LAS CURVAS DE ZINDLER Y SU RELACIÓN CON EL PROBLEMA 19 DEL "LIBRO ESCOCÉS"

OSCAR JAVIER CETINA SILVA
SERGIO ALFONSO TRIANA RAMÍREZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C., 2017

LAS CURVAS DE ZINDLER Y SU RELACIÓN CON EL PROBLEMA 19 DEL “LIBRO ESCOCÉS”

OSCAR JAVIER CETINA SILVA
C.C 1.033.734.363 Cód. 2011240020
SERGIO ALFONSO TRIANA RAMÍREZ
C.C 1.022.385.353 Cód. 2012240071

Trabajo de Grado para optar al título de
Licenciados en Matemáticas

Modalidad
Interés personal de los estudiantes

Directora
MARIA NUBIA SOLER ÁLVAREZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C, 2017

RESUMEN ANÁLITICO EN EDUCACIÓN – RAE

1. Información general	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca central
Título del documento	Las Curvas de Zindler y su relación con el problema 19 del “libro escocés”
Autor(es)	Cetina Silva, Oscar Javier; Triana Ramírez, Sergio Alfonso.
Director	Soler Álvarez, Maria Nubia.
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2017. 57p
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	FIGURAS DE ANCHO CONSTANTE, EQUILIBRIO DE UNA FIGURA, CURVAS DE ZINDLER, FLOTAR EN EQUILIBRIO

2. Descripción

Este trabajo de grado surge por iniciativa propia, debido a una ponencia del profesor Oscar Molina de la Universidad Pedagógica Nacional, acerca de las figuras de ancho constante. A partir de allí, se indagó sobre la relación que tienen estas figuras con las curvas de Zindler.

Por esto, se realizó una documentación sobre las curvas de Zindler y se encontró que estaban directamente relacionadas con un problema escrito en el llamado “Libro Escocés”, por lo tanto, se decidió enfocar el trabajo de grado, hacia la comprensión del problema y las respuestas que se han encontrado hasta ahora, como lo afirma Montejano (1998).

Se realiza un reporte, en el cual se presentan las respuestas encontradas en las fuentes, justificandolas a partir de algunos elementos teóricos, sobre las figuras de ancho constante y su relación con las curvas de Zindler.

3. Fuentes

Montejano, L (1997). La cara oculta de las esferas. México D.F.: Fondo de Cultura Económica.

Montejano, L. (1998). Cuerpos de ancho constante. México D.F.: Fondo de Cultura Económica.

Gil, L. Orjuela, M (2012). Figuras de ancho constante un tema por explorar. (Tesis de pregrado). Universidad Pedagógica Nacional.

4. Contenidos

Se identifica los aspectos más relevantes respecto a la elaboración del libro, en el cual se encuentra escrito el problema de interés para este trabajo de grado y los autores de los problemas que se datan en dicho libro. Continuando con la investigación, fue necesario consultar los elementos de la teoría de los cuerpos de ancho constante, figuras que flotan en equilibrio, curvas de Zindler y equilibrio de una figura que se encuentran en los libros citados en las fuentes. Se explicó cada una de las respuestas contrastándolo con todos los elementos teóricos que sustentan y demuestran las soluciones hasta el momento encontradas en la investigación de este trabajo de grado. Se presentan las conclusiones que se obtienen a partir del estudio realizado, finalmente se hizo una reflexión sobre el aporte de esta investigación a nuestra formación docente.

5. Metodología

En primer lugar, se consultaron diferentes referentes teóricos sobre las curvas de Zindler y a partir de allí, se formularon nuevas preguntas y objetivos, dándole un enfoque al trabajo de grado. Por tanto, se tuvo que buscar nuevos referentes con relación a los objetivos planteados y se realizó una selección de la información estudiada, clasificandola en dos categorías, tales como: contexto histórico y la parte matemática, que subyace al problema planteado por Ulam.

Seguido a esto, se dio una explicación a cada respuesta del prolema, comprendiendo definiciones, teoremas, ilustraciones y demostraciones, que sirvieron para alcanzar los objetivos propuestos, finalmente se realizaron las conclusiones, teniendo en cuenta los alcances, falencias y el desarrollo del trabajo de grado.

6. Conclusiones
Durante este trabajo de grado, hubo que consultar desde distintas fuentes todo lo relacionado con respecto a las curvas de Zindler y los cuerpos de ancho constante, a partir de allí se encontró un matemático, que escribió textos acerca de los temas de interés para este trabajo de grado y fue la base para la elaboración del mismo, encontrando en sus libros y conectando con la teoría las soluciones hasta el momento demostradas, para el problema Nº 19. Se estudiaron diferentes figuras para dar respuesta al problema planteado por Ulam, sin embargo, a lo largo de la historia, no se ha dado una respuesta total a este problema, para las figuras con densidad distinta de $\mathbf{0}$ y ½, para la densidad 0, se tiene como única respuesta a la esfera, mientras que para la densidad $\frac{1}{2}$, las únicas figuras hasta el momento, que responden la primera pregunta del problema planteado por Ulam, son las curvas de Zindler, en lo consultado y en el estudio que se hizo, aún queda la pregunta ¿Existen diferentes sólidos que floten en equilibrio en cualquier posición en que se le deje sin voltearse? En la revisión del aspecto histórico, se ha evidenciado como las matemáticas surgen de prácticas sociales, entendiendo una práctica social como una interacción entre personas, es decir, las matemáticas no se construyen únicamente en las universidades, ni en investigaciones, también se construyen por medio de diálogos entre amigos, colegas o familiares, despertado por intereses diversos a los académicos, que nacen de la curiosidad. Para llegar a comprender las soluciones expuestas en el documento, fue necesario llevar a cabo un proceso, iniciando con los conceptos previos y desde sus inicios, con el fin de lograr un camino favorable a ello, por eso fue importante la consulta de varias fuentes y llegar a entender estas soluciones. Teniendo como gran aporte, la teoría de figuras de ancho constante, la cual aporta significativamente a la solución de la segunda parte del problema.

Elaborado por:	Cetina Silva Oscar Javier Triana Ramírez Sergio Alfonso
Revisado por:	Maria Nubia Soler Álvarez

Fecha de Elaboración del Resumen	09	05	2017

Tabla de contenido

INTRODUCCIÓN

Este documento se refiere a una explicación, mostrando todos los aspectos necesarios para lograr entender las soluciones y los avances de un problema de tipo matemático, el cual fue formulado por un matemático llamado Stanislaw Ulam de origen polaco, en medio de algunas discusiones que mantenía en un lugar bastante particular, junto con sus compañeros e incluso profesores de universidad.

Dicha pregunta o problema tiene características especiales, está compuesta de dos partes, una de ellas más general que la otra, pero ambas están conectadas con los mismos elementos teóricos que subyacen las respuestas o los avances, que se han obtenido bajo su estudio.

Como ha sido el caso de Luis Montejano un matemático que se ha interesado en estos problemas y sobre quien este trabajo de grado se ha guiado debido a sus grandes avances e investigaciones con respecto al problema en cuestión y a los elementos de una teoría que han servido para su trabajo.

La situación descrita anteriormente, fue de interés para este trabajo de grado puesto que existen un tipo de curvas no muy conocidas y de especial construcción, estas curvas llevan consigo el nombre de curvas de Zindler, al indagar sobre estas, se conoció el trabajo de Montejano y mucho más, que son o fueron utilizadas para dar una solución al problema en cuestión. De la misma manera, el contexto que lleva consigo el problema y quienes participaron durante tanto su construcción, como solución es de gran importancia para el desarrollo y reconocimiento de las matemáticas mismas.

Para llevar a cabo este trabajo de grado, se tuvo que indagar desde distintas fuentes para corroborar y para maximizar todo lo que se escribió con respecto a la historia que rodea la formulación del problema y sus antecedentes que datan de una historia curiosa e interesante, de manera análoga se consultó para el desarrollo del problema especialmente dos libros como lo son *"Cuerpos de ancho constante"* y *"La cara oculta de las esferas"* de Luis Montejano Peimbert ambos libros.

En este documente se encontrará la justificación del trabajo de grado, resaltando aspectos importantes a grandes rasgos para el desarrollo y la elaboración del mismo, incluyendo parte de la historia del problema y cuestiones en cuanto a su solución.

Seguido a ello se presentan los objetivos; diferenciando entre su objetivo general y los objetivos específicos, que responden al desarrollo del documento y que estuvieron presentes desde el inicio de su elaboración.
El capítulo I consiste en incluir todos los antecedentes al problema y una parte importante de la historia de este, que incluye su historia dentro de un cuaderno particular, con la característica de poseer más problemas como este, escritos por Ulam y varios matemáticos contemporáneos, resaltando también sus aspectos más importantes en la historia y sus contribuciones a la humanidad.

Luego se presenta uno de los capítulos más importantes del documento (Capítulo II), puesto que en este se consigna todo lo que se necesita para entender la solución y los avances que tienen que ver con todo lo que se ha realizado con respecto a dicho problema.

El capítulo III es fundamental para el desarrollo del documento, ya que tiene la explicación a las dos partes del problema, es decir, se encarga de la primera parte y de la segunda parte que componen al problema en general, esto con base a lo escrito en el marco teórico.

Por último, se encuentran las conclusiones que abarcan todo el desarrollo del trabajo de grado, desde que se comenzó a documentarse, hasta la parte final del documento. Recogiendo el argumento principal del documento, así mismo se realiza una evaluación de lo trabajado en su elaboración y desarrollo evidenciando sus limitaciones y alcances.

JUSTIFICACIÓN

A lo largo de la historia, los problemas que han germinado y se han solucionado en el ámbito de las matemáticas, han surgido en distintos contextos: bajo la luz del estudio de una teoría, para estudiar comportamientos de la naturaleza, explicar fenómenos científicos o simplemente durante una reunión de amigos.

En alguna oportunidad se reunieron en la ciudad de Lvov Polonia algunos amigos después de finalizar sus clases, los cuales se encontraban matemáticos como Banach, Ulam, Steinhaus y Mazur.

Poco antes de la segunda Guerra Mundial, en un café llamado Café Szkocka o Café Escocés, se reunieron con el fin de plantearse problemas, quienes por iniciativa de Banach, decidieron escribir los problemas que se planteaban.

A partir de de ello, escriben 193 problemas desde el 17 de julio de 1935, hasta el 31 de mayo de 1941, momento en el que empieza la segunda Guerra Mundial, algunos de estos problemas se encuentran con sus soluciones y otros no. Es así como nace un cuadernillo, que tiene por nombre “El libro Escocés”.

Uno de los 193 problemas, lo formula Ulam y es el problema de interés para este trabajo de grado, debido a que a partir de este se ha desarrollado una teoría interesante en torno a las denominadas curvas de Zindler.
El problema original se enuncia de esta manera:

> Si un sólido de densidad uniforme tiene la propiedad de flotar en equilibrio-sin voltearse-en cualquier posición en la que se le deje, ¿deberá ser éste necesariamente una esfera? En particular, cuando la densidad es cero: si un sólido descansa en equilibrio en cualquier posición en la que se deje sobre una superficie plana horizontal, ¿deberá ser este una esfera? (Montejano, 1989, cap 5).

Montejano (1998) en su libro “La cara oculta de las esferas” presenta la respuesta la segunda parte del problema, cuando la densidad es cero, tanto en la versión bidimensional del problema como en la versión original.

Después de su formulación, se logró llegar a contestar la primera parte del problema en una versión bidimensional, es decir, mediante figuras en un plano y no sólidos, la respuesta que se encontró fue la de un sólido llevado desde el espacio hacia el plano por medio de proyecciones (ver figura 1).

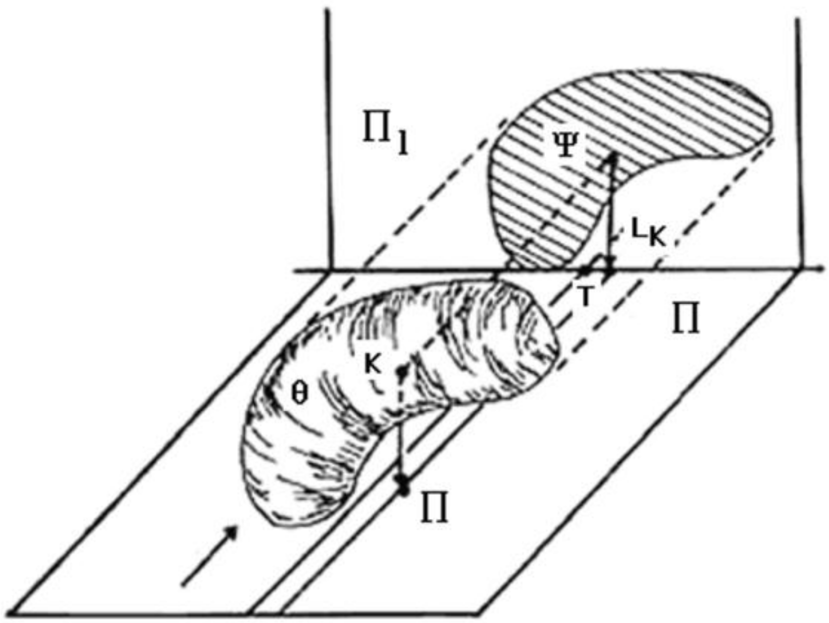


Figura tomada de: Montejano. La cara oculta de las esferas. (1998)

Luego se deduce que el sólido debe ser un cilindro, pues el cilindro se caracteriza porque mientras su eje permanezca paralelo al nivel del agua, flota en equilibrio de acuerdo al principio de Arquímedes, ahora bien basta con preguntarse si la base del cilindro es siempre circular, y el problema se reduce solamente en hallar una figura (la base del cilindro) que haga que el nuevo cilindro flote en equilibrio sin voltearse y sin importar la posición en que se coloque.

Ante el problema anterior, una respuesta que surgió fue gracias al matemático Auerbach (1901 – 1942), fallecido durante la guerra en los campos de concentración Nazi. Probó que las curvas de Zindler son aquellas que flotan en equilibrio cuando la densidad es un medio. Estas curvas se construyen a partir de la convexidad y las figuras de ancho constante.

Las curvas de Zindler tienen una propiedad particular, existe un segmento de línea que rota dentro de la figura y que, en cada posición, corta el área y el perímetro a la mitad.

Teniendo en cuenta el contexto y los elementos matemáticos que se han tratado para contestar a ese problema en específico, Montejano (1998) considera que no es fácil decidirse por un sí o por un no como respuesta a la versión original del problema propuesto por Ulam, teniendo en cuenta los ejemplos que Auerbach mostró y aún después de más de cincuenta años "nadie sabe la respuesta", pues hasta el momento se tiene una respuesta particular y en una versión bidimensional no tridimensional como se formuló el problema original.

Lo planteado anteriormente nos da una idea de cómo se ha venido resolviendo este problema, sin embargo, aún no sabemos por qué las curvas de Zindler responden al problema planteado por Ulam y de qué manera. En ese sentido, el trabajo de grado nos permite comprender este aspecto y también por qué la segunda parte del problema tiene solución y que se necesita para comprender esta.

OBJETIVOS

Objetivo General

1. Comprender, interpretar y describir las respuestas que corresponden al problema planteado por Ulam, a partir de la teoría de las curvas de ancho constante.

Objetivos específicos

1. Describir la teoría de figuras de ancho constante que subyace a soluciones de la primera y segunda parte del problema planteado por Ulam.
2. Reconocer relaciones entre las curvas de Zindler y las respuestas al problema planteado por Ulam presentadas por Luis Montejano.
3. Identificar aspectos relevantes del contexto en el que se originó el "Libro Escocés" del cual parte el problema de Ulam que se aborda en este trabajo de grado con el propósito de reconocer la importancia de este en el contexto de las matemáticas.

CAPÍTULO I

Historia

Todo problema matemático ha surgido tras, o lleva consigo, todo un contexto, las matemáticas muchas veces han sido de gran ayuda para resolverlos, o en muchas ocasiones han tomado un papel importante en el desarrollo de un problema y se han convertido en el eje central de la solución, por esto es importante detallar los aspectos más relevantes de un problema, su origen, las formas en que se ha tratado de resolver, y la explicación del problema. Como es el caso en este trabajo de grado, se trata de un problema planteado por el matemático Stanislaw Marcin Ulam (1909-1984), para el cual se han indagado aportes de distintos autores, sobre todo el trabajo de un matemático mexicano Luis Montejano y en artículos sobre la historia que rodea todo el contexto de la formulación del problema, haciendo énfasis en las soluciones del problema que llevan consigo elementos importantes de una teoría matemática que pocos conocen, como lo es los cuerpos de ancho constante y su relación con las curvas de Zindler.

Ulam se encontraba estudiando en la universidad de Lvov, Polonia y fue allí donde conoció a su mentor Stefan Banach, Ulam admiraba mucho a Banach entre otras cosas por tener título de doctor sin haber presentado ningún examen durante toda su carrera.

En la universidad de Lvov existía un grupo de investigación llamado ¨Sociedad Matemática Polaca¨, donde se reunían matemáticos, como Banach, Mazur, Steinhaus, Ulam y Sierpinski, Auerbach, entre otros. El mayor interés en la sociedad era tratar temas como la teoría de conjuntos y topología (en la época estás áreas eran nuevas) y análisis funcional. Esta sociedad hizo descubrimientos e importantes desarrollos sobre a teoría de funciones de variable real y de la idea de espacio de funciones.

La Sociedad Matemática Polaca

Antes de continuar haciendo referencia a la Sociedad Matemática Polaca, vamos a reseñar un poco los aportes y la importancia de los miembros de esta sociedad. Ulam (1909/04/13 -

1984/05/13) estudió matemáticas desde los 14 años por su cuenta y se doctoró en 1933, en 1935 viajó a Estados Unidos donde trabajó como profesor de la Universidad de Harvard, cerca del año 1940 trabajó como profesor en la Universidad de Winsconsin. Jhon Neumman lo invitó a participar en un proyecto de guerra en Nuevo México y así se unió al proyecto Manhattan que estaba desarrollando la bomba atómica.

Otro integrante de esta sociedad es Stephan Banach (1892/03/30 - 1945/08/31), quien se graduó el Instituto de Tecnología en Lvov y fue profesor, como se había mencionado, de Ulam en el mismo instituto. En su tesis doctoral presentó la definición axiomática de los espacios que hoy llevan su nombre, contribuyó con lo que hoy día es conocido como el análisis funcional moderno y la teoría de los espacios vectoriales topológicos, su obra más importante fue **Theorie des operations lineaires** (Teoría de Funcionamientos Lineales, 1932).

Uno de las personas más allegadas a Banach fue Wladyslaw Hugo Dionizy Steinhaus (1887/01/14 - 1972/02/25), ellos formularon el teorema de Banach - Steinhauss (1927). Este último matemático fue uno de los fundadores de la escuela de matemáticas de Lvov, terminó su tesis de doctorado en la Universidad de Gotinga, bajo la supervisión de Hilbert, realizó más de 170 obras en análisis matemático, teoría de probabilidades y estadísticas.

Otro matemático perteneciente a la Sociedad Matemática fue Waclaw Sierpinski (1887/01/14 - 1972/02/25) quien es reconocido a nivel mundial por su obra maestra el triángulo de Sierpinski, aportó a la teoría de conjuntos, a la topología y a la geometría fractal, en 1899 entró al Departamento de Matemáticas y Física de la Universidad de Varsovia, en 1903 este departamento ofrece un premio para el mejor ensayo de un estudiante en Voronoy's contribución a la teoría de números, Sierpinski ganó la medalla de oro en la competencia por su tesis doctoral.

El otro integrante de la Sociedad fue Mazur, quien tuvo buenas relaciones con Banach, llegó a la universidad de Lvov y se convirtió en un miembro importante de la sociedad polaca, siendo la persona más cercana a Banach, realizando muchos trabajos en conjunto. Mazur hizo importantes contribuciones a los métodos geométricos en el análisis funcional lineal y no lineal y al estudio de las álgebras de Banach.

Uno de los personajes más importantes de esta sociedad fue Herman Auerbach (26 de octubre de 1901 - 17 de agosto de 1942) fue un matemático polaco y miembro de la escuela de Lvov de matemáticas. Auerbach era profesor en la Universidad de Lvov. Durante la segunda guerra mundial, por tener ascendencia judía, fue encarcelado por los alemanes y asesinado en el campo de exterminio de Bełżec.

El Libro Escocés

Retomando el relato de la Sociedad matemática polaca, una vez terminadas las discusiones académicas en la universidad de Lvov, algunos integrantes de la Sociedad matemática se reunían en un sitio que estaba ubicado a pocas calles de la Universidad de Lvov, en el sitio popularmente conocido como el "Café Roma", este grupo de matemáticos se reunían a tomar desde un vaso de agua, hasta un trago de whisky. Allí pasaban hasta días enteros, especialmente los fines de mes que era cuando recibían su salario. Las discusiones en este café variaban de temas, pues este sitio era frecuentado por físicos y químicos de la misma universidad.

Tal era la confianza en este café por el reconocimiento de estos matemáticos que les permitían pagar la cuenta días después. Cierto día como era costumbre los matemáticos iban saliendo del café Roma y Banach se molestó con los empleados, pues se negaron a darle crédito; justo al frente, a diez metros de distancia, se encontraba un distinguido lugar conocido como el "Café Escocés". Allí fue donde Banach decidió cambiar el sitio de reunión con los amigos. Como muchas de las discusiones y de los problemas de interés eran de tipo matemático, los físicos y los químicos siguieron frecuentando el café Roma, caso contrario ocurrió con los matemáticos que decidieron seguir a Banach.

A partir de ese momento, el Café escocés se convirtió en el sitio de encuentro para la discusión de los problemas matemáticos. Este era generalmente frecuentado por Mazur, Banach y Ulam. Una tarde Banach propuso llevar un registro de los problemas que se planteaban y de las soluciones que se iban encontrando. El 17 de Julio de 1935 se escribió el primer problema en un cuaderno de pasta dura que Banach llevó. El mesero de este lugar guardaba el cuaderno cada vez que terminaban la reunión y de la misma manera cada vez que Mazur, Ulam o cualquier otro pedían el libro, este se los entregaba.

A las personas que resolvían los problemas que eran planteados (en su mayoría por Mazur, Banach y Ulam, por eso llevan su nombre), se les entregaba un premio. Este la mayoría de veces lo decidía el autor de la solución y en muchas ocasiones consistía en un café o un trago de whisky. Pocos de estos problemas fueron resueltos inmediatamente, pero fue posible abordarlos posteriormente pues quedó el registro de lo que sucedía en el llamado “Libro Escocés”.

Mazur advirtió que era inminente una gran guerra, como se habían adelantado asuntos interesantes y pensando en no perder estos adelantos, propuso que el libro se escondiera en una caja en un lugar que fuera fácil de recordar. Se le ocurrió la idea de enterrarlo cerca del arco de una cancha de fútbol.

Evidentemente llegó la Segunda Guerra Mundial razón por la cual el grupo se dividió durante 6 largos años, dejando el último problema escrito el 31 de mayo de 1941. Afortunadamente el libro sobrevivió al holocausto, no se sabe de qué manera, lo cierto es que Banach en el lecho de su muerte lo tuvo en la mano y su hijo Stephan Banach Jr lo encontró y se lo cedió a Steinhaus, quien realizó un duplicado de este.

En 1956 Ulam recibió una copia por parte de Steinhaus, lo tradujo al inglés y realizó varias copias. Esto con el fin de enviarlo a importantes universidades del mundo y a varios amigos suyos. Es así como el libro escocés llegó a tener un gran impacto en la comunidad académica.

Algunos problemas del Libro Escocés

Uno de estos problemas que tiene que ver con la geometría, podemos encontrar el problema número 59 propuesto por uno de los asistentes al café Stanislaw Ruziewicz, dice: "¿Se puede descomponer un cuadrado en un número finito de cuadrados más pequeños todos ellos diferentes?". El problema como bien se puede leer es complejo, luego en 1978 se probó que el número de cuadrados diferentes en los que se puede descomponer un cuadrado es 21.
Tomando por ejemplo uno de los problemas propuestos por Ulam, nos remitimos al problema número 101 del libro, el cual enuncia:

> *Un grupo U de permutaciones de la sucesión de enteros es llamado infinitamente transitivo si tiene la siguiente propiedad: si A y B son dos conjuntos de enteros, ambos infinitos, así como sus complementarios con respecto a todos los enteros, entonces existe en el grupo U un elemento f (permutación) tal que $f(A) = B$. ¿Tiene que ser un grupo infinitamente transitivo necesariamente idéntico al grupo de todas las permutaciones? (Ulam, 1938).*

La respuesta a este problema ya fue encontrada y su solución es negativa.

Detrás de las soluciones de los problemas se pueden encontrar también un sinfín de historias, como lo es la que esconde el problema número 153, propuesto por el también nombrado en este documento Mazur el 6 de noviembre de 1936. Este ofrecía como recompensa un "oca viva", solo 36 años más tarde lo resolvió una persona llamada Enflö, como se prometió en su momento, Mazur le entegó el premio con el cual hubo una soberbia comida.

Por otra parte, se encuentran todas las personas que corroboraron para la construcción de este libro, pues hubo matemáticos de la envergadura de Banach por nombrar uno de ellos y el autor principal del problema Ulam, quien estuvo presente y participó en el proyecto Manhattan, lo cual deja ver la importancia que tuvieron quienes escribieron el libro donde se encuentra documentado el problema en importancia para este trabajo de grado.

Gracias a la variedad de problemas encontrados en el libro escocés, tuvo este una variedad de personas interesadas en él y particularmente en sus problemas, ya sea por interés personal o para estudio. Particularmente es del interés del trabajo de grado el siguiente problema

El problema número 19

Como ha sido mencionado el libro cuenta con 193 problemas, uno de estos problemas fue planteado por Ulam, es importante hablar de este porque de todos los problemas el número 19 es el que resultó de interés para este trabajo de grado. El enunciado del problema dice: *"Si un sólido de densidad uniforme tiene la propiedad de flotar en equilibrio sin voltearse en cualquier posición en la que se le deje, ¿deberá ser éste necesariamente una esfera? En particular, cuando la densidad es cero: Si un sólido descansa en equilibrio en cualquier posición en la que se le deje sobre una superficie plana horizontal, ¿deberá ser éste una esfera?"* (Montejano, 1989). Este problema tiene que ver o puede ser comprendido por quienes conocen el principio de Arquímedes y sobre geometría, llevando consigo parte de una teoría matemática, como lo son la teoría de la convexidad, la teoría de los cuerpos de ancho constante, las curvas de Zindler (propiedades y construcción) y elementos importantes de figuras en equilibrio.

A partir de ahí surgió un gran interés por algunos matemáticos en intentar dar solución a este problema, por eso es conveniente dividir el problema en dos partes, la primera "*En particular, cuando la densidad es cero: Si un sólido descansa en equilibrio en cualquier posición en la que se le deje sobre una superficie plana horizontal, ¿deberá ser éste una esfera?"*. Para responder a esta pregunta es necesario explicar por qué la esfera es el único sólido que cumple estas condiciones.

La segunda parte del problema *"Si un sólido de densidad uniforme tiene la propiedad de flotar en equilibrio sin voltearse en cualquier posición en la que se le deje, ¿deberá ser éste necesariamente una esfera?"*. A diferencia de la primera parte, esta pregunta tiene una solución parcial y para comprenderla, se explicará cómo las curvas de Zindler cumplen unas propiedades que ayudan a responder esta pregunta.

Este problema interesó para este trabajo de grado, puesto que es importante ver cómo un problema planteado en un café por unos matemáticos, desarrolla consigo y trae elementos de una teoría, para poder darle solución.

De la misma manera indagar sobre la historia y el contexto en el cual fue desarrollado y elaborado el problema, dando la respectiva de los matemáticos que tuvieron relación en la solución y planteamiento de este problema.

Por otra parte, comprender teorías matemáticas que no se trabajan en la universidad, pues como licenciados en matemáticas es enriquecedor y nos da más elementos para nuestra formación como investigadores.

CAPÍTULO II

Para estudiar y responder de una manera parcial este problema (ya veremos porque parcial) en los capítulos posteriores de este documento, se va a estudiar teoría sobre los cuerpos de ancho constante. Se va a tener como base el trabajo de un matemático mexicano llamado Luis Montejano, quien se ha interesado por dicha teoría y por aportar a la solución del problema de Ulam.

Figuras convexas en el plano

Para iniciar trataremos todo lo necesario que concierne a nuestro problema, convexidad, propiedades de la circunferencia, equilibrio de una figura en cualquier posición, figuras de ancho constante y figuras que flotan en equilibrio.

Convexidad

Figura convexa: *Dados dos puntos A y B de una figura ϕ, si $\overline{AB} \subset \phi$ entonces ϕ es convexa, de no ser así la figura no es convexa y se dice que es porque esta tiene "abolladuras".*

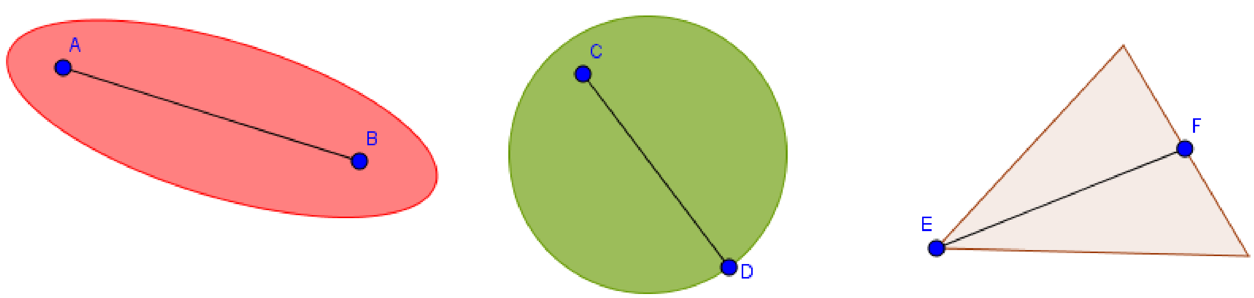


Figura 2.1. Ejemplos de figuras convexas.

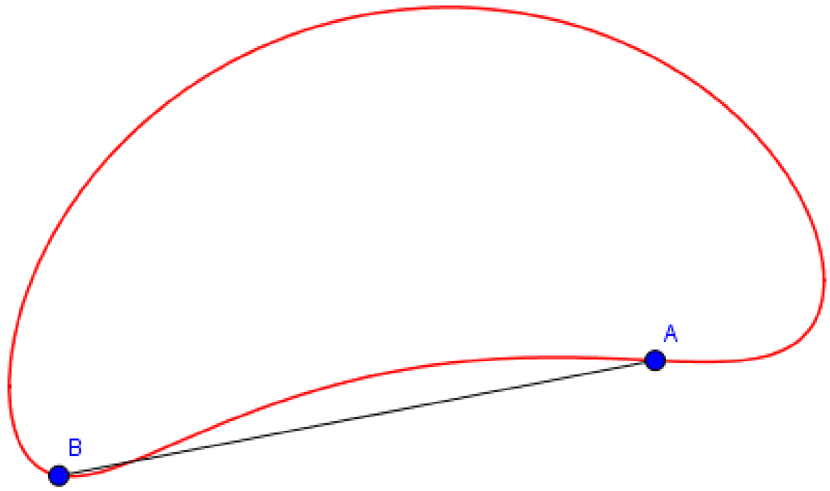


Figura 2.2. Ejemplo de figura no convexa.

Línea soporte de una figura: *sea* ϕ *una figura y* l *una recta tal que* $l \cap \phi \neq \emptyset$. l *es recta soporte de* ϕ *si y sólo si* $\phi \subset S_l$, *siendo* S_l *un semiplano determinado por la recta* l.

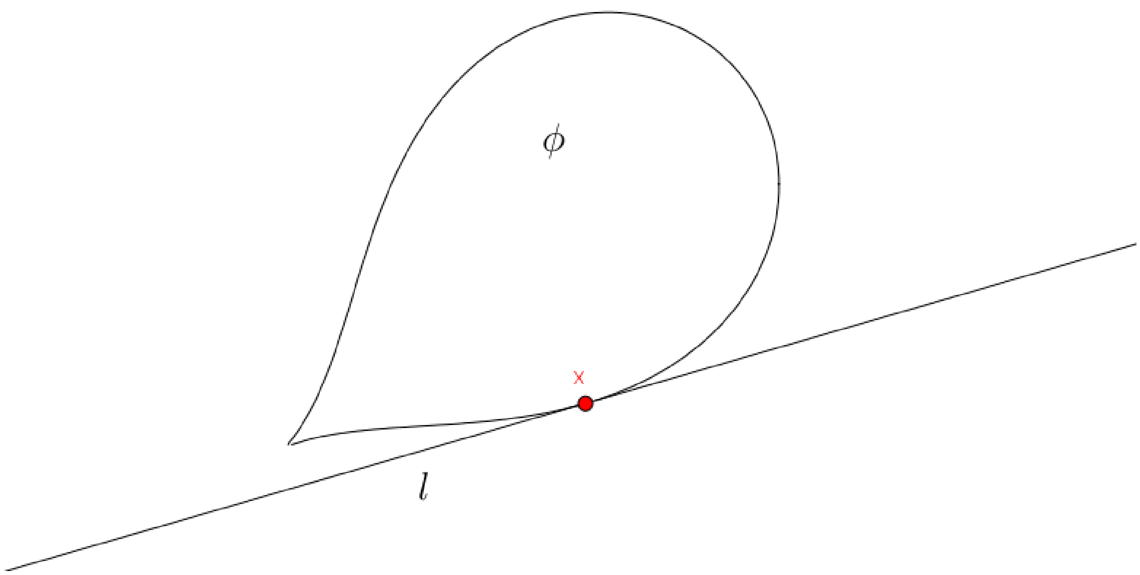


Figura 2.3. Línea soporte de una figura

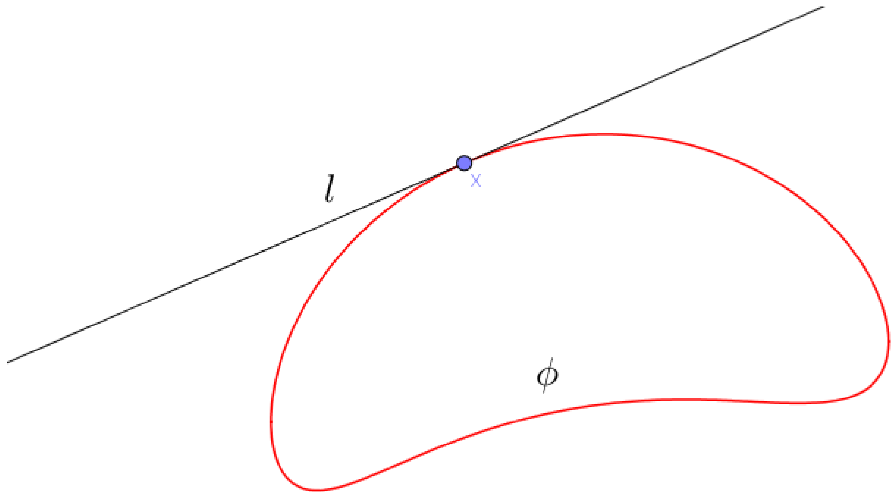


Figura 2.4. Línea soporte de una figura

Definición. Bola Abierta*:* Sea (X, d) un espacio métrico, se llama bola abierta de centro $a \in X$ y radio $\varepsilon > 0$ al conjunto $B(a, \varepsilon) = \{x \in X: d(x, a) < \varepsilon\}$

Puntos interiores: Sea ϕ *una figura y* $X \in \phi$, X es un punto interior de ϕ si existe una una bola abierta B con centro en X y radio ε tal que $B \subset \phi$.

Puntos exteriores: Sea ϕ *una figura y* $X \notin \phi$. X es un punto exterior de ϕ si existe una una bola abierta B con centro en X y radio ε tal que B está contenida en ϕ^C.

Puntos frontera: Dada *una figura* ϕ *y* X un punto del plano. X es un punto frontera de ϕ si para toda bola abierta B con centro en X y radio ε, $B \cap \phi \neq \emptyset$ y $B \cap \phi^C \neq \emptyset$

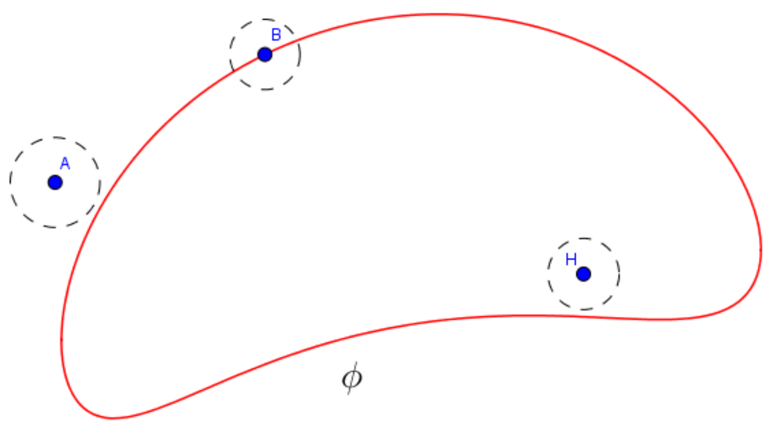


Figura 2.5. El punto A es un punto exterior de ϕ, el punto B es un punto frontera de ϕ y el punto H es un punto interior de ϕ.

A partir de estas definiciones vamos a enlistar una serie de teoremas que las subyacen y que nos servirán para el desarrollo de la teoría y el entendimiento de esta, sin detenernos en algunas demostraciones:

Teorema 1: Sea ϕ una figura, los puntos A y E, si $A \in \phi$ y $E \notin \phi$, entonces existe un punto frontera P tal que $P \in \overline{AE}$.

La figura 2.6 presenta una ilustración del teorema 1.

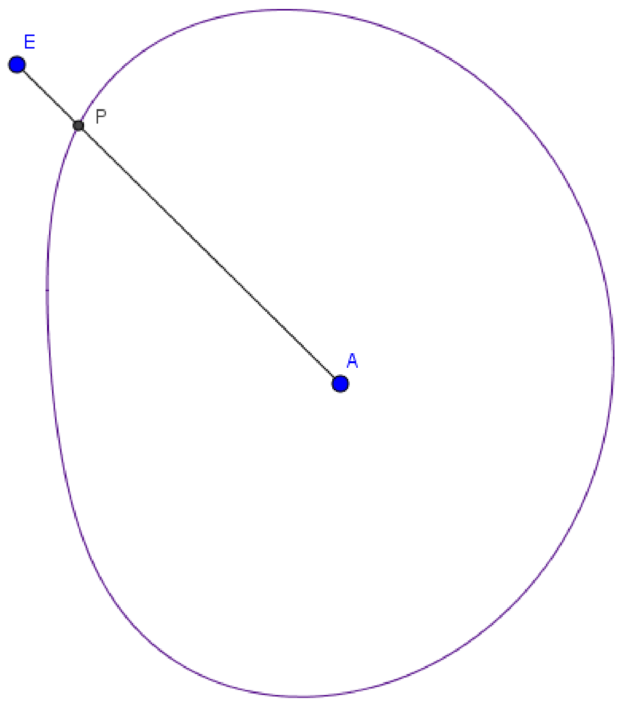


Figura 2.6. En la figura se puede observar que entre un punto exterior de ϕ y un punto interior de ϕ, existe un punto frontera de ϕ.

Teorema 2: Dada una figura convexa ϕ, A y B puntos, si A y B son puntos interiores de ϕ, entonces los puntos X tales que $A - X - B$, son interiores de ϕ (ver ejemplo figura 2.7).

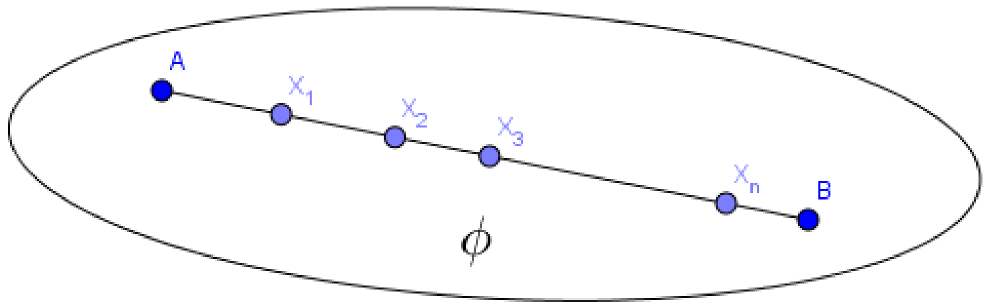


Figura 2.7. En la figura se puede observar que entre dos puntos interiores A y B de ϕ, todos los puntos entre A y B son interiores de ϕ.

Teorema 3: Dada una figura convexa ϕ, A y B puntos, si A es punto interior de ϕ y B es un punto frontera de ϕ, entonces los puntos X tales que $A - X - B$, son interiores de ϕ.

En la figura 2.8 se pude ver una ilustración de este teorema.

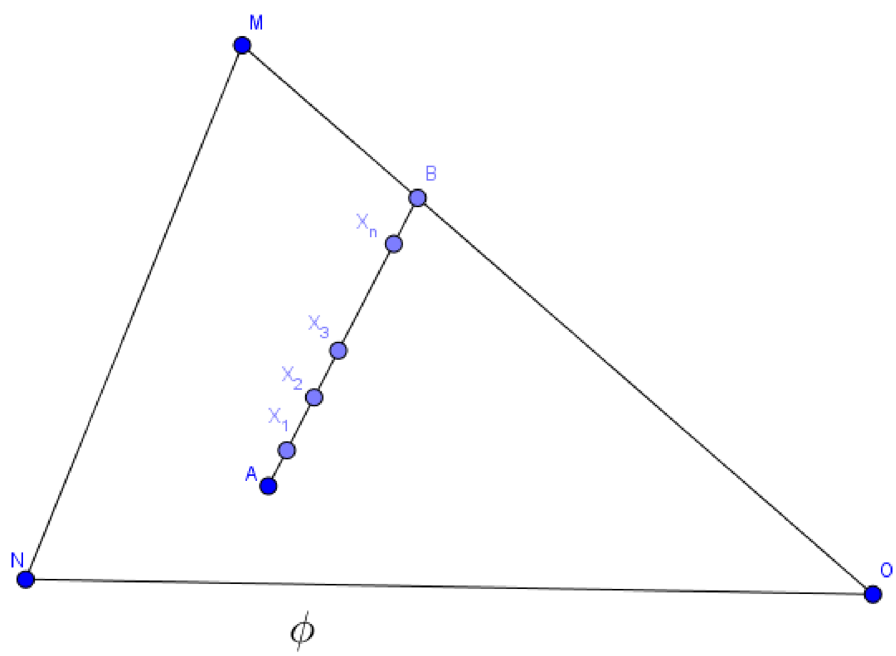


Figura 2.8. En la figura se puede observar que entre un punto interior A y un punto frontera B de ϕ, todos los puntos entre A y B son interiores de ϕ.

Teorema 4: Sea ϕ una figura, si A y B son puntos frontera de ϕ, entonces todos los X tales que $A - X - B$ son puntos puntos interiores o son frontera de ϕ.

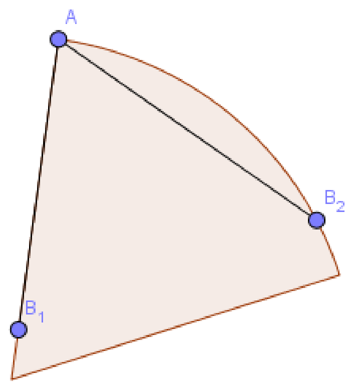


Figura 2.8. todos los puntos X tal que $A - X - B_1$, son puntos frontera de ϕ; y todos los puntos X tal que $A - X - B_2$, son puntos interiores de ϕ.

Definición figura acotada: Sea una figura ϕ, ϕ es una figura acotada, si y sólo si existe $\odot$ tal que $\phi \subset \odot$.

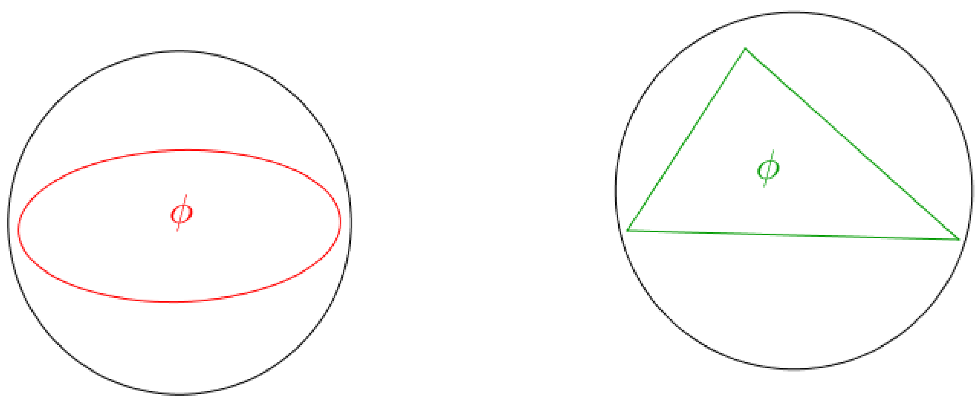


Figura 2.9. ejemplos de figuras acotadas

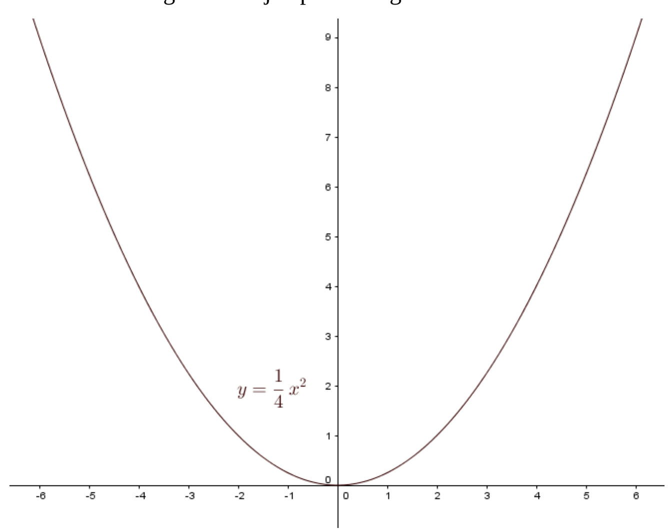


Figura 2.10. La parábola no es una figura acotada, pues no existe una circunferencia tal que la parábola quede contenida en la circunferencia.

Teorema 5: Si una recta l pasa por un punto interior A de una figura convexa acotada ϕ entonces l corta a la frontera de ϕ en exactamente dos puntos (ver ejemplo en la figura 2.11).

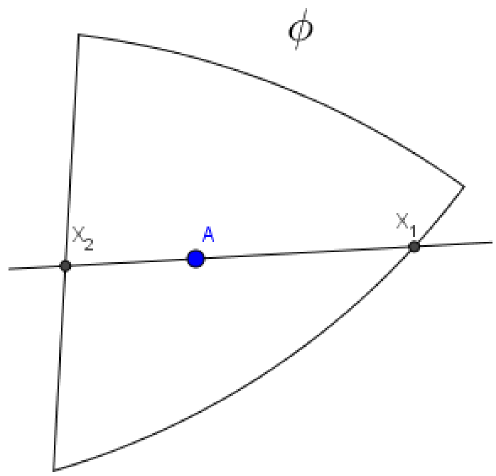


Figura 2.11. un sector circular es una figura convexa acotada, y cualquier recta que pase por un punto A de su interior, cortará al sector circular en X_1 y en X_2.

Teorema 6: Si ϕ es una figura convexa acotada, entonces tiene exactamente dos líneas soporte en cada dirección.

En la figura 2.12 se puede observar la ilustración de este teorema.

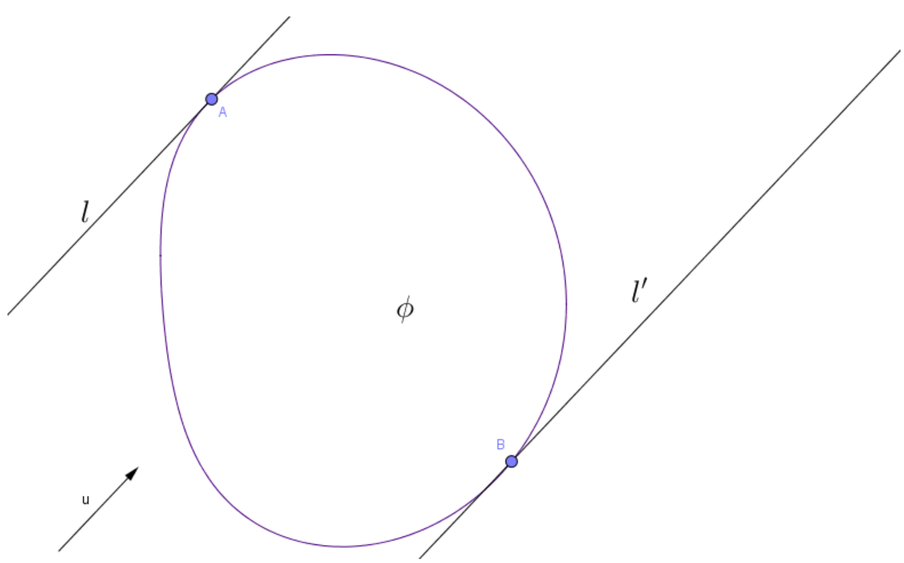


Figura 2.12. En la dirección u, existen dos rectas soportes l y l' paralelas a u.

Definición casco convexo: La figura convexa más pequeña que contiene a una figura ϕ es llamada el casco convexo de ϕ.

A continuación, se enunciarán más propiedades que tienen que ver con figuras acotadas y/o convexas.

Teorema 7: Dada una figura convexa ϕ, A punto. Si A es un punto frontera de ϕ, entonces A pertenece a una línea soporte de ϕ.

Teorema 8: Sea ϕ una figura, A punto frontera de ϕ, si existe una línea soporte l tal que $A \in l$, entonces ϕ es una figura convexa.

Teorema 9: Dada una figura ϕ, l una línea soporte de ϕ, si $l \cap \phi = \{A\}$, entonces ϕ es una figura convexa (ver figura 2.13).

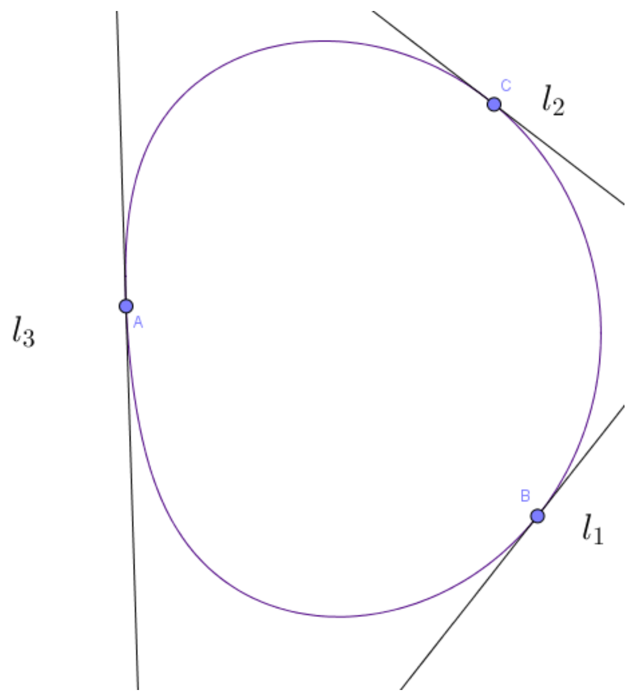


Figura 2.13.

Para cualquier línea soporte l_i, la intersección con la figura ϕ y una de las líneas soporte es un único punto.

Teorema 10: Sea ϕ una figura convexa, si A un punto tal que $A \notin \phi$, entonces existe l recta, tal que $A \in S_{l,\sim\phi}$, Siendo $S_{l,\sim\phi}$ el semiplano determinado por l donde no está ϕ.

En la ilustración, se puede observar un ejemplo del teorema 10.

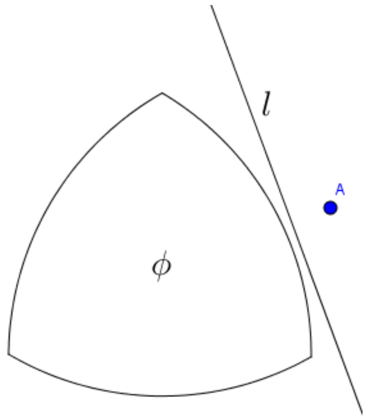


Figura 2.14. La recta l deja en distintos semiplanos a la figura ϕ y al punto A.

Teorema 11: Sea ϕ una figura, A un punto exterior de ϕ, si existe l recta, tal que $\phi \in S_{l,\sim A}$, entonces ϕ es una figura convexa.

Teorema 12: Sea ϕ una figura, S_1, S_2, S_3 ... semiplanos que contienen a ϕ, la intersección de los S_i es exactamente ϕ.

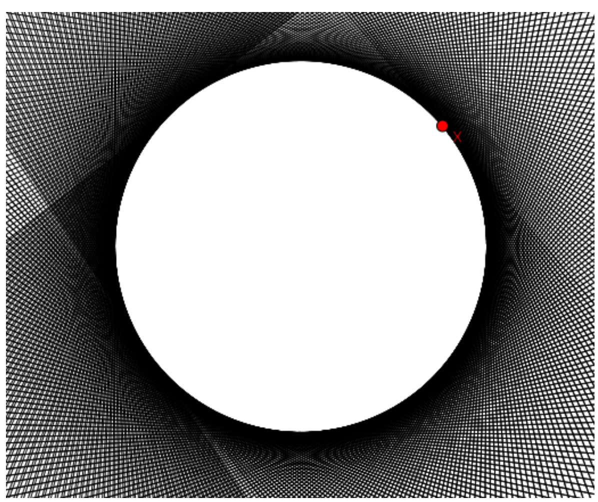


Figura 2.15.

Se puede observar en la figura, la intersección de todos los semiplanos que contienen a una circunferencia.

Circunferencia

Claramente y según las definiciones que se han presentado, la circunferencia es una figura convexa y también es una figura convexa acotada, por ende, vamos a mostrar un par de propiedades que nos serán útiles.

Teorema 13. Sea C una circunferencia, con centro en X y radio r, si M es punto frontera de C entonces existe l recta, tal que l es tangente a la circunferencia por M y $\overline{XM} \perp l$ (ver la figura 2.16).

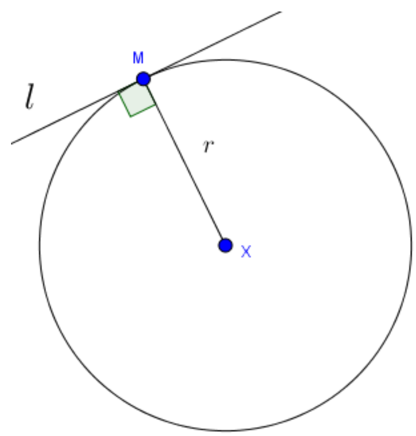


Figura 2.16.

Teorema 14. Sea ϕ una figura acotada y K uno de sus puntos interiores y M un punto frontera de ϕ. Si l recta soporte que pasa por M y $\overline{KM} \perp l$, entoces entonces ϕ es una circunferencia con centro en K.

Equilibrio de una figura en cualquier posición

Para responder las preguntas por Ulam es necesario definir qué significa que una figura esté en equilibrio, por lo tanto, vamos a exponer elementos de la teoría acerca del equilibrio de una figura.

Centro de masas de una figura o un sólido

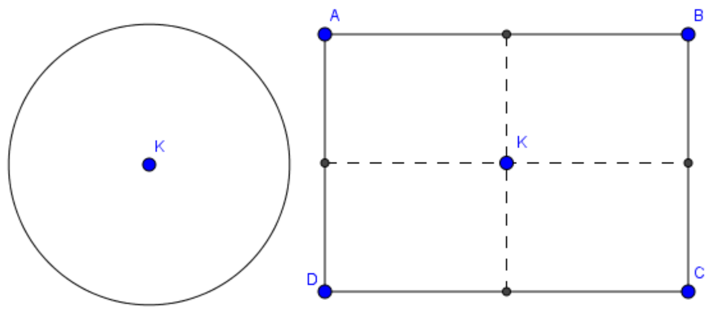


Figura 2.17.

El centro de masa de un círculo, es precisamente su centro, mientras que el de un rectángulo, es la intersección de las mediatrices de sus lados.

Equilibrio de una figura con respecto a una línea soporte

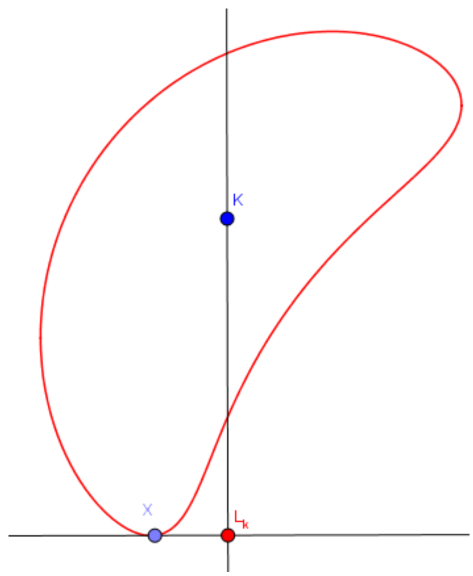


Figura 2.18. La figura no está en equilibrio.

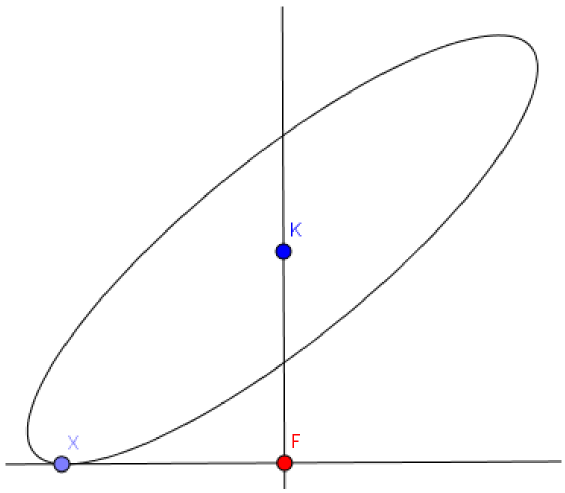


Figura 2.19. La figura no está en equilibrio.

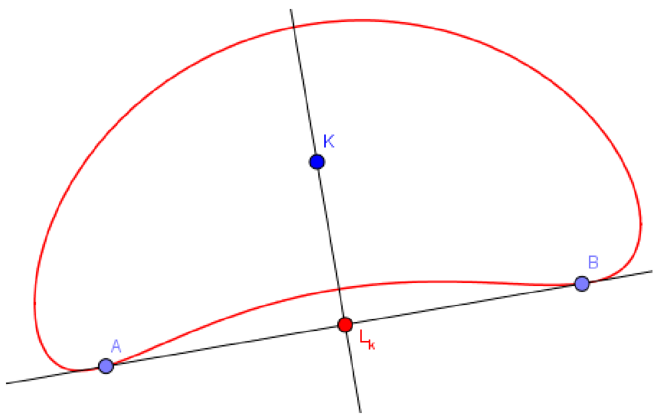


Figura 2.20. La figura está en equilibrio.

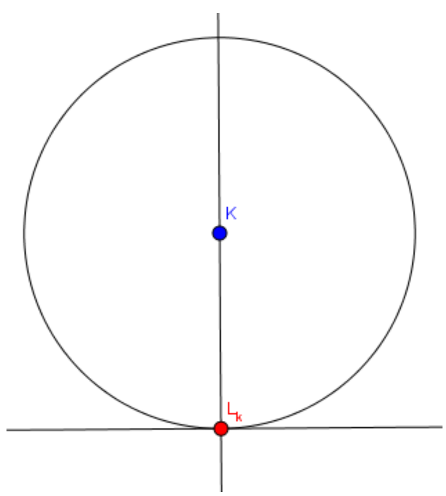


Figura 2.21. La figura está en equilibrio.

Con base en las ilustraciones definimos cuándo una figura está en equilibrio.

Definición. Sea ϕ una figura, K su centro de masa, l Línea soporte de ϕ. Llamaremos L_k al punto que es la intersección de l con la perpendicular a l que pasa por K.

Definición equilibrio respecto a una línea soporte: Sea ϕ una figura, K su centro de masa, l Línea soporte de ϕ y $L_k \in l$. ϕ está en equilibrio respecto a l si cumple alguna de las siguientes condiciones:

1. Si existen puntos de la frontera de ϕ a la derecha y a la izquierda de L_k.
2. L_k pertenece a la frontera de ϕ, y no hay puntos de ϕ a la izquierda ni a derecha de L_k.

Figura en equilibrio

Una figura ϕ esta en equilibrio en cualquier posición en la que se le deje, si está en equilibrio con respecto a cualquiera de sus líneas soporte.

Vamos a enunciar una serie de teoremas y definiciones que como se ha mencionado, serán de gran ayuda para dar explicación al problema que interesa en este trabajo de grado.
Vamos a iniciar con este teorema que hace parte de las figuras que flotan en equilibrio.

Teorema 15: Sea ϕ una figura en equilibrio en cualquier posición en la que se le deje y l línea soporte de ϕ, entonces $l \cap \phi = L_k$.
A continuación, un teorema que por medio de la ilustración se puede observar.

Teorema 16: Sea ϕ una figura, Si ϕ está en equilibrio en cualquier posición en la que se le deje, entonces ϕ es una circunferencia.
Demostración: Para demostrar este teorema, partimos desde la afirmación que la figura está en equilibrio, así que por definición se tiene que comprobar básicamente que, por cada punto frontera M de la circunferencia pasa una línea soporte l tal que $\overline{KM} \perp l$, si esto sucede estamos cumpliendo con la definición dada anteriormente de equilibrio con respecto a una línea soporte.

Usando el teorema 14, podemos determinar que efectivamente la circunferencia es aquella figura tal que, cualquiera de sus radios $\overline{KM}$ siendo K el centro de la circunferencia y M un punto en cualquier parte de la circunferencia, tiene una perpendicular al Punto M llamada l. La recta l va a dejar la circunferencia contenida en un semiplano, por lo tanto, por definición l será línea soporte de la circunferencia y por el teorema 15, la intersección entre l y $\overline{KM}$ será el punto L_k. Con lo anterior, se concluye que la circunferencia va a estar en equilibrio con respecto a cualquiera de sus líneas soporte y esto indica que va a estar en equilibrio en cualquier posición en la que se le deje.

La figura 2.22 muestra un ejemplo del teorema 16.

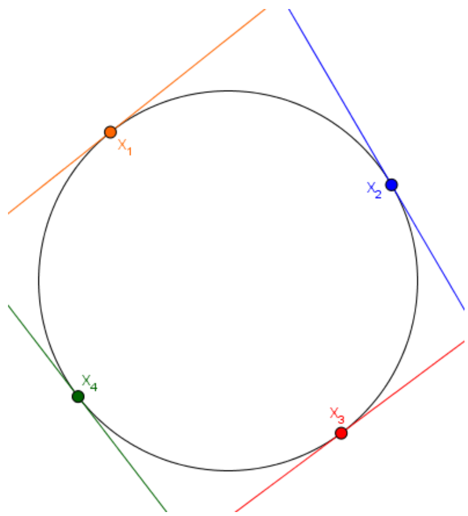


Figura 2.22.

En la figura se puede observar una circunferencia en equilibrio respecto a cualquier línea soporte.

Figuras de ancho constante

El círculo es una figura de ancho constante usada desde tiempos primitivos como ruedas o como rodillos. Una de las características que tiene es que, mientras gira, su eje permanece siempre a la misma altura con el suelo; esa es la razón por la cual las ruedas son círculos. Otra aplicación es en los rodillos, pues si se tienen rodillos circulares se puede trasportar algún objeto usando varios de estos para que se mantenga siempre a la misma altura del suelo, pero ¿es el círculo la única figura que cumple con esta propiedad? La respuesta a esta pregunta es NO, pues se pueden usar rodillos cuyas "tapas" son figuras de ancho constante. Vale la pena aclarar cuál es el ancho de una figura y presentar algunos ejemplos de estas.

Definición Ancho de una figura. Dada una dirección d, ϕ una figura, l y l' líneas soporte de ϕ perpendiculares a d, el ancho de ϕ en la dirección d es la distancia entre l y l'.

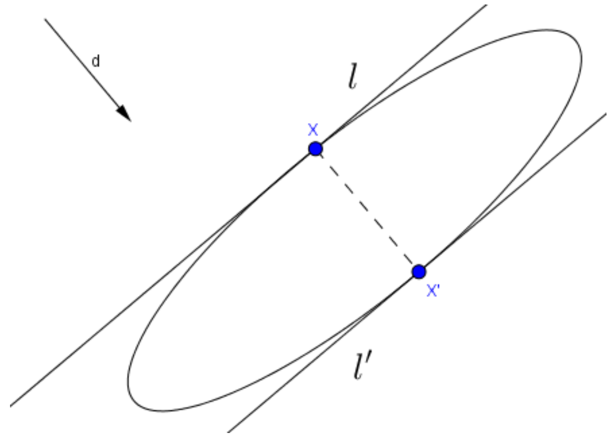


Figura 2.23.

La ilustración, muestra el ancho de una elipse en una dirección d.

Definición figura de ancho constante. Las figuras que tienen el mismo ancho en cualquier dirección, son llamadas figuras de ancho constante.

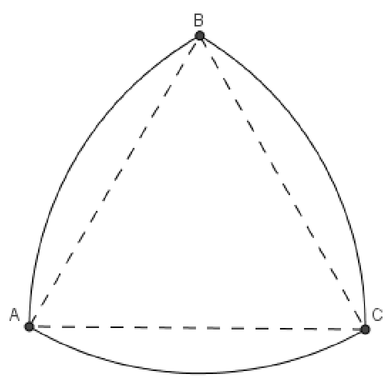


Figura 2.24. La imagen muestra una figura de ancho constante, llamada El Triángulo de Relaux.

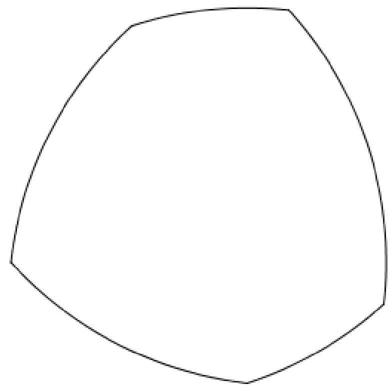


Figura 2.25.

La imagen muestra otra figura de ancho constante (construida a partir de un cuadrado de diagonal 1).

Normales y Binormales.

A continuación, vamos a exponer algunas definiciones y propiedades acerca de las cuerdas presentes en la figura de ancho constante.

El **diámetro de una figura de ancho constante:** son aquellos segmentos de la figura con longitud máxima.

Teorema 17. La distancia entre cualquier par de puntos de una figura de ancho constante h es siempre menor o igual a h.

Teorema 18. Si l y l' son líneas soporte paralelas de una figura de ancho constante ϕ, entonces tanto l como l' tienen con ϕ un solo punto de contacto $A\ y\ B$ respectivamente y $\overline{AB} \perp l$ y $\overline{AB} \perp l'$.

Teorema 19. Toda figura de ancho constante es una figura convexa.

Teorema 20. El diámetro de una figura de ancho constante h, es h, pues no hay dos puntos a distancia mayor que h, pero existen dos puntos – los de contacto entre dos líneas paralelas- cuya distancia es h.

Teorema 21. En una figura de ancho constante h, los diámetros son precisamente los segmentos de la línea contenidos en la figura que tienen longitud h.

Se presentan algunas propiedades que cumplen las figuras de ancho constante.

1. Toda figura de ancho constante igual a uno tiene diámetro uno.

2. Toda figura de ancho constante igual a uno, tiene perímetro π.

3. Entre las figuras de ancho constante igual a uno, la de más área es el círculo y la de menor área es el triángulo de Relaux.

4. El incírculo y el circumcírculo de una figura de ancho constante uno, son concéntricos y la suma de sus radios es uno.

5. La única figura de ancho constante radialmente simétrica es el círculo.

Hay unos segmentos particulares de las figuras que vamos a definir a continuación.

Definición de cuerda. Una cuerda de una figura ϕ es un segmento contenido en ϕ, cuyos extremos están en la frontera de ϕ (ver figura 2.26).

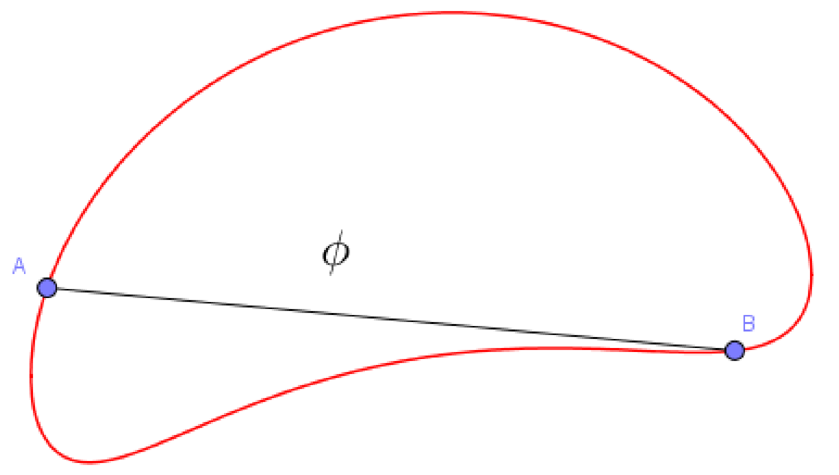


Figura 2.26

La ilustración muestra una cuerda $\overline{AB}$ de una figura ϕ.

Definición de normal. Una normal de una figura ϕ es una cuerda de ϕ, con la propiedad de que la recta perpendicular por uno de sus extremos es línea soporte de ϕ (ver figura 2.27).

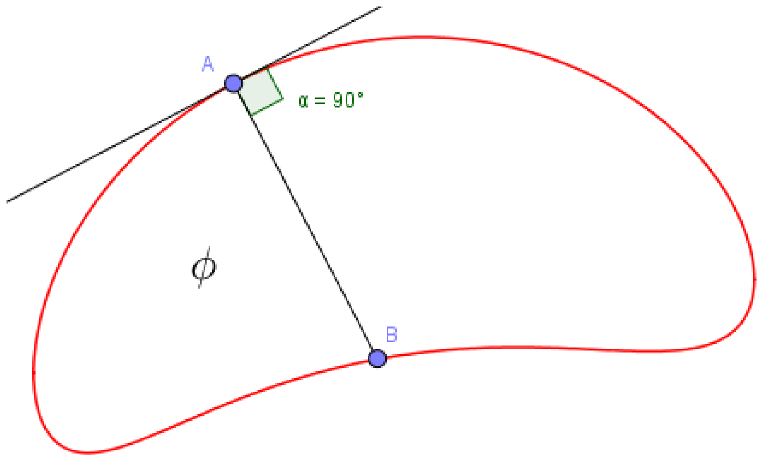


Figura 2.27.

La imagen muestra la normal $\overline{AB}$ de una figura ϕ.

Definición de Binormal. La binormal de una figura ϕ es una cuerda con la propiedad de que las líneas perpendiculares por sus dos extremos, son líneas soporte de ϕ (ver figura 2.28).

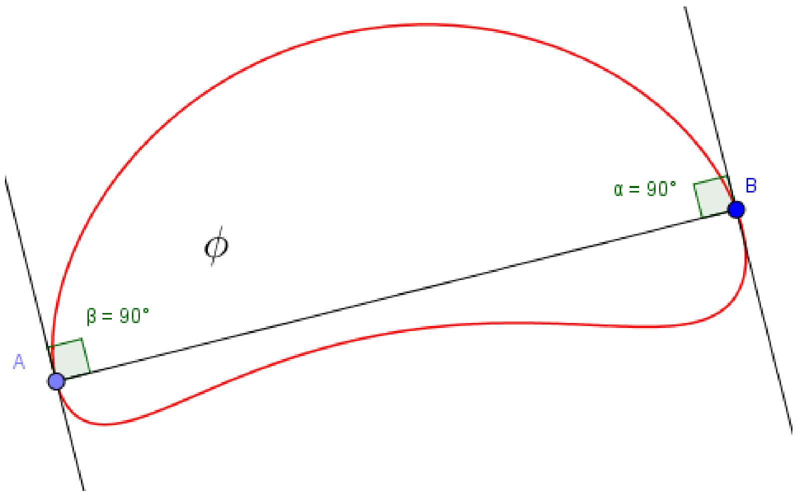


Figura 2.28.

En la imagen se puede observar la binormal $\overline{AB}$ de una figura ϕ.

Para finalizar, vamos a presentar un par de teoremas y propiedades acerca de cómo intervienen las cuerdas anteriormente definidas, en las figuras de ancho constante.

Teorema 22. Una figura de ancho constante ϕ posee una binormal en cada dirección.

Teorema 23. Si una figura ϕ posee una binormal en cada dirección, es porque ϕ es una figura de ancho constante.

Propiedades de las binormales de una figura de ancho constante

1. Cualesquiera dos binormales se intersecan en la figura.
2. Si dos binormales se intersecan en un punto frontera, entonces por este punto pasa una multitud de líneas soporte y la parte de la frontera que se encuentra entre los otros dos extremos es un arco de círculo h.
3. Si un segmento de arco de un círculo α de radio r pertenece a la frontera de la figura, entonces r es menor o igual a h, el centro de α está en la frontera de la figura y por el pasa una multitud de líneas soporte. Si r es menor que h, el centro de α está en el interior de la figura y el segmento de arco de radio $h - r$ concéntrico a α pero diametralmente opuesto, está en la frontera de la figura.

Teorema 24. En una figura de ancho constante ϕ toda normal es binormal.

Teorema 25. Si en una figura ϕ toda normal es binormal es porque ϕ es de ancho constante.

Curvas de Zindler

Las curvas de Zindler, se obtienen a partir de las figuras de ancho constante, a continuación, se muestra el paso a paso de la curva de Zindler que se obtiene a partir del triángulo de Relaux (ver figura 2.29).

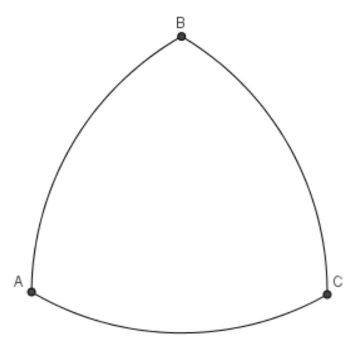


Figura 2.29 Triángulo de Relaux.

En el arco opuesto a uno de los vértices (para este caso el vértice A) se ubica un punto (A_1), como se muestra en la figura 2.30.

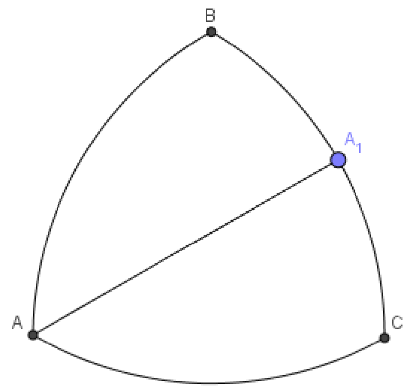


Figura 2.30. Triángulo de Relaux.

Se traza una circunferencia con centro M y radio $\frac{AA_1}{2}$, siendo M punto medio de $\overline{AA_1}$ como se ilustra en la figura 2.31.

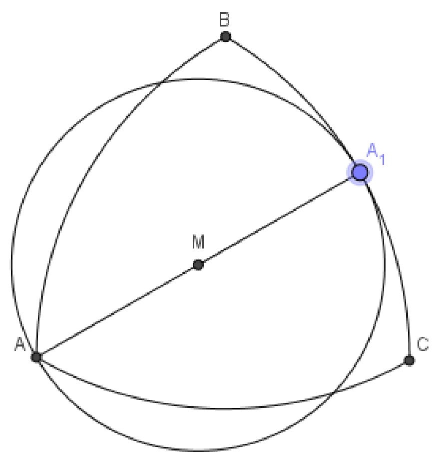


Figura 2.31.

Se traza una recta perpendicular a $\overline{AA_1}$ por M, y se ubican los puntos de intersección de esa recta con la circunferencia (E y D como se muestra en la figura 2.32).

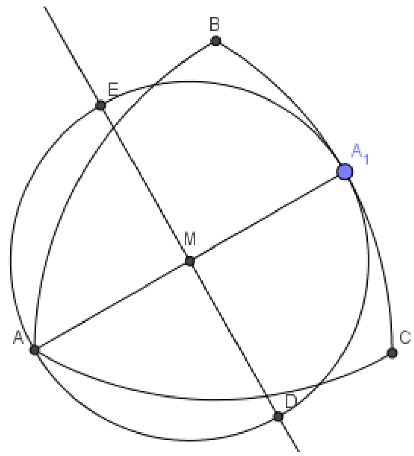


Figura 2.32.

Se repite el mismo proceso con los demás arcos del triángulo de Relaux.
El lugar geométrico que trazan los puntos de intersección de las rectas perpendiculares y las circunferencias, cuando se mueven los puntos por los arcos del triángulo de Relaux, determinan una curva de Zindler (ver figura 2.33)

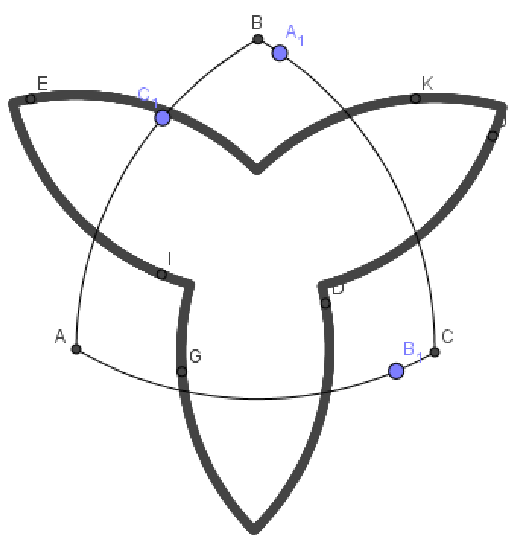


Figura 2.33. Ejemplo curva de Zindler.

Por supuesto que, para cada figura de ancho constante, existe una curva de Zindler. En la figura 2.34 se observa otra curva de Zindler asociada a la figura de ancho constante de la figura 2.25…

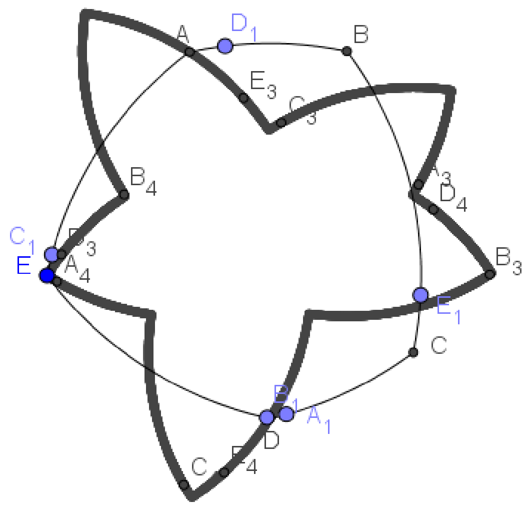


Figura 2.27. Ejemplo de curva Zindler.

Cuerpos que flotan en equilibrio

En esta sección vamos a tratar una de las partes más importantes del problema planteado por Ulam, para ello, es necesario tener claros unos conceptos para acercarnos a una de las respuestas al problema.

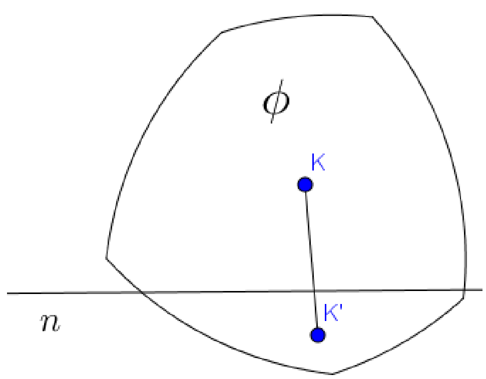


Figura 2.28.

En la figura 2.28 se puede observar que significa que un cuerpo flote en equilibrio.

Sea ϕ una figura con área A, K su centro de masa, densidad uniforme ρ, $0 < \rho < 1$, si la dejamos flotar en el agua, el área de la parte sumergida será ρA, ahora tendremos dos centros de masas, el centro de masa K, y K' que es el centro de masa de la parte sumergida.

Criterio de equilibrio.

1. Una figura flota en equilibrio si $\overline{KK'}$ es perpendicular al nivel del agua.
2. Una figura flota en equilibrio en cualquier posición, si todo segmento KK' es perpendicular al nivel del agua.

Convexidad en el espacio

Como se dijo en un principio, trataríamos sobre los cuerpos convexos, por tanto, vamos a trabajar ahora con sólidos, todo lo afirmado en la sección sobre la convexidad para las figuras es cierto para los sólidos. Pero vamos a diferenciar algunos términos necesarios para la comprensión de las propiedades y teoremas.

Definición sólido convexo: Dados dos puntos A y B de un sólido θ, si $\overline{AB} \subset \theta$ entonces θ es convexo, de no ser así el sólido no es convexo y se dice que es porque este tiene "abolladuras".

Plano soporte de un sólido: sea θ un sólido y π un plano tal que $\theta \cap \pi \neq \emptyset$. π es plano soporte de θ si y sólo si $\theta \subset S_\pi$, siendo S_π un semiespacio determinado por el plano π.

Puntos interiores: Sea θ *un sólido y* $X \in \theta$, X es un punto interior de θ si existe una bola abierta B con centro en X y radio ε tal que $B \subset \theta$.

Puntos exteriores: Sea θ *un sólido y* $X \notin \theta$. X es un punto exterior de θ si existe una bola abierta B con centro en X y radio ε tal que θ está contenida en θ^{C}.

Puntos fronteras: Dado un sólido θ *y* X un punto del plano. X es un punto frontera de θ si para toda bola abierta B con centro en X y radio ε, $B \cap \theta \neq \emptyset$ y $B \cap \theta^{C} \neq \theta$.

Teorema 1. Sea θ un sólido si X un punto frontero de θ, entonces existe un plano soporte π tal que $x \in \pi$.

Teorema 2. Sea θ un sólido convexo, si A un punto tal que $A \notin \theta$, entonces existe π plano, tal que $A \in S_{\pi,\sim\theta}$, Siendo $S_{\pi,\sim\theta}$ el semiespacio determinado por π donde no está θ.

Equilibrio de un sólido

Vamos a particularizar como se ha venido realizando, estas definiciones y teoremas para los sólidos y a realizar un índice con respecto a la notación que usaremos con respecto a estos.

1. θ Sólido
2. k Centro de masas
3. π Planos soporte
4. π_k Punto de intersección entre la recta que pasa por k y es perpendicular a π

Como lo realizamos anteriormente, vamos a definir esta vez cuando un sólido está en equilibrio, un sólido θ está en equilibrio con respecto a un plano π, si cualquier línea de π que pasa por π_k, o bien toca a θ o deja a puntos de θ a ambos lados de ella.

Definición Equilibrio respecto a un plano soporte θ está en equilibrio con respecto a un plano π, si cualquier subconjunto convexo de π que contenga a los puntos en los que θ toca a π, también contiene a π_k. Es decir, si π_k está en el casco convexo de la parte común entre π y θ.

Teorema 3. Sea θ un sólido, θ está en equilibrio en cualquier posición en la que se le deje, si está en equilibrio con respecto a cualquiera de sus planos soporte π.

De lo anterior, se deduce y tiene gran importancia para nuestro problema de interés y es análogo a lo que sucede con las figuras.

Teorema 4. Dado θ un sólido. Si θ está en equilibrio en cualquier posición en que se le deje sobre una superficie plana horizontal, entonces el sólido θ es una **esfera.**

Por supuesto, existen sólidos de ancho constante, se expondrá de manera muy similar a las figuras de ancho constante, definiciones, propiedades y teoremas, que ayudarán a dar la respuesta al problema planteado por Ulam.

Sólidos de ancho constante

Para hablar de los sólidos de ancho constante, es necesario mencionar unas definiciones.

Definición de ancho de un sólido: Sea θ una figura, una dirección en el espacio, dos planos soportes perpendiculares a la dirección que aprisionen a θ. La distancia entre estos dos planos es el ancho de θ en esa dirección.

Definición sólido de ancho constante: Un sólido es de ancho constante si y sólo si su ancho es igual en cualquier dirección.

Definición de diámetro. El diámetro de un sólido, es el segmento de longitud máxima en una dirección dada.
A continuación, se mencionan unas propiedades acerca de los sólidos de ancho constante.

Propiedades

1. En un sólido de ancho constante h, la distancia entre cualquier par de puntos que pertenecen al sólido, es menor o igual que h.
2. Si π y π' son planos paralelos de un sólido θ de ancho constante, entonces tanto π como π' tienen con θ un solo punto de contacto y el segmento que une estos dos puntos es perpendicular tanto a π como a π'
3. Todo sólido de ancho constante h es un sólido convexo con diámetro h

Teorema 5: Si todas las proyecciones de un sólido θ son figuras de ancho constante h, es porque el sólido θ es un sólido de ancho constante h y viceversa; las proyecciones de un sólido de ancho constante h son siempre figuras de ancho constante h.

Vamos a ver otras definiciones importantes en los sólidos de ancho constante.

Definición de cuerda.
La cuerda de un sólido θ, es un segmento de línea contenido en θ cuyos extremos están en la frontera de θ.

Definición de Normal
La normal de un sólido θ, es una cuerda de θ, con la propiedad de que un plano perpendicular a la cuerda por uno de sus extremos, es un plano soporte de la figura.

Definición de Binormal

Una binormal de un sólido θ es una cuerda con la propiedad de que los planos perpendiculares por los extremos de la cuerda, son planos soporte de la figura θ.

Teorema 6. Si en un sólido θ toda normal es binormal es porque θ es de ancho contante.

Teorema 7. En un sólido θ de ancho constante toda normal es binormal.

Teorema 8. Si toda sección transversal de un sólido θ es una figura de ancho constante es porque θ es una esfera.

CAPÍTULO III

En esta sección del documento, se realizarán las explicaciones a las dos partes que componen el problema, comenzando por la demostración de la segunda parte del problema y finalizando con la demostración de la primera parte del problema.

Explicación segunda parte

Para este apartado se va a explicar la respuesta a la segunda parte del problema 19 formulado por Ulam, que dice: *En particular, cuando la densidad es cero: Si un sólido descansa en equilibrio en cualquier posición en la que se le deje sobre una superficie plana horizontal, ¿deberá ser éste una esfera?"* (Montejano, 1989).

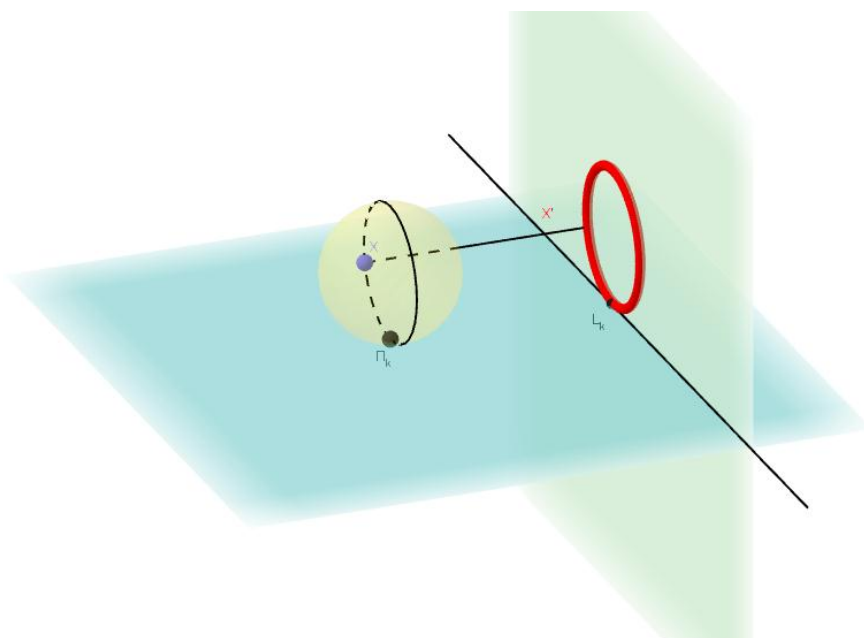
Primera parte de la demostración

Para determinar si este sólido deberá ser una esfera, vamos a clarificar con respecto al marco teórico si la esfera cumple con las propiedades para dar respuesta a la pregunta.

A partir del capítulo anterior ya se manifestó cuándo un sólido descansa en equilibrio, así podemos ver si la esfera es la que descansa en equilibrio con respecto a cualquiera de sus planos soporte, cuando la densidad es cero.

La superficie plana horizontal la podemos notar como π, puesto que la definición de plano soporte de un sólido, nos permite ver que el sólido θ se encuentra totalmente contenido en el semi-espacio determinado por el plano soporte π.

Por otra parte, se va a determinar si la esfera se encuentra en equilibrio con respecto a la superficie; existen unas proyecciones de la esfera a planos, para las cuales se puede notar que son circunferencias (ver figura: proyecciones de la esfera 1), podemos concluir que la intersección entre un plano y la esfera es una circunferencia.



proyecciones de la esfera 1

Esta última, es decir, la circunferencia como se ha mencionado es una figura de ancho constante, por definición de figura de ancho constante. Es evidente que la circunferencia tiene el mismo diámetro en cualquier dirección que se tome, así mismo, como se mostró en el capítulo anterior la circunferencia está en equilibrio con respecto a cualquiera de sus líneas soporte, como se mostró en el teorema 16.

Siendo K el centro de masas de la circunferencia y a su vez es el mismo centro de la circunferencia, el teorema 13 dice que existe un punto X que pertenece a la frontera de la circunferencia, para lo cual siempre existe una recta $l \perp \overline{XK}$ y la intersección entre esas dos es un único punto L_k. (ver figura: Figura 2.16, teorema 13).

Como bien ya se determinó para una de sus líneas soporte, siendo X cualquiera de sus puntos en la frontera, podemos determinar que la figura está en equilibrio con respecto a cualquiera de sus líneas soporte y evidentemente se confirma que es una circunferencia, bajo el teorema 16 citado en el apartado anterior.

Por las propiedades de la esfera al dejarla en la cualquier posición, la intersección con un plano (plano soporte en cualquiera de los casos, cuando la densidad sea cero) va a ser una circunferencia y esta, a su vez, ya se conoce que está en equilibrio con respecto a cualquiera de sus líneas soporte.

Segunda parte de la demostración

Ahora se va a determinar si el sólido está en equilibrio con respecto al ya nombrado plano π. Esto con respecto a la definición que se presentó en el capítulo anterior de equilibrio de un sólido con respecto a un plano soporte. Con base en la explicación anterior se deduce que π_k (Punto de intersección entre la recta que pasa por $k$centro de masas y es perpendicular a π) pertenece a la intersección entre el plano y la esfera. Por lo tanto, según la definición presentada la esfera esta en equilibrio con respecto al plano soporte.

Como queremos determinar el equilibrio de la esfera en cualquier posición en la que se le deje, no solamente con respecto a un plano soporte, vamos hacer uso del teorema 3 de la parte en la que se caracterizan los sólidos, que dice básicamente que si un sólido está en equilibrio con respecto a todos sus plano soporte, este va a estar en equilibrio en cualquier posición en la que se le deje, lo cual ya nos daría una gran respuesta al problema planteado por Ulam, puesto que únicamente nos faltaría por contestar que éste debe ser una esfera necesariamente.

Anteriormente ya notamos que la esfera con respecto a cualquiera de sus planos soporte, deja como intersección un punto (que sería L_k en este caso) y que a partir de la explicación esta estaría en equilibrio con respecto a ese plano, luego ya cumplimos lo que dice el teorema anterior, por tanto, la esfera está en equilibrio en cualquier posición en la que se le deje.

Por otra parte, para determinar la unicidad de la esfera, es necesario realizar un análisis. Partimos desde el hecho que, si un sólido θ está en equilibrio en cualquier posición en la que se le deje, seguramente sus proyecciones a planos sin importar la dirección también, que fue lo que se mostró en la primera parte de la explicación, sus proyecciones son circunferencias y estas están en equilibrio en cualquier posición en la que se le deje.

Ahora, vamos a ver que si la proyección del sólido θ no está en equilibrio el sólido tampoco lo está.

Suponemos la proyección ψ de un sólido θ en una dirección llamada d a un plano π_1 y la proyección ψ no se encuentra en equilibrio, posee también una recta soporte l y un punto T que no está en ψ. (ver figura: no está en equilibrio).

Entonces bajo la definición de equilibrio de una figura, los puntos de ψ están únicamente a un lado del punto L_k (recordemos que es la intersección entre la figura y la línea soporte) y a un lado de un punto T. Ahora, se construye un plano π paralelo a la dirección $d\ y\ l_1$ también paralelo a esta dirección que interseca a π_1 en T.

Luego, se concluye que π es un plano soporte del sólido θ y $l_1 \cap \theta = \emptyset$, así podemos ver que π_k se encuentra a un lado de los puntos en los que se intersecan el plano π y el sólido θ, entonces bajo las anteriores premisas se puede concluir que el sólido θ no está en equilibrio en cualquier dirección, con base en la definición.

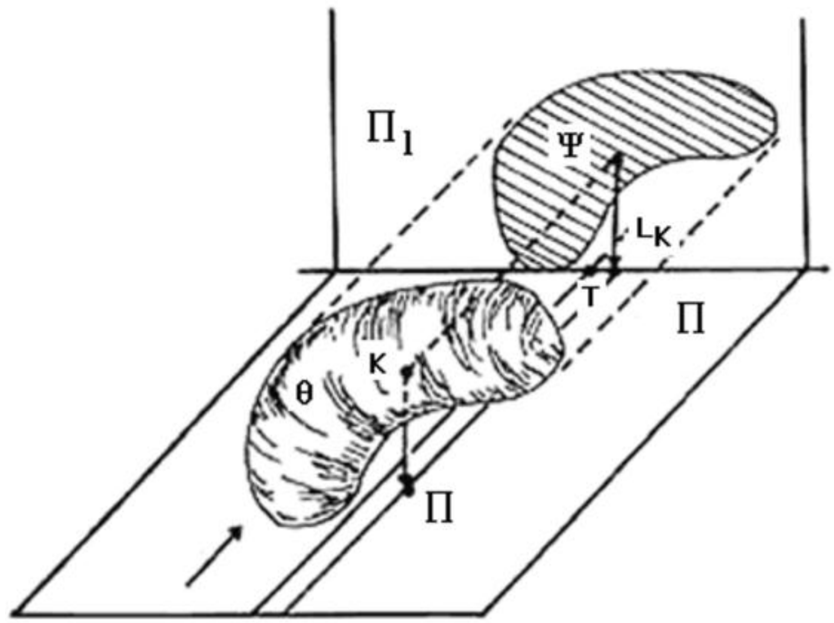


Figura tomada de: Montejano. La cara oculta de las esferas. (1998)

Con todo lo anterior, se puede concluir que si un sólido está en equilibrio en cualquier posición en la que se le deje, entonces todas sus proyecciones son circunferencias y así podemos usar el Teorema 4 (en la parte de los sólidos) citado en el capítulo anterior, que nos permite concluir que si un sólido está en equilibrio en cualquier posición en la que se deje, o bien en equilibrio con respecto a cualquiera de sus planos soporte, entonces dicho sólido es una esfera, puesto que todas sus proyecciones como se mostró son circunferencias y estas están en equilibrio en cualquier posición en la que se le deje, lo que responde a la segunda parte del problema de Ulam.

Explicación primera parte

Como se explicó en el capítulo anterior, se va a explicar la primera parte del problema formulado por Ulam, citado en el libro “Cuerpos de ancho constante” por Montejano (1998). “Si un sólido de densidad uniforme tiene la propiedad de flotar en equilibrio - sin voltearse o moverse- en cualquier posición en la que se le deje, ¿deberá ser éste una esfera?” (p. 93).

El problema mencionado anteriormente, tiene una solución parcial, la cual fue propuesta por Auerbach, quien formuló su respuesta en una versión bidimensional, por lo tanto, se va a trabajar con figuras planas y no con sólidos como se formuló inicialmente el problema.

Como se menciona en (Montejano, 1998). Un cilindro de densidad uniforme, tiene la propiedad de que mientras su eje transversal permanezca paralelo al suelo, flota sin voltearse, en cualquier posición en que se le deje. Auerbach, se dio cuenta que, cuando la densidad era igual a un medio (½), estos cilindros no eran necesariamente circulares.

Fue allí cuando demostró que unas curvas llamadas Curvas de Zindler, tienen la propiedad de tener una cuerda que corta el área y el perímetro de la figura exactamente a la mitad (la construcción de algunas de estas curvas ya se mostró en el marco teórico). Dichas curvas las encontró un matemático llamado Zindler en el año 1921 (Ver figura 2.29).

En la figura 2.29, se observa una curva de Zindler, la cuerda $\overline{QP}$, corta el perímetro y el área de la curva de Zindler a la mitad.

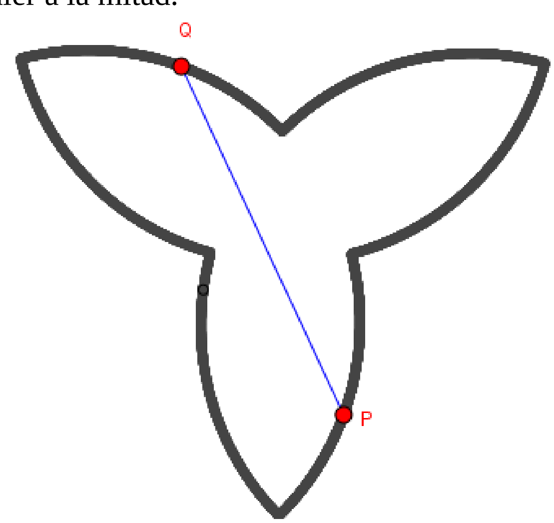


Figura 2.29.

Si se construyen cilindros, cuyas "tapas" no sean circunferencias, sino curvas de Zindler (ver figura 2.29), estos nuevos cilindros son solución al problema propuesto por Ulam, sin embargo, para densidades diferentes de 0 y ½, o para dimensión 3, el problema está aún sin resolverse.

Para determinar si las figuras de Zindler flotan en equilibrio, vamos hacer uso del capítulo II y del criterio en equilibrio citado en el mismo.

Por el criterio de flotar en equilibrio, se tiene que las curvas de Zindler tienen ρA de Área sumergida por el principio de Arquímedes, como para este caso la densidad es ½, por la definición de curva de Zindler, se tiene que la cuerda que queda sobre el nivel del agua, es la misma cuerda que divide el área y el perímetro a la mitad, es decir coinciden, pero como para cada posición de la curva de Zindler, existe una cuerda que divide al área y al perímetro a la mitad, entonces esta figura flota en equilibrio en cualquier posición, bajo la particularidad claro está de que la densidad sea igual a un medio.

A continuación, se ilustrará un ejemplo de una figura que flota en cualquier posición en que se le deje.
Se iniciará con una curva de Zindler, para este caso la obtenida a partir del triángulo de Relaux (ver figura mm).

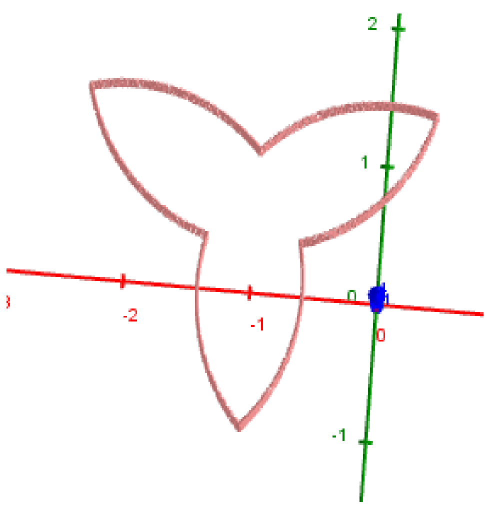


Figura 2.30.

En la figura 2.30 Se puede observar el cilindro formado con unas “tapas” de la curva de Zindler.

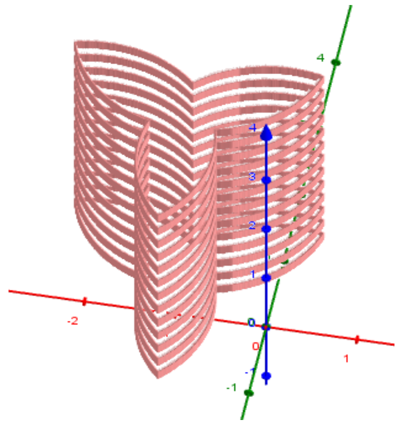


Figura 2.30

En la figura 2.31 se observa que el cilindro formado por una curva de Zindler, flota en equilibrio en cualquier posición en que se le deje, el plano azul, simboliza el nivel del Agua, y el segmento de color negro, simboliza la cuerda que corta el área y el perímetro de la figura a la mitad.

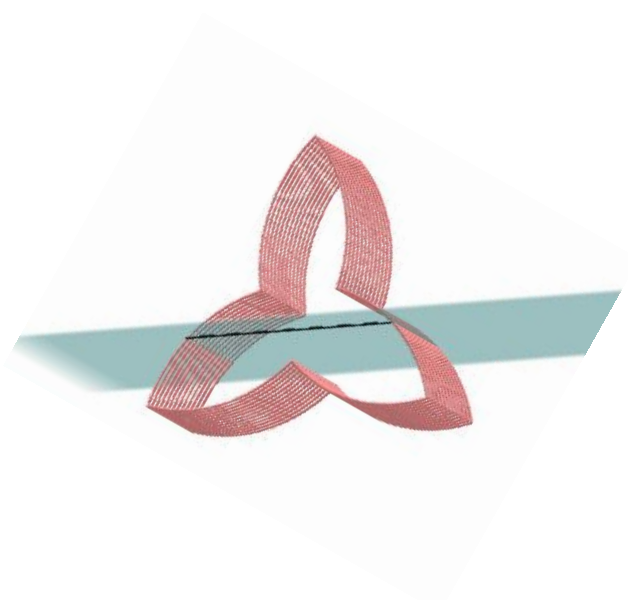


Figura 2.31.

Con esto último terminamos este capítulo, el cual tuvo la explicación de las soluciones hasta el momento encontradas, con relación al problema que interesó para la elaboración de este trabajo de grado.

CONCLUSIONES Y PROYECCIONES

El trabajo de grado, el escrito del documento, la consulta y el estudio de todo lo que se necesitó documentarse para la elaboración del mismo, permitió establecer las siguientes conclusiones

Conclusiones

Durante este trabajo de grado, hubo que consultar desde distintas fuentes todo lo relacionado con respecto a las curvas de Zindler y los cuerpos de ancho constante, a partir de allí se encontró un matemático, que escribió textos acerca de los temas de interés para este trabajo de grado y fue la base para la elaboración del mismo, encontrando en sus libros y conectando con la teoría las soluciones hasta el momento demostradas, para el problema Nº 19.

Se estudiaron diferentes figuras, definiciones y teoremas para dar respuesta al problema planteado por Ulam. Entre las cuales se encontraron dos respuestas, que corresponden a las dos partes en las que se divide el problema: la primera corresponde a las curvas de Zindler viendo desde una perspectiva bidimensional ye en particular cuando la densidad en $\frac{1}{2}$, la segunda solución que corresponde a una esfera cuando la densidad de la esfera es 0. Queda aún el interrogante ¿Existen diferentes sólidos que floten en equilibrio en cualquier posición en que se le deje sin voltearse?

El conocimiento matemático no surge solamente en las instituciones educativas, surge también en interacciones sociales fuera de las instituciones como de prácticas sociales, entendiendo una práctica social como una interacción entre personas, es decir, las matemáticas no se construyen únicamente en las universidades, ni en investigaciones, sino también se construyen por medio de diálogos entre amigos, colegas o familiares, despertado por intereses diversos a los académicos, que nacen de la curiosidad.

La teoría de las figuras de ancho constante aporta a soluciones del problema planteado por Ulam, bajo los elementos de esta teoría se demostró que la esfera es el único sólido que es respuesta a la segunda parte del problema. Así mismo, a partir de las figuras de ancho constante se llegó a las construcciones de las curvas de Zindler, las cuales son una solución parcial a la primera parte del problema.

Proyecciones

Aunque en los cursos que ofrece la Universidad Pedagógica Nacional, no se trataron las teorías de los cuerpos de ancho constante o las construcciones de las curvas de Zindler y sus propiedades, se pudo evidenciar que son unas teorías que se pueden llevar a la escuela o pueden ser objeto de estudio para un curso, de esta manera se tuvo una participación en la Jornada del Educador Matemático, con un taller en el cual se mostró parte de la teoría sobre las figuras de ancho constante y cómo identificar si dada una figura estas son de ancho constante o no, así mismo, se pueden establecer con geometría dinámica la construcción de las llamadas curvas de Zindler y a través de la exploración, identificar propiedades y depende la dificultad del curso llegar a demostrarlas.

Por último, es importante notar que este trabajo de grado está basado en figuras en el plano, podría ser de interés llevar todo lo aprendido en cuanto a las construcciones al espacio, es decir con sólidos e intentar generalizar la construcción de las curvas de Zindler con los sólidos, así mismo, llegar a explorar las propiedades y ver la relación de estas con las construidas en el plano.

BIBLIOGRAFÍA

Montejano, L (1997). La cara oculta de las esferas. México D.F.: Fondo de Cultura Económica.

Montejano, L. (1998). Cuerpos de ancho constante. México D.F.: Fondo de Cultura Económica.

Gil, L. Orjuela, M (2012). Figuras de ancho constante un tema por explorar. (Tesis de pregrado). Universidad Pedagógica Nacional.

Lecturas matemáticas. Universidad de los Andes. (29, 30, 31, 35 y 36). Colombia.
Mathematical reports. Romanian Academy. Digital. Rumania.

Revista Colombiana de Matemáticas. Universidad Nacional (Versión Digital). Colombia.

Revista Colombiana de Matemáticas. Universidad Nacional. (Vol 41, 42, 43, 44). Colombia.

Boletín de Matemáticas. Universidad Nacional (Versión Digital). Colombia

Comunicaciones en matemáticas. Universidad Libertadores (Versión Digital). Colombia

Mathematica Scandinava. Universidad de Aarhus, Dinamarc (Versión Digital). Dinamarca

Sangakoo (2017). El cuaderno escocés. Sangakoo maths for life. Recuperado de https://sangakoomaths4life.wordpress.com/tag/problemas-matematicos/

JOC/FER (2000). Stanisław Meiczyslaw Mazur. Recuperado de http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history//Biographies/Mazur.html

Sanchez, G. (2009). Científicos olvidados: Stanislaw Ulam. Recuperado de http://elneutrino.blogspot.com.co/2009/04/cientificos-olvidados-stanisaw-ulam.html

equipo de buscabiografias.com. (1999). Stefan Banach. Recuperado de http://www.buscabiografias.com/biografia/verDetalle/8629/Stefan%20Banach

Rosales, A. (2012). Matemáticos del día Matemalescopio. Recuperado de http://matemalescopio.over-blog.es/article-matematicos-del-dia-95827022.html

Duran, A. (2017). Historias del café Escocés 4. Blog del instituto de matemáticas de la universidad de Sevilla. Recuperado de https://www.imus.us.es/blogdim/2017/03/historias-del-cafe-escoces-4-los-premios-del-cuaderno-escoces/