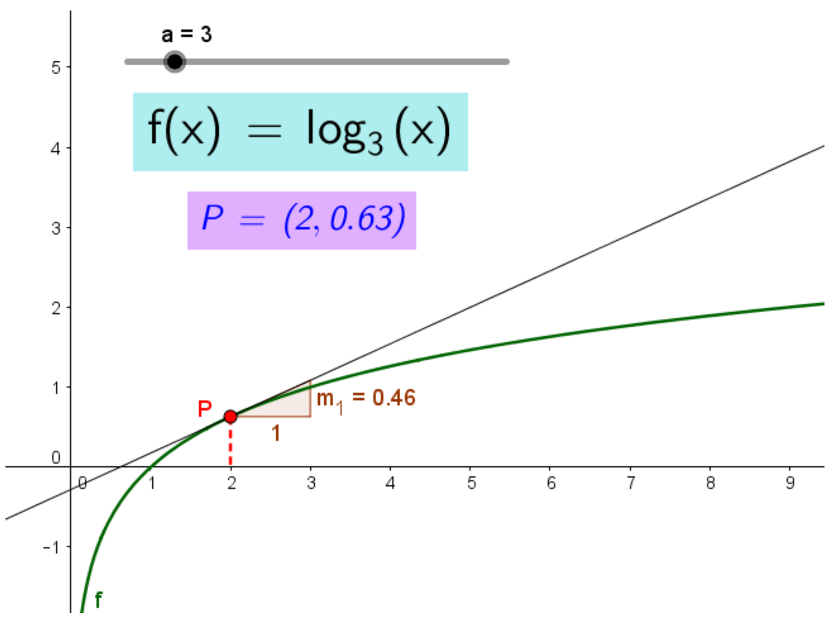


Figura 26. *Vista de la aplicación en GeoGebra actividad 8 parte a*

Después de explicar al estudiante que la pendiente m es la razón de cambio instantánea en el punto P, se dan las siguientes indicaciones.

1. Sin cambiar el deslizador a, use el arrastre sobre el punto P y complete la siguiente tabla (ejemplo para $a = 3$):

Coordenada x de P	2	3	4	5	6	7	8	9
Valor (aproximado) de la razón de cambio	0.46	0.3	0.23	0.18	0.15	0.13	0.11	0.1

2. Después de haber completado la tabla de datos se proponen las siguientes preguntas:

a) Suponga que solamente conoce la razón de cambio de cambio para $x = 3$ y $x = 2$. A partir de esta información responda las siguientes preguntas.

i. ¿Cómo obtener la razón de cambio cuando la coordenada x de P es 4?

Se espera que los estudiantes dividan el valor de la razón de cambio para $x = 2$ entre dos.

ii. ¿Cómo obtener la razón de cambio cuando la coordenada x de P es 8?

Se espera que los estudiantes dividan el valor de la razón de cambio para $x = 2$ entre cuatro.

iii. ¿Cómo obtener la razón de cambio cuando la coordenada x de P es 6?

Se espera que los estudiantes dividan el valor de la razón de cambio para $x = 3$ entre dos

iv. ¿Cómo obtener la razón de cambio cuando la coordenada x de P es 9?

Se espera que los estudiantes dividan el valor de la razón de cambio para $x = 3$ entre tres.

b) Suponga ahora que solamente conoce la razón de cambio para $x = 9$ y $x = 8$. A partir de esta información:

i. ¿Cómo obtener la razón de cambio para $x = 3$?

Se espera que los estudiantes multipliquen el valor de la razón de cambio para $x = 9$ por tres.

ii. ¿Cómo obtener la razón de cambio para $x = 4$?

Se espera que los estudiantes multipliquen el valor de la razón de cambio para $x = 8$ por dos.

iii. ¿Cómo obtener la razón de cambio para $x = 2$?

Se espera que los estudiantes multipliquen el valor de la razón de cambio para $x = 8$ por cuatro.

c) ¿Cómo puede hallar la razón de cambio para $x = 1$? ¿Hay una única forma?

Se espera que los estudiantes relacionen que para hallar la razón de cambio para $x = 1$ se debe multiplicar por la coordenada.

d) Teniendo en cuenta las preguntas anteriores, si se desea conocer la razón de cambio para el punto P cuando su coordenada x es 11, qué información necesita y qué procedimiento haría para calcularla.

El estudiante debería conocer la razón de cambio de $x = 1$ y se puede obtener la razón de cambio cuando $x = 11$ dividiendo por 11.

e) Suponga que la razón de cambio cuando $x = 1$ es k, proponga una expresión para calcular la razón de cambio m para cualquier coordenada x del dominio de la función logaritmo en términos de k.

$$m = \frac{k}{x}$$

f) ¿para algún valor de x la razón de cambio instantánea es negativa? Explique por qué sí o por qué no.

En esta pregunta el estudiante debe realizar un análisis que relaciona la expresión anterior, en la cual la razón de cambio disminuye a medida que aumenta x, pero nunca se hace 0 por lo cual es positiva.

g) ¿para algún valor de x la razón de cambio instantánea es cero? Explique por qué sí o por qué no.

En este caso la razón de cambio nunca se hace cero.

h) ¿Cómo cambia la función logaritmo a medida que la coordenada x aumenta? ¿Se cumple siempre esta relación? Justifique su respuesta usando los resultados anteriores.

Se espera que enuncien que la razón de cambio disminuye a medida que x aumenta y que esto se cumple en todo el dominio de la función.

Cambiando el valor del deslizador, responda nuevamente las preguntas a) b) y c) y e). ¿Qué puede concluir de sus resultados en relación con la función logaritmo en diferentes bases?

De manera similar a las preguntas anteriores se espera que se cumpla dicha relación, todo esto con el objetivo que la razón de cambio es inversamente proporcional a x.

Aspectos a considerar:

- Se debe tener en cuenta que los estudiantes deben tener como conceptos previos la razón de cambio y de proporcionalidad inversa para poder establecer las relaciones.
- De otra parte se debe enfatizar en que el valor suministrado por el software para la pendiente en un punto realmente puede ser solo una excelente aproximación al valor exacto de la misma. Si el docente lo considera podría ilustrar esto con la opción de redondeo.
- Por razones de la exactitud, también se puede crear un aplicativo donde el punto $(x, log_a\ x)$ sea tal que sólo pueda ser ubicado en aquellos puntos cuya coordenada en x corresponda a potencias enteras de la base. En el presente trabajo se sacrifica este aspecto de la exactitud por el de comprensión.

Tabla 21: Actividad 8 parte b

<u>Objetivo</u> Identificar la base natural a partir de la razón de cambio instantánea de la función logaritmo en $x = 1$ para distintas bases.
<u>Descripción general de la actividad</u> Se asume que en la primera parte de la actividad los estudiantes han deducido que la relación entre la razón de cambio de la función logarítmica y el valor de la coordenada x es inversamente proporcional, además que la constante de proporcionalidad k es el valor de la pendiente cuanto $x = 1$. Después se presenta otro aplicativo en GeoGebra en el que la exploración lleva a identificar la covariación que existe entre la pendiente en $x = 1$ y la correspondiente base del logaritmo; las preguntas proponen un camino para determinar que esta covaración también es una función logarítmica cuya base no se conoce pero que se denotará como base e, es decir $\log_e x$. Finalmente se determina que la constante de proporcionalidad para calcular la razón de cambio de una función logaritmo en base a es $k = \log_e a$. A comparación de la parte A de la actividad, el profesor asume un mayor protagonismo al introducir el logaritmo natural.
<u>Secuencia a desarrollar</u> En el aplicativo se presenta nuevamente la gráfica de la función logaritmo en base a siendo este un deslizador que toma valores enteros de 2 a 32, en este caso la razón de cambio solo se muestra para el punto cuando $x = 1$; adicionalmente se muestra un punto Q en una segunda vista gráfica cuyas coordenadas son $(a, 1/m)$, es decir que la coordenada x es la base del logaritmo y la coordenada y es el inverso de la pendiente, esto es $1/k$, (Figura 27), se activa el rastro del punto Q.

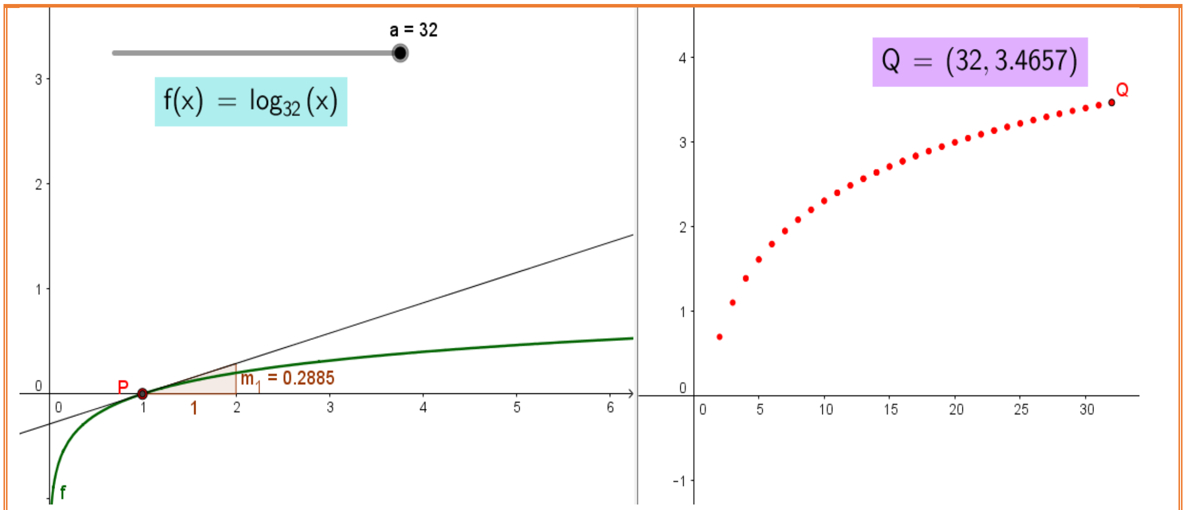


Figura 27.*Vista de la aplicación en GeoGebra actividad 8 parte b*

El profesor explica las características del aplicativo y el significado de la coordenada y del punto Q para que los estudiantes usen el deslizador e identifiquen los datos que se solicitan.

1) A partir de las coordenadas del punto Q, complete la siguiente tabla (los valores en paréntesis son espacios en blanco para los estudiantes):

Base del logaritmo o coordenada x	2	(4)	8	16	32
Coordenada y	(0.6931)	(1.3863)	(2.0794)	(2.7726)	(3.4657)

2) Con la información de las tablas responda las siguientes preguntas:
   a. ¿Qué relación encuentra entre las coordenadas x de la tabla 1?
   b. ¿Qué relación encuentra entre las coordenadas y de la tabla 1?
   c. ¿Cómo calcular la coordenada y si la coordenada x del punto Q es 64?

Anotación: con estas preguntas se busca que los estudiantes centren la atención en que los datos propuestos siguen una progresión geométrica para el caso de las coordenadas x y una progresión aritmética para el caso de las coordenadas y. Se eligen 4 cifras decimales con el fin de que sea más fácil para los estudiantes identificar la progresión aritmética, pero el profesor debe intervenir y aclarar que el software hace aproximaciones, esto es que el número mostrado en pantalla no es del todo correcto y que por tanto la progresión sí se cumple aunque parezca que sea de manera aproximada.

3) Complete la siguiente tabla:

Base del logaritmo o coordenada x	3	9	27	81	243
Coordenada y	(1.0986)	(2.1972)	(3.2958)	(4.3944)	(5.4930)

4) Responda las siguientes preguntas

a. ¿Qué relación existe entre las coordenadas x?

Se espera que identifiquen que están en progresión geométrica de razón 2.

b. ¿Qué relación existe entre las coordenadas y?

Se espera que identifiquen que están en progresión aritmética. Es posible que incluyan que la diferencia común es la coordenada y para $x = 2$.

5) A partir de la regularidad encontrada en las tablas 1 y 2 y tomando en cuenta el rastro que deja el punto Q al cambiar el valor de a ¿Cuál función modela la relación que tienen las coordenadas x con las coordenadas y del punto Q?

Por el trabajo realizado en actividades previas, se espera que identifiquen que los datos tienen un comportamiento logarítmico, pero sin decir a cuál base corresponde.

Anotación: se usan las tablas de datos y el rastro para que los estudiantes tengan dos referencias de diferente índole que los lleve a identificar la función logaritmo, aunque no se conozca la base. En este punto, a partir de la idea de la función logaritmo de una base que no se conoce, el profesor hace una conexión de las conclusiones y resultados de los estudiantes con la función logaritmo natural, de tal manera que la conclusión sea que $y = \log_e x = \ln x$. Resaltando que e es la base de esta función logarítmica.

6) Recordando que k es la razón de cambio instantánea en $x = 1$ de la función $\log_a x$ ¿Cuál es el valor de $1/k$ en términos de la base a?

Respuesta esperada: $1/k = \ln a$.

7) De manera general, exprese la razón de cambio instantánea m de la función $\log_a x$ en términos de la base a.

Respuesta esperada: $m = 1/\ln a\, x$

<u>Aspectos a considerar:</u>

Uno de los principales aspectos a considerar es que el software que se está manejando hace aproximaciones de números irracionales y que por tanto la diferencia común en la progresión aritmética no es siempre la misma, pero sí es muy cercana.

5. CONCLUSIONES

En esta sección, se presentan las conclusiones obtenidas con el desarrollo del trabajo, las cuales surgen a partir de aquellos aspectos que fundamentaron el marco de referencia que se tuvo en cuenta para la elaboración del mismo, y de la propuesta de actividades diseñada. En este sentido, las conclusiones han sido divididas en dos categorías, las cuales se describen a continuación.

5.1. Conclusiones con respecto a la estructura global del trabajo y marco de referencia

Para la elaboración del trabajo, se partió de algunas características propias del enfoque socioepistemológico, el cual se constituyó como la base sobre la cual se fundamentó el mismo, teniendo en cuenta esto, se concluye que:

- Es importante reconocer la naturaleza de cada función y particularizar la enseñanza de las mismas, esto atendiendo a cada una de sus características, pues en el caso de la función logarítmica se evidenció que su forma de covariación es diferente y es esencial su comprensión para la modelación de diversos fenómenos de la vida real.
- Reconocer y documentar aquellos aspectos históricos, sociales y culturales que dieron origen a la función logarítmica y a cualquier objeto matemático en general; da la posibilidad de plantear otro tipo de propuestas, las cuales buscan reestructurar la forma usual se enseñan las matemáticas en la actualidad.
- El análisis de textos de matemáticas y de matemáticas escolares, permitió evidenciar que el tratamiento que se le da a la función logarítmica y a los logaritmos es limitado y que en general solo se proporciona una definición formal, algunas propiedades, ejemplos de notación y en algunos textos se ejemplifican aplicaciones pero sin dar mayor relevancia a estas.
- El desarrollo de este trabajo permitió un aprendizaje tanto didáctico como matemático de la función logarítmica, en donde se evidenciaron aspectos de la función logarítmica que hasta hace poco nos eran desconocidos. particularmente, su evolución histórica nos permitió identificar aspectos útiles, que pueden cambiar la forma como se trabajan estos conceptos en el aula.

5.2. Conclusiones con respecto a la propuesta de actividades

En cuanto al diseño de la secuencia didáctica, con la cual se busca plantear otras alternativas para la enseñanza de los logaritmos y de la función logarítmica, se concluye que:

- El paso del trabajo con las progresiones geométricas y aritméticas, hacia incluir otros valores numéricos a los cuales también se les quería calcular el logaritmo, es decir el intentar dar un paso a la continuidad, siempre se tornó como una dificultad para la elaboración de la secuencia de actividades.
- La aplicación de algunas actividades, previamente diseñadas, permitió modificar y reestructurar la propuesta de una forma más adecuada, de tal modo que no solo se hizo cambios en las actividades sino que se dio la posibilidad de realizar una serie de sugerencias para sortear algunas situaciones que se pueden presentar en el aula.
- Trabajar desde el desarrollo del razonamiento covariacional, atendiendo a la covariación entre una progresión geométrica y una aritmética, permite hacer una aproximación a los logaritmos que facilita la compresión de los mismos.

6. BIBLIOGRAFÍA

Abrate, R. y Pochulo, M. (2007). Ideas para la clase de logaritmos. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*(10), 77-94.

Apostol, T. (2001). *Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal* (Segunda ed., Vol. 1). México: Reverté S. A.

Bocanegra, I., Galeano, O. y Huérfano, H. (2013). *Diseño de una herramienta didáctica para la formación del profesor de matemáticas utilizando elementos históricos de lo logarítmico y lo exponencial.* Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.

Cantoral, R. (2001). Sobre la artículación del discurso matemático escolar y sus efectos didácticos. (G. Bertía, Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 64-75.

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* Barcelona: Gedisa.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). La sensibilité á la contradiction: Logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 24*(2), 137-168.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D. y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, matemática y realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7*(3), 91-116.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA, 8*(2), 121-156.

Carrasco, E. (2004). Visualizando lo que varía. (L. Díaz, Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 17*, 348-354.

Carrasco, E. (2005). *Visualizando lo que varia. Interpretación y construcción de gráficas de variación en el tiempo.* Instituto Politécnico Nacional, México D. F.

Cervera, J. (2004). John Napier (1550-1617) y su libro de Rabdología. *Historia de las Ciencias y de las Técnicas, 1*, 347-356.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una espistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(2), 103-128.

Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología.* Instituto Politécnico Nacional, México D. F.

Del Castillo, A. y Montiel, G. (2007). El Concepto de Función en un Ambiente Geométrico Dinámico Bajo el Enfoque Covariacional. *Memoria de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa - Red Cimates*, 568-580.

Domínguez, M., Forner, M. y Forner, Ó. (2012). *La construcción de los logaritmos: Historia y proyecto didáctico.* España: Publicacions de la Universitat Jaume.

Farfán, R. y Ferrari, M. (2002). Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo. (C. Crespo, Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 15*(1), 62-67.

Ferrari, M. (2008). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo.* CINVESTAV-IPN, México. Obtenido de http://www.clame.org.mx/documentos/tesis/rferrari.pdf

Ferrari, M. y Farfán, R. (2008). Un estudio socioepistemológico de lo logaritmico: La construcción de una red de modelos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(3), 309-354.

Ferrari, M. y Farfán, R. (2010). Una socioepistemología de lo logarítmico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4), 53-68.

Gacharná, O. (2012). *Algunas consideraciones didácticas sobre el concepto de logaritmo y de función logarítmica y sus posibilidades en la educación básica y media.* Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

González, M. y Vargas, J. (2007). Segmentos de la historia: La función logarítmica. *Educación e Historia, 15*(2), 129-144.

Hecklein, M., Engler, A., Vrancken, S. y Müller, D. (2011). Variables, funciones y cambios. Exploración de las nociones que manejan alumnos de una escuela secundaria. *SOAREM*, 23-39.

Hernández, M. y Ferrari , M. (2005). Los logaritmos a partir de la covariación de sucesiones. (J. Lezama, M. Sánchez, y J. Molina, Edits.) *Acta Latinoamericana de Matmática Educativa, 18*, 531-536.

Larson, R. y Edwards, B. (2010). *Cálculo 1 de una variable* (Novena ed.). México: MC Graw Hill.

Lehmann, C. (1989). *Geometría analítica.* México: Limusa.

López, J. y Sosa, L. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato. (P. Lestón, Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 21*, 308-318.

López, R. y Ferrari, M. (2005). La función logaritmo bajo la perspectiva de la construcción dada por Agnesi (1748). (J. Lezama, M. Sánchez, y J. Molina, Edits.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 18*, 551-557.

MEN. (2004). *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales: Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia.* Bogotá, Colombia: Magisterio.

MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas.* Bogotá: Magisterio.

Merzbach, U. y Boyer, C. (1991). *A history of mathematics* (tercera ed.). New Jersey: John Wiley y Sons.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica.* CICATA-IPN, Mexico.

Montiel, G. y Buendía, G. (2011). Propuesta metodológica para la investigación Socioepistemológica. *Memoria de la XIV Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, 443-454.

Pierce, R. (1977). A Brief History of Logaritms. *The Two Year College Mathematics Journal, 8*(1), 22-26.

Quitanilla, F. (1989). *Matemáticas 3.* Barcelona: Editorial Marcombo.

Spivak, M. (1996). *Cálculo infinitesimal* (Segunda ed.). México: Reverte S. A.

Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2007). *Precálculo, matemáticas para el cálculo* (Quinta ed.). México: CENGAGE Learning.

Tall, D. (2009). Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus. *ZDM Mathematics Education*, *41*(4), 481-492.

Tapia, F. (2003). Historia de los logaritmos. *Apuntes de Historia de las Matemáticas, 2*(2), 5-22.

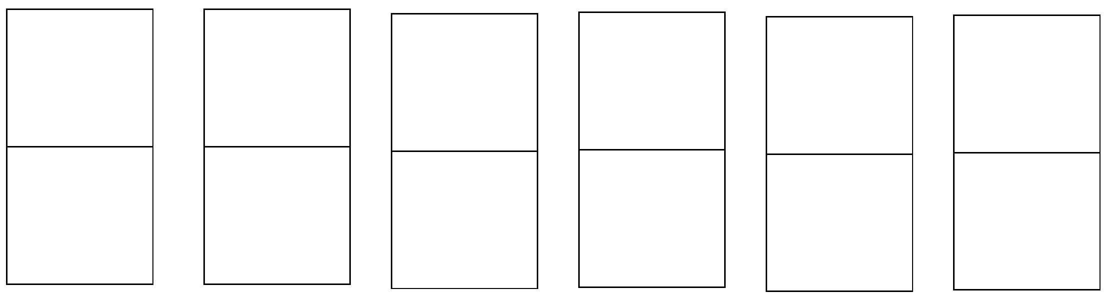
Vasco, C. (2003). *El pensamiento variacional y la modelación matemática.* Universidad del Valle, Colombia.

Villa-Ochoa, J. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *TED*(31), 9-25.

7. ANEXOS

7.1. Anexo 1: Taller actividad 1

1. Usando las fichas proporcionadas por el docente, en la siguiente plantilla ordénalas como tu creas conveniente, y a continuación responde las siguientes preguntas:



a) ¿Cómo ordenaste las fichas? ¿Tuviste en cuenta alguna estrategia para ordenarlas?

____

____

____

____

2. A continuación, se presentan las fichas con un orden preestablecido, debes observar la forma como están ordenadas.

			2	4	8	16	32	64			
			1	2	3	4	5	6			

a) Ten en cuenta únicamente los números de la parte superior de cada ficha y responde las siguientes preguntas:

- ¿Cómo a partir del primer número obtengo el segundo número?

  ____

- ¿Cómo a partir del segundo número obtengo el tercero?

  ____

- ¿Cómo a partir del tercer número obtengo el cuarto?

- ¿Qué relación existe entre dos números consecutivos de la parte superior?

b) Ten en cuenta únicamente los números de la parte inferior de cada ficha y responde las siguientes preguntas:

- ¿Cómo a partir del primer número obtengo el segundo número?

- ¿Cómo a partir del segundo número obtengo el tercero?

- ¿Cómo a partir del tercer número obtengo el cuarto?

- ¿Qué relación existe entre dos números consecutivos de la parte inferior?

c) A partir de la relación establecida completa las fichas que están en blanco y constrúyelas con el material proporcionado por el docente.

3. A continuación, se presentan fichas que solo tiene un valor numérico en una de las casillas:

$\frac{1}{16}$		1024		$\frac{1}{32}$
	-6		12	

¿Cómo puedes obtener el otro valor a partir del valor dado?:

a) Si el valor que necesito hallar debe ser ubicado en la parte superior.

____

____

____

b) Si el valor que necesito hallar debe ser ubicado en la parte inferior.

____

____

____

4. Completa las fichas usando las relaciones anteriores.

7.2. Anexo 2: Taller actividad 2

1. Responde las siguientes preguntas:

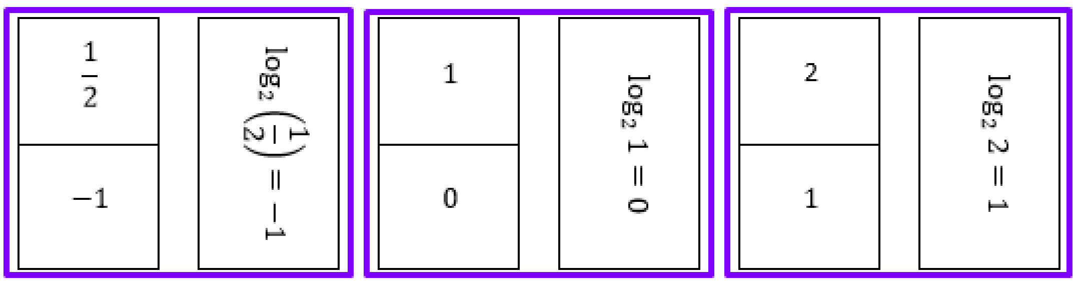
- ¿A qué exponente debo elevar el 2 para obtener como resultado 2? ________________
- ¿A qué exponente debo elevar el 2 para obtener como resultado 4? ________________
- ¿A qué exponente debo elevar el 2 para obtener como resultado 8? ________________
- ¿A qué exponente debo elevar el 2 para obtener como resultado 16? ________________
- ¿A qué exponente debo elevar el 2 para obtener como resultado 32? ________________

2. Teniendo en cuenta los valores hallados anteriormente y las fichas dadas en la primera actividad ¿cuál es la relación que existe entre cada uno de los términos de la parte superior y los respectivos términos de la parte inferior de cada ficha? Recuerda la que las fichas dadas inicialmente son las siguientes:

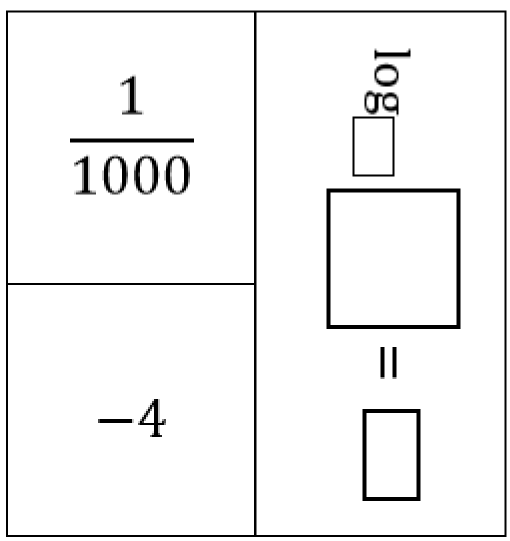
2	4	8	16	32	64
1	2	3	4	5	6

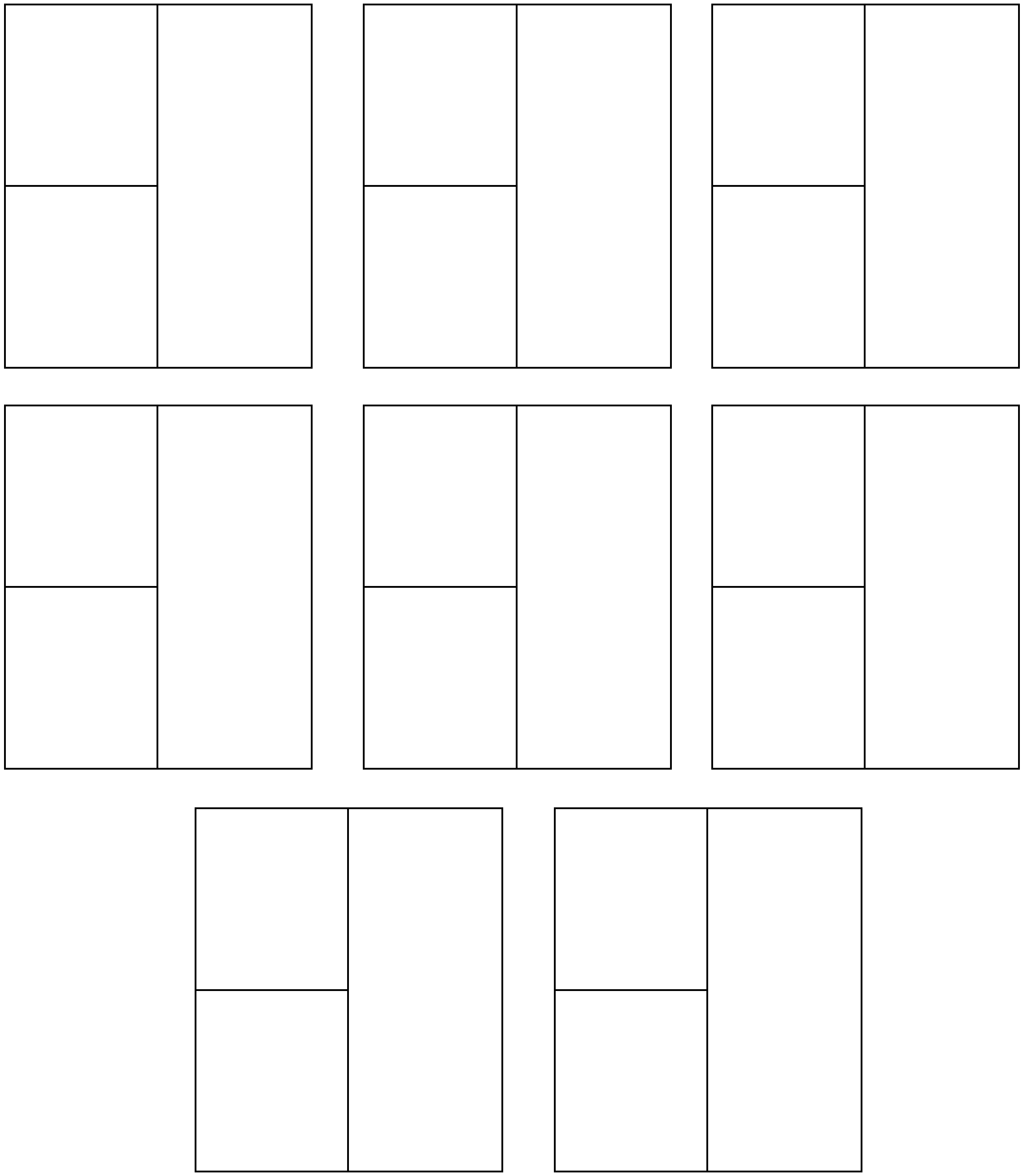
A continuación, tu profesor te explicará la definición de logaritmo y te dará a conocer algunos ejemplos de notación.

3. Reescribe todas las fichas en la parte de atrás haciendo uso de la notación de logaritmo, observa los siguientes ejemplos :



4. Construye ocho fichas para logaritmo en base 10, continuando desde la ficha que se muestra a continuación:





Usando tu calculadora comprueba los resultados que ubicaste en las fichas anteriores, tu profesor te enseñara como usarla de ser necesario.

5. De ser posible determina los valores de la parte inferior de las siguientes fichas:

$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{10}$	3	π	5

Si es posible completar las fichas explica el procedimiento que utilizaste, sino lo es explica por qué no es posible.

____

____

____

____

7.3. Anexo 3: Taller actividad 3

4. Realiza el producto de los valores de la parte superior de cada ficha, cada vez que efectúes la operación, deberás buscar en el material la ficha cuyo valor en la parte superior corresponde a este producto, y completar la ficha en blanco.

2	×	4	=	
1		2		

4	×	8	=	
2		3		

$\frac{1}{2}$	×	8	=	
-1		3		

$\frac{1}{2}$	×	2	=	
-1		1		

¿Qué relación existe entre los valores de la parte inferior de cada tripla de fichas?

____

____

____

5. Teniendo en cuenta la relación anterior y sin realizar el producto de los valores de la parte superior, deberás buscar en el material la ficha cuyo valor en la parte superior corresponde a este producto.

$$\begin{array}{|c|}\hline 512\\\hline 9\\\hline\end{array} \times \begin{array}{|c|}\hline 8\\\hline 3\\\hline\end{array} = \begin{array}{|c|}\hline \quad\\\hline \quad\\\hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline 8\\\hline 3\\\hline\end{array} \times \begin{array}{|c|}\hline 32\\\hline 5\\\hline\end{array} = \begin{array}{|c|}\hline \quad\\\hline \quad\\\hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \frac{1}{64}\\\hline -6\\\hline\end{array} \times \begin{array}{|c|}\hline 16\\\hline 4\\\hline\end{array} = \begin{array}{|c|}\hline \quad\\\hline \quad\\\hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline \frac{1}{32}\\\hline -5\\\hline\end{array} \times \begin{array}{|c|}\hline \frac{1}{2}\\\hline -1\\\hline\end{array} = \begin{array}{|c|}\hline \quad\\\hline \quad\\\hline\end{array}$$

¿La relación encontrada anteriormente se sigue cumpliendo para los números de la parte inferior de las fichas?

6. A continuación se presentan las triplas de fichas trabajadas anteriormente, pero en esta oportunidad estarán reescritas con la definición de logaritmo, observa cada tripla y responde las siguientes preguntas:

$\log_2 2 = 1$	$\log_2 4 = 2$	$\log_2 8 = 3$	$\log_2 4 = 2$	$\log_2 8 = 3$	$\log_2 32 = 5$
$\log_2 \left(\frac{1}{2}\right) = -1$	$\log_2 8 = 3$	$\log_2 4 = 2$	$\log_2 \left(\frac{1}{2}\right) = -1$	$\log_2 2 = 1$	$\log_2 1 = 0$
$\log_2 512 = 9$	$\log_2 8 = 3$	$\log_2 4096 = 12$	$\log_2 8 = 3$	$\log_2 32 = 5$	$\log_2 256 = 8$
$\log_2 \left(\frac{1}{64}\right) = -6$	$\log_2 16 = 4$	$\log_2 \left(\frac{1}{4}\right) = -2$	$\log_2 \left(\frac{1}{32}\right) = -5$	$\log_2 \left(\frac{1}{2}\right) = -1$	$\log_2 \left(\frac{1}{64}\right) = -6$

- Observa cada tripla de fichas y responde ¿cuál es la relación entre los valores a los que se le calcula el logaritmo en base dos de las dos primeras fichas con el valor al que se le calcula el logaritmo en base dos de la tercera ficha?

____

____

____

____

- Observa cada tripla de fichas y responde ¿Cuál es la relación entre los resultados de las dos primeras fichas y el resultado de la tercera ficha?

____

____

7. Formula una propiedad que describa de manera general lo que encontraste en el punto anterior.

7.4. Anexo 4: Taller actividad 4

1. Realiza el cociente de los valores de la parte superior, cada vez que efectúes la operación, deberás buscar en el material la ficha cuyo valor en la parte superior corresponde a este cociente, y completar la ficha en blanco.

$$\begin{array}{|c|}\hline 32 \\ \hline 5 \\ \hline\end{array} \div \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|}\hline \quad \\ \hline \quad \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline 8 \\ \hline 3 \\ \hline\end{array} \div \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|}\hline \quad \\ \hline \quad \\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \frac{1}{4} \\ \hline -2 \\ \hline\end{array} \div \begin{array}{|c|}\hline 4 \\ \hline 2 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|}\hline \quad \\ \hline \quad \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline \frac{1}{2} \\ \hline -1 \\ \hline\end{array} \div \begin{array}{|c|}\hline \frac{1}{4} \\ \hline -2 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|}\hline \quad \\ \hline \quad \\ \hline\end{array}$$

¿Qué relación existe entre los valores de la parte inferior de cada tripla de fichas?

2. Teniendo en cuenta la relación anterior y sin realizar el cociente de los valores de la parte superior, deberás buscar en el material la ficha cuyo valor en la parte superior corresponde a este cociente.

1024	÷	128	=		4	÷	256	=	
10		7			2		8		

16	÷	$\frac{1}{32}$	=		$\frac{1}{16}$	÷	$\frac{1}{4}$	=	
4		-5			-4		-2		

¿La relación encontrada anteriormente se sigue cumpliendo para los números de la parte inferior de las fichas o cambio?

____

____

____

____

3. A continuación se presentan las triplas de fichas trabajadas anteriormente, pero en esta oportunidad estarán reescritas con la definición de logaritmo, observa cada tripla y responde las siguientes preguntas:

$\log_2 32 = 5$	$\log_2 2 = 1$	$\log_2 16 = 4$
$\log_2 8 = 3$	$\log_2 2 = 1$	$\log_2 4 = 2$
$\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = -2$	$\log_2 4 = 2$	$\log_2\left(\frac{1}{16}\right) = -4$
$\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$	$\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = -2$	$\log_2 2 = 1$
$\log_2 1024 = 10$	$\log_2 128 = 7$	$\log_2 8 = 3$
$\log_2 16 = 4$	$\log_2\left(\frac{1}{32}\right) = -5$	$\log_2 512 = 9$
$\log_2 4 = 2$	$\log_2 256 = 8$	$\log_2\left(\frac{1}{64}\right) = -6$
$\log_2\left(\frac{1}{16}\right) = -4$	$\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = -2$	$\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = -2$

- Observa cada tripla de fichas y responde ¿cuál es la relación entre los valores a los que se le calcula el logaritmo en base dos de las dos primeras fichas con el valor al que se le calcula el logaritmo en base dos de la tercera ficha?

  ____

  ____

  ____

  ____

- Observa cada tripla de fichas y responde ¿Cuál es la relación entre los resultados de las dos primeras fichas y el resultado de la tercera ficha?

  ____

  ____

8. Formula una propiedad que describa de manera general lo que encontraste en el punto anterior.

7.5. Anexo 5: Taller actividad 5

1. Se tiene una bacteria que se divide cada hora, de tal manera que: Después de una hora se tienen dos bacterias, después de dos horas estas dos bacterias se dividen obteniendo cuatro bacterias nuevas, después de tres horas estas cuatro bacterias se dividen obteniendo ocho bacterias nuevas, y así el proceso puede continuar de forma indefinida. En la siguiente tabla se muestra el proceso de reproducción de estas bacterias:

Cantidad de bacterias	1	2	4	8	16	32			
Tiempo en horas	0	1	2	3	4	5			

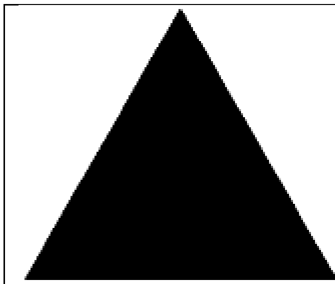
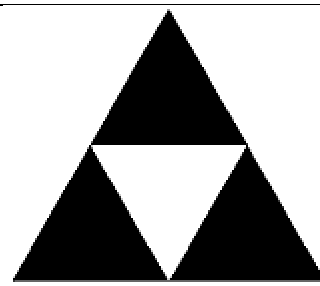
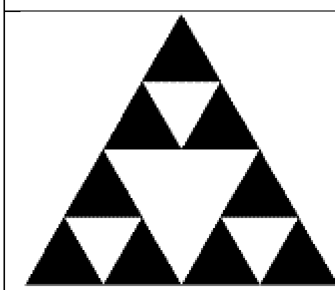
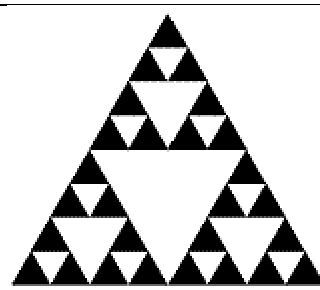
Partiendo de lo anterior responde las siguientes preguntas:

- Completa la tabla dada ¿Cómo obtuviste los valores faltantes?
- ¿En qué hora se obtienen 2048 bacterias?
- ¿En qué hora se obtienen 32768 bacterias?
- ¿En qué hora se obtienen 536870912 bacterias?

- Determina una fórmula general para saber en qué instante se obtienen x bacterias.

- Comprueba si la fórmula dada es consistente con los valores dados en la tabla.

2. A continuación se muestra una serie de figuras, las cuales son construidas en diferentes momentos, a partir de la primera figura. Observa la forma como se construye cada figura y la cantidad de triángulos negros obtenidos en cada momento.

	
Momento cero	Momento 1
	
Momento 2	Momento 3

A partir de lo anterior responda las siguientes preguntas:

- Dibuje la figura correspondiente al momento cuatro, ¿cuántos triángulos negros tiene esta nueva figura?

Momento 4

- ¿En qué momento se obtendrá una figura con 243 triángulos negros?

- ¿En qué momento se obtendrá una figura con 19683 triángulos negros?

- Determina una fórmula general para saber en qué momento se obtiene una figura con x triángulos negros.

- Comprueba si la fórmula dada es consistente con la cantidad de triángulos negros obtenidos en cada momento.

7.6. Anexo 6: Taller actividad 6

1. Dirígete al archivo “Actividad 6.ggb” y ábrelo con el programa GeoGebra. Al abrir el archivo encontraras una casilla denominada base, el número que aparece frente a esta indica la base sobre la cual se está trabajando.

2. Observa cada uno de los puntos graficados y los valores de sus respectivas coordenadas, los cuales también están escritos en la parte superior del archivo, y responde las siguientes preguntas:

  - ¿Qué relación se puede establecer entre las coordenadas en x de cada uno de los puntos?

- ¿Qué relación se puede establecer entre las coordenadas en y de cada uno de los puntos?

- ¿Qué relación existe entre la coordenada en y con respecto a la coordenada en x de cada punto?

- Con ayuda del programa grafique los siguientes puntos, teniendo en cuenta sus coordenadas en x e y:

Coordenadas en x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$	π	6	$\frac{37}{3}$
Coordenadas en y	$\log_2\left(\frac{1}{16}\right)$	$\log_2\left(\frac{1}{2}\right)$	$\log_2\sqrt{2}$	$\log_2\pi$	$\log_2 6$	$\log_2\left(\frac{37}{3}\right)$

- Con los puntos graficados hasta el momento, en tu cuaderno realiza la respectiva representación gráfica.
- Determine una expresión algebraica que corresponda con la gráfica que realizaste en tu cuaderno.

- Con ayuda del software grafique la expresión anteriormente proporcionada y comprueba si su representación gráfica es consistente con la realizada en tu cuaderno.

3. Introduce en la casilla base el número 3 y responda las siguientes preguntas:

- ¿Qué relación se puede establecer entre las coordenadas en x de cada uno de los puntos?

____

____

____

- ¿Qué relación se puede establecer entre las coordenadas en y de cada uno de los puntos?

____

____

____

- ¿Qué relación existe entre la coordenada en y con respecto a la coordenada en x de cada punto?

____

____

____

- Con ayuda del programa grafique los siguientes puntos, teniendo en cuenta sus coordenadas en x e y:

Coordenadas en x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$	π	6	$\frac{37}{3}$
Coordenadas en y	$\log_3\left(\frac{1}{16}\right)$	$\log_3\left(\frac{1}{2}\right)$	$\log_3\sqrt{2}$	$\log_3\pi$	$\log_3 6$	$\log_3\left(\frac{37}{3}\right)$

- Con los puntos graficados hasta el momento, en tu cuaderno realiza la respectiva representación gráfica.
- Determine una expresión algebraica que corresponda con la gráfica que realizaste en tu cuaderno.

____

- Con ayuda del software grafique la expresión anteriormente proporcionada y comprueba si su representación gráfica es consistente con la realizada en tu cuaderno.

4. Introduce en la casilla base el número 4 y responda las siguientes preguntas:

- ¿Qué relación se puede establecer entre las coordenadas en x de cada uno de los puntos?

____

____

____

- ¿Qué relación se puede establecer entre las coordenadas en y de cada uno de los puntos?

____

____

____

- ¿Qué relación existe entre la coordenada en y con respecto a la coordenada en x de cada punto?

____

____

____

- Con ayuda del programa grafique los siguientes puntos, teniendo en cuenta sus coordenadas en x e y:

Coordenadas en x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$	π	6	$\frac{37}{3}$
Coordenadas en y	$\log_4\left(\frac{1}{16}\right)$	$\log_4\left(\frac{1}{2}\right)$	$\log_4\sqrt{2}$	$\log_4\pi$	$\log_4 6$	$\log_4\left(\frac{37}{3}\right)$

- Con los puntos graficados hasta el momento, en tu cuaderno realiza la respectiva representación gráfica.

- Determine una expresión algebraica que corresponda con la gráfica que realizaste en tu cuaderno.

____

- Con ayuda del software grafique la expresión anteriormente proporcionada y comprueba si su representación gráfica es consistente con la realizada en tu cuaderno.

5. A partir de las tres gráficas realizadas, determina los valores de x para los cuales existe el valor en y.

____

____

7.7. Anexo 7: Taller actividad 7

La siguiente expresión algebraica modela la Hipérbola Equilátera

$$y = \frac{1}{x}$$

1. Halla el área bajo la curva en el intervalo $[1, a]$.

2. Determina el intervalo $[1, b]$, de forma que el área bajo la curva en dicho intervalo sea el doble del área hallada en el punto anterior.

3. Determina el intervalo $[1, c]$ de forma que el área bajo la curva en dicho intervalo sea el triple del área hallada en el primer punto.

4. Determina el intervalo $[1, d]$ de forma que el área bajo la curva en dicho intervalo sea el cuádruple de la primera área.

5. Habiendo determinado los valores para b, c y d que satisfacen los enunciados ¿Qué relación se puede establecer a partir de la secuencia obtenida y el valor de cada una de las respectivas áreas?

____

____

____

____

6. A partir de lo anterior completa la siguiente tabla:

Secuencia de valores	a	$b = \square$	$c = \square$	$b = \square$
Relación con las respectivas áreas				

7. ¿Qué relación se puede establecer entre los valores de cada fila y como la clasificaría en términos de progresiones?

____

____

8. Dirígete al archivo “Actividad 7.ggb” y ábrelo con el programa GeoGebra. Al abrir el archivo encontraras un deslizador para variar el valor de a, además se encuentran unos valores para algunas áreas bajo la Hipérbola Equilátera.

- Para diferentes valores de a compruebe si la relación con las áreas se sigue cumpliendo.
- Sobre la aplicación presentada grafica los siguiente puntos:

$$(a, A_1)$$
$$(a^2, 2A_1)$$
$$(a^3, 3A_1)$$
$$(a^4, 4A_1)$$

- Propón la función que creas se corresponde con los puntos graficados

- Con ayuda del programa grafica esta función y comprueba si efectivamente esta función cruza por estos puntos.
- Grafique la función área correspondiente a la hipérbola equilátera, para el intervalo $[1, t]$

Sugerencia:

- ❖ *Determine un deslizador para t que varié entre 2 y 20.*
- ❖ *En la casilla de entrada introduzca la expresión*

  Integral [f(x), 1, t].
- ❖ *Haga uso del valor del área para realizar la gráfica de la función área.*

- ¿Cuál es la expresión algebraica que modela la función área?

7.8. Anexo 8: Taller actividad 8 parte a.

Dirígete al archivo "Actividad 8a.ggb" y ábrelo con el programa GeoGebra. Al abrir el archivo encontraras un deslizador para variar el valor de a, tu profesor te dará unas indicaciones, luego responde las preguntas que se presentan a continuación:

1. Sin cambiar el deslizador a, use el arrastre sobre el punto P y completa la siguiente tabla (ejemplo para $a = 3$):

Coordenada x de P	2	3	4	5	6	7	8	9
Valor (aproximado) de la razón de cambio								

a) Suponga que solamente conoce la razón de cambio de cambio para $x = 3$ y $x = 2$. A partir de esta información responde las siguientes preguntas.

i. ¿Cómo obtener la razón de cambio cuando la coordenada x de P es 4?

____

____

____

ii. ¿Cómo obtener la razón de cambio cuando la coordenada x de P es 8?

____

____

____

iii. ¿Cómo obtener la razón de cambio cuando la coordenada x de P es 6?

____

____

____

iv. ¿Cómo obtener la razón de cambio cuando la coordenada x de P es 9?

____

____

____

b) Suponga ahora que solamente conoce la razón de cambio para $x = 9$ y $x = 8$. A partir de esta información:

i. ¿Cómo obtener la razón de cambio para $x = 3$?

____

____

ii. ¿Cómo obtener la razón de cambio para $x = 4$?

____

____

iii. ¿Cómo obtener la razón de cambio para $x = 2$?

____

____

c) ¿Cómo puede hallar la razón de cambio para $x = 1$? ¿Hay una única forma?

____

____

____

d) Teniendo en cuenta las preguntas anteriores, si se desea conocer la razón de cambio para el punto P cuando su coordenada x es 11, qué información necesita y qué procedimiento haría para calcularla.

____

____

____

e) Suponga que la razón de cambio cuando $x = 1$ es k, proponga una expresión para calcular la razón de cambio m para cualquier coordenada x del dominio de la función logaritmo en términos de k.

$\boxed{}$

f) ¿Para algún valor de x la razón de cambio instantánea es negativa? Explique por qué sí o por qué no.

g) ¿para algún valor de x la razón de cambio instantánea es cero? Explique por qué sí o por qué no.

h) ¿Cómo cambia la función logaritmo a medida que la coordenada x aumenta? ¿Se cumple siempre esta relación? Justifique su respuesta usando los resultados anteriores.

Cambiando el valor del deslizador, responda nuevamente las preguntas a) b) y c) y e). ¿Qué puede concluir de sus resultados en relación con la función logaritmo en diferentes bases?

a)

b)

c)

e)

7.9. Anexo 9: Taller actividad 8 parte b

Dirígete al archivo "Actividad 8b.ggb" y ábrelo con el programa GeoGebra. Al abrir el archivo encontraras dos vistas graficas en la primera esta un deslizador para variar el valor de a y en la segunda está el punto Q, tu profesor te dará unas indicaciones y una explicación, luego responde las preguntas que se presentan a continuación:

1) A partir de las coordenadas del punto Q, complete la siguiente tabla (los valores en paréntesis son espacios en blanco para los estudiantes):

Base del logaritmo o coordenada x	2	4	8	16	32
Coordenada y					

2) Con la información de las tablas responda las siguientes preguntas:
   a. ¿Qué relación encuentra entre las coordenadas x de la tabla 1?

   ____

   ____

   ____

   b. ¿Qué relación encuentra entre las coordenadas y de la tabla 1?

   ____

   ____

   ____

   c. ¿Cómo calcular la coordenada y si la coordenada x del punto Q es 64?

   ____

   ____

   ____

3) Complete la siguiente tabla:

Base del logaritmo o coordenada x	3	9	27	81	243
Coordenada y					

4) Responde las siguientes preguntas

a. ¿Qué relación existe entre las coordenadas x?

____

____

____

b. ¿Qué relación existe entre las coordenadas y?

____

____

____

5) A partir de la regularidad encontrada en las tablas 1 y 2 y tomando en cuenta el rastro que deja el punto Q al cambiar el valor de a ¿Cuál función modela la relación que tienen las coordenadas x con las coordenadas y del punto Q?

____

____

____

6) Recordando que k es la razón de cambio instantánea en $x = 1$ de la función $\log_a x$ ¿Cuál es el valor de $1/k$ en términos de la base a?

7) De manera general, exprese la razón de cambio instantánea m de la función $\log_a x$ en términos de la base a.

7.10. Anexo 10: Algunas evidencias de la aplicación de actividades previamente diseñadas

A continuación se muestran algunas evidencias de actividades que fueron diseñadas y aplicadas durante el desarrollo del trabajo de grado, y las cuales se modificaron con base en algunos resultados obtenidos y aspectos que fueron observados durante la aplicación, permitiendo de esta forma consolidar la propuesta didáctica presentada. Es de aclarar que estas actividades se aplicaron en el grado noveno del Colegio Integrado Eduardo Caballero Calderón, y en el curso de Cálculo Integral 2016-1 de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

Evidencia

$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256
-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8

$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	2	4 2X2	8 2X2X2	16 2X2X2X2	32	64	128	256
-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Observaciones

La mayoría de estudiantes completaron la tabla de manera correcta, sin embargo extenderla hacía la izquierda presento gran dificultad, pues no se consideraba el número 1 como el valor que se debía ubicar antes del número 2, esto en lo que corresponde a la progresión geométrica.

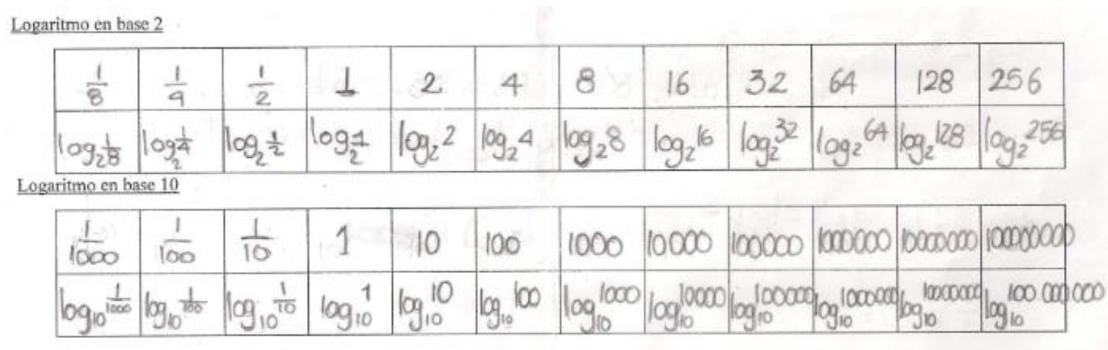
Evidencia

- ¿A qué exponente debo elevar el 2 para obtener como resultado 4? El Exponente es 2 : $2^2=4$
- ¿A qué exponente debo elevar el 2 para obtener como resultado 8? El Exponente es 3 : $2^3=8$
- ¿A qué exponente debo elevar el 2 para obtener como resultado 16? El Exponente es 4 : $2^4=16$
- ¿A qué exponente debo elevar el 2 para obtener como resultado 32? El Exponente es 5 : $2^5=32$

Observaciones

Al hacer referencia al término exponente no se presentó mayor dificultad, los estudiantes comprendieron las preguntas y las contestaron de manera correcta.

Evidencia



Logaritmo en base 2

$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256
$\log_2 \frac{1}{8}$	$\log_2 \frac{1}{4}$	$\log_2 \frac{1}{2}$	$\log_2 1$	$\log_2 2$	$\log_2 4$	$\log_2 8$	$\log_2 16$	$\log_2 32$	$\log_2 64$	$\log_2 128$	$\log_2 256$

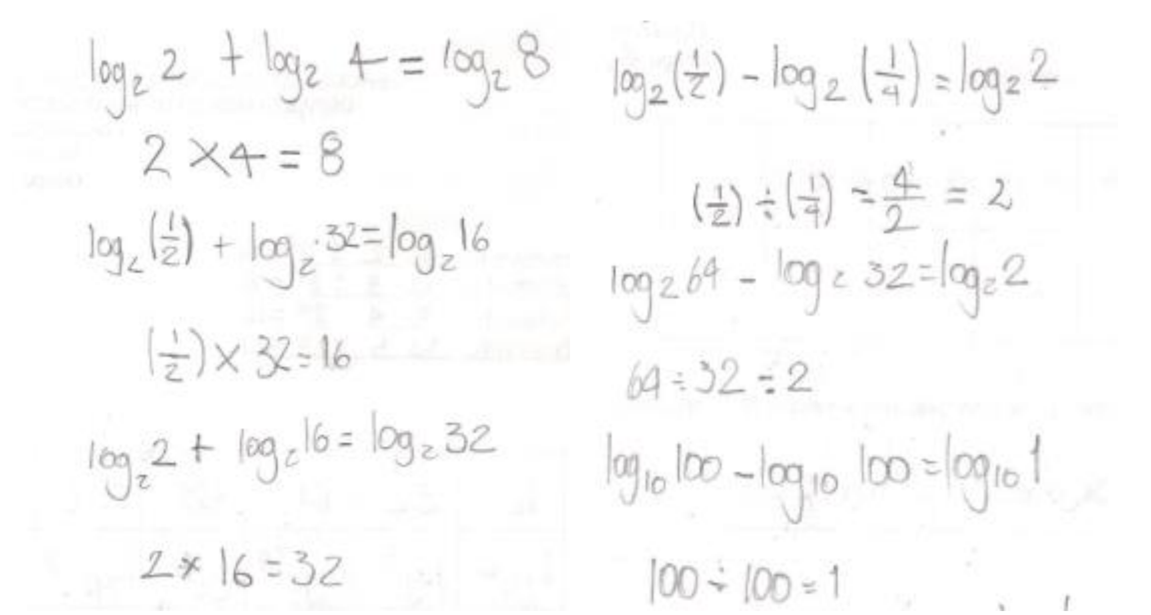
Logaritmo en base 10

$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000
$\log_{10} \frac{1}{1000}$	$\log_{10} \frac{1}{100}$	$\log_{10} \frac{1}{10}$	$\log_{10} 1$	$\log_{10} 10$	$\log_{10} 100$	$\log_{10} 1000$	$\log_{10} 10000$	$\log_{10} 100000$	$\log_{10} 1000000$	$\log_{10} 10000000$	$\log_{10} 100\,000\,000$

Observaciones

Reescribir las fichas con la notación de logaritmo presento dificultad, pues a los estudiantes se les dificulto comprender la notación y asociar el concepto de logaritmo con el de exponente.

Evidencia



$\log_2 2 + \log_2 4 = \log_2 8$

$2 \times 4 = 8$

$\log_2\left(\frac{1}{2}\right) + \log_2 32 = \log_2 16$

$\left(\frac{1}{2}\right) \times 32 = 16$

$\log_2 2 + \log_2 16 = \log_2 32$

$2 \times 16 = 32$

$\log_2\left(\frac{1}{2}\right) - \log_2\left(\frac{1}{4}\right) = \log_2 2$

$\left(\frac{1}{2}\right) \div \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{4}{2} = 2$

$\log_2 64 - \log_2 32 = \log_2 2$

$64 \div 32 = 2$

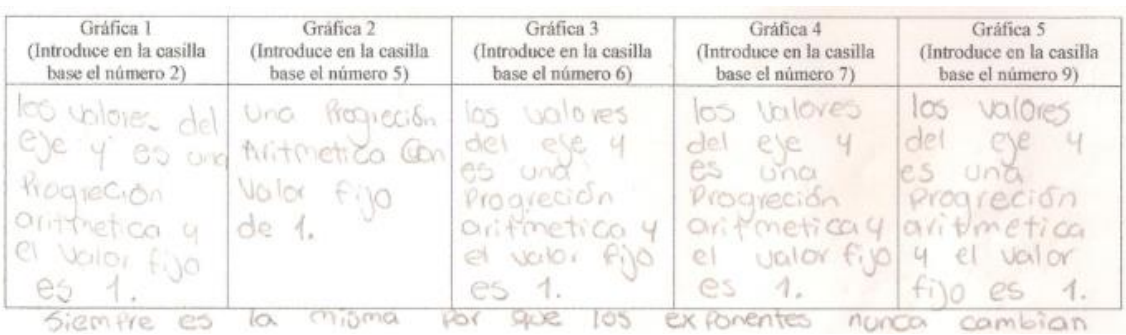
$\log_{10} 100 - \log_{10} 100 = \log_{10} 1$

$100 \div 100 = 1$

Observaciones

El trabajo con las propiedades a partir de la exploración con las fichas y tablas construidas, permitió la construcción y verificación de dichas propiedades. Sin embargo se evidencio la necesidad de sacar un mayor provecho de las fichas, de tal modo que se permitiera a los estudiantes explorar un poco más con el material.

Evidencia



Gráfica 1 (Introduce en la casilla base el número 2)	Gráfica 2 (Introduce en la casilla base el número 5)	Gráfica 3 (Introduce en la casilla base el número 6)	Gráfica 4 (Introduce en la casilla base el número 7)	Gráfica 5 (Introduce en la casilla base el número 9)
los valores del eje y es una Progreción aritmetica y el valor fijo es 1.	una Progreción Aritmetica Con valor fijo de 1.	los valores del eje y es una Progreción aritmetico y el valor fijo es 1.	los valores del eje y es una Progreción aritmetica y el valor fijo es 1.	los valores del eje y es una Progreción aritmetica y el valor fijo es 1.

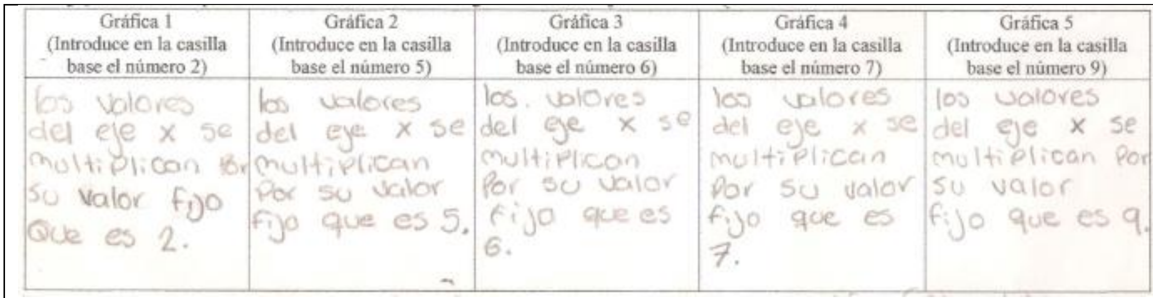
Siempre es la misma por que los exponentes nunca cambian

Observaciones

Es importante aclarar que en la aplicación de estas actividades, los estudiantes de bachillerato tenían conocimiento sobre que era una progresión geométrica y una aritmética, por tanto hacían referencia a estos términos y además denominaban a la diferencia o a la razón de la progresión, según fuera el caso, como el valor fijo. Sin embargo, se vio que no era necesario incluir los términos de progresión geométrica y aritmética, para la elaboración de la propuesta.

En este sentido, cuando se les presento la actividad en GeoGebra, en cuanto al comportamiento de las coordenadas en y de los puntos, los estudiantes hicieron alusión a que estos valores pertenecían a una progresión aritmética de diferencia 1. Además, algunos identificaron que independientemente de la base, siempre se tendría la misma progresión.

Evidencia

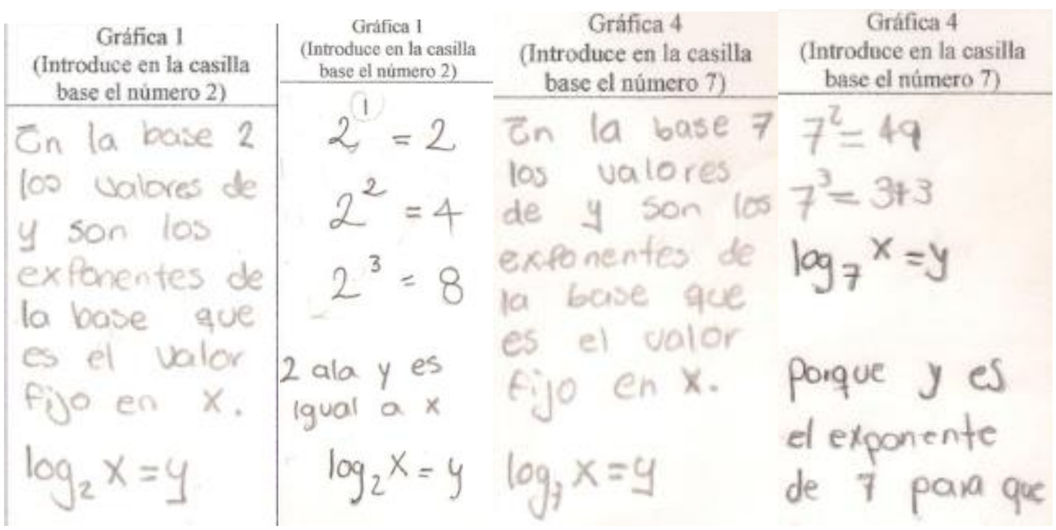


Gráfica 1 (Introduce en la casilla base el número 2)	Gráfica 2 (Introduce en la casilla base el número 5)	Gráfica 3 (Introduce en la casilla base el número 6)	Gráfica 4 (Introduce en la casilla base el número 7)	Gráfica 5 (Introduce en la casilla base el número 9)
los valores del eje x se multiplican por su valor fijo que es 2.	los valores del eje x se multiplican por su valor fijo que es 5.	los. valores del eje x se multiplican por su valor fijo que es 6.	los valores del eje x se multiplican por su valor fijo que es 7.	los valores del eje x se multiplican por su valor fijo que es 9.

Observaciones

En cuanto a las coordenadas en x de cada uno de los puntos, los estudiantes identificaron la progresión geométrica cuya razón correspondía a la base.

Evidencia

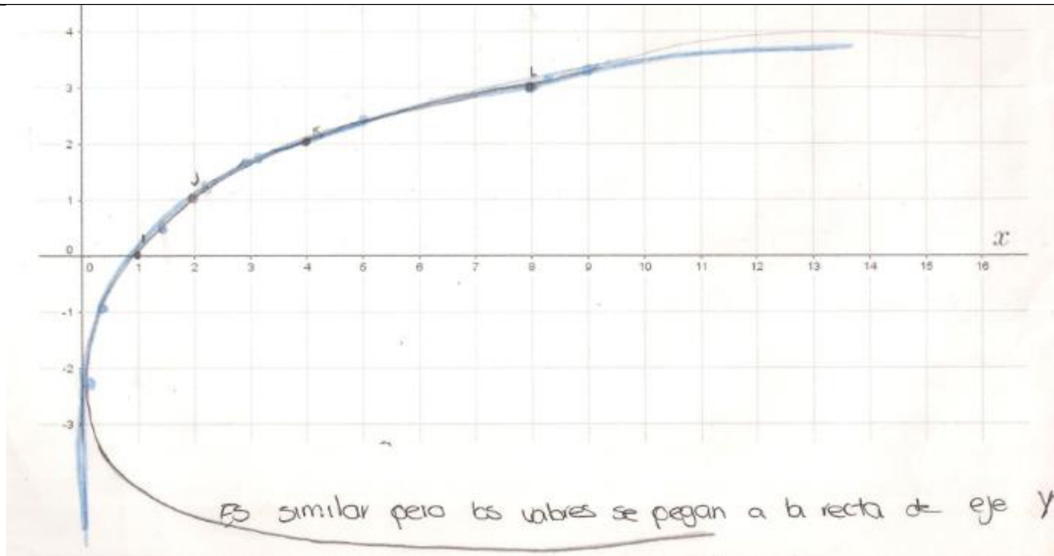


Gráfica 1 (Introduce en la casilla base el número 2)	Gráfica 1 (Introduce en la casilla base el número 2)	Gráfica 4 (Introduce en la casilla base el número 7)	Gráfica 4 (Introduce en la casilla base el número 7)
En la base 2 los valores de y son los exponentes de la base que es el valor fijo en X. $\log_2 X = y$	$2^1 = 2$ $2^2 = 4$ $2^3 = 8$ 2 ala y es igual a x $\log_2 X = y$	En la base 7 los valores de y son los exponentes de la base que es el valor fijo en X. $\log_7 X = y$	$7^2 = 49$ $7^3 = 343$ $\log_7 X = y$ porque y es el exponente de 7 para que

Observaciones

En el momento de establecer la covariación entre las coordenadas en x y las coordenadas en y, se hizo referencia a los exponentes a los cuales debía ser elevada la base, en este sentido, algunos estudiantes propusieron una expresión general para cada caso.

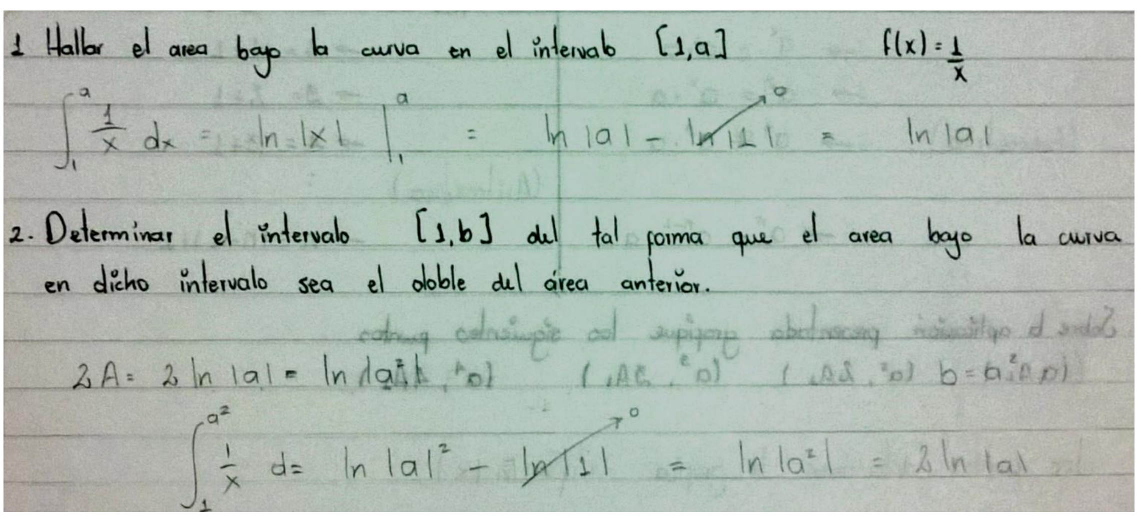
Evidencia



Observaciones

En cuanto a la representación gráfica de la función, en algunos casos se asumió que era una parábola y por tanto intentaron completarla de esta forma, pero con ayuda del software se evidencio que la curva era diferente.

Evidencia



1 Hallar el area bajo la curva en el intervalo $[1,a]$ $\qquad f(x) = \frac{1}{x}$

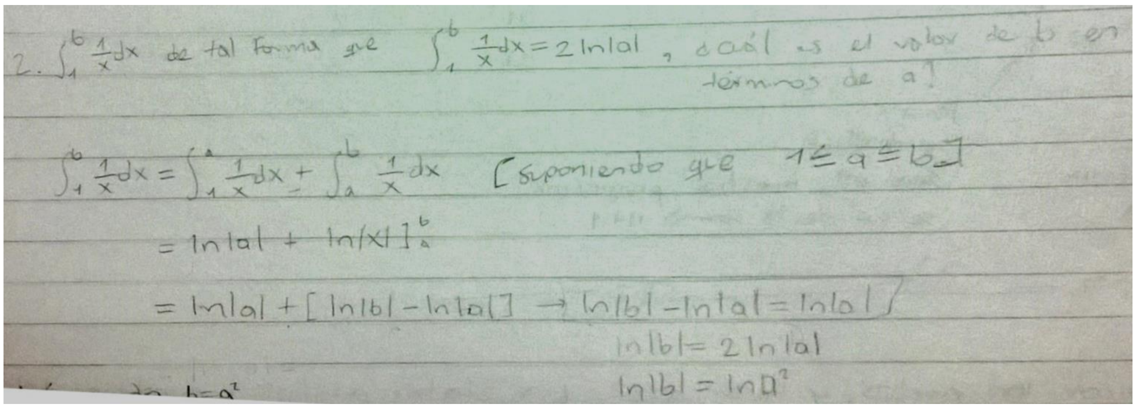
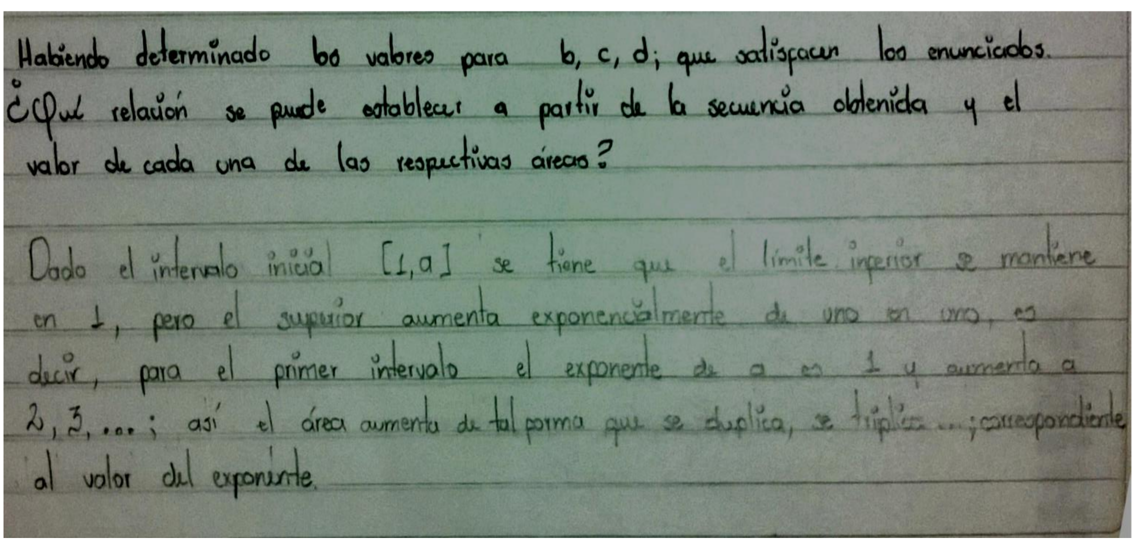
$$\int_1^a \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|\Big|_1^a = \ln|a| - \cancel{\ln|1|} = \ln|a|$$

2. Determinar el intervalo $[1,b]$ del tal forma que el area bajo la curva en dicho intervalo sea el doble del área anterior.

$$2A = 2\ln|a| = \ln|a^2|$$

$$\int_1^{a^2} \frac{1}{x}\,d = \ln|a|^2 - \cancel{\ln|1|} = \ln|a^2| = 2\ln|a|$$

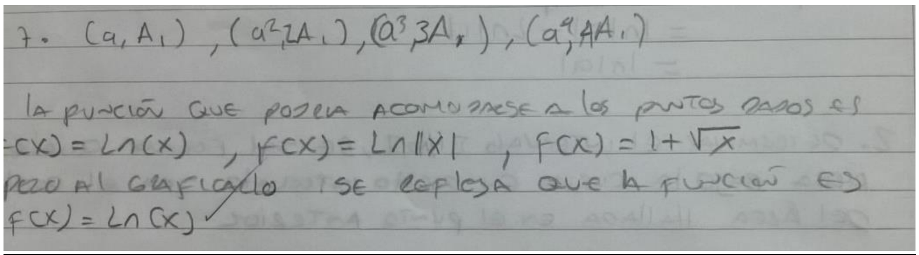
Observaciones

Los estudiantes relacionan el área bajo la curva como la integral definida en un intervalo, lo cual les permite relacionar a la hipérbola equilátera con el logaritmo natural. También se evidencia el uso de propiedades del logaritmo.
Evidencia  2. $\int_1^b \frac{1}{x}dx$ de tal forma que $\int_1^b \frac{1}{x}dx = 2\ln\lvert a\rvert$, ¿cuál es el valor de b en términos de a? $\int_1^b \frac{1}{x}dx = \int_1^a \frac{1}{x}dx + \int_a^b \frac{1}{x}dx$ [Suponiendo que $1 \leq a \leq b$] $= \ln\lvert a\rvert + \ln\lvert x\rvert]_a^b$ $= \ln\lvert a\rvert + [\ln\lvert b\rvert - \ln\lvert a\rvert] \rightarrow \ln\lvert b\rvert - \ln\lvert a\rvert = \ln\lvert a\rvert$ $\ln\lvert b\rvert = 2\ln\lvert a\rvert$ $\ln\lvert b\rvert = \ln a^2$ $b = a^2$
Observaciones   Este resultado es interesante, pues en cuanto a la forma como se plantea la pregunta, el estudiante supone que las integrales deben ser iguales para que se obtenga el resultado esperado ayudándose de las integrales y la relación que establece en ambos lados de la igualdad.
Evidencia  Habiendo determinado los valores para b, c, d; que satisfacen los enunciados. ¿Qué relación se puede establecer a partir de la secuencia obtenida y el valor de cada una de las respectivas áreas?   Dado el intervalo inicial [1, a] se tiene que el límite inferior se mantiene en 1, pero el superior aumenta exponencialmente de uno en uno, es decir, para el primer intervalo el exponente de a es 1 y aumenta a 2, 3, ...; así el área aumenta de tal forma que se duplica, se triplica ...; correspondiente al valor del exponente.

Observaciones

La relación establecida en esta respuesta, con respecto al límite inferior y superior de cada una de las integrales propuestas, se traduce en la relación de las progresiones geométrica y aritmética, tal como lo argumenta el estudiante.

Evidencia

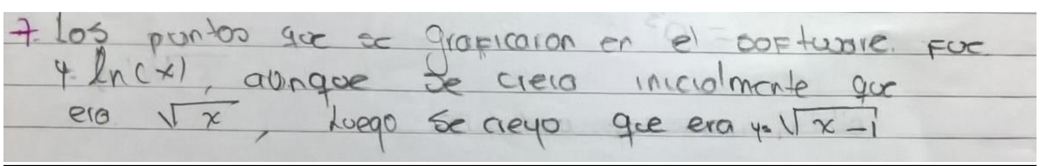

7. (a, A_1), $(a^2, 2A_1)$, $(a^3, 3A_1)$, $(a^4, 4A_1)$

La función que podría acomodarse a los puntos dados es
$f(x) = \ln(x)$, $f(x) = \ln|x|$, $f(x) = 1 + \sqrt{x}$
pero al graficarlo se refleja que la función es
$f(x) = \ln(x)$

Observaciones

Al graficar los puntos, el estudiante sugiere que estos pueden pertenecer a la función $\ln x$ o a la función $1 + \sqrt{x}$. Posiblemente asocia la función $\sqrt{x}$ ya que su grafica es similar a la de $\ln x$, puesto que ambas desde $y = 0$ tienen una razón de cambio que es positiva pero siempre decreciente. Para que $\sqrt{x}$ contenga al punto $(0,1)$ es necesario hacer un desplazamiento en el sentido positivo del eje x, es posible que el estudiante haya propuesto la expresión $1 + \sqrt{x}$ en busca de dicho desplazamiento, aunque no aplica correctamente el método.

Evidencia


7. los puntos que se graficaron en el software fue
$y = \ln(x)$, aunque se creía inicialmente que
era $\sqrt{x}$, luego se creyó que era $y = \sqrt{x-1}$

Observaciones

De manera similar al razonamiento anterior el estudiante asocia los puntos a la función $\sqrt{x+1}$, haciendo en este caso la transformación correctamente. Pero a diferencia de lo esperado desde la actividad, los estudiantes se guiaron únicamente de lo que visualizaron dejando de lado que las coordenadas se presentaban en forma de progresión, y por esto muy pocos llegaron a la función correcta.