# ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA EN PROBLEMAS DE CONSTRUCCIÓN CON ESTUDIANTES DE GRADO SEXTO

**MARÍA ALEJANDRA CALDERÓN GONZÁLEZ**

**2011240013**

**JOSÉ RICARDO TAMAYO PICUASI**

**2011240067**

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL**

**FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA**

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**

**LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS**

**BOGOTÁ, D.C.**

**2016**

# ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA EN PROBLEMAS DE CONSTRUCCIÓN CON ESTUDIANTES DE GRADO SEXTO

**MARÍA ALEJANDRA CALDERÓN GONZÁLEZ**

**2011240013**

**JOSÉ RICARDO TAMAYO PICUASI**

**2011240067**

**Tesis presentada para optar el título de licenciado(a) en Matemáticas**

**Directora:**

**LEONOR CAMARGO URIBE**

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL**

**FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA**

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**

**LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS**

**BOGOTÁ, D.C.**

**2016**

*Dedicamos este trabajo de grado a nuestras familias por el apoyo brindado en este proceso de formación, por su paciencia y por creer en nosotros.*

# AGRADECIMIENTOS

*A la profesora Eliana Martínez por abrirnos las puertas de su aula y por brindarnos su apoyo incondicional para el proceso de recolección de datos. A la profesora Margarita Rojas de Roa por sus aportes al diseño de la secuencia. De igual forma, a los estudiantes por su disposición, buena acogida, por hacer esta experiencia significativa y por sus ocurrencias que alegraban cada una de las clases.*

*Al grupo de investigación de Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría por escuchar nuestras propuestas, y hacer críticas constructivas que nos ayudaron a avanzar en el desarrollo del trabajo. Especialmente, agradecemos a la profesora Leonor Camargo Uribe por orientarnos en este proceso, por su paciencia, entrega, dedicación, aportes y sugerencias; que no solo nos sirvieron para este trabajo sino también para nuestra formación profesional y personal.*

# RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN (RAE)

| **1. Información General** | |
|---|---|
| **Tipo de documento** | Trabajo de Grado. |
| **Acceso al documento** | Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central. |
| **Título del documento** | Actividad demostrativa en problemas de construcción con estudiantes de grado sexto. |
| **Autor(es)** | Calderón González, María Alejandra; Tamayo Picuasi, José Ricardo |
| **Director** | Leonor Camargo Uribe. |
| **Publicación** | Bogotá D.C., Universidad Pedagógica Nacional, 2016, 100 p. |
| **Unidad Patrocinante** | Universidad Pedagógica Nacional. |
| **Palabras Claves** | ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA; PROBLEMAS DE CONSTRUCCIÓN; GEOMETRÍA DINÁMICA; ARGUMENTACIÓN. |

| **2. Descripción** |
|---|
| En este documento se da a conocer un estudio realizado en grado sexto de Educación Básica que se llevó a cabo en una institución pública ubicada en la ciudad de Bogotá. El objetivo general de la investigación era elaborar, implementar y evaluar una propuesta para fomentar los procesos de la actividad demostrativa a temprana edad, a partir de la elaboración de problemas de construcción resueltos con el apoyo de un programa de geometría dinámica. En el estudio se propuso encontrar evidencias de las acciones de la actividad demostrativa obtenidas al involucrar a los estudiantes en una secuencia de enseñanza. Adicionalmente, se identificó el avance, de algunos estudiantes del |

curso, en la argumentación para validar o invalidar propuestas de construcción. El desarrollo de la investigación se llevó a cabo en momentos: primero, elaboración del marco teórico, planeación e implementación; segundo, registro de la actividad desarrollada por los estudiantes y transcripción de los videos de las sesiones de clase; tercero, análisis de las producciones de los estudiantes al solucionar los problemas propuestos y participar en la puesta en común.

**3. Fuentes**

Para el presente estudio se utilizaron principalmente, las siguientes fuentes bibliográficas:


Barbosa, F. & Escobar, J. (2014). *La demostración en Geometría: Una mirada en la Educación Primaria*. (Tesis de Maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá D.C., Colombia.

Bolívar, C. & Martín, M. (2010). *Caracterización de la actividad demostrativa. Una experiencia en secundaria*. (Tesis de Maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá D.C., Colombia.

Franco, B. & Moreno, G. (2011). *La argumentación como núcleo de la Actividad Demostrativa.* (Tesis de Maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá D.C., Colombia.

Healy, L. (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri constructions. En T. Nakahara & M. Koyama (Eds.) *Proceedings of the Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education. PME 24th.* (pp. 103 - 117) Japan: Hiroshima University.

Leung, A. (2014). *Principles of acquiring invariant in mathematics task design: a dynamic geometry example*. Hong Kong Baptist University.

Luque, C. Ávila, J., & Soler, M. (2013). *Actividades Matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: razonar*. (pp. 35 - 46) Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional, CIUP.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). Estándares Básicos de Competencia Matemática. En MEN, *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas* (pp. 46-95). Colombia: Proyecto editorial y coordinación.

Molina, M., Castro, E., Molina, J.L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), (pp. 75–88)

Perry, P., Samper, C., Camargo, L., & Molina, O. (2013). Innovación en el aula de geometría de nivel universitario. En C. Samper, & O. Molina, *Geometría Plana* (pp. 11-34). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Pinzón, I. & Rodríguez, A. (2011). *Acciones del profesor que favorecen el desarrollo de la Actividad Demostrativa en grado Noveno*. (Tesis de Maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá D.C., Colombia.

**4. Contenidos**

Este documento consta de cinco capítulos. En el primero se presenta la justificación, la presentación del problema, las preguntas de indagación y los objetivos. El segundo capítulo trata sobre el marco de referencia; se describen la actividad demostrativa propuesta por el grupo de investigación y las modificaciones que se realizaron con el fin de analizar los resultados obtenidos con los estudiantes de grado sexto. El tercer capítulo presenta la metodología utilizada en la investigación; se incluye: el tipo de estudio, la fase de preparación del experimento, la fase de experimentación y la fase de análisis retrospectivo. El cuarto capítulo trata sobre el análisis de los resultados; para ello, se tuvieron en cuenta las características mencionadas en el marco de referencia. En el quinto capítulo se presentan las conclusiones obtenidas en la investigación. Finalmente, se presenta la bibliografía consultada y los anexos.

| 5. Metodología |
|---|
| Siguiendo el procedimiento descrito en el capítulo de metodología del trabajo, la investigación se llevó a cabo por medio de la implementación de un experimento de enseñanza. Este buscaba promover la actividad demostrativa y los procesos de argumentación de estudiantes de grado sexto. De los cinco problemas que se propusieron en la secuencia de enseñanza, se tomó registro en video de las producciones que realizaron las parejas de trabajo formadas en la clase de geometría. A partir de los datos obtenidos en su desarrollo, se procedió al realizar su respectivo análisis. Para el análisis de la información construimos un instrumento cuya estructura permite organizar las acciones de la actividad demostrativa realizada por los estudiantes en la resolución de los problemas. |

| 6. Conclusiones |
|---|
| Las conclusiones se clasificaron en los siguientes aspectos:<br><br>*Acerca de los objetivos*: el alcance de los objetivos se dio de manera parcial. Aunque los estudiantes desarrollaron actividad demostrativa y argumentaron, no siempre produjeron argumentos teóricos. Los argumentos empíricos tuvieron mayor fuerza al momento de presentar justificaciones de las propuestas de solución presentadas por los diferentes grupos de estudiantes.<br><br>*Con respecto a la herramienta analítica:* consideramos que es útil para mostrar de manera explícita las acciones que están involucradas en la actividad demostrativa. Así, pudimos detectar momentos en que los estudiantes anticipan invariantes, verifican los invariantes, formulan conjeturas y las corroboran, así como los tipos de argumentos presentados.<br><br>*Acerca de la proyección académica*: teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la presente investigación se espera en una próxima ocasión promover las acciones de la actividad demostrativa, en cursos de la Básica Primaria. |

| | |
|---|---|
| **Elaborado por:** | Calderón González, María Alejandra<br><br>Tamayo Picuasi, José Ricardo |
| **Revisado por:** | Leonor Camargo Uribe |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Fecha de elaboración del Resumen:** | 25 | 07 | 2016 |

# TABLA DE CONTENIDO

# LISTA DE TABLAS



# LISTA DE FIGURAS

# INTRODUCCIÓN

En este documento se da a conocer un estudio realizado en grado sexto de Educación Básica, que se llevó a cabo en una institución pública ubicada en la ciudad de Bogotá, con el objetivo de elaborar, implementar y evaluar una propuesta para fomentar los procesos de la actividad demostrativa a temprana edad, a partir de la elaboración de problemas de construcción resueltos con el apoyo de un programa de geometría dinámica. Se propuso encontrar evidencias de las acciones de la actividad demostrativa obtenidas al involucrar a los estudiantes en una secuencia de enseñanza. Adicionalmente, se pretendió identificar el avance de algunos estudiantes del curso en la argumentación para validar o invalidar propuestas de construcción. El desarrollo de la investigación se llevó a cabo en tres momentos: primero, elaboración del marco teórico, planeación e implementación; segundo, registro de la actividad desarrollada por los estudiantes y transcripción de los videos de las sesiones de clase; tercero, análisis de las producciones de los estudiantes al solucionar los problemas propuestos y participar en la puesta en común.

El trabajo consta de cinco capítulos: En el primer capítulo, presentamos la situación problemática; damos a conocer la justificación de por qué es importante realizar la investigación, presentamos el problema, las preguntas de investigación, el objetivo general y los objetivos específicos que buscan dar respuesta a las preguntas de investigación.

En el segundo capítulo, damos cuenta del marco teórico que da soporte a la investigación. Este tiene que ver con la actividad demostrativa, propuesta por el equipo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría *(Æ·G)* de la Universidad Pedagógica Nacional y la propuesta de actividad demostrativa en problemas de construcción, que propusimos como fundamento para el análisis.

En el tercer capítulo, presentamos la metodología implementada en la investigación, con la que pretendimos dar cumplimiento a los objetivos propuestos y responder las preguntas de investigación. La metodología está estructurada a partir de los siguientes aspectos: la perspectiva investigativa; la contextualización del estudio, en la que se caracterizan los estudiantes; el diseño experimental que abarca el experimento de enseñanza y las fuentes de recolección de la información; el dispositivo analítico en donde se expone la manera como se analiza la producción de los estudiantes en el desarrollo de la secuencia de enseñanza.

El cuarto capítulo, contiene los análisis y resultados obtenidos en la implementación de la secuencia de enseñanza. Se presenta una breve descripción de episodios sucedidos en cada problema de construcción propuesto; el registro de las acciones de la actividad demostrativa para cada problema; la identificación y esquematización de los argumentos de los estudiantes.

En el quinto capítulo, se presentan las conclusiones de la investigación, teniendo en cuenta: el cumplimiento de los objetivos; la respuesta a las preguntas de investigación; la proyección del trabajo y los aprendizajes logrados con la realización del mismo.

# 1. SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

En este capítulo damos a conocer el problema que pretendemos atender. Para ello, justificamos por qué es pertinente el presente estudio, concretamos el problema que pretendimos abordar, listamos las preguntas de indagación y definimos los objetivos con los que se busca dar respuesta a las preguntas de indagación.

## 1.1 Justificación

De acuerdo a lo establecido por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006), uno de los procesos matemáticos que se debe fomentar en la escuela, para que una persona sea matemáticamente competente es: "Usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración" (p. 51). En nuestras prácticas educativas, hemos podido identificar que dicho proceso comúnmente no se impulsa en las aulas de matemáticas. Por tal razón, es importante proponer, experimentar y evaluar secuencias de enseñanza que busquen propiciar actividades que involucren la argumentación, la prueba, y la refutación, y que permitan a los estudiantes experimentar actividad matemática genuina.

Un dominio matemático en donde ello es factible es en geometría, pues se pueden fomentar actividades en las que los estudiantes se enfrenten a justificar una determinada afirmación, teniendo en cuenta el conocimiento empírico y teórico que posean sobre un conjunto de definiciones y afirmaciones establecidas previamente en clase, y que el grupo de estudiantes asuma como ciertas. En los Estándares Básicos de Competencia Matemática (MEN, 2006), se dice que el pensamiento geométrico se fundamenta a partir del pensamiento lógico; este último, propicia que los individuos sepan dar y pedir razones, probar o refutar afirmaciones; así, se contribuye al aprendizaje de la argumentación. En relación con los procesos de aprendizaje de la demostración el MEN (2006) plantea que los estudiantes del cuarto ciclo (grados octavo y noveno) deben alcanzar los siguientes desempeños:

> “-Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.
>
> -Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.” (p. 86).

Sin embargo, en los conjuntos de grados (1° a 7°), precedentes al cuarto ciclo, se enfatiza en el desarrollo de procesos que se centran en la visualización (por ejemplo: diferenciar, comparar, reconocer, identificar, verificar, etc.) para propiciar el logro de los estándares mencionados. De acuerdo a ello se evidencia que se sugiere dedicar mucho tiempo al proceso de reconocer propiedades visualmente y no se propicia la argumentación, que permita a los estudiantes involucrarse en la validación y la demostración en dichos grados.

Por lo anterior, vemos pertinente valernos de los avances logrados por el equipo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (Æ·G) de la Universidad Pedagógica Nacional, para diseñar, implementar y evaluar una propuesta de enseñanza, que permita a estudiantes de grado sexto desarrollar algunas de las acciones propias de la actividad demostrativa[1] y avanzar en la argumentación, con el fin de preparar el terreno para aprender a demostrar.

## 1.2 Presentación del problema

Al revisar algunas tesis de maestría escritas por profesores en ejercicio vemos que nuestra apreciación sobre la falta de espacios, previos a octavo grado, para impulsar la argumentación, es compartida por ellos. Por eso cuando intentan desarrollar argumentación en las clases de geometría tienen muchas dificultades. En la formulación de sus estudios investigativos Bolívar & Martín (2010), Franco & Moreno (2011), Pinzón & Rodríguez

[1] Constructo que articula los procesos conjeturación y justificación.

(2011), Barbosa & Escobar (2014), señalan que en las clases de geometría generalmente no se desarrollan actividades en las que se vea favorecido el uso de argumentos. En particular, Franco & Moreno (2011) mencionan que la geometría que ellos desarrollaban en sus clases de secundaria, antes de su investigación, no respondía a las expectativas que se plantean en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, debido a que no propiciaban en los estudiantes la práctica argumentativa. Los autores mencionados presentaban los contenidos de manera informativa, como algo que deberían conocer. Si esto es lo que sucede en dichos grados, que, según los Estándares, es en donde se debe promover la justificación, es de suponer que en los grados inferiores no se fomente el desarrollo de actividades en las que los estudiantes realicen conjeturas y las argumenten.

Como muy probablemente en los cursos inferiores no se promueve una práctica argumentativa, no es fácil que en grados octavo y noveno los estudiantes se involucren en un ambiente diferente al que están acostumbrados; es decir, en el que tengan que argumentar y justificar propiedades que muchas veces son evidentes para ellos y que quizás conocían a través de la exploración empírica. Evidencia de ello es presentada por Franco & Moreno (2011) quienes al enfrentar a sus estudiantes de octavo por primera vez a una metodología en la que solicitaban justificaciones a sus estudiantes, encontraron que la mayoría de los argumentos que utilizaban eran intuitivos e informales.

Por lo tanto, se evidencia una ruptura entre el acercamiento a la geometría en los primeros grados de secundaria y la geometría de octavo y noveno. Por esta razón, los estudiantes probablemente tendrán dificultades en el paso de lo empírico a lo teórico durante su año escolar, llegando así a experimentar desinterés para justificar propiedades usando garantías teóricas. Así que, se ve necesario intentar propiciar la argumentación en grados inferiores al grado octavo.

### 1.3 Preguntas de indagación

Teniendo en cuenta la problemática dada a conocer en la sección precedente, planteamos, como hipótesis, que una forma de contribuir a evitar la ruptura mencionada, consiste en iniciar a los estudiantes en las prácticas de la argumentación desde grado sexto o antes, mediante problemas de construcción que ellos deben resolver con el apoyo de un programa de geometría dinámica. En ese sentido, las siguientes preguntas son orientadoras de la presente investigación.

- ¿Qué características tienen los procesos de la actividad demostrativa que realizan los estudiantes de sexto cuando se enfrentan a problemas de construcción con el apoyo de un programa de geometría dinámica?
- ¿Qué tipo de argumentos se promueven cuando la metodología de la clase se centra en invalidar y validar diferentes construcciones?

## 1.4 Objetivos

### Objetivo General

Elaborar, implementar y evaluar una propuesta para fomentar la argumentación, en el marco de la actividad demostrativa a temprana edad, a partir de la resolución de problemas de construcción resueltos con el apoyo de un programa de geometría dinámica.

### Objetivos específicos

- Elaborar una propuesta de actividad demostrativa para la escuela asociada a problemas de construcción.
- Diseñar una secuencia de enseñanza para desarrollar algunos contenidos de la geometría de grado sexto, centrada en las ideas de equidistancia y congruencia de segmentos.
- Describir la actividad demostrativa de los estudiantes al resolver los problemas propuestos en la secuencia.
- Caracterizar la argumentación desarrollada por los estudiantes al resolver los problemas de la secuencia.

# 2. MARCO DE REFERENCIA

En este capítulo se presentan los referentes teóricos que sirvieron como guía para analizar las producciones de los estudiantes. La elaboración es fruto del estudio y reformulación de algunos referentes investigativos.

## 2.1 Actividad demostrativa

Según Perry, Samper, Camargo, & Molina (2013), la actividad demostrativa se compone de dos procesos: el de conjeturación y el de justificación. Ambos procesos tienen una estrecha relación, en tanto que se pretende justificar lo conjeturado. En una situación óptima, una vez formulada una conjetura, fruto de un trabajo de exploración empírica, esta debería ser justificada por quien la formuló.

Los autores antes mencionados señalan que el proceso de conjeturación está conformado por acciones que aportan al objetivo principal de este proceso, que es la formulación de conjeturas. Estas últimas, son entendidas como un enunciado de carácter condicional, es decir, un enunciado que parte de un antecedente para llegar a un consecuente, de tal manera que este último es conclusión necesaria del primero. Las conjeturas son obtenidas luego de observar minuciosamente características invariantes en un objeto de estudio, y que son desconocidas por el observador. Una vez se tiene la convicción de su veracidad, se hace necesario someterlas a un proceso de justificación para incluirlas dentro del conjunto de enunciados válidos y poder usarlas como garantías para justificar conjeturas posteriores.

Dentro del proceso de conjeturación, Perry et al. (2013) mencionan que el sujeto realiza acciones, tales como:

(i) Detectar invariantes, es decir, encontrar propiedades de un objeto geométrico o relaciones entre sus partes que se mantienen aunque otras varíen, y que son diferentes a aquellas que fueron utilizadas en su construcción, si es el caso. En un entorno de geometría dinámica, los invariantes se hacen evidentes al arrastrar elementos de la representación que se explora. Por ejemplo: Un estudiante construye un paralelogramo a partir de segmentos paralelos. Después de ello, construye las diagonales del paralelogramo y arrastra los vértices. El dinamismo le permite modificar las dimensiones del cuadrilátero y verificar que el paralelismo de los lados se conserva. Si descubre, además, que en el paralelogramo construido las diagonales siempre se bisecan, ha detectado un invariante (figura 2.1).

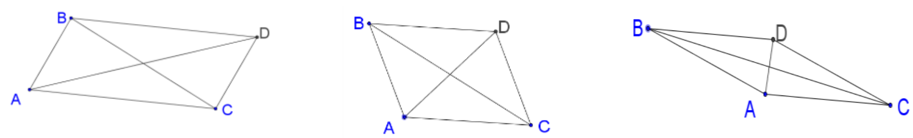



***Figura 2. 1*** *Invariante de las diagonales de un paralelogramo evidenciado al someter la figura al arrastre*

(ii) Verificar invariantes, es decir, que las propiedades detectadas en el objeto geométrico de estudio, no se modifican en ningún caso. Haciendo uso del ejemplo del paralelogramo, cuando el estudiante mide los segmentos en que se dividen las diagonales por el punto de intersección y mueve los vértices de este, con el objetivo de comprobar lo descubierto, verifica que el invariante encontrado parece cumplirse para todos los paralelogramos. En algunos casos, la verificación implica comprobar el cumplimiento de la propiedad en situaciones extremas, o no prototípicas, en donde pueda haber una sospecha de no cumplirse. (figura 2.2).

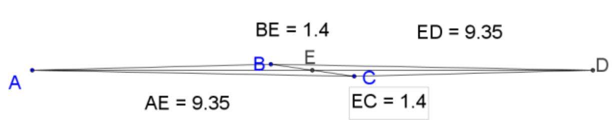



***Figura 2. 2*** *Representación no prototípica del paralelogramo, para verificar un invariante*

(iii) Formular conjeturas, es decir, dar a conocer descubrimientos matemáticos (en este caso, geométricos) resultado de haber verificado una propiedad en casos particulares. En la presentación de la conjetura se hace uso de términos matemáticos y el conectivo proposicional de implicación, con la estructura “Si… entonces…”. A manera de ejemplo, la conjetura que alude al invariante mencionado anteriormente es: “Si el cuadrilátero es un paralelogramo, entonces, sus diagonales se bisecan”.

(iv) Corroborar las conjeturas, es decir, revisar si la información suministrada en el antecedente es suficiente para llegar a las propiedades del objeto geométrico mencionadas en el consecuente, y si el consecuente es el único que se puede obtener a partir de la información presentada en el antecedente. Puede suceder que un estudiante, enfrentado al problema del paralelogramo, escriba la siguiente conjetura: “Si el polígono es un cuadrilátero, entonces, sus diagonales se bisecan”. Para corroborarla, construye un cuadrilátero con sus diagonales, toma medidas de los segmentos en que se dividen las diagonales y note que estas no siempre se bisecan. Es decir, se da cuenta que el antecedente expuesto por él no es suficiente para llegar al consecuente y que su conjetura no se sostiene. También podría proponer una conjetura como: “Si el cuadrilátero es un paralelogramo, entonces, sus diagonales son perpendiculares”. Para corroborarla, construye un paralelogramo con sus diagonales, toma la medida de los ángulos determinados por estas últimas y nota que no siempre son ángulos rectos; es decir, que lo expuesto en el antecedente no conduce a lo mencionado en el consecuente.

Por otra parte, Perry et al. (2013) señalan que el proceso de justificación tiene como objetivo presentar argumentos de carácter deductivo, esto con el fin de validar la conjetura presentada dentro del sistema teórico en el que se está trabajando. Los investigadores mencionan que dentro de dicho proceso es posible reconocer tres acciones:

(i) Seleccionar un conjunto de elementos teóricos o empíricos, que pueden servir como referentes para sustentar las conjeturas. Es decir, una vez planteada una conjetura, el estudiante reconoce los objetos geométricos involucrados y selecciona propiedades que conoce de estos, o recurre a su bagaje de conocimientos del sistema teórico (en el que están trabajando) con el fin de extraer elementos que los orienten al hallazgo de posibles vías de argumentación de la conjetura. Por ejemplo, si un estudiante quiere justificar la propiedad hallada para el paralelogramo, puede buscar propiedades para vincular la propiedad de los lados opuestos paralelos con la propiedad detectada, o puede buscar en el sistema teórico establecido, hechos que le permitan llegar a la congruencia entre segmentos.

(ii) Organizar los elementos escogidos dentro de un esquema deductivo. Es decir, una vez identificados los elementos pertinentes para la justificación, el estudiante los presenta mediante argumentos deductivos. Por ejemplo, un estudiante puede realizar una representación como la de la figura 2.3, y proponer una estrategia como la siguiente: "Teniendo en cuenta que el cuadrilátero es un paralelogramo, se puede establecer la congruencia de los ángulos alternos internos, y entre los lados opuestos; se tienen dos triángulos congruentes por el criterio de congruencia ALA (ángulo-lado-ángulo). Y como en los triángulos congruentes, las partes correspondientes también son congruentes, se afirma que $\overline{AE} \cong \overline{ED}$ y $\overline{BE} \cong \overline{EC}$, y en ese sentido $E$ es el punto medio de $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ , por lo tanto, los dos segmentos se bisecan".

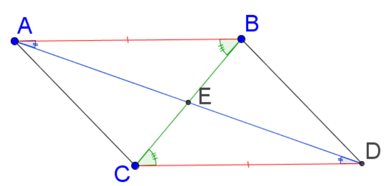



***Figura 2. 3*** *Representación realizada para orientar los pasos de la justificación*

(iii) Formular la justificación, es decir, demostrar la conjetura dentro de un sistema teórico en el que se está trabajando, encadenando deductivamente los elementos escogidos. Por ejemplo, un estudiante que ha cursado *elementos de geometría*[2] en la Universidad Pedagógica Nacional puede realizar una justificación como la siguiente:

Teniendo en cuenta que el $\square ABDC$ es un paralelogramo, se puede afirmar que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Teniendo en cuenta la última afirmación, y que $\overline{AD}$ y $\overline{CB}$ se intersecan con los segmentos paralelos, se puede afirmar que $\angle ABC \cong \angle BCD$ y

[2] Asignatura de primer semestre, cursada por nosotros.

$\angle BAD \cong \angle ADC$, porque $\angle ABC$ y $\angle BCD$ son alternos internos, al igual que $\angle BAD$ y $\angle ADC$. Como $\overline{BC} \cap \overline{AD} = \{E\}$ entonces $E \in \overline{CB}$ y $E \in \overline{AD}$; en ese sentido, se puede afirmar que $\angle ABE \cong \angle ECD$ y $\angle BAE \cong \angle EDC$. Como se tiene que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\angle ABE \cong \angle ECD$ y $\angle BAE \cong \angle EDC$, por el criterio de congruencia ALA (ángulo-lado-ángulo), se puede afirmar que $\triangle ABE \cong \triangle DCE$. Y como las partes de triángulos congruentes también son congruentes, se tiene que $\overline{BE} \cong \overline{EC}$ y $\overline{AE} \cong \overline{ED}$. Sabiendo que $E \in \overline{CB}$ y $E \in \overline{AD}$ se puede afirmar que $E$ es punto medio de $\overline{CB}$ y que $E$ es punto medio de $\overline{AD}$, por la definición de punto medio. Por último, se puede afirmar que $\overline{AD}$ y $\overline{CB}$ se bisecan".

Entre los procesos relacionados con la actividad demostrativa Perry et al. (2013) mencionan a la visualización y a la exploración. Según ellos, la visualización va más allá de observar, ya que implica reconocer propiedades o relaciones geométricas de una construcción propuesta, de tal manera que se obtenga información acerca de si una construcción propuesta es la del objeto geométrico deseado. En cuanto a la exploración, es una acción en la que se verifican las propiedades y relaciones, haciendo uso de opciones como medir, construir, comparar, comprobar propiedades y arrastrar –al hacer uso de geometría dinámica– (Pinzón & Rodríguez, 2011), o se buscan enunciados en los cuales pueda apoyarse para la justificación.

### 2.2 Actividad demostrativa en problemas de construcción

Consideramos que tal como está descrita por Perry et al. (2013), la actividad demostrativa es un constructo que se encuentra estrechamente relacionado a problemas de conjeturación, en los que se favorece el descubrimiento de invariantes. Es decir, problemas en donde los estudiantes exploran una representación en busca de propiedades desconocidas por ellos. Pero llegar a proponer problemas de conjeturación a estudiantes no familiarizados con las propiedades que determinan los objetos geométricos y que apenas comienzan a usar un programa de geometría dinámica, se requiere de un acercamiento previo a los procesos que están involucrados en la actividad demostrativa, que nosotros decidimos comenzar con problemas de construcción, los cuales entendemos como problemas en los que los estudiantes deben encontrar cómo hacer una construcción que responda a las condiciones dadas en el enunciado del problema. Esto nos llevó a repensar la actividad demostrativa cuando los estudiantes se enfrentan a problemas de construcción y se quiere que formulen una conjetura en donde se reporten los pasos de cómo construir un objeto geométrico y justifiquen por qué la construcción propuesta conduce al objeto deseado.

A continuación, presentamos la adaptación que hacemos de la propuesta de actividad demostrativa presentada por el equipo de investigación *Æ•G*, con la cual analizamos la posibilidad de introducir a estudiantes de sexto grado a dicha actividad. La construcción de dicha propuesta se hizo a partir de interpretar las ideas surgidas en discusiones realizadas durante algunas reuniones del equipo de investigación, en donde planteamos la dificultad de usar el constructo tal como lo propone el grupo.

En la figura 2.4 se presenta esquemáticamente nuestra propuesta sobre cómo ver la actividad demostrativa en problemas de construcción. Al igual que como la proponen Perry et al. (2013) ésta involucra los procesos de conjeturación y de justificación.

De igual forma, ubicamos en el proceso de *conjeturación* aquellas acciones que tienen como finalidad generar conjeturas con estructura condicional de la forma "Sí… entonces…". Pero, para el caso de los problemas de construcción, la conjetura se encuentra estrechamente relacionada con proponer una construcción. Por lo tanto, el antecedente estará formado por los pasos usados en la construcción y el consecuente es el objeto geométrico deseado. Es ideal que la conjetura posea las características suficientes y necesarias; es decir, en el antecedente se deben presentar todos los pasos de construcción que son indispensables para obtener el consecuente. En este último se deben presentar todos los objetos geométricos que se obtienen, siguiendo los pasos de construcción del antecedente.

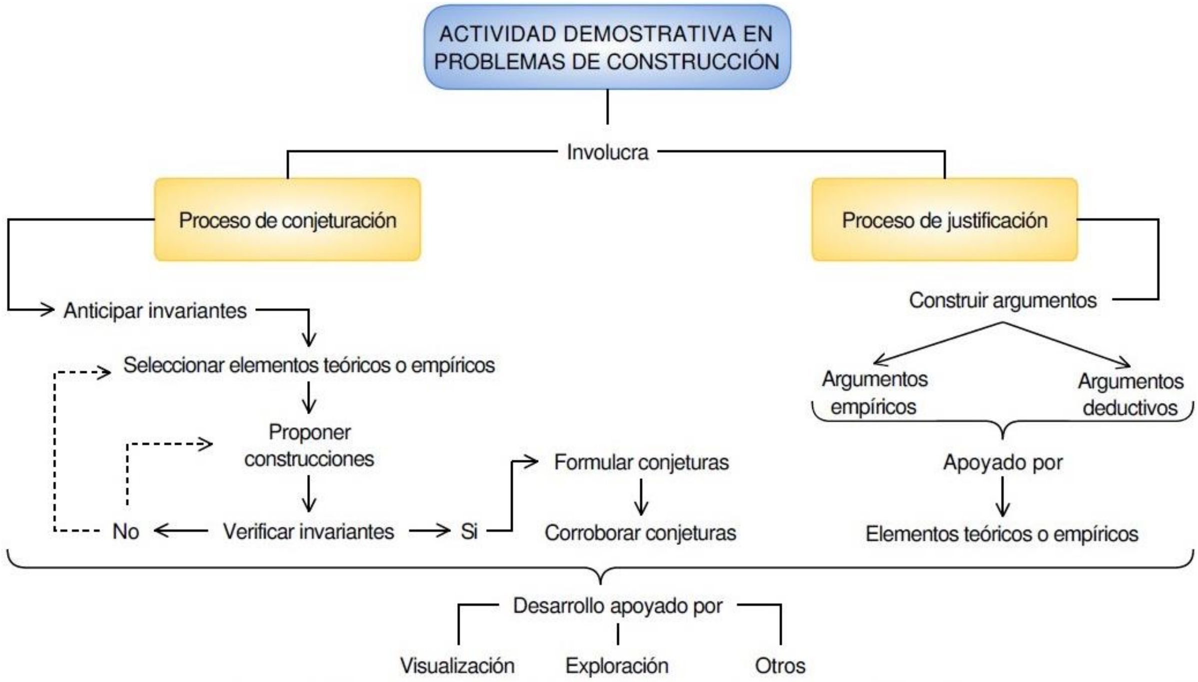



***Figura 2. 4*** *Esquema de la actividad demostrativa en problemas de construcción propuesta por los autores*

Las acciones involucradas en el proceso de conjeturación, son:

i. *Anticipar invariantes*, es decir, predecir qué propiedades del objeto geométrico se deben considerar para dar solución al problema de construcción. Para ello, el estudiante busca en su bagaje de conocimientos acerca de los objetos geométricos de interés y las propiedades que poseen. Todo esto, antes de realizar alguna propuesta de construcción. Por ejemplo, al proponer, a manera de reto, la construcción de un triángulo isósceles, puede suceder que acuda a la imagen prototípica que tiene de este, como aquel con dos lados y dos ángulos congruentes. De ahí que anticipe, como solución al problema, una construcción en la que busque garantizar que dos de sus lados sean congruentes, o que dos de sus ángulos sean congruentes. Esta acción reemplaza a la de detectar invariantes (sugerida por Perry et al. 2013), debido a que en los problemas de construcción el estudiante no encuentra una propiedad a partir de detectar un invariante, sino que usan la propiedad que consideran invariante.

ii. *Seleccionar elementos teóricos o empíricos que puedan ser útiles en la construcción,* es decir, el estudiante revisa los conocimientos que tiene de geometría o construcciones anteriores, con el fin de determinar qué objetos geométricos serán los que permitan hacer la construcción deseada, con las propiedades identificadas en la acción de anticipar invariantes. Por ejemplo, en el caso del problema de construir un triángulo isósceles, puede revisar en sus conocimientos geométricos e identificar que una alternativa para dar solución al problema, es hacer uso de una circunferencia para garantizar la congruencia de un par de lados del triángulo (que también serán dos radios de la circunferencia). Esta acción es similar a la primera acción sugerida por Perry et al. (2013) para el proceso de justificación; pero, en este caso, se encuentra en el proceso de conjeturación, debido a que permite dar paso a propuestas de construcción, basadas en el invariante anticipado.

iii. *Proponer construcciones,* es decir, realizar construcciones en un entorno de geometría dinámica que dan solución al problema. Por ejemplo, algunas posibles construcciones asociadas a la construcción del triángulo isósceles, pueden ser: una construcción blanda o una robusta (Healy, 2000). En la primera de estas un estudiante puede construir un triángulo de tal manera que perceptualmente dos de sus lados sean congruentes, sin embargo, al arrastrar cualquiera de los vértices, los lados congruentes (a simple vista) dejan de serlo (figura 2.5). En la segunda, un estudiante puede construir una circunferencia para que dos de sus radios sean los lados congruentes del triángulo isósceles y que al arrastrar cualquiera de sus vértices, los lados siguen siendo congruentes (figura 2.6).

iv. *Verificar invariantes,* es decir, someter las construcciones a examen con el fin de comprobar si las propiedades que se anticiparon se poseen. Si se trabaja en un entorno de geometría dinámica, generalmente ello implica tomar medidas y arrastrar los objetos para ver si las propiedades se mantienen. Así, en nuestro ejemplo, al arrastrar los puntos de la construcción blanda de un triángulo isósceles, los segmentos aparentemente congruentes dejan de serlo, (figura 2.5); de ese modo se verifica que la propiedad no se mantiene y el estudiante deben buscar otra construcción alternativa.

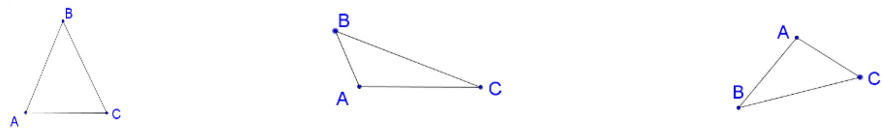



***Figura 2. 5*** *Diferentes representaciones del triángulo isósceles (construcción blanda), obtenidas al arrastrar*

Si la construcción propuesta recurre al uso de una circunferencia, al arrastrar los puntos se tendrán configuraciones como las de la figura 2.6.

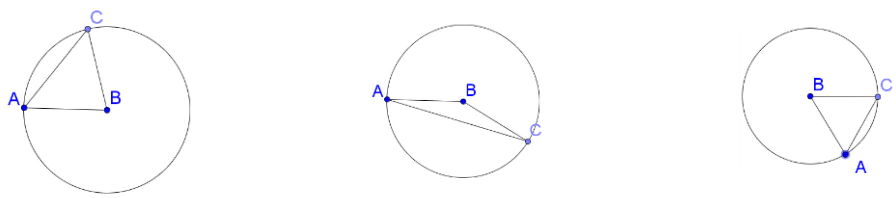



***Figura 2. 6*** *Diferentes representaciones del triángulo isósceles (construcción robusta), obtenidas al usar el arrastre*

Esta acción es muy similar a la sugerida por Perry et al. (2013), debido a que, sea cual sea el tipo de problema, se requiere evidenciar si el invariante descubierto o anticipado se mantiene al mover los puntos de la construcción (en un entorno de geometría dinámica), o al tomar medidas (haciendo uso de regla y compás).

En la propuesta de Perry et al. (2013), hay dos acciones que podrían repetirse en el proceso de conjeturación: la de detectar y la de verificar invariantes; es decir, el estudiante puede creer haber encontrado un invariante, pero al verificarlo nota que en realidad no es así; esto lo lleva a proponer otro invariante y verificarlo. Esta repetición no se hace explícita en el esquema propuesto por el equipo de investigación. Nosotros la señalamos para la actividad demostrativa en problemas de construcción (figura 2.4), ya que generalmente es el camino empleado al buscar la construcción que soluciona el problema.

v. *Formular conjeturas*, es decir, proponer enunciados de estructura proposicional de implicación (Si…, entonces…) en donde en el antecedente se incluyen los objetos geométricos utilizados en la construcción, y en el consecuente se presenta el "resultado" del problema propuesto; es decir, una construcción cuya representación tenga las propiedades del objeto solicitado. Por ejemplo, para el caso del triángulo isósceles, una conjetura podría ser "Sí se construye un $\overline{AB}$, una circunferencia con centro en $B$ y radio $AB$, se determina un punto $C$ en la circunferencia, y se construyen $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, entonces el $\triangle ABC$ es isósceles".

vi. *Corroborar conjeturas*: consiste en comprobar si efectivamente las propiedades empleadas en la construcción (dadas a conocer en el antecedente) son suficientes para llegar a las propiedades del objeto geométrico mencionado como "resultado" (en el consecuente). Por ejemplo, en la construcción del triángulo isósceles, para corroborar la conjetura, el estudiante puede volver a hacer la construcción siguiendo los pasos enunciados, y corroborar que el producto final es el objeto geométrico deseado; podrían mover los puntos de la construcción, o tomar medidas, no con el objetivo de verificar el invariante (porque los estudiantes ya están convencidos de que se tiene), sino con el fin de mostrarle a alguien más que la construcción soluciona el problema.

El proceso de *justificación* tiene como objetivo validar las conjeturas dentro de un sistema teórico que se tiene a disposición. A diferencia de Perry et al. (2013) este proceso se caracteriza, para el caso de estudiantes de sexto grado, con una sola acción, que consiste en *construir argumentos para justificar la construcción*. Es decir, presentar una secuencia enlazada de proposiciones llamadas premisas que se invocan para justificar otra que llamamos conclusión (Luque, Ávila & Soler, 2013).

Dentro de esta acción, es posible reconocer dos tipos de argumentos: argumento empírico y argumento teórico. A continuación, los definimos.

- Argumento empírico: Se entiende como un argumento en el que se alude a la construcción; es decir, el sujeto muestra, como garantía, las diferentes representaciones $(p_1, p_2, \dots, p_n,)$ obtenidas al someter a la construcción al arrastre o tomar medidas. El esquema de un argumento empírico se presenta en la figura 2.7.

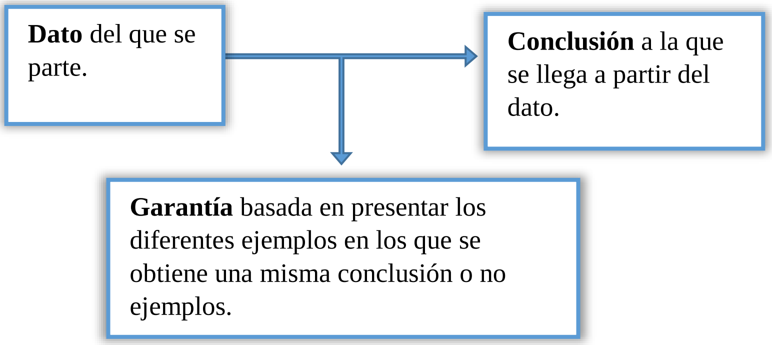



***Figura 2. 7*** *Esquema de argumento empírico*[3]

Por ejemplo, un argumento para justificar la conjetura "Sí construyo un $\overline{AB}$, una circunferencia con centro en $A$ y radio $AB$, un punto $C$ en la circunferencia, y los $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ entonces el $\triangle ABC$ es isósceles", es:

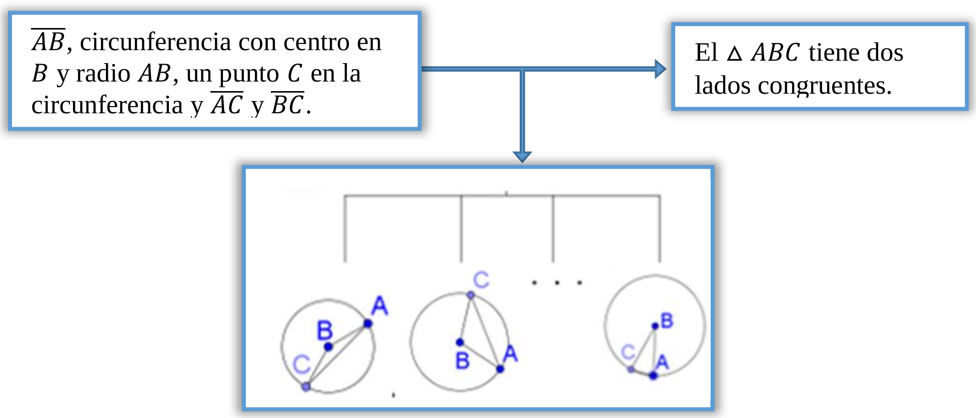



***Figura 2. 8*** *Ejemplo del uso del esquema de argumento empírico para el caso de la construcción de un triángulo isósceles*

Como se puede evidenciar en la figura 2.8, la garantía presentada se basa en diferentes representaciones del triángulo cuando es sometido al arrastre.

[3] Los esquemas de los argumentos, son una adaptación al propuesto por Perry et al. (2013) y por Barbosa & Escobar (2014).

- Argumento teórico: Este tipo de argumentos es conocido como deductivo. Según Perry et al. (2013), si se tiene una proposición general se debe aplicar a unos casos particulares con el fin de obtener una afirmación. El esquema de un argumento teórico se presenta en la figura 2.9.

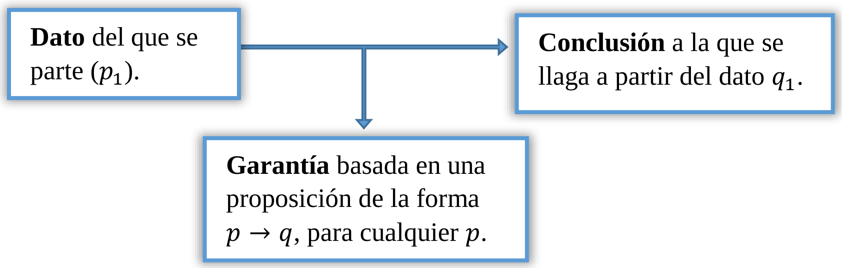



***Figura 2. 9*** *Esquema de argumento teórico*

Por ejemplo, la conjetura obtenida a partir de la construcción robusta de un triángulo isósceles se justificaría así:

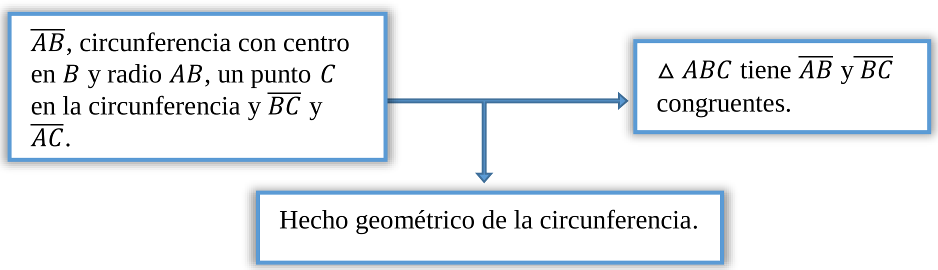



***Figura 2. 10*** *Ejemplo del uso del esquema de argumento teórico para el caso de la construcción de un triángulo isósceles*

Como se puede evidenciar en la figura 2.10, $p_1$ es la existencia de una circunferencia con centro en $A$, radio $\overline{AB}$ y otro radio $\overline{AC}$; $q_1$ es que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. En este caso $q_1$ se obtiene a partir de $p_1$ usando como garantía la preposición general $r$ que es el hecho geométrico de la circunferencia (($p$:) dada una circunferencia cualquiera ($q$:) sus radios son congruentes). Cabe resaltar que para justificar que la construcción soluciona el problema se tendría que presentar otro argumento en el que se concluya que el triángulo es isósceles.

Al igual que en la propuesta del grupo de investigación $\mathcal{Æ}\cdot\mathcal{G}$, en nuestro caso, los procesos de conjeturación y de justificación se apoyan por acciones como: la visualización y la exploración. Para problemas de construcción, la exploración consiste en hacer uso principalmente del arrastre que brinda el programa de geometría dinámica. Se espera que el estudiante pueda verificar si las propiedades identificadas cumplen o no con las características del objeto geométrico en estudio. También se puede presentar cuando los estudiantes exploran las herramientas del programa para dar solución a un problema. Por ejemplo, para el caso del triángulo isósceles, puede que los estudiantes sepan que deben usar una circunferencia para dar solución al problema, y garantizar que dos lados del triángulo son congruentes; sin embargo, no conocen todas las herramientas del programa, así que deberán buscar entre las herramientas aquella que les permita realizar la construcción como la desean.

Nuestra propuesta de actividad demostrativa en problemas de construcción sirve como fundamento para realizar el análisis de las producciones de estudiantes de grado sexto, cuando se enfrentan a este tipo de problemas.

# 3. METODOLOGÍA

Con el fin de contextualizar al lector acerca del proceso llevado a cabo en el transcurso de la investigación. En este capítulo presentamos el tipo de estudio, que es el de experimento de enseñanza el cual conlleva tres fases a saber: Preparación del experimento, Experimentación y Análisis retrospectivo. Así, el capítulo se describe el tipo de estudio y como se desarrollaron cada una de sus fases.

## 3.1 Tipo de estudio

La pretensión de la investigación es aportar a la búsqueda de opciones para romper la brecha existente entre la geometría escolar, que se centra en el reconocimiento de características de los objetos geométricos, y aquella que se centra en la producción de justificaciones. En consideración a ello, decidimos plantear, diseñar y evaluar una secuencia de enseñanza en grado sexto, con el fin de analizar aspectos de la actividad demostrativa y de la argumentación que llevan a cabo grupos de estudiantes de grado sexto, cuando se enfrentan a problemas de construcción.

Un tipo de estudio investigativo adecuado para nuestros fines es el de experimento de enseñanza. Según Molina, Castro, Molina & Castro (2011) un experimento de enseñanza consiste en una secuencia de episodios de enseñanza en los que los agentes participantes son un grupo de estudiantes, su profesor y un equipo de investigadores. En general, esta metodología se caracteriza porque el profesor hace parte del grupo de investigación y, junto con los demás investigadores, trabaja en torno a los objetivos de la investigación. Cuando se asume esta metodología se plantea una hipótesis acerca del aprendizaje y esta se pone a prueba, en una determinada secuencia de enseñanza, para recoger y analizar datos en torno a la problemática de interés.

Según Cobb y Gravemeijer (citados por Molina et al., 2011) en los experimentos de enseñanza se distinguen tres fases. La primera de estas, es la de *Preparación del experimento*. Esta se centra en el diseño inicial de la secuencia de enseñanza acerca de un concepto o procedimiento matemático, la caracterización del contexto estudiantil, la revisión de los objetivos de investigación, la planeación de la toma de datos y del registro de la información. La segunda es la de *Experimentación*, en la cual no solo se pone en práctica lo realizado en la primera fase, sino que también se reformula la secuencia, en caso de ser necesario, teniendo en cuenta los sucesos que se evidencian a medida que se desarrolla la experimentación. Durante la experimentación se recopila la información que es analizada. La última fase de un experimento de enseñanza es la de *Análisis retrospectivo* de los datos, en la cual se organiza, depura y analiza la información recolectada para obtener resultados con respecto a la hipótesis.

A continuación, se presentan las acciones adelantadas en cada una de las fases del experimento de enseñanza realizado en torno al problema de investigación que se presenta en este documento.

## 3.2 Fase de preparación del experimento

En esta primera fase se realiza el diseño de la investigación. Como se mencionó anteriormente, se relaciona con el planteamiento de los objetivos, pregunta de investigación, etc., que ya fueron expuestos en apartados anteriores. Por lo tanto, a continuación, se da a conocer el contexto experimental y la secuencia de problemas que se llevaron al aula.

### 3.2.1 Contexto experimental

El experimento de enseñanza se llevó a cabo en el curso 604 del Instituto Pedagógico Nacional, durante el tercer trimestre del periodo escolar de 2015. El curso estaba conformado por 33 estudiantes, cuyas edades oscilaban entre los 11 y los 13 años de edad.

En dicha institución educativa, los estudiantes de grado sexto ven la geometría como una asignatura aparte de la aritmética. Las clases de geometría tienen una asignación académica de un bloque semanal, lo que equivale a 90 minutos.

El Instituto Pedagógico Nacional fue el colegio elegido para el desarrollo de la investigación, debido a que ahí desarrollamos una de las Prácticas de inmersión[4] (Práctica de integración profesional a la escuela), y uno de los autores del documento fue asignado para impartir la asignatura de geometría en dos cursos de grado sexto.

Para conocer las experiencias académicas previas de los estudiantes, se habló con la profesora a cargo de la clase de geometría antes de preparar la secuencia de enseñanza. Ella manifestó que, en lo transcurrido de los dos primeros trimestres, no había usado un programa de geometría dinámica, y que en el curso no se había implementado una metodología de clase en la que se les pidiera a los estudiantes argumentar afirmaciones.

El contenido de geometría visto en los dos trimestres incluía el estudio de nociones básicas como: punto, recta, plano, segmento rayo, ángulo (características y clasificación según sus propiedades) y polígonos (características según sus propiedades).

El diseño de la secuencia de enseñanza inicial, estuvo a cargo de los autores del presente trabajo, junto con la directora del mismo. Fue revisada por la profesora titular del curso y la tutora de práctica, quienes colaboraron con ideas para mejorarla. A continuación, se presenta la secuencia, tal como se planeó inicialmente.

### 3.2.2 Secuencia de enseñanza[5]

Esta secuencia tiene como finalidad que los estudiantes aprendan hechos geométricos y definiciones de la geometría plana asociados a la mediatriz de un segmento, la circunferencia,

[4] Las Prácticas de inmersión son llevadas a cabo después de culminar las materias del ciclo de fundamentación (1ro a 6to semestre). Estas se llevan a cabo en instituciones educativas con el fin de involucrar a los maestros en formación en actividades propias de un docente de matemáticas.
[5] La secuencia de enseñanza que se presenta es una parte de la que originalmente se propuso, dicha secuencia posee las posibles respuestas de los estudiantes y se encuentra en el anexo A.

los triángulos (isósceles y equilátero) y el punto medio de un segmento, para que los usen al momento de solucionar problemas. Adicionalmente, pretende acercarlos a un programa de geometría dinámica (GeoGebra).

***Grado*:** Sexto.

***Temas:*** Equidistancia y congruencia de segmentos (asociados a los objetos Circunferencia y mediatriz de un segmento), para dar solución a problemas de construcción en los que se requiera de dichos conceptos.

***Objetivos de enseñanza:*** Brindar a los estudiantes herramientas teóricas que les permitan realizar argumentaciones teóricas en el ámbito geométrico, de los "pasos" realizados de una construcción.

Conceptuales:

- Propiciar en los estudiantes un reconocimiento de las propiedades que tienen ciertos objetos geométricos, tales como la circunferencia, la mediatriz de un segmento, y el punto medio de un segmento.
- Orientar a los estudiantes en la construcción de definiciones de circunferencia y mediatriz de un segmento.
- Guiar a los estudiantes hacia el descubrimiento del hecho geométrico de la circunferencia y los hechos geométricos de la mediatriz de un segmento.
- Promover la institucionalización[6] de hechos geométricos y definiciones, útiles en la justificación de problemas.
- Promover el uso de lenguaje geométrico adecuado.

[6] Se considera como institucionalización de un hecho geométrico, cuando la profesora o algún estudiante da un nombre al hecho.

Procedimentales:

- Usar la función de arrastre sobre los elementos que forman una construcción, como medio para verificar que se cumple una determinada propiedad.
- Construir triángulos con diferentes características, a partir del uso de GeoGebra.
- Involucrar la circunferencia y la mediatriz como herramientas para construir segmentos congruentes o puntos equidistantes.

Actitudinales:

- Propiciar el trabajo colaborativo en los estudiantes.
- Promover la comunicación de ideas en forma clara.
- Incitar a que los estudiantes participen, expongan y defiendan sus ideas y formas de construcción.
- Fomentar el gusto y agrado hacia la geometría dinámica.

***Metodología:*** Esta se basa en la propuesta de problemas de construcción por parte del profesor a los estudiantes. Por cada problema hay dos momentos: En el primer momento, denominado *Exploración y solución del problema,* el profesor organiza a los estudiantes en parejas, recuerda los hechos geométricos del sistema teórico construido hasta el momento o resalta aspectos trabajados en clases anteriores (si lo considera oportuno). Luego, propone el problema y da un tiempo para que los estudiantes lo exploren usando el programa de geometría dinámica GeoGebra. Cada pareja de trabajo se conforma al inicio de la secuencia, y en lo posible, se mantiene durante el desarrollo de la misma. El profesor está atento al trabajo realizado por las parejas y toma nota de cada una de las soluciones propuestas por los estudiantes.

El segundo momento, denominado *Puesta en común*, el profesor presenta cada una de las propuestas y las somete a discusión frente a todos los estudiantes del curso. Es ideal que el docente las presente en un orden particular, comenzando por la que menos se ajusta a lo solicitado hasta llegar a la que más se ajusta. Esto con el fin de que se presente una evolución en los argumentos de los estudiantes, y que algunos de los argumentos que se hayan presentado les sirvan para las siguientes propuestas de construcción.

En cada una de las propuestas, se debe generar una discusión, en la que se dé respuesta a preguntas como las siguientes:

- ¿La propuesta de construcción da solución al problema?
- ¿Por qué se puede asegurar que la propuesta de construcción soluciona o no el problema?
- ¿Qué le hace falta a la propuesta de construcción para dar solución al problema?

A partir de la respuesta a los interrogantes anteriores, se propicia el uso de diferentes tipos de argumentos en clase de geometría. La idea es que el profesor no presente otra propuesta de construcción, hasta que los estudiantes estén de acuerdo con las respuestas a las preguntas anteriores. En caso de que uno o más estudiantes difieran en sus respuestas, deben intentar que unos estudiantes convenzan a los otros, usando argumentos geométricos, hasta que haya un consenso y se pueda dar paso a la siguiente construcción o problema.

Cabe aclarar que antes de comenzar con el primer problema de construcción, se debe llevar a cabo una sesión de clase en la que los estudiantes exploren las herramientas básicas del programa de geometría dinámica a utilizar. Esto con el fin de que se familiaricen con dicho entorno. Debido a que algunos de los estudiantes (o todos) no han tenido un acercamiento previo a este recurso.

***Recursos:*** Para llevar a cabo la secuencia, es importante que los estudiantes y el profesor dispongan de recursos tecnológicos. Dependiendo del momento de la clase en la que se encuentren, se requiere:

- Para la *Exploración y solución del problema*, el grupo de estudiantes debe disponer de una herramienta tecnológica (Tableta, iPad, computador) en la que tengan acceso a GeoGebra, Cabri o algún otro software de geometría dinámica para que así puedan explorar el problema propuesto por el profesor.

- En la *Puesta en común*, el profesor debe tener acceso a un computador y algún medio para proyectar la imagen (Video Beam, televisor) de tal manera que pueda proyectar las soluciones propuestas por los estudiantes.

***Conocimientos previos de los estudiantes:*** Es ideal que los estudiantes identifiquen y diferencien (de manera visual) las rectas, los puntos, los segmentos, los polígonos, las circunferencias y el punto medio de un segmento, así como conocer la clasificación de los triángulos, según la congruencia de sus lados. En el caso de no poseer los conocimientos previos, se debe hacer la preparación necesaria.

A continuación, se dan a conocer los problemas introductorios con los que se pretende acercar a los estudiantes al uso de las herramientas que brindan los programas de geometría dinámica.

#### 3.2.2.1 Problemas introductorios

*Temas:* Circunferencia y colinealidad entre puntos.

*Intención:* Acercar a los estudiantes al uso de las herramientas de GeoGebra, introducir el hecho geométrico de la circunferencia y las definiciones de circunferencia y colinealidad.

*Momentos al abordar los problemas introductorios:*

1. Presentación del programa GeoGebra (exploración libre).
2. Primer problema: Los siete puntos (exploración dirigida).
3. Segundo problema: Congruencia de radios (exploración dirigida).
4. Tercer problema: Colinealidad (exploración dirigida).
5. Problema de afianzamiento: Segmentos congruentes.

*Desarrollo:*

1. Presentación del programa GeoGebra (exploración libre)

El profesor presenta a los estudiantes el programa de geometría dinámica (en este caso GeoGebra), como una herramienta que permite construir y arrastrar diferentes objetos geométricos. Además, resalta que los objetos construidos se encuentran en un plano y que esto se dará por hecho.

El profesor solicita a los estudiantes buscar y reconocer el funcionamiento de las opciones que brinda el programa, accediendo a cada uno de los principales íconos que se refieren a objetos geométricos o relaciones.

Antes de plantear los problemas a los estudiantes, es necesario aclararles que, como normas de la clase se van a estipular las siguientes:

- Cuando se muevan los puntos de la construcción, la construcción debe conservar las características que permiten dar solución al problema.
- En la construcción se deben poder mover algunos puntos.
- No se puede usar medida.

Dichas normas son importantes debido a que los estudiantes verán la necesidad de usar relaciones o propiedades que se enuncian en definiciones o hechos geométricos para solucionar los problemas posteriores. Así, se propicia que las justificaciones posean elementos teóricos y no se basen en medidas.

2. Primer problema: Los siete puntos (exploración dirigida)

Para abordar este problema, en pro de dotar de significado el objeto geométrico circunferencia, el profesor solicita a los estudiantes que construyan siete puntos en cualquier parte de la pantalla y que a cada uno de esos les muestre el nombre (en el caso de que el programa no lo haga automáticamente) y verifiquen que los puntos tengan un nombre entre $A$ y $G$.

Después, el profesor solicita a los estudiantes que ubiquen los puntos $B, C, D, E, F$ y $G$ a la misma distancia del punto $A$; es decir, que la distancia del punto $A$ al punto $B$ sea la misma que del punto $A$ al punto $C$, y así mismo con todos los demás puntos. Dependiendo de la exploración realizada por los estudiantes, podrían pensar que los puntos se encuentran en una recta, en un polígono de seis lados, o en una circunferencia que tiene centro en el punto $A$ y radio $\overline{AB}$ ($\odot_{A,AB}$). Por lo cual es importante que el profesor solicite, que construyan más puntos y los ubiquen de tal manera que cumpla con la condición dada.

Al finalizar la exploración, el profesor pregunta acerca del objeto geométrico que forman los puntos, para que se haga público el hecho de que los puntos deberían pertenecer a la circunferencia con centro en el punto $A$ y radio $\overline{AB}$ Se sugiere la construcción de circunferencias y la determinación de puntos que pertenezcan a ellas, para verificar la equidistancia.

3. Segundo problema: Congruencia de radios (exploración dirigida)

En un nuevo archivo, el profesor solicita a los estudiantes que construyan una circunferencia y dos radios de esta (en esta parte de la clase se puede definir el radio de una circunferencia como el segmento que tiene extremos en el centro de la circunferencia y en un punto de la misma). Después de ello, pregunta acerca de características que tienen en común los dos radios cuando se arrastran los puntos de la construcción, aclarando que dichas características deben ser diferentes a aquellas que los hacen ser radios, es decir, que ambos son segmentos, que comparten un extremo, etc. Al finalizar la exploración, los estudiantes deben notar que ambos radios siempre tienen la misma longitud, lo cual se comprueba superponiéndolos. Además, se introduce el significado de la congruencia entre segmentos como la igualdad de medidas entre los mismos.

4. Tercer problema: Colinealidad (exploración dirigida)

El profesor solicita a los estudiantes que construyan siete puntos que estén alineados, de tal manera que al mover cualquiera de ellos sigan estando alineados. Inicialmente, quizás los estudiantes realicen una construcción blanda, y a pesar de que no se mantenga al arrastrar, el profesor puede cuestionar a los estudiantes acerca del objeto geométrico que forman los puntos. De esta manera, ellos notan que los puntos alineados parecen formar una recta y en ese sentido, puede que se les ocurra afirmar que los siete puntos deben estar en una recta y buscar la manera de hacer que pertenezcan a ella, bien sea repitiendo la construcción o redefiniendo los puntos. Al finalizar la exploración el profesor introduce la palabra colinealidad entre puntos, y hace notar que cierta cantidad de puntos son colineales si pertenecen a la misma recta.

5. Problema de afianzamiento: Segmentos congruentes

En esta parte de la clase se podría pensar que los estudiantes saben que los puntos de una circunferencia equidistan del centro, y que los radios de una circunferencia son congruentes. Sin embargo, esto es algo que no se puede asegurar con certeza. Por lo tanto, es importante que se pongan a prueba esos conocimientos, proponiéndoles un problema de construcción en el que se les solicite a los estudiantes que construyan dos segmentos congruentes, de tal manera que al mover cualquiera de sus extremos, estos sigan siendo congruentes.

Es probable que los estudiantes inicialmente realicen construcciones blandas. Así que el profesor debe orientar la evaluación de las mismas, usando el arrastre, para descartar aquellas que no mantengan invariante la congruencia ante arrastre. Por lo tanto, una opción que lleva a la solución es hacer uso de una circunferencia, a la que se espera que los estudiantes lleguen, al recordar los problemas trabajados anteriormente.

*Aclaraciones:*

- A medida que se va dando la exploración dirigida, el profesor debe ir ayudando a los estudiantes que presenten dificultades con el uso del software, ya que no todos tienen la misma destreza.
- Es importante que se recalque en el problema de afianzamiento, que la solución del problema se presenta cuando los segmentos siguen siendo congruentes cuando se someten al arrastre, aunque sus longitudes cambien. Por lo tanto, es importante que las longitudes de los segmentos puedan cambiar. Todo esto para que los

estudiantes no usen herramientas que permitan construir segmentos de longitud fija.

*Avance en la creación del sistema teórico*

En la tabla 3.1 presentamos el avance previsto en el sistema teórico derivado de la resolución de los problemas.

| **Momentos al abordar los problemas** | **Elementos del sistema teórico** | |
|---|---|---|
| Primer problema: Los siete puntos (exploración dirigida). | Definición de circunferencia | Figura geométrica formada por los puntos que se encuentran a la misma distancia de un punto dado. |
| Segundo problema: Congruencia de radios (exploración dirigida). | Definición de radio | Segmento cuyos extremos son el centro de la circunferencia y un punto de la misma. |
| | Definición de congruencia entre segmentos | Dos o más segmentos son congruentes si al superponerlos coinciden. |
| | Hecho Geométrico de una circunferencia | Los radios de una circunferencia son congruentes. |
| Tercer problema: Colinealidad (exploración dirigida). | Definición de colinealidad | Tres o más puntos son colineales si pertenecen a la misma recta. |

***Tabla 3. 1*** *Avance en la creación del sistema teórico para los problemas introductorios*

#### 3.2.2.2 Problema 1: Punto medio

*Tema:* Punto medio.

*Intención:* Que los estudiantes identifiquen las características esenciales de un punto que es el punto medio de un segmento y usen el hecho geométrico de la circunferencia y la definición de colinealidad para lograr la construcción de un punto en el que dichas características se mantengan bajo arrastre.

*Enunciado del problema:*

> P1: “Dados los puntos $A$ y $B$ construir un punto $C$ tal que $B$ sea el punto medio de $\overline{AC}$”

*Aclaraciones:*

- Para el desarrollo de este problema, se parte del supuesto de que los estudiantes tienen una imagen mental de un punto medio. Por lo tanto, se pretende que, con la solución del problema, los estudiantes hagan explícitas aquellas propiedades que reconocen visualmente.
- Es importante que en la etapa de presentación de las soluciones propuestas, sea un estudiante quien arrastre los elementos de la construcción para verificar que se cumple cierta propiedad.

*Avances en la creación del sistema teórico:*

En la tabla 3.2 presentamos el avance previsto en el sistema teórico obtenido de la resolución de los problemas.

| **Momento al abordar el problema** | **Elemento del sistema teórico** | |
|---|---|---|
| Exploración y solución del problema. | Definición de punto medio. | $B$ es punto medio de $\overline{AC}$ si y solo si:<br>*i)* $B \in \overline{AC}$<br>*ii)* $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ |

***Tabla 3. 2*** *Avance en la creación del sistema teórico para el P1: Punto medio*

#### 3.2.2.3 Problema 2: Triángulo isósceles libre

*Tema:* Triángulo isósceles.

*Intención:* Que los estudiantes usen el hecho geométrico de la circunferencia, para que lo interioricen como una garantía teórica que les permita construir un triángulo isósceles y justificar la misma.

*Enunciado del problema:*

| P2: “Construir un triángulo isósceles” |
|---|

*Aclaraciones:*

- Es importante que después de la etapa de presentación de las soluciones, el profesor exponga las soluciones observadas y que al momento de mover la construcción para verificar que se cumple cierta propiedad, sea un estudiante el que lo haga.

*Avances en la creación del sistema teórico:*

Ninguno en particular.

#### 3.2.2.4 Problema 3: Triángulo isósceles dirigido (construcción con condiciones)

*Tema:* Triángulo isósceles

*Intención:* Que los estudiantes diferencien entre un enunciado "libre" (en donde solo se les solicita realizar una construcción) y un enunciado "condicionado" (en donde se da una instrucción inicial para construir el objeto geométrico). Además, se pretende que los estudiantes exploren otras herramientas de GeoGebra, e introduzcan a su sistema teórico los hechos relacionados con la mediatriz.

*Enunciado del problema:*

> P3: "Dados los puntos $A$ y $B$ construir un triángulo isósceles, de tal manera que el segmento $AB$ sea uno de los lados del triángulo pero que no sea uno de los lados congruentes"

*Aclaraciones:*

- A diferencia de los dos primeros problemas en donde se hace una exploración por parejas y una puesta en común, este problema requiere de un tercer momento: la introducción de la definición de mediatriz de un segmento y los hechos geométricos de la mediatriz, en caso de que los estudiantes no la conozcan.

*Avances en la creación del sistema teórico*

En la tabla 3.3 presentamos el avance previsto en el sistema teórico conseguido de la resolución de los problemas.

| **Momentos al abordar el problema** | **Elementos del sistema teórico** | |
|---|---|---|
| Exploración y solución del problema. | Propiedad transitiva de la congruencia entre segmentos. | Si $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ y además $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ entonces $\overline{DE} \cong \overline{BC}$ o dicho de otra forma, sí dos segmentos son congruentes a uno mismo, entonces los segmentos iniciales son congruentes. |
| Introducción a la definición de mediatriz de un segmento. | Definición de mediatriz. | Es la recta perpendicular a un segmento que pasa por su punto medio. |
| Introducción al primer hecho geométrico de la mediatriz. | Primer hecho geométrico de la mediatriz. | Si $A$ equidista de $B$ y de $C$, entonces $A$ pertenece a la mediatriz de $\overline{BC}$. |
| Introducción al segundo hecho geométrico de la mediatriz. | Segundo hecho geométrico de la mediatriz. | Si $A$ pertenece a la mediatriz de $\overline{BC}$ entonces $A$ equidista de $B$ y de $C$. |

***Tabla 3. 3*** *Avance en la creación del sistema teórico para el P3: Triángulo isósceles dirigido (construcción con condiciones)*

### 3.2.2.5 Problema 4: Triángulo equilátero (construcción con condiciones)

*Tema:* Triángulo equilátero.

*Intención:* Que los estudiantes usen los hechos geométricos de la circunferencia y de la mediatriz, con el fin de que los interioricen como herramientas teóricas que les permiten justificar la solución al problema.

*Enunciado del problema:*

| |
|---|
| P4: "Construir un triángulo equilátero haciendo uso de a lo más una circunferencia" |

*Aclaraciones:*

- Partimos del supuesto que los estudiantes tienen una noción de triángulo equilátero como aquel que tiene sus tres lados congruentes. En el caso de no ser así, es necesario que el profesor antes de proponer el problema realice una actividad para que junto con los estudiantes se concluya dicha definición.

*Avances en la creación del sistema teórico:*

Ninguna en particular.

#### 3.2.2.6 Problema 5: Equidistancia de puntos a una recta

*Tema:* Distancia de un punto a una recta y mínima distancia entre dichos objetos geométricos.

*Intención:* Introducir las nociones de distancia de un punto a una recta. Se busca que los estudiantes usen la definición de mediatriz para solucionar un determinado problema.

*Enunciado del problema:*

> P5: "Dada una $\overleftrightarrow{BC}$ y un punto $A$ que no pertenece a esta, ubicar un punto $D$ al otro lado (en el otro semiplano) de la recta, de tal manera que la distancia del punto $A$ a la recta sea la misma que del punto $D$ a la recta".

*Aclaraciones:*

- Es de vital importancia, que el profesor no olvide explicar, si es el caso, que es determina la mínima distancia de un punto a una recta.

*Avances en la creación del sistema teórico:*

En la tabla 3.4 presentamos el avance previsto en el sistema teórico derivado de la resolución de los problemas.

| **Momentos al abordar el problema** | **Elementos del sistema teórico** | |
|---|---|---|
| Presentación de las propuestas de solución al problema. | Distancia de un punto a una recta. | La distancia de un punto $A$ a la $\overleftrightarrow{BC}$ es la distancia de $A$ a $D$ donde $\overline{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}$ y $D \in \overleftrightarrow{BC}$ |

***Tabla 3. 4*** Avance en la creación del sistema teórico para el P5: Equidistancia de puntos a una recta

## 3.3 Fase de experimentación

A continuación, nos referimos a aspectos de la implementación de la secuencia de enseñanza y de los registros de la información.

### 3.3.1 Acerca de la secuencia de enseñanza

La secuencia de enseñanza presentada anteriormente fue desarrollada durante nueve sesiones en la clase de geometría del curso 604. A medida que se llevó a cabo la secuencia de enseñanza, se realizaron ajustes teniendo en cuenta lo sucedido en la sesión anterior. En ese sentido, unos días antes de cada clase, se realizaron dos reuniones: la primera, con los autores del presente documento y la directora del trabajo de grado, para introducir variantes en la planeación. La segunda, entre los autores y la docente de la institución, para revisar los ajustes y distribuir los roles en el aula.

En la secuencia de enseñanza estaba planteado que los recursos para llevar a cabo la secuencia, serían computadores que tuvieran instalado el programa de geometría dinámica GeoGebra para el trabajo por parejas, y un Video Beam para proyectar imágenes en la puesta en común. Sin embargo, no siempre se contó con dichos recursos. Para facilitar la lectura de los análisis, consideramos pertinente caracterizar las aulas en las que se llevaron a cabo las clases.

*Aula tipo 1:* Un salón de clases que tenía un televisor, con el cual se podía proyectar la imagen de un computador con GeoGebra.

*Aula tipo 2:* Una sala de computación, con un tablero y computadores de mesa suficientes para que los estudiantes trabajaran por parejas.

*Aula tipo 3:* Una sala de cómputo con iguales características que el aula tipo 2, con la diferencia de que esta sala tenía un Video Beam en el que se podía proyectar la imagen de un computador con GeoGebra.

A continuación, se muestran sendas tablas en las que se presenta la información sobre la implementación de cada uno de los problemas planeados en la secuencia de enseñanza. Cada tabla consta de seis columnas así: datos sobre el número de la sesión, la fecha de implementación, el tipo de aula, los momentos que se llevaron a cabo al abordar los problemas, los cambios con relación a la planeación y los aportes al sistema teórico que se institucionalizaron.

- Problemas introductorios

| ***Sesión*** | ***Fecha*** | ***Tipo de aula*** | ***Momentos al abordar el problema*** | ***Cambios a los momentos*** | ***Aportes al sistema teórico institucionalizados*** |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 25 de agosto de 2015 | Tipo 2 | Presentación del software (exploración libre). | Sin novedad | Ningún hecho o definición institucionalizados |
| | | | Primer problema: Los siete puntos (exploración dirigida). | Sin novedad | |
| | | | Segundo problema: Congruencia de radios (exploración dirigida). | No realizado por falta de tiempo. | |
| | | | Tercer problema: Colinealidad (exploración dirigida). | Sin novedad | |
| | | | Problema de afianzamiento: Segmentos congruentes. | Como no se realizó el segundo problema, se introdujo de forma verbal el hecho de que los radios de una circunferencia son congruentes. | |

***Tabla 3. 5*** *Experimentación problemas introductorios*

- Problema 1: Punto medio

| *Sesiones* | *Fechas* | *Tipo de aula* | *Momentos al abordar el problema* | *Cambios a los momentos* | *Aportes al sistema teórico institucionalizados* |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 25 de agosto de 2015 | Tipo 2 | Exploración y solución del problema (P1). | Sin novedad | Ningún hecho o definición institucionalizados |
| 2 | 03 de septiembre de 2015 | Tipo 1 | Puesta en común (P1). | Sin novedad | |

***Tabla 3. 6*** *Experimentación P1: Punto medio*

- Problema 2: Triángulo isósceles libre

| *Sesiones* | *Fechas* | *Tipo de aula* | *Momentos al abordar el problema* | *Cambios a los momentos* | *Aportes al sistema teórico institucionalizados* |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 08 de septiembre de 2015 | Tipo 2 | Exploración y solución del problema (P2). | Antes de plantear el problema se cuestionó a los estudiantes sobre la noción que tenían de triángulo isósceles. | Ningún hecho o definición institucionalizados |
| 4 | 17 de septiembre de 2015 | Tipo 3 | Puesta en común (P2). | Antes de presentar las soluciones propuestas al problema se realizó una institucionalización de los hechos geométricos y definiciones trabajados hasta el momento. | Institucionalización de:<br>• Hecho geométrico de la circunferencia.<br>• Definición de colinealidad.<br>• Definición de punto medio. |

***Tabla 3. 7*** *Experimentación P2: Triángulo isósceles libre*

- Problema 3: Triángulo isósceles dirigido

| *Sesiones* | *Fechas* | *Tipo de aula* | *Momentos al abordar el problema* | *Cambios a los momentos* | *Aportes al sistema teórico institucionalizados* |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 08 de septiembre de 2015 | Tipo 2 | Exploración y solución al problema (P3). | Sin novedad | Ningún hecho o definición institucionalizados |
| 4 | 17 de septiembre de 2015 | Tipo 3 | Puesta en común (P3). | Al discutir una de las soluciones se estudió si un triángulo equilátero es un triángulo isósceles. No se introdujo la propiedad de | Ningún hecho o definición institucionalizados |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | transitividad entre la congruencia de segmentos. | |
| 5 | 24 de septiembre de 2015 | Tipo 3 | Puesta en común (P3). | La solución al problema, fue presentada y propuesta por la docente. | Ningún hecho o definición institucionalizados |
| 6 | 01 de octubre de 2015 | Tipo 3 | Introducción a la definición de mediatriz de un segmento. | Sin novedad | Institucionalización de:<br>• Definición de mediatriz de un segmento.<br>• Primer hecho geométrico de la mediatriz.<br>• Segundo hecho geométrico de la mediatriz. |
| | | | Introducción al primer hecho geométrico de la mediatriz. | Sin novedad | |
| | | | Introducción al segundo hecho geométrico de la mediatriz. | Sin novedad | |

***Tabla 3. 8*** *Experimentación P3: Triángulo isósceles dirigido (construcción con condiciones)*

- Problema 4: Triángulo equilátero

| ***Sesiones*** | ***Fechas*** | ***Tipo de aula*** | ***Momentos al abordar el problema*** | ***Cambios a los momentos*** | ***Aportes al sistema teórico institucionalizados*** |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 15 de octubre de 2015 | Tipo 2 | Exploración y solución del problema (P4). | Antes de plantear el problema fue necesario recordar, junto con los estudiantes, el sistema teórico construido hasta el momento, debido a que los estudiantes volvían de la semana de receso. | Ningún hecho o definición institucionalizados |
| | | | Puesta en común (P4). | No fue posible contar con un Video Beam para esta etapa de la clase. Por esta razón, se llevó a cabo haciendo uso de marcador y tablero | |

***Tabla 3. 9*** *Experimentación P4: Triángulo equilátero (construcción con condiciones)*

- Problema 5: Equidistancia de puntos a una recta

| ***Sesiones*** | ***Fechas*** | ***Tipo de aula*** | ***Momentos al abordar el problemas*** | ***Cambios a los momentos*** | ***Aportes al sistema teórico institucionalizados*** |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 22 de octubre de 2015 | Tipo 2 | Exploración y solución del problema (P5). | Por la exploración realizada por los estudiantes, fue notorio que ellos entendieron el problema como: “Dada una recta y un punto que no pertenece a esta, ubicar un punto al | Ningún hecho o definición institucionalizados |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | otro lado de la recta, de tal manera que la distancia de esta a **todos los puntos de** la recta es la misma que la del punto inicial a **todos los puntos de** la recta”. | |
| 8 y 9 | 27 de octubre de 2015 | Tipo 1 | Puesta en común (P5). | Se intentó buscar estrategias para que los estudiantes comprendieran el enunciado del problema, sin embargo, siguieron con la misma idea del problema. | |

***Tabla 3. 10*** *Exploración P5: Equidistancia de puntos a una recta*

### 3.3.2 Registro de la información

En la tabla 3.11 se listan las fechas en las que se llevó a cabo cada una de las sesiones, el dispositivo que se usó para registrar la información y una breve descripción de lo que se registró.

| ***Sesión*** | ***Fechas*** | ***Dispositivos*** | ***¿Qué es lo que se registró?*** |
|---|---|---|---|
| 1 | 25 de agosto de 2015 | Celular con cámara. | Fragmentos de algunos episodios de exploración del software por parte de los estudiantes. |
| 2 | 03 de septiembre de 2015 | Cámara de video. | Presentación de las soluciones propuesta para P1 (puesta en común). |
| 3 | 08 de septiembre de 2015 | Cámara de video. | Exploración del P2 y P3 realizado por algunas parejas de trabajo. |
| | | Celular con cámara. | |
| 4 | 17 de septiembre de 2015 | Cámara de video. | Presentación de las soluciones propuesta para P2 y P3 (puesta en común). |
| 5 | 24 de septiembre de 2015 | Cámara de video. | Discusión en torno a la solución para P3. |
| 6 | 01 de octubre de 2015 | Cámara de video. | Discusión en torno a la introducción a la mediatriz y sus hechos geométricos. |
| 7 | 15 de octubre de 2015 | Cámara de video. | Presentación de las soluciones propuesta para P4 (puesta en común). |
| | | Celulares con cámara. | Exploración del P4 por algunas parejas de trabajo. |
| 8 | 22 de octubre de 2015 | Cámara de video. | Presentación de las soluciones propuesta para P5 (puesta en común). |
| | | Celulares con cámara. | Exploración del P5 por algunas parejas de trabajo. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 27 de octubre de 2015 | Cámara de video. | Presentación de las soluciones propuesta para P5 (puesta en común). |

***Tabla 3. 11*** *Registro de la información*

## 3.4 Fase de análisis retrospectivo

En este apartado se presenta un esquema, sugerido por nosotros, que se constituyó en el *instrumento para el análisis*, cuya estructura permite organizar la información para la realización del análisis de las producciones de los estudiantes.

| **Recordar problema (RP) o Proponer problema o (PP)** | **Anticipar invariantes** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |
| **Propuestas de solución al problema [PSP]** | **Verificar y justificar invariantes en propuestas** | | | | | |
| | ¿Cumple propiedad 1? | | ¿Cumple propiedad 2? | | **…** | |
| | No | Sí | Si | No | Si | No |
| P1_prop1: | | | | | | |
| P1_prop2: | | | | | | |
| .<br>.<br>. | | | | | | |

***Tabla 3. 12*** *Instrumento analítico de organización para la información*

El esquema anterior fue construido a partir del marco teórico, con el fin de organizar las acciones de la actividad demostrativa realizada por los estudiantes en la resolución de los problemas P1 a P4.

En la primera columna se encuentra la propuesta de estrategia llevada a cabo en la resolución del problema, tanto en el trabajo por parejas, como en la puesta en común. En el trabajo por parejas primero se proponía el problema y los estudiantes tenían que solucionarlo y encontrar propuestas de construcción. En la puesta en común, se recordaba el problema y se presentaban algunas de las soluciones propuestas por los estudiantes en el trabajo por parejas.

En la segunda columna se presentan las acciones de la actividad demostrativa detectadas. Es decir, al momento de recordar o proponer el problema de construcción de un objeto geométrico, los estudiantes podían aludir a los invariantes que se debían mantener para que una construcción solucionara el problema. Cuando los estudiantes o la profesora presentaban propuestas de construcción (dependiendo si es en el trabajo por parejas o en la puesta en común) podía presentarse una verificación de los invariantes anticipados, y dependiendo de ello se pueden presentar argumentos que validen o invaliden una determinada construcción.

El esquema propuesto organiza al análisis porque permite articular algunas de las acciones de la actividad demostrativa en problemas de construcción, como: la anticipación de los invariantes, la verificación de los invariantes, la conjetura y los argumentos para defender o contrarrestar una propuesta de construcción. También sirve para organizar la información en el orden en que ocurrió cada suceso y así poder hacer el análisis. Este último se presentará en el siguiente capítulo.

# 4. ANÁLISIS

En el presente capítulo presentamos el análisis de la actividad demostrativa llevada a cabo por los estudiantes, a partir de las producciones que ellos obtuvieron y presentaron sobre cuatro de los cinco problemas de construcción que se propusieron en la secuencia de enseñanza. El análisis de cada problema se hizo separando la información en cada uno de los dos momentos que se propusieron en la secuencia (Exploración y solución del problema y Puesta en común). Inicialmente se presenta una reconstrucción corta de lo sucedido en la clase, seguida de la presentación del instrumento analítico y del análisis de las producciones de los estudiantes.

## 4.1 Problema 1: Punto Medio

El momento de *exploración y solución del problema* se llevó a cabo en la primera sesión de la secuencia, el 25 de agosto de 2015, luego de la realización de los problemas introductorios de exploración dirigida. Sin embargo, los videos no tienen buen sonido y no duran más de un minuto, por tanto, no se recolectaron datos para analizar. Lo que se presenta a continuación es el análisis de la *puesta en común* llevada a cabo en la segunda sesión, que sucedió el 3 de septiembre de 2015.

<u>Reconstrucción de la puesta en común del P1</u>[7]

En esta clase, la profesora inicia pidiendo a los estudiantes que mencionen los problemas trabajados en la clase anterior (Dos problemas introductorios y P1). Menciona que se retomará el P1 para discutir las soluciones que algunos grupos presentaron en la clase anterior.

[7] La reconstrucción de la clase se hace en presente para usar una estructura gramatical sencilla.

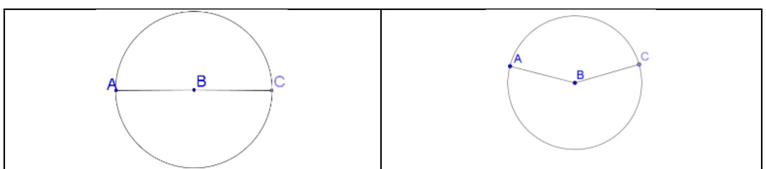
María enuncia el problema P1: "dado los puntos $A$ y $B$ construir un $\overline{AC}$ de tal manera que $B$ sea el punto medio de $\overline{AC}$" $_{\text{(María, 20)}}$[8]. La profesora pregunta qué información les brinda el enunciado del problema. Se genera una discusión en la que se concluye que se parte de "los puntos $A$ y $B$" $_{\text{(varios, 22),}}$ y que la dificultad está en que "el punto medio debe ser $B$" $_{\text{(Laura, 26)}}$. La profesora pregunta qué se debe hacer o cuál es el reto del problema. La respuesta de algunos de los estudiantes es: "construir un punto $C$" $_{\text{(Varios, 30).}}$ Al cuestionarlos acerca de qué condición debe cumplir el punto $C$ que se va a construir, Ángela y María hacen alusión a la congruencia entre $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ $_{\text{(línea 35 y 56 respectivamente)}}$. Cabe aclarar que aunque a la congruencia mencionada por las estudiantes no se le había asignado un nombre, ya se habían realizado actividades (en los problemas introductorios) para que los estudiantes notaran esta relación, lo mismo para el caso de la colinealidad.

Antes de que la profesora presente las propuestas de solución al problema, evidenciadas en la clase anterior, les pregunta acerca de las características del punto medio de un segmento. Los estudiantes mencionan la colinealidad entre los puntos $A$, $B$ y $C$ y la congruencia entre $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. Con ayuda de la pantalla del televisor y un computador, la profesora presenta la primera propuesta de solución al problema (**P1_PC_prop1**[9]): "[…][10] seleccionaron [la herramienta] segmento y trazaron el $\overline{AB}$ […]. Después, intentando asegurar que $B$ fuera el punto medio, ustedes se inventaron otro segmento que arrancara en $B$ y simularon que quedara congruente […]" $_{\text{(P}^{11}\text{, 93).}}$ Antes de mover algún punto de la construcción, María manifiesta que esa construcción no es válida porque al someterla al arrastre, el punto $B$ ya no sería el punto medio $_{\text{(línea, 95)}}$. Esta idea es apoyada por José quién usa lenguaje corporal para intentar mostrar cómo se moverían los puntos perdiéndose la colinealidad, la equidistancia, o ambas propiedades. Al final cuando se mueven los puntos de la construcción, todos los estudiantes concuerdan en

[8] El subíndice, se usa para indicar la fila de la transcripción en la que se encuentra la cita. Las citas textuales, irán entre comillas y el subíndice incluirá el nombre de la persona que mencionó lo citado.
[9] El código hace referencia a la primera propuesta de solución al P1 en el momento de la puesta en común. Y se coloca en negrilla porque se está mencionando la propuesta. Más adelante se encontrará sin negrilla.
[10] Se usan para hacer notar que en la línea citada hay fragmentos que no son relevantes para el documento, pero que se encuentran en la transcripción. Dependiendo de lo extensa que sea la parte omitida se usará […], [… …] o [… … …]
[11] Sigla para profesora.

que la construcción no da solución al problema, ya que no se mantienen las condiciones mencionadas inicialmente.

La profesora presenta la **P1_PC_prop2** afirmando que algunos estudiantes hicieron una construcción así: "[…] punto $A$, punto $B$ […]" (P, 239) "[…] hagamos el $\overline{AB}$ […]"(P, 245) " […] Luego se fueron acá (selecciona la opción circunferencia), hicieron clic en $B$ e hicieron clic en $A$ (queda construida la circunferencia con centro en $B$ y radio $AB$)[12] […] se fueron a la opción segmento y cogieron acá el punto $B$ y a ojo, a ojo ahí está el punto (construyó un segmento cuyos extremos son el punto $B$ y un punto $[C]$[13] de la circunferencia, de tal manera que los tres puntos de la construcción parecen colineales)" (P, 251). La profesora pregunta a los estudiantes porqué creen que el grupo que hizo esa construcción utilizó la circunferencia (P, 247). Una estudiante alude a la congruencia entre $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. La construcción se invalida ya que algunos estudiantes se muestran inconformes con parte de la construcción, debido a que, al mover el punto $C$, $B$ deja de ser punto medio de $\overline{AC}$, ya que, los tres puntos dejan de ser colineales (figura 4.1).



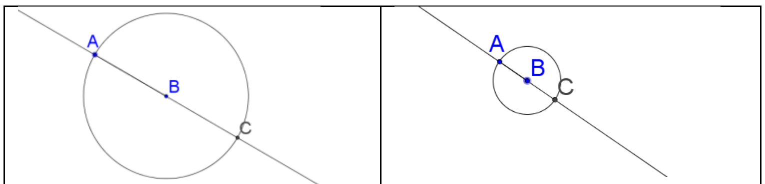

Construcción inicial (Línea 251) | Al mover el punto $B$ (Línea 293)

***Figura 4. 1** Verificación de la P1_PC_prop2*

La última propuesta (**P1_PC_prop3**) no es planteada por la profesora, sino por la pareja de estudiantes conformada por María y Ángela, así: "(Construye los puntos $A$ y $B$, y después construye una circunferencia con centro en $B$ y radio $\overline{AB}$ […])" (Ángela, 344) "Construimos la recta dando clic en $A$ y luego en $B$ (Construyen la $\overleftrightarrow{AB}$)" (Ángela, 351) "Y construimos el punto cuando se sombrean [la circunferencia y la recta]" (Ángela, 353). Posteriormente, Ángela mueve el punto $B$ para mostrar que se mantiene como punto medio del $\overline{AC}$ (Figura 4.2). Cuando

[12] Notación proveniente de la transcripción, y se usa para nombrar acciones que se evidencian en el video.
[13] Notación proveniente de la transcripción, y se usa en la transcripción para incluir palabras no dichas por los estudiantes, o nombres de objetos geométricos, cuando se dejan sin nombrar. Y que se consideran pertinentes para no confundir al lector.

Ángela mueve el punto $B$ la profesora no está mirando; por lo tanto, ella decide mover uno de los puntos de la construcción ($A$) para verificar que las condiciones anticipadas se mantienen (P, 377). Luego de que todos estuvieron de acuerdo con que la construcción soluciona el problema, la profesora orienta la discusión para que los estudiantes argumenten por qué $B$ es punto medio de $\overline{AC}$. La construcción es validada por los estudiantes, ya que siempre se cumple la congruencia de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ por ser radios de una misma circunferencia, y se cumple la colinealidad de los puntos $A$, $B$ y $C$ por pertenecer a la misma recta.




Construcción inicial (Línea 359) | Al mover el punto B (Línea 359)

***Figura 4. 2*** *Corroboración de la P1_PC_prop3*

<u>Actividad demostrativa en la puesta en común del P1</u>

En la tabla 4.1, se presenta el instrumento analítico diligenciado, con los fragmentos de interacción en donde se evidencia la actividad demostrativa de los estudiantes, al momento de la puesta en común.

Como se puede observar en la tabla 4.1, los estudiantes realizan las acciones establecidas por nosotros para el constructo actividad demostrativa en problemas de construcción.

Los estudiantes ***Anticipan invariantes,*** recordando lo trabajado acerca del punto medio en la clase anterior, y suponen propiedades del objeto geométrico que pueden usar para hacer la construcción. En este problema, los estudiantes anticipan dos invariantes; el primero, cuando María y Ángela hacen alusión a que hay que buscar la congruencia de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ (L, 56 y 35)[14], y el segundo, cuando María y José reconocen que los tres puntos deben ser colineales (L 62

[14] Se usan los paréntesis grandes en el análisis, para indicar las líneas en la cual se puede evidenciar determinada acción de la actividad demostrativa, dichas líneas se pueden encontrar en la reconstrucción de la clase o en la tabla con fragmentos de la misma.

y 64). Se consideran invariantes, ya que los estudiantes aluden al conocimiento que poseen acerca del punto medio (adquirido en la clase anterior a la resolución del problema).

<table>
<tr><td>RP</td><td colspan="4">Anticipar invariantes</td></tr>
<tr><td>P1</td><td colspan="2">“¿Y qué condición tiene ese $C$?” (P,31)<br>“[…] el segmento $A$ y $B$ y el segmento $C$ y $B$ tienen que ser congruentes para que $B$ sea el punto medio.” (Ángela, 35)<br>“Que, el $\overline{BC}$ y el $\overline{BA}$ tienen que ser congruentes y si no, no sería punto medio.” (María, 56)</td><td colspan="2">“¿Alguna otra característica de ese punto medio? […] ¿En dónde debe estar?” (P, 61)<br>“En una recta” (María, 62). “¡en un segmento!” (José, 64)<br>“Bueno, en el segmento y el segmento hace parte de la…”<br>“recta” (P, 65 y varios,66)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">PSP</td><td colspan="4">Verificar invariantes en propuestas</td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Cumple equidistancia?</td><td colspan="2">¿Cumple colinealidad?</td></tr>
<tr><td>No</td><td>Sí</td><td>Si</td><td>No</td></tr>
<tr><td>P1_PC_prop1</td><td>“Y, ¿qué condiciones debe tener para ser punto medio?” (P, 105)<br>“Igual medida entre los puntos $B$ y $A$ y $B$ y $C$” (José, 108)<br>“[…] (la profesora mira a la pantalla y María mueve la construcción de tal manera que $B$ no parece ser el punto del $\overline{AC}$) ¡Ay! ¿Y eso que paso allá?” (P, 109)<br>“Se dañó” (Varios, 110).</td><td></td><td></td><td>“Tiene que mover todo el segmento para que $B$ sea el (…)[15] (María mueve el punto $C$ libremente mientras la profesora habla)” (María, 98)<br>“¡No! O sea, tiene que moverse como uno solo, como si fuera uno solo” (María, 100).<br>“O sea, no se puede mover así (pone sus manos de manera horizontal unidas por el dedo del corazón y empieza a mover su mano derecha de arriba hacia abajo), sino que se tienen que mover así (pone las manos en la misma posición, pero cuando mueve la mano derecha hacia arriba mueve la mano izquierda hacia abajo, como si quisiera que las dos manos siempre formaran un segmento)” (José, 101)<br>“Para ver que las condiciones del punto medio se mantengan” (José, 103)</td></tr>
<tr><td>P1_PC_prop2</td><td></td><td>(Fig. 4.1) “¿Por qué creen que se fueron a esa opción [circunferencia]?” (P, 247)<br>“[…] dejar $B$ como (…) en el centro de la circunferencia, los segmentos</td><td></td><td>(Fig. 4.1) “Bueno, muevo $B$ (la profesora mueve el punto $B$ de tal manera que $A$, $B$ y $C$ no parecen colineales) ¿se mantiene?” (P, 293) “¡No!” (Varios, 294) “Es un ángulo” (Sebastián, 295)</td></tr>
</table>

[15] Notación proveniente de la transcripción, que se usa cuando una persona está hablando y deja de hablar, dependiendo del tiempo de la pausa se puede usar (…), (… …) o (… … …).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $AB$ y $BC$ van a quedar de igual medida" (María, 248)<br>"Sí, porque cumple la condición de que son congruentes, ya que como $B$ […] sigue siendo el centro. Y por eso mismo, los segmentos $AB$ y $BC$ son congruentes, van a tener siempre la misma (…) longitud…" (María 298) | | "[…] Pero, a la hora de moverlos ya no serían segmentos, porque $C$ cambiaría, y ya no serían colineales, […] en este se mueve solo un segmento" "Porque no se mueve el segmento $AC$, sino se mueve el segmento $AB$ o $BC$" (María, 298 y 302) |
| P1_PC_prop3 | | (Fig. 4.3) "Porque los dos segmentos tienen la misma medida y también son colineales" (Ángela, 442)<br>"Bueno, me parece a mí que hay dos cosas que justificar, ¿por qué la colinealidad? Y ¿por qué la congruencia?" (P, 443) | | |
| | | (Fig. 4.3) "Porque están en la circunferencia" (Cristián, 478)<br>"Pues sí, pero ¿qué pasa con la circunferencia?" (María, 495)<br>"Que la circunferencia permite la congruencia" (Ángela, 496)<br>"¿Por qué estás tan segura de que hay congruencia?" (María, 503)<br>"…voy a decir porqué son congruentes. Porque la circunferencia tiene radios y es el centro de la circunferencia que en este caso es el punto B, eso hace que sean congruentes, y también que, si ya no serían congruentes, ya no sería punto medio…" (María, 511) | (Fig. 4.3) "Pues porque el segmento está en una recta y eso permite la colinealidad." (Tatiana, 464) | |

***Tabla 4. 1*** *Fragmentos de la puesta en común en el P1*

La ***selección de elementos teóricos o empíricos*** se podría inferir del relato de María y Ángela para la P1_PC_prop3, en dónde enuncian los pasos que propusieron en la construcción (L 344, 351 y 353). Los elementos teóricos seleccionados por ellas son: el hecho geométrico de la circunferencia, que lleva a obtener la congruencia de segmentos que son radios de una misma circunferencia y la definición de colinealidad que les permite garantizar la colinealidad de los tres puntos de la construcción.

La acción de ***Verificar invariante*** sucede ya que los estudiantes someten al arrastre los objetos de cada una de las construcciones presentadas, o solicitan a la profesora realizar dicha acción. Esto lo hacen con el fin de verificar si las construcciones cumplen con las propiedades anticipadas en un principio.

La primera propuesta (P1_PC_prop1), es verificada por María, quién arrastra el punto $C$. En ese momento los estudiantes reconocen que esta no cumple con ninguna de las dos las propiedades anticipadas (equidistancia y colinealidad). Para verificar la P1_PC_prop2, la profesora es quien mueve el punto $B$, de tal manera que los puntos de la construcción no parecen colineales (L, 293 - figura 4.1). Los estudiantes notan que los puntos $A$, $B$ y $C$ no serán colineales y expresan ideas para comunicar lo que observan, en la que presentaron objetos geométricos que no necesariamente permiten evidenciar la colinealidad entre puntos; por ejemplo, se refieren a un ángulo (L, 295). Para verificar la última propuesta de construcción, (P1_PC_prop3), quienes mueven los puntos son Ángela y la profesora (L, 377) con el fin de evidenciar si las propiedades anticipadas se mantienen cuándo se somete la construcción al arrastre. Al hacerlo, $B$ parece seguir siendo punto medio de $\overline{AC}$.

La ***corroboración de la conjetura***, se presenta cuando María mueve el punto $B$ para mostrarle a la profesora y a sus compañeros que la construcción (de P1_PC_prop3) da solución al problema. La acción de mover dicho punto (L, 359 – figura 4.2), podría considerarse como una acción de verificación del invariante. Sin embargo, al mover el punto, ella dice “mira”; (L, 359); por lo tanto, se infiere que ella estaba convencida de su construcción, y el movimiento fue con el fin de mostrar lo realizado.

Con respecto a la acción de ***formular conjetura*** esta se presenta, pero no proponiendo una expresión condicional de manera explícita. Es decir, tal como lo sugiere Leung (2014), la conjetura se ve presente cuando los invariantes se mantienen ante el arrastre y estos permiten llegar a una determinada configuración. En ese sentido, la conjetura que guía el proceder de la solución al problema es: *Si* se determinan los puntos $A$ y $B$, construye una circunferencia con centro en $B$ y radio $\overline{AB}$, se construyen la $\overleftrightarrow{AB}$ y $C$ el punto de intersección de la recta y la circunferencia, *entonces* $B$ es el punto medio de $\overline{AC}$.

La acción del proceso de ***justificación*** reconocida en la actividad realizada por los estudiantes en la puesta en común del P1, tiene que ver con la formulación de cinco argumentos empíricos y teóricos presentados al momento de validar o invalidar las construcciones.

El primer argumento fue presentado por María y José para la P1_PC_prop1, cuando afirman que la construcción no da solución al problema (L, 100 y 101). En este caso, aunque no es explícito el dato, se puede inferir de la construcción realizada, en donde a partir de ($p$) los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, se obtiene una conclusión ($q$) en la que se afirma que los puntos no son colineales. Aunque la conclusión no es expresada de forma explícita, se infiere del lenguaje corporal usado por José y del momento de la clase en que se presenta (cuando la profesora pregunta a los estudiantes porqué afirman que la construcción no soluciona el problema). En este caso, la garantía es empírica, ya que José, apoyado en lenguaje corporal presenta ejemplos en los que las propiedades anticipadas no se cumplen. Dichos ejemplos provienen de imágenes mentales que el estudiante pudo haber obtenido a partir de su propia experiencia. Son válidos, ya que cuando María pasa a mover uno de los puntos, las otras representaciones de la construcción (obtenidas con el arrastre) resultan acordes a lo mencionado por José. Por lo tanto, el argumento presentado por María y José es empírico, y se puede esquematizar como se presenta en la figura 4.3.

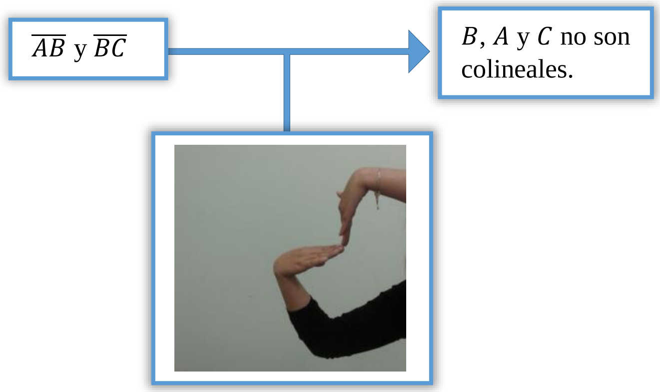



***Figura 4. 3*** *Argumento 1 (P1_PC_prop1): Empírico*[16]

El segundo argumento que los estudiantes presentan, es para justificar la congruencia entre $\overline{\mathrm{AB}}$ y $\overline{\mathrm{BC}}$ (L, 298) en la P1_PC_prop2. En este caso, aunque el dato no es explícito, María hace alusión a que B es el centro de la circunferencia, y dicha afirmación, asociada a la construcción realizada, permite intuir que ella está pensando en que a partir de *(*p) $\overline{\mathrm{AB}}$ y $\overline{\mathrm{BC}}$ radios de una misma circunferencia, se concluye (q), es decir, que $\overline{\mathrm{AB}} \cong \overline{\mathrm{BC}}$. A pesar de que María no menciona la garantía de manera explícita, se puede inferir que está pensado en el hecho de que los radios de una misma circunferencia son congruentes, ya que menciona el centro de la circunferencia, y afirma, con plena certeza, la congruencia de los segmentos. Por lo tanto, este es un argumento que caracterizamos como teórico ya que la garantía es la proposición general según la cual los radios de cualquier circunferencia son congruentes.

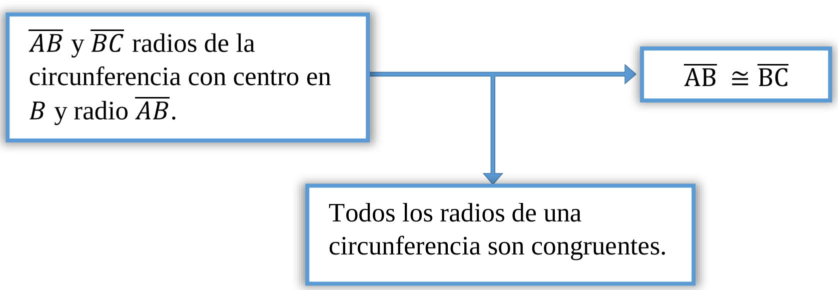



***Figura 4. 4*** *Argumento 2 (P1_PC_prop2): Teórico*

[16] La imagen presentada es una ilustración de lo realizado por José en clase. No se muestran las manos de José ya que la cámara no logra enfocarlas claramente.

El tercer argumento presentado es para invalidar la propiedad de colinealidad de los puntos A, B y C en la P1_PC_prop2 (L, 23, 294, 295 y 298). Este argumento es similar al primer argumento presentado. Sin embargo, en este caso María afirma explícitamente que al mover los puntos se deja de cumplir la colinealidad de estos. Al igual que en el primer argumento, la garantía se basa en la propiedad que se deja de cumplir al mover alguno de los puntos; por lo tanto, es un argumento empírico.

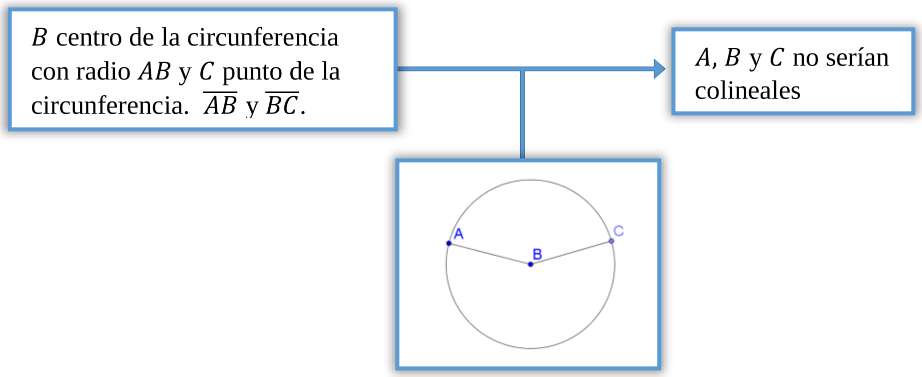



***Figura 4. 5*** *Argumento 3 (P1_PC_prop2): Empírico*

El cuarto argumento surge al discutir la P1_PC_prop3 para garantizar la colinealidad de los puntos A, B y C (L, 443 y 464). En este argumento, Tatiana no hace explícito el dato, pero al igual que en los anteriores argumentos se puede inferir de la construcción realizada y del invariante al que se está refiriendo la estudiante. Nótese que Tatiana en su argumento menciona que un segmento (no especificado) pertenece a una recta (tampoco especificada). Si se piensa solamente en la afirmación de Tatiana no se puede aludir a la colinealidad de los tres puntos, ya que un tercer punto no necesariamente pertenece a la recta formada por los otros dos. Sin embargo, con apoyo de la construcción, se puede inferir que ella se refiere a que el punto C y el $\overline{\mathrm{AB}}$ pertenecen a la misma recta ($\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$). Por lo tanto, Tatiana parte de (p): los tres puntos pertenecen a la $\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$ para concluir (q) que los tres puntos son colineales. La garantía, aunque no es explícita, es la definición de colinealidad ya que Tatiana hace uso de esa palabra. Aunque hasta esa clase no se había institucionalizado dicha definición, si se había abordado en la clase anterior. Por lo tanto, se puede decir que este es un argumento teórico que se puede ver como en la figura 4.6.

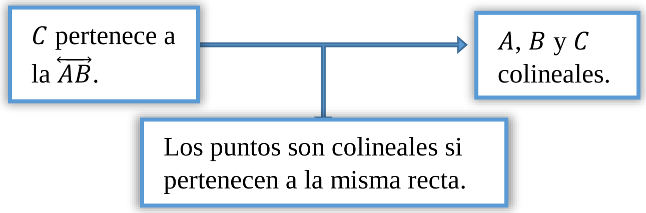



***Figura 4. 6*** *Argumento 4 (P1_PC_prop3): Teórico*

El quinto argumento, también se presenta en la discusión del P1_PC_prop3, cuando la profesora cuestiona a los estudiantes acerca de la congruencia de los segmentos $\overline{\mathrm{AB}}$ y $\overline{\mathrm{BC}}$ (L, 478, 446 y 503). Las intervenciones de María, Cristian y Ángela, aunque no hacen alusión explícita a que $\overline{\mathrm{AB}}$ y $\overline{\mathrm{BC}}$ son radios de la circunferencia, mencionan que esta última tiene radios. Por lo tanto, se infiere que el argumento se basa en que a partir de que $\overline{\mathrm{AB}}$ y $\overline{\mathrm{BC}}$ son radios de la circunferencia con centro en B (p), se concluye que los segmentos son congruentes (q). Aunque no se hace explícito que la garantía se basa en la congruencia entre los radios de la circunferencia, se hace alusión a ella, a su centro, y además los estudiantes aseguran con plena certeza la congruencia de los segmentos. Por lo tanto, el argumento es teórico.

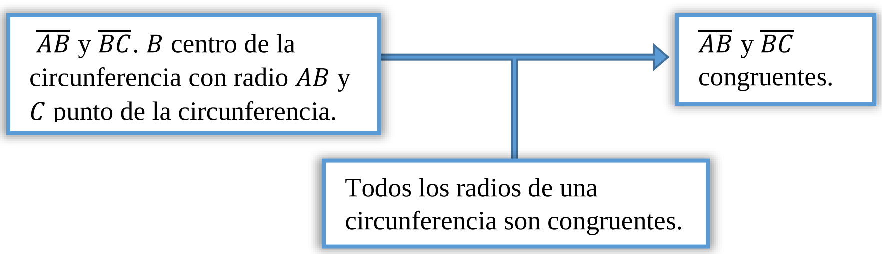



***Figura 4. 7*** *Argumento 5 (P1_PC_prop3): Teórico*

## 4.2 Problema 2: Triángulo isósceles libre

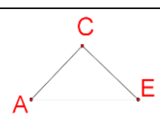
El momento de *Exploración y solución del problema* del P2 se llevó a cabo en la primera parte de la tercera sesión de la secuencia, el 08 de septiembre de 2015. Y la *puesta en común* en la clase inmediatamente siguiente (17 de septiembre), en la primera parte de la clase. En ambos momentos se recolectó información video grabada. A continuación, se presenta el análisis de la actividad demostrativa en ambos momentos.

Reconstrucción de P2 en el momento de exploración y solución del problema

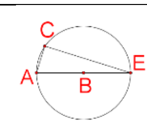
La profesora propone el problema P2: "[…] el nuevo reto de la clase, […]. Van a construir un triángulo isósceles" (P ,1). Pregunta si saben lo que es un triángulo isósceles. Ángela responde que "un triángulo isósceles es aquel que tiene dos de sus lados iguales y dos ángulos iguales." (Ángela, 2) "Congruentes." (Ángela, 6)

Los estudiantes trabajan por parejas en la solución del problema. Una de las propuestas es la **P2_ES_prop1,** que consiste en construir un triángulo con dos segmentos aparentemente congruentes. La **P2_ES_prop2**, es una construcción en la que tampoco se mantiene invariante la congruencia de los lados cuando se somete al arrastre; en esta, los estudiantes hacen uso de una circunferencia, pero no realizan el triángulo garantizando que dos de sus lados sean radios de la circunferencia, sino que mueven uno de lados para que aparentemente sea el radio de la circunferencia. La **P2_ES_prop3**, es una construcción robusta en la que los estudiantes hacen uso de dos radios de la circunferencia como lados del triángulo, de tal manera que este se mantiene isósceles ante el arrastre**.**

El grupo conformado por María y Ángela, proponen la P2_ES_prop2 (figura 4.8). Cuando la profesora se acerca, ellas ya han realizado la construcción del $\triangle ACE$ cuyos lados aparentemente congruentes son $\overline{AC}$ y $\overline{CE}$ (María y Ángela, 27). La profesora arrastra los puntos de la construcción (P, 28) y hace visible que esta no da solución al problema. Cuando pregunta acerca de los objetos geométricos usados en la construcción, María menciona haber usado una circunferencia y la des-oculta.



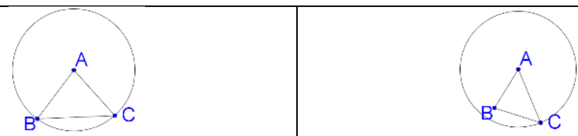

Construcción inicial (Línea 27)




Al mover el punto B y des ocultar algunos objetos (Línea 28 y 31)

***Figura 4. 8*** *Verificación en el grupo de Ángela y María para la P2_ES_prop2*

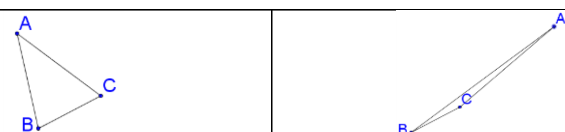
El grupo conformado por Tatiana y Daniela proponen la P2_ES_prop2 (figura 4.9). Cuando la profesora se acerca a las estudiantes, ellas ya han realizado la construcción del $\triangle$ ACB con el punto A como centro de una circunferencia y los puntos B y C aparentemente puntos de la misma (Tatiana y Daniela, 39). Cuando la profesora les pregunta cuáles son los lados congruentes Tatiana hace alusión a $\overline{AC}$ y $\overline{BA}$, pero al arrastrar el punto C, el punto B deja de pertenecer a la circunferencia (P, 44).




| | |
|---|---|
| Construcción inicial (Línea 39) | Al mover el punto C (Línea 44) |

***Figura 4. 9*** *Verificación en el grupo de Tatiana y Daniela para la P2_ES_prop2*

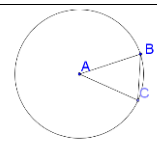
El grupo conformado por José y David, proponen la P2_ES_prop1 (figura 4.10). Cuando la profesora se acerca a los estudiantes ellos ya han realizado la construcción. Ella les pregunta cuáles son los lados congruentes. David afirma que son $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ (David, 52), pero cuando la profesora mueve el punto A, los segmentos anteriormente mencionados dejan de ser congruentes (P, 55).




| | |
|---|---|
| Construcción inicial (Línea 49) | Al mover el punto A (Línea 55) |

***Figura 4. 10*** *Verificación en el grupo de José y David para la P2_ES_prop1*

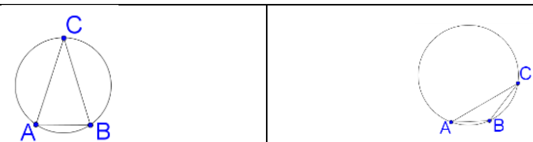
José y David proponen una segunda construcción (P2_ES_prop3). Al igual que en la primera propuesta, la profesora se acerca a los estudiantes cuando ya la han realizado (figura 4.11). Les pregunta la razón por la cual usaron la circunferencia. La respuesta de José se basa en el hecho de que la medida del centro de la circunferencia a cualquier punto de esta, es la misma.




Construcción inicial (Línea 70)

***Figura 4. 11*** *Propuesta del grupo de José y David (P2_ES_prop3)*

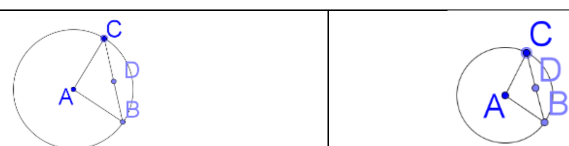
El grupo conformado por Paola y Ana proponen la P2_ES_prop2 (figura 4.12). Cuando la profesora se acerca, ellas ya han realizado su construcción (P, 104), así que les pregunta cuáles son los lados congruentes. Ana afirma que los lados congruentes son los segmentos "$CB$ y $AC$" (Ana, 105), pero cuando la profesora mueve el punto C (P,106) las estudiantes notan que la construcción no soluciona el problema.




Construcción inicial (Línea 104) | Al mover el punto C (Línea 106)

***Figura 4. 12*** *Verificación en el grupo de Paola y Ana para la P2_ES_prop2*

Cuando la profesora se acerca al grupo conformado por Laura y Camilo, ellos ya han realizado la P2_ES_prop3 (figura 4.13). Ella les pregunta cuál es la propiedad que cumplen $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$. Laura afirma que "son de igual medida" (Laura, 174). La profesora le solicita a la pareja de estudiantes que muevan uno de los puntos de la construcción para reducir el tamaño (P, 201). Laura mueve el punto A y hace más pequeño el radio de la circunferencia (Laura, 202). Afirma que al arrastrar los vértices de la construcción sigue siendo un triángulo isósceles "Porque (…) ya tienen el mismo radio (señala los segmentos $CA$ y $AB$) y este (señala el $\overline{CB}$) sigue de diferente medida."(Laura, 206)




Construcción inicial (Línea 170) | Al mover A (Línea 202)

***Figura 4. 13*** *Verificación en el grupo de Laura y Camilo para la P2_ES_prop3*

El grupo conformado por Juan y Raúl proponen que "Para hacer un triángulo isósceles cogemos tres puntos y (…) unimos con segmentos." (Raúl, 208). Esta propuesta corresponde a la P2_ES_prop1 (figura 4.14). La profesora le pregunta a la pareja de estudiantes cuáles son los segmentos congruentes. Ellos afirman que son $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, pero cuando Raúl mueve el punto C, nota que los lados que afirmaron congruentes ya no lo son.

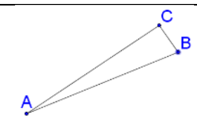
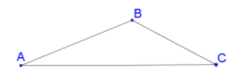
| | |
|---|---|
|  |  |
| Construcción inicial (Línea 234) | Al mover el punto C (Línea 246) |

***Figura 4. 14*** *Verificación en el grupo de Juan y Raúl para la P2_ES_prop1*

Luego, la profesora se vuelve a acercar a este grupo. Ellos tienen construida una circunferencia con centro en $A$ y radio $AB$ (Raúl, 256). Después, Raúl "(Construye un punto [$C$] al interior de la circunferencia y construye todos los posibles segmentos entre los tres puntos)" (Raúl, 260) (figura 4.15). La construcción corresponde a la P2_ES_prop2. Raúl afirma que los lados congruentes son $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, pero duda de su afirmación y decide mover el punto C. Al hacerlo hace visible que los lados que afirmó congruentes ya no lo son. Sin embargo, él mueve el punto C para que aparentemente se encuentre en la circunferencia y afirma que en ese caso sí se cumple la congruencia. Pero, como los invariantes anticipados no se mantienen ante el arrastre, decide hacer una nueva propuesta (P2_ES_prop3).

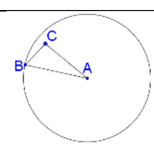
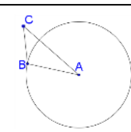
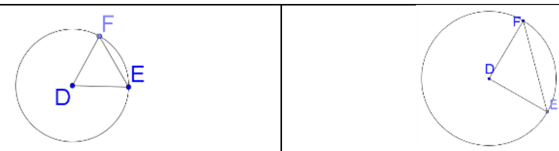
| | |
|---|---|
|  |  |
| Construcción inicial (Línea 260) | Al mover el punto C (Línea 265) |

***Figura 4. 15*** *Verificación en el grupo de Juan y Raúl para la P2_ES_prop2*

Cuando la profesora vuelve a acercarse a los estudiantes, ellos tienen una nueva construcción (figura 4.16). Ella les pregunta si ese es un triángulo isósceles, e inmediatamente Raúl mueve el punto D. Al ver que los puntos F y E permanecen en la circunferencia afirma enfáticamente que el triángulo es isósceles (Raúl, 281) y que los lados congruentes son $\overline{DE}$ y $\overline{DF}$. Para respaldar su afirmación él y Juan hacen alusión al hecho geométrico de la circunferencia.




| Construcción inicial (Línea 280) | Al mover el punto D (Línea 281) |
| --- | --- |

***Figura 4. 16*** *Verificación en el grupo de Juan y Raúl para la P2_ES_prop3*

Actividad demostrativa en la exploración y solución del P2

En la tabla 4.2, se presenta el instrumento analítico, con los fragmentos de interacción en donde se evidencia la actividad demostrativa de los estudiantes, al momento de la exploración y solución del P2, que se llevó a cabo por parejas.

De acuerdo a lo que se presenta en la tabla 4.2, y al recuento del trabajo de los estudiantes, ellos ***anticipan el invariante*** antes de resolver el problema. Esto sucede cuando Ángela afirma que un triángulo isósceles es aquel que posee dos lados y dos ángulos congruentes (L, 2 y 6). A pesar que son dos invariantes diferentes, de acuerdo a sus producciones, solo pusieron en juego la congruencia de dos lados. Solamente otra pareja, conformada por Raúl y Juan, mencionan explícitamente el invariante asociado a la congruencia de dos lados del triángulo (L, 209 y 211). Aunque las otras parejas de estudiantes no hicieron explícito el invariante anticipado, se asume que estuvieron de acuerdo con lo que menciona María al inicio de la clase, ya que todos asintieron con la cabeza el estar de acuerdo con su afirmación.

La ***selección de elementos teóricos*** es evidente en la propuesta de construcción P2_ES_prop3. Con el fin de garantizar la congruencia de dos lados del triángulo, los estudiantes intentan que sean radios de una circunferencia. Este mismo hecho es usado por Tatiana y Daniela (L, 39 y 44) y Juan y Raúl (L, 260 y 265) cuando proponen la P2_ES_prop2, pero solo logran que un lado cumpla dicha característica. Los grupos de Ana y Paola (L, 104 y 106) y Ángela y María (L, 27 y 28) intentan valerse del mismo elemento teórico. Sin embargo, de acuerdo a lo que realizaron, se puede pensar que saben que el uso de una circunferencia les permite garantizar segmentos congruentes, pero no saben que los segmentos deben ser radios y no cuerdas.

<table>
<tr><th>PP</th><th colspan="2">Anticipar invariantes</th></tr>
<tr><td rowspan="2">P2.</td><td colspan="2">“Un triángulo isósceles es aquel que tiene dos de sus lados iguales y dos ángulos iguales.” “congruentes” (Ángela, 2 y 6, respectivamente).</td></tr>
<tr><td colspan="2">“[…] para hacer el triángulo isósceles. Tiene que tener la misma medida para que se logre” (Juan, 209) “¿Qué tiene que tener la misma medida?” (P, 210) “Pues dos lados tienen que ser iguales y congruentes. Listo.” (Raúl, 211)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">PSP</td><td colspan="2">Verificar y justificar invariantes en propuestas</td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Cumple con la congruencia de dos lados?</td></tr>
<tr><td>No</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td rowspan="2">P2_ES_prop1</td><td>(Fig. 4.10) “[…] ¿Cuáles son los lados congruentes?” (P, 49)<br>“$\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.” (David, 52)<br>“[…] (La profesora arrastra el punto $A$ y la construcción se deforma)” (P, 55)<br>“Ya no es.” (José,56)</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>(Fig. 4.14) “¿Qué segmentos son congruentes?” (P, 235)<br>“[…] El segmento $A$ y $B$” (Raúl, 240)<br>“Y el segmento $A$ y $C$” (Juan, 241)<br>“[...] A ver, mueve ahora a (…) cualquiera de los puntos. Cualquiera”. (P, 245)<br>“(Mueve el punto $C$) (Raúl, 246)<br>“¿Siguen siendo congruentes?” (P, 247)<br>“No” (Raúl, 248)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">P2_ES_prop2</td><td>(Fig. 4.8) “Voy a verificar. (La profesora mueve el punto $C$ el cuál se mueve como se estuviera en una circunferencia)” (P, 28)<br>“[…] ¿qué están usando ahí?” (P, 30)<br>“Circunferencia (María des oculta la circunferencia la cual tiene centro en $B$; $B$ es el punto medio del segmento $AE$. Los vértices del triángulo $ACE$ pertenecen a la circunferencia).” (María, 31)</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>(Fig. 4.9) “¿Cuáles son los dos lados congruentes?” (P,34)<br>“$\overline{AC}$ y $\overline{AB}$.” (Tatiana, 43)<br>“[…] ¿Puedo mirar? (La profesora arrastra al punto $C$ y el triángulo deja de parecer isósceles) ¿Qué pasó ahí?” (P,44)<br>“[los segmentos] $AB$ y $AC$ eran congruentes, ustedes me dijeron, y no se mantuvo.” (P,46)<br>“En ese momento.”(Daniela, 47)</td></tr>
</table>

| | | |
|---|---|---|
| | (Fig. 4.12) "[…] ¿Cuáles son los lados congruentes?" (P, 104)<br>"Emm, $\overline{CB}$ y $\overline{AC}$." (Ana, 105)<br>"Bueno, voy a mover y se tiene que mantener. (La profesora mueve el punto $C$ y la construcción se deforma)" (P,106) | |
| | (Fig. 4.15) "¿Cómo sabes que haciendo la circunferencia garantizas que dos lados sean congruentes? […]". (P, 257)<br>"Es una manera de medir los lados". (Raúl, 258)<br>"[…] Listo, los lados congruentes pueden ser $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$". (Raúl, 262)<br>"¿Pueden ser o son?". (P, 263)<br>"Son". (Raúl, 264)<br>"No, espere. No (Mueve el punto $C$ )". (Raúl, 265)<br>"No entiendo para qué hiciste la circunferencia". (P, 266)<br>"Para medir. Porque el punto $C$ debe estar acá (sitúa el punto $C$ aparentemente en la circunferencia). Ahí se (…) digo, ahí ya son (…) son congruentes" (Raúl, 267) | |
| P2_ES_prop3 | | (Fig. 4.11) "Bueno, ¿por qué usaste circunferencia? […]" (P, 76)<br>"Porque del punto centro ya hay una medida a acá (Señala el centro de la circunferencia y un punto de la misma) y serían dos lados congruentes, y entonces este (señala el segmento que no es radio) no tiene la misma medida que estos dos lados (señala los radios de la circunferencia) y ahí se tendría el triángulo isósceles". (José, 77)<br>"¿Por qué sabes que esos dos lados son congruentes?". (P, 78)<br>"Porque tienen la misma medida". (José, 79)<br>"¿Por qué tienen la misma medida?" (P, 80) "Porque es la misma del centro aquí (Señala uno de los radios de la circunferencia) y del centro aquí (señala el otro radio de la circunferencia)". (José, 81) |
| | | (Fig. 4.13) "¿Qué propiedad cumple el segmento $AC$ y el segmento $AB$?". (P, 173)<br>"Que son de igual medida" "Congruentes". (Laura, 174 y 176 respectivamente)<br>"Perfecto, esos segmentos que son congruentes (…) ¿Por qué?". (P,177)<br>"Porque como están de igual medida, los dos radios son congruentes. Y como este (señala el segmento $CB$) no se sabe bien de qué medida es y este sí (señala el segmento $AC$) entonces ya se tiene un triángulo isósceles.". (Laura, 200)<br>"Listo, y si reducimos (…) ahora reduce el tamaño". (P, 201) |

| | | |
|---|---|---|
| | | “(Mueve el punto $A$ para reducir el radio de la circunferencia)” “Ahí también” “Porque (…) ya tienen el mismo radio (señala los segmentos $CA$ y $AB$) y este (señala el segmento $CB$) sigue de diferente medida” (Laura, 202, 204 y 206 respectivamente). |
| | | (Fig. 4.16) “Bueno muchachos, ¿ese es el triángulo isósceles?” (P, 280)<br>“(Mueve el punto $D$ en su construcción) Sí” (Raúl, 281)<br>“Listo, el triángulo $DFE$, ¿cuáles son los lados congruentes?”. (P, 284)<br>“$DF$ y $DE$”. “Lados congruentes”. (Raúl, 287 y 289, respectivamente)<br>“¿Por qué hicieron la circunferencia?, cuéntenme.” (P, 294)<br>“¡para medir!” (Raúl, 295)<br>“Porque del centro (…) del centro tiene la misma medida todos sus lados… O sea, de acá a acá (señala el centro de la circunferencia y un punto de la misma), hay la misma medida que de acá a acá (señala el centro de la circunferencia y otro punto de la misma) que, de acá a acá, que de acá a acá” (Raúl, 337 y 339 respectivamente)<br>“Aja, y eso se llama radio, es para que lo digas bonito.” (P,350)<br>“¡Ah! El radio $DE$, el radio $DF$” “forman un triángulo isósceles con lados congruentes”. (Raúl, 351 y 353, respectivamente)<br>“Y, ¿cómo saben que son congruentes?” (P, 354)<br>“Porque del punto $D$ a la circunferencia (…) a toda la circunferencia, tiene la misma medida.” (Raúl, 355)<br>“Radio, radio. El radio $DE$, el radio $DF$ y los demás puntos de la circunferencia.” (Juan, 357) |

***Tabla 4. 2*** *Fragmentos de la exploración y solución del P2*

La acción de ***Verificar invariante*** se presenta para todas las propuestas de construcción. Para la P2_ES_prop1 en uno de los casos, dicha acción es realizada por la profesora (L, 55), y en el otro, un estudiante ejecuta la acción (L, 246), por sugerencia de la docente. En las construcciones de tres de los cuatro grupos que realizan la P2_ES_prop2, la profesora es quién arrastra uno de los puntos de la construcción, para verificar que el triángulo sí es isósceles (L, 28, 44 y 106). Juan y Raúl inicialmente se encuentran convencidos de su construcción, pero dudan y arrastran uno de los puntos para verificar que el invariante se mantiene (L, 265).

La acción de ***formular conjetura*** no se presenta de forma explícita, sino asociada a los pasos de la construcción que da solución al problema (porque los invariantes anticipados se mantienen cuando es sometida al arrastre), en este caso a la P2_ES_prop3. Sin embargo, en los tres grupos que proponen esta construcción, la profesora llega cuando ya está hecha y no les solicita que la reconstruyan. Por los objetos usados en la construcción se puede decir que la conjetura sería como: "*Si* se tienen los puntos $A$ y $B$, se construye una circunferencia con centro en $B$ y radio $AB$, y un punto $C$ en la circunferencia, de tal manera que los tres puntos no sean colineales *entonces* $\triangle ABC$ es isósceles".

En los grupos video grabados no se ***corrobora la conjetura*** ya que ninguna pareja de estudiantes realiza nuevamente la construcción, ni arrastra con el fin de mostrar a alguien más que su construcción soluciona el problema.

Por otra parte, en el ***proceso de justificación***, se reconoce la presencia de tres argumentos teóricos para validar o invalidar las construcciones.

El primer argumento es presentado por Juan y Raúl cuando proponen la construcción P2_ES_prop2 (figura 4.15). Cuando Raúl hace visible que al mover el punto $C$ de su construcción el triángulo deja de ser isósceles, afirma que si el punto estuviera en la circunferencia el triángulo construido lo sería (L, 267). Dicho de otra manera, él afirma que con sus pasos de construcción no se obtiene como resultado un triángulo isósceles ya que el punto $C$ no pertenece a la circunferencia. Aunque el dato no es explícito se infiere que a partir de ($p$) $\overline{AB}$, circunferencia con centro en $A$ y radio $\overline{AB}$, $C$ que pertenece al interior de la circunferencia, $\overline{CB}$ y $\overline{AC}$, se obtiene una conclusión ($q$) en la que se afirma que el triángulo no es isósceles. En este caso la garantía es teórica ya que el estudiante alude al hecho geométrico de la circunferencia (L, 262 y 267). Según su reporte él desea hacer uso de este hecho, pero, como no se tienen dos puntos en la circunferencia; no se puede afirmar que el triángulo tiene dos lados congruentes. Por ello, este es un argumento teórico.

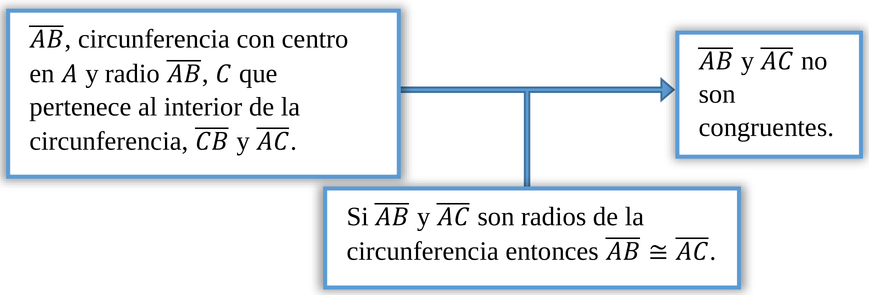



***Figura 4. 17*** *Argumento 1 presentado por Juan y Raúl (P2_ES_prop2): Teórico*

El segundo argumento es presentado por José y David cuando proponen la P2_ES_prop3, y la profesora les pregunta por qué hicieron uso de una circunferencia en su construcción (L, 77, 79 y 81). Ellos manifiestan que de la circunferencia a cualquier punto de esta hay una misma medida (L, 77). Ahí se tiene la garantía del argumento, ya que, aunque no hacen alusión explícita al hecho geométrico de la circunferencia o a la definición de dicho objeto geométrico, están haciendo mención a ello. En el argumento presentado por esta pareja de estudiantes ellos parten de su construcción ($p_1$)[17] para concluir que $\overline{\text{AB}}$ y $\overline{\text{AC}}$ son congruentes ($q_1$). En este caso el argumento se considera teórico por el tipo de garantía que presentan los estudiantes, y se puede ver de la siguiente manera:

[17] Notación usada cuando en el trabajo por parejas, una de ellas presenta más de un argumento para la misma construcción.

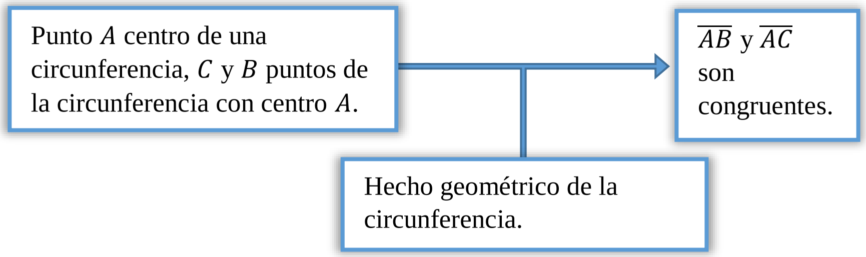



***Figura 4. 18*** *Argumento 2 presentado por José y David (P2_ES_prop3): Teórico*

Un tercer argumento que se presenta para justificar la construcción de José y David (L, 77), sucede cuando los estudiantes parten de que los lados congruentes son dos lados del triángulo ($p_2$) para concluir que el triángulo es isósceles ($q_2$). Aunque en este argumento la garantía no es explícita, se puede evidenciar que los estudiantes están haciendo uso de la definición de triángulo isósceles, como aquel que tiene dos lados congruentes. Por lo anterior, el argumento es teórico (figura 4.19).

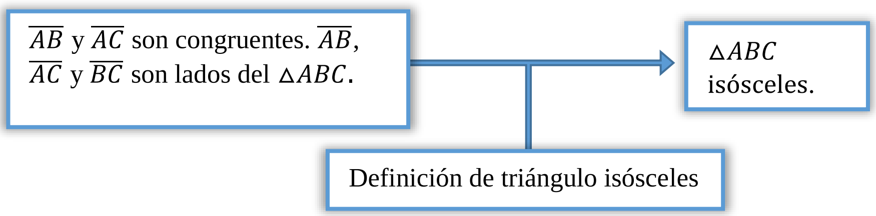



***Figura 4. 19*** *Argumento 3 presentado por José y David (P2_ES_prop3): Teórico*

Los dos argumentos anteriores (de José y David) también son presentados por Laura y Camilo (L, 174, 176 y 200), y Juan y Raúl (L, 289, 287, 337, 339, 351 y 353). Laura y Camilo también consideran que un triángulo isósceles tiene exactamente dos lados congruentes, ya que hacen alusión a que el tercer lado (que no es radio de una circunferencia) es de medida diferente.

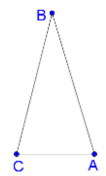
<u>Reconstrucción de la puesta en común del P2</u>

En esta clase, la profesora pide a los estudiantes que le recuerden lo realizado en la clase anterior. Ellos mencionan la construcción del triángulo isósceles. Ella informa que en el transcurso de la clase se discutirán las soluciones presentadas por ellos en el trabajo por parejas, pero antes institucionaliza los hechos geométricos trabajados hasta el momento.

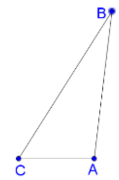
La profesora proyecta en el tablero el programa GeoGebra y construye una circunferencia. Construye dos radios y les pregunta qué se puede decir de dichos radios. Cuando los estudiantes afirman que los radios de una circunferencia son congruentes, ella les menciona que a esta idea la van a llamar el hecho geométrico de la circunferencia. También introduce la definición de colinealidad y de punto medio de un segmento. Para cada uno presenta un cartel que se deja pegado en el tablero (figura 4.20).


***Figura 4. 20*** *Cartel presentado por la profesora*

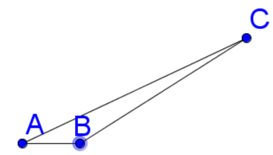
Después de hacer la institucionalización de los hechos trabajados en las clases anteriores, la profesora presenta las propuestas de solución al P2. La primera propuesta es (**P2_PC_prop1**): "[…] Construyo primero un punto $A$, y luego construyo otro punto $B$, y luego" "un segmento, y después construyo un punto por acá, $C$ (es un punto cualquiera), y construyo el triángulo (Los segmentos aparentemente congruentes son $AB$ y $BC$)". (P, 230 y 232). (figura 4.21) Les pregunta a los estudiantes cuáles son los lados congruentes, ellos afirman que $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$. Con esta afirmación ella les pregunta "[…] ¿entonces?, ¿qué le decimos a ese compañero que hizo esa construcción?"(P, 239). Inmediatamente, María le pide a la profesora que arrastre el punto $B$ "[…] a ver si siguen los lados siendo congruentes."(María, 240). José pasa y "(mueve el punto $B$ de un lado a otro)" (José, 244). Algunos estudiantes afirman que el triángulo sigue siendo isósceles, así que José mueve los puntos de la construcción en diversas ocasiones. Al final, la profesora pregunta si alguien cree que el triángulo es isósceles y ningún estudiante responde de forma afirmativa.




Construcción inicial(Línea 234)



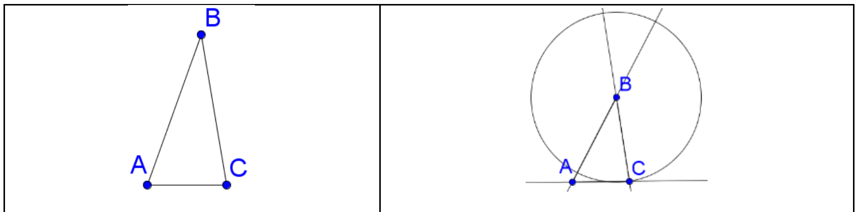

Al mover el punto B (Línea 244)




Último movimiento de B (Línea 268)

***Figura 4. 21*** *Verificación de la P2_PC_prop1*

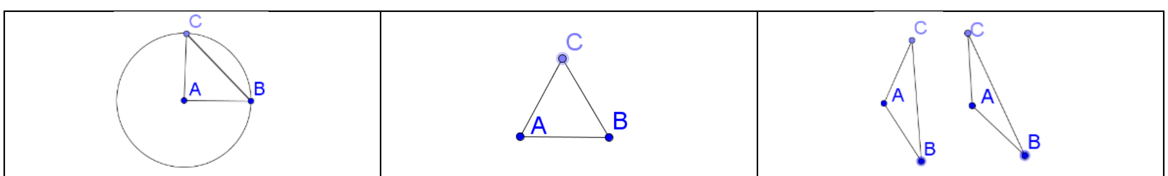
Para la segunda construcción (**P2_PC_prop2**), la profesora no borra el triángulo construido en la primera propuesta, sino que lo mueve de tal manera que aparentemente $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$ son congruentes. Después, explica que una pareja de estudiantes "[…] encontró esta herramienta que hay acá (señala la herramienta "candado", que no permite que los elementos se puedan mover) y le dio clic, y después cogió este puntico de acá (señala el punto $B$) y nuevamente le dio clic al candadito, y cogió el punto $C$ y le dio clic al candadito. (La profesora activa la opción de candado para todos los vértices)." David pasa al tablero e intenta mover los puntos $C$ y $B$, pero sus intentos son fallidos (David 299 y 302). Al ver esto, María interviene y dice: "Profe (…), puede que ahí en ese momento esté bien, pero para que esté bien, el punto $B$ se tiene que mover, para ver si la congruencia se queda o se va." (María, 303). Los estudiantes quitan la opción candado al punto $A$ y al moverlo, notan que el triángulo deja de ser isósceles. Sin embargo, la profesora retoma la construcción inicial (todos los puntos con la opción "candado") y pregunta si el triángulo es isósceles. José responde "Sí, tiene dos lados congruentes, pero ¿cómo verificamos?" (José, 347). Varios estudiantes proponen usar una cuadrícula (José, 349), y José propone usar una regla (José, 349). Pero como se había establecido como norma de la clase no tomar medidas, entonces estas ideas se descartan. María propone construir las rectas que contienen a los segmentos del triángulo y menciona que, si estas no se intersecan, los segmentos no serían congruentes. La profesora hace las rectas y quita la opción candado de uno de los puntos. Lo mueve para que los estudiantes noten que a pesar de que siempre hay intersección entre las rectas, no necesariamente hay congruencia. Retomando la construcción inicial, Raúl dice "Toca con circunferencia" (Raúl, 370). Sebastián propone que la circunferencia tenga centro en $B$(Sebastián, 380), y María complementa diciendo que "radio $C$ pero $A$ tiene que estar también contenido en la circunferencia.", Ángela manifiesta una idea similar a la de María. Debido a que el punto $A$ no está contenido en la circunferencia la construcción se descarta.




Construcción inicial (Línea 399) | Al construir la circunferencia (Línea 390)

***Figura 4. 22*** *Verificación de la P2_PC_prop2*

La última construcción presentada por la profesora (**P2_PC_prop3**) es: "partieron del segmento, le dieron nombre a ese segmento $[AB]$, $[\ldots]$ hicieron una circunferencia con centro en $A$ e hicieron radio $AB$ $[\ldots]$ después dijeron punto y esperaron que la circunferencia se redondeara [para asegurar que el punto pertenezca a la circunferencia] $(\ldots)$ " "Y ahí, colocaron otro puntico, este puntico recibe el nombre $C$"(P, 580 y 582). La profesora realiza $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ y menciona que los estudiantes que realizaron la construcción afirmaron que el $\triangle ABC$ era isósceles. La profesora oculta la circunferencia y solicita a un estudiante que pase al tablero y verifique si el triángulo es isósceles. Pablo pasa al tablero, "(Mueve el punto $C$)" (Pablo, 601). Inicialmente sus compañeros afirman que no es un triángulo isósceles, pero él mueve el punto $B$ y $A$ respectivamente, y vuelve a mover el punto $C$. Después de ello, los estudiantes afirman que el triángulo sí es isósceles, José y Ángela dicen que es porque se mantienen la congruencia entre $\overline{BA}$ y $\overline{AC}$.




Construcción inicial (Línea 590) | Al mover el punto C (Línea 601) | Al mover otros puntos (Línea 601)

***Figura 4. 23*** *Verificación de la P2_PC_prop3*

Nótese que en la puesta en común se presentó una construcción que no fue video grabada en la etapa de exploración y solución al problema. Decidimos incluirla ya que el uso de la herramienta "candado" permite que los estudiantes busquen estrategias de verificación diferentes al arrastre. Y de algún modo, permite abarcar la construcción P2_ES_prop2, que no se ve presente de manera explícita en la puesta en común.

Actividad demostrativa en la puesta en común del P2

En la tabla 4.3, se presenta una estructura analítica, con los fragmentos de interacción en donde se evidencia la actividad demostrativa de los estudiantes, en la puesta en común del P2.

La acción de ***anticipar el invariante*** se realiza antes y durante el trabajo por parejas, pero al socializar el producto de los trabajos realizados por los estudiantes no se hace explícita. Sin embargo, se observa que cuando invalidan una determinada construcción, lo hacen observando si se cumple o no la congruencia de dos de los lados del triángulo.

En cuanto a la ***selección de elementos teóricos o empíricos*** para proponer herramientas que les permitan garantizar una determinada propiedad, está presente al decidir usar circunferencia para obtener dos lados congruentes. Sin embargo, no es espontánea sino producto de la exploración que realizaron en una clase anterior.

La acción de ***Verificar invariante*** sucede ya que los estudiantes someten al arrastre los objetos las construcciones presentadas, o solicitan a la profesora que lo haga, para mirar si dos lados de los triángulos construidos son congruentes. En la P2_PC_prop1, quién mueve uno de los puntos de la construcción es José, pero lo hace por solicitud de María, quien manifiesta explícitamente querer ver si se sigue manteniendo la congruencia entre los lados que aparentemente lo son (L, 240 y 244). En la P2_PC_prop3, quién verifica que el triángulo es isósceles es Pablo (L, 601, 604 y 606), quien voluntariamente verifica que el triángulo es isósceles, moviendo todos los puntos libres de la construcción.  En cuanto a la P2_PC_prop2, quién realiza la verificación es la profesora, siguiendo las instrucciones de los estudiantes (L, 370, 374, 380 y387).

| RP | Anticipar invariantes | |
|---|---|---|
| P2. | | |
| PSP | Verificar invariantes en propuestas | |
| | ¿Cumple congruencia de lados? | |
| | No | Sí |
| P2_PC_prop1 | (Fig. 4.21) "[… …] ¿cuáles son los segmentos congruentes? […]" (P,232)<br>"$\overline{AB}$ y $\overline{CB}$". (Varios, 233)<br>"[…] ¿qué le decimos a ese compañero que hizo esa construcción?". (P, 239)<br>"Coge el punto $B$ y alárgalo […] a ver si siguen siendo congruentes."(María, 240)<br>"(mueve el punto $B$ de un lado a otro)". (José, 244)<br>"¿Qué era lo que se tenía que mantener congruente?". (P, 265)<br>"$\overline{AB}$ y $\overline{CB}$". (Varios, 266)<br>"¿Se mantiene?". (P, 269)<br>"No, no porque el $\overline{AB}$ es más largo que el $\overline{CB}$". (Ángela, 278)<br>"[…] entonces, ¿qué le decimos al compañero que hizo esto?" (P, 288)<br>"Que está mal."(Varios, 289) | |
| P2_PC_prop2 | (Fig. 4.22) "(Pasa al tablero e intenta mover el punto $C$) No mueve". (David, 299)<br>"El punto $B$."(Varios, 301)<br>"(Mueve el triángulo por la pantalla, sin alterar la medida de sus lados)." (David, 302)<br>"Profe (…), puede que ahí en ese momento este bien, pero para que esté bien, el punto $B$ se tiene que mover, para ver si la congruencia se queda o se va". (María, 303)<br>¿[…] Hay alguna manera en la que podríamos pensar que $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$ son congruentes?, mirar si sí son congruentes" (P, 326)<br>"Toca con circunferencia". (Raúl, 370)<br>"Y, ¿qué herramienta tenemos para comprobar que es isósceles?". (P, 373)<br>"¡Circunferencia!, ¡la circunferencia!" (Varios, 374)<br>"[centro] En $B$." (Sebastián 380)<br>"radio $C$ [se refiere al radio $\overline{CB}$], pero $A$ tiene que estar también contenido en la circunferencia." (María, 387) | |

| | | |
|---|---|---|
| | "[…] ¿qué es lo que tiene que suceder para que siempre sea isósceles?" (P, 393)<br>"Que A debe estar en la circunferencia" (Ángela 394)<br>"¿Todos están de acuerdo?" (P, 397)<br>"¡Sí!". (varios, 398) | |
| P2_PC_prop3 | | (Fig. 4.23) "[…] ¿cómo comprobamos? [... …]". (P, 598)<br>"(Mueve los puntos $C$, $B$ y $A$)". (Pablo, 601, 604, 606)<br>"Sí es isósceles". (Varios, 612)<br>"¿Por qué es isósceles el triángulo $ABC$?" (P, 622)<br>"Porque mantiene la congruencia". (Camilo, 623,)<br>"¿Entre quienes?" (Profesora,627)<br>"$\overline{AB}$ y $\overline{AC}$". (Ángela y José, 633 y 634)<br>"[…] ¿quiénes son $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$?"<br>"Son los dos lados del triángulo isósceles." (José, 636)<br>"Son el radio de la circunferencia." (María, 639)<br>"Y qué me garantiza que sean radios de la circunferencia." (P, 640)<br>"Pues que la circunferencia está ahí." (José, 641)<br>"Tienen la misma medida" (María, 642)<br>"Van desde el centro del círculo hasta él." (Laura, 645)<br>"Ah, entonces justifiquemos que el triángulo $ABC$ es isósceles porque…" (P, 649)<br>"[…] tiene dos de sus lados (…) congruentes" (Camilo, 650)<br>"Congruentes, y ¿por qué tiene los lados congruentes?" (P, 651)<br>"Porque son el radio de la circunferencia." porque empiezan en el mismo punto, y terminan en un mismo (…) punto, pues van a ser de igual medida.". (María, 652 y 654)<br>"¿Qué dijimos?, que no hay que decir, los radios de la circunferencia son congruentes, en lugar de eso, ¿qué íbamos a decir?" (P, 659)<br>"¡El hecho geométrico de la circunferencia!"(Ángela, 660) |

***Tabla 4. 3*** *Fragmentos de la puesta en común en el P2*

Al igual que en problemas anteriores, y en concordancia con Leung (2014) consideramos que los estudiantes realizaron la acción de ***formular conjetura,*** ya que después de aceptar que resuelve el problema aseguran, con total certeza, que la construcción da como resultado el tipo de triángulo deseado. En ese sentido, aunque no se propuso un enunciado de carácter condicional, la conjetura detrás de su planteamiento es: "*Si* se construye $\overline{AB}$ una circunferencia con centro en $A$ y radio $\overline{AB}$, y un punto $C$ en la circunferencia, de tal manera que los tres puntos no sean colineales, $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ *entonces* $\triangle ABC$ es isósceles"

La acción de ***corroborar la conjetura*** no se ve presente, ya que cuando se someten las construcciones a una verificación (por medio del arrastre o el uso de la circunferencia), esto se hace para verificar y no para mostrar a un tercero que la construcción es válida.

Por otra parte, en el ***proceso de justificación***, se reconoce la presencia de tres argumentos teóricos para validar o invalidar las construcciones.

El primer argumento es presentado por Ángela para la P2_PC_prop2, cuando afirma que para que el triángulo construido sea isósceles, se debe mantener que $A$ pertenezca a la circunferencia (línea 393). Como $B$ es el centro de la circunferencia con radio $\overline{BC}$ y el triángulo del cual se está hablando es el $\triangle ABC$, se infiere que Ángela alude al hecho geométrico de una circunferencia para concluir ($q$) que el triángulo no es isósceles. En este caso la garantía es teórica (figura 4.24).

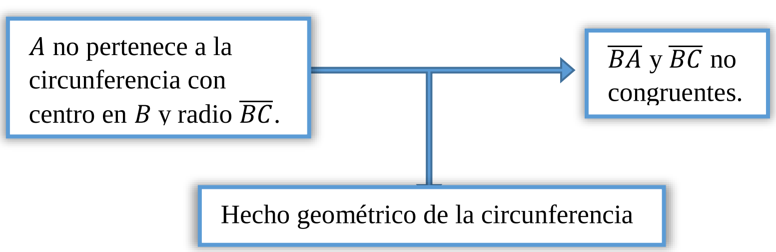



***Figura 4. 24*** *Argumento 1 (P2_PC_prop2): Teórico*

El segundo y tercer argumento conforman la justificación de la P2_PC_prop3. Uno de estos está asociado a la justificación de que dos segmentos son radios de una misma circunferencia, para afirmar la congruencia de segmentos, y afirmar que el triángulo es isósceles.

En la construcción del segundo argumento, participan, José, Ángela y Camilo (L, 623, 633, 634, 636 y 650). En este caso, ellos son explícitos al afirmar que $AB$ y $AC$ son lados del $\triangle ABC$ y además que son congruentes $(p)$ y concluir que el triángulo es isósceles. Aunque la garantía del argumento no es explícita, se puede pensar que está asociada a la definición de triángulo isósceles, debido a que fue abordada y usada en sesiones anteriores. Por lo tanto, la garantía es teórica (figura 4.25). Cabe resaltar que no se está afirmando que los estudiantes plantearon el argumento de forma explícita, pero sí, que sus ideas permiten la formación inferir el mismo.

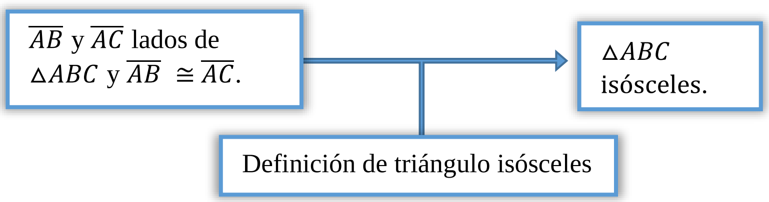



***Figura 4. 25*** *Argumento 2 (P2_PC_prop3): Teórico*

En el desarrollo del tercer argumento participan Camilo, María y Ángela (L, 650, 652, 654, 660). Ellos, con la orientación de la profesora, plantean que debido a que $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son radios de la circunferencia (cuestión que se desarrolla en el tercer argumento), entonces tienen la misma medida. Como garantía, los estudiantes mencionan el hecho geométrico de la circunferencia. Por lo tanto, este argumento es teórico y se puede ver de la siguiente manera:

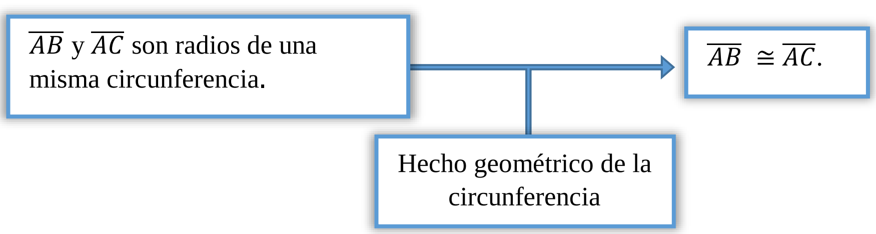



***Figura 4. 26*** *Argumento 3 (P2_PC_prop3): Teórico*

## 4.3 Problema 3: Triángulo isósceles dirigido (construcción con condiciones)

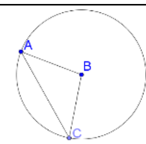
El momento de exploración y solución del problema del P3 se llevó a cabo en la segunda parte de la tercera sesión de la secuencia, el 08 de septiembre de 2015. La puesta en común, al finalizar la clase del 17 de septiembre de 2015, y toda la sesión del 24 de septiembre. En ambos momentos se recolectó información video grabada. A continuación, se presenta el análisis de la actividad demostrativa en ambos momentos.

<u>Reconstrucción de P3 en exploración y solución del problema.</u>

La profesora propone el problema P3, así: "[… …] construyan un segmento […]" (P, 395) "Van a construir un triángulo isósceles a partir de ese segmento; pero, ese segmento no corresponde a los lados congruentes del triángulo" (P, 397). Al proponer el problema, no menciona la definición de triángulo isósceles debido a que el P3 fue propuesto el mismo día que el P2. Y cuando se propuso este último (al inicio de la clase), Ángela dijo que "un triángulo isósceles es aquel que tiene dos de sus lados iguales y dos ángulos iguales." (Ángela, 2) "Congruentes." (Ángela, 6).

Los estudiantes trabajan por parejas en la solución del problema. Una de las propuestas es la **P3_ES_prop1,** que consiste en construir un triángulo isósceles como se construyó en el P2 usando una circunferencia, y uno de los lados congruentes es el segmento inicial y radio de la misma. La **P3_ES_prop2**, es una construcción en la que los estudiantes usan una circunferencia; construyen el segmento inicial, y construyen la circunferencia usando como centro un punto que no pertenece al segmento y garantizan que uno de los extremos del mismo se encuentre en la circunferencia. La **P3_ES_prop3**, es una construcción de un triángulo equilátero haciendo uso de dos circunferencias, de tal forma que se construye el segmento inicial y cada uno de sus extremos es el centro de una circunferencia cuyo radio es dicho segmento. Para construir el triángulo se usan los extremos del segmento inicial y uno de los puntos de intersección de las dos circunferencias.

El grupo conformado por Ángela y María proponen inicialmente la P3_ES_prop1, ya que "(Construyen dos puntos [$A$ y $B$], una circunferencia usando uno de los puntos como centro [$B$] y la distancia entre ellos como radio [$\overline{AB}$], otro punto en la circunferencia [$C$] y los posibles segmentos entre los puntos construidos)." (María, 400). La profesora les pregunta a las estudiantes acerca de las condiciones que debe cumplir el $\overline{\mathrm{AB}}$. Inmediatamente María nota que su construcción no cumple las condiciones del enunciado del problema, y convence a su compañera de ello, pues inicialmente cree que la construcción se encuentra bien hecha.



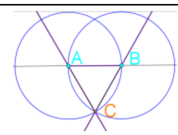
Construcción inicial (Línea 400)

***Figura 4. 27*** *Propuesta del grupo de María y Ángela (P3_ES_prop1)*

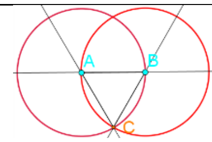
Ellas realizan una nueva construcción, que en este caso corresponde a la P3_ES_prop3. Cuando la profesora se acerca, ellas desocultan los objetos (figura 4.28)[18] . La profesora pregunta a Ángela y María por qué hicieron las circunferencias. María describe la construcción: "Pues yo (…) lo primero que se me vino a la cabeza fue hacer un segmento y que comenzara acá y que terminara acá. (Señala el segmento que es radio de las dos circunferencias [$AB$]) […]" (María, 413). Luego afirma haber realizado una circunferencia con centro en B y radio $\overline{\mathrm{AB}}$ (María, 415 y 419). Continua su relato, diciendo: "Y luego, hacer la otra circunferencia, para ahí hacer la intersección entre las dos circunferencias, por eso está de otro color, ya que este (señala el punto [$C$]) siendo el punto de intersección ya no se podrá mover para ningún lado y se queda la congruencia." (María, 412). Después de ello, las estudiantes con la intervención de la profesora llegan a concluir que el triángulo construido es equilátero y se cuestionan acerca de si un triángulo equilátero[19] es isósceles. Al final, terminan afirmando que todo triángulo equilátero es isósceles.

[18] La construcción inicial de las dos estudiantes no posee nombres de los puntos, sin embargo, más adelante los muestran. Así que para facilidad del lector se presenta la construcción con los nombres.

[19] A pesar de que en clase no se definió este objeto geométrico, los estudiantes tenían la noción de triángulo equilátero como aquel que posee tres lados congruentes (esto de acuerdo a sus propias afirmaciones)



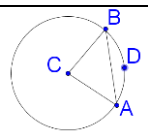
Construcción inicial (Línea 411)



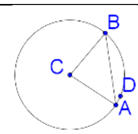
Construcción coloreada (Línea 451)

***Figura 4. 28*** *Propuesta del grupo de Ángela y María (P3_ES_prop3)*

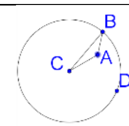
Laura y Camilo, hacen una construcción, que corresponde a la P3_ES_prop2. Laura explica cada uno de los pasos de construcción. Pero, la profesora le solicita que reconstruya lo realizado: "(construye un segmento [$AB$])." (Laura, 555) "(Construye una circunferencia con otros dos puntos, [$C$] es el centro, y la distancia [$DC$] es el radio). Y entonces cogemos el segmento (selecciona el segmento inicial [$AB$] y ubican sus extremos de tal manera que aparentemente estos se encuentren en la circunferencia y después construye otros dos segmentos [$AC$ y $BC$])." (Laura, 557). Cuando los estudiantes acaban la construcción la profesora les solicita que muevan el punto $A$ y al hacerlo notan que la construcción no se mantiene.



Construcción inicial (Línea 532)



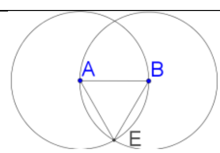
Al reconstruir (Línea 560)



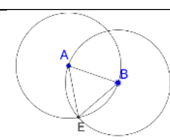
Al mover el punto A (Línea 563)

***Figura 4. 29*** *Verificación del grupo de Laura y Camilo para la P3_ES_prop2*

Pablo y Miguel proponen la P3_ES_prop3. Cuando la profesora se acerca al grupo de estudiantes ellos ya tienen la construcción, así que empiezan a justificar por qué su construcción soluciona el problema. Con la intervención y preguntas de la docente, los estudiantes afirman que el triángulo es isósceles ya que es un triángulo equilátero.



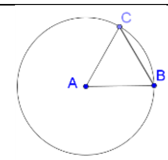
Construcción inicial (Línea 569)



Al mover el punto A (Línea 600)

***Figura 4. 30*** *Verificación del grupo de Pablo y Miguel para la P3_ES_prop3*

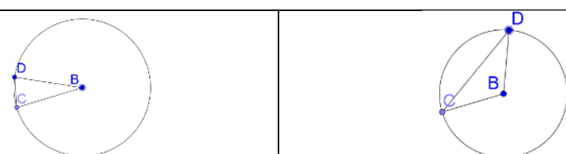
Raúl y Juan, proponen inicialmente la P3_ES_prop1. Ellos construyen la circunferencia con centro $A$ y radio $AB$, construyen un radio $AC$ y el segmento $BC$ (Raúl, 652). Mencionan que es un triángulo isósceles porque dos de sus lados son radios de la circunferencia. Sin embargo, la profesora les recuerda el enunciado del problema para que ellos noten que el segmento $AB$ es uno de los lados congruentes. Al final, son ellos quienes rechazan la construcción ya que no soluciona el problema.




Construcción inicial (Línea 652)

***Figura 4. 31*** *Propuesta del grupo de Juan y Raúl (P3_ES_prop1)*

Felipe y Gabriel, hacen la construcción P3_ES_prop1. La profesora les pregunta por qué es un triángulo isósceles. Ellos mueven el punto $D$ de la circunferencia (figura 4.32) y afirman que este no se "sale" (Gabriel, 816). La profesora les pregunta cuál fue el segmento que construyeron inicialmente, ellos dicen que fue el $\overline{BC}$ y notan que la construcción no cumple las condiciones del problema.




| Construcción inicial (Línea 802) | Al mover el punto D (Línea 816) |
|---|---|

***Figura 4. 32*** *Verificación del grupo de Felipe y Gabriel para la P3_ES_prop1*

Actividad demostrativa en la exploración y solución del P3

El análisis de la actividad demostrativa en la exploración y solución del problema P3, la reconstrucción de la puesta en común y el análisis de la actividad demostrativa en la puesta en común se presentan en el Anexo B. Se siguió el mismo procedimiento que en los demás problemas.

## 4.4 Problema 4: Triángulo equilátero (construcción con condiciones)

El problema P4 fue desarrollado en la sesión del 15 de octubre de 2015. En el mismo día se llevaron a cabo los dos momentos asociados a la resolución de los problemas (exploración y solución del problema y puesta en común).

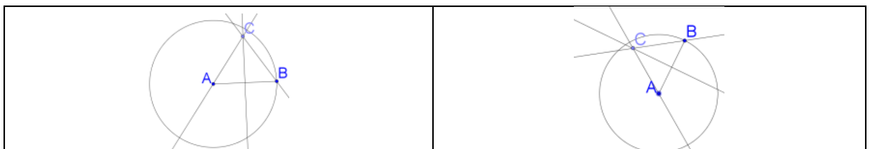
Reconstrucción de P4 en la exploración y solución del problema

Antes de abordar el problema, la profesora recuerda algunas de las normas de la clase. Entre estas está no usar cuadrícula, no utilizar la opción candado –herramientas de GeoGebra– en las construcciones y no utilizar medidas. Por otro parte, hace un resumen de los hechos geométricos del sistema teórico trabajado hasta el momento: el hecho geométrico de la circunferencia y los hechos geométricos de la mediatriz; estos últimos fueron trabajados en clases posteriores al P3.

Seguido a ello, la profesora pregunta a los estudiantes cuál fue la construcción que resultó en una de las sesiones anteriores para un triángulo equilátero. José responde: "con dos circunferencias, basado en el hecho geométrico de la circunferencia" (José, 96). Luego, ella presenta el enunciado del problema que consiste en: "construir un triángulo equilátero, usando solamente una circunferencia". Solicita a los estudiantes que la solución al problema propuesto sea verificada por ellos mismos. Es decir, que ellos hagan la verificación de sus construcciones haciendo uso del arrastre y se vea que el triángulo es efectivamente equilátero.

En la resolución al problema se presentan tres propuestas. La **P4_ES_prop1** consiste en construir una circunferencia con centro en $A$ y radio $\overline{AB}$, construir la mediatriz de $\overline{AB}$, y luego, trazar los $\overline{AC}$ y $\overline{BC},$ donde $C$ un punto cualquiera de la mediatriz. La **P4_ES_prop2** corresponde a la construcción de un triángulo isósceles haciendo uso de una circunferencia, del mismo modo que para la solución del P2. Por último, la **P4_ES_prop3** consiste en construir el $\overline{AB}$, construir su mediatriz, hacer una circunferencia con centro en $A$ y radio $\overline{AB}$, ubicar el punto $C$ en la intersección entre la circunferencia y la mediatriz y construir $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.

María y Ángela realizan la P4_ES_prop1. María recuerda el reto de la clase: “Vamos a hacer un triángulo equilátero con solo (…), una circunferencia. Comenzamos haciendo la circunferencia, luego, trazamos un $\overline{AB}$, luego hacemos la mediatriz. Después vamos a hacer unas rectas, en donde se intersequen […] (mueve el punto $A$) […]” (María, 105 y 107). María pregunta a su compañera por qué afirma que el triángulo es equilátero, Ángela responde a esa pregunta valiéndose del hecho geométrico de la circunferencia y de la mediatriz.



Construcción inicial (línea 107) | Al mover el punto $A$ (línea 107)

***Figura 4. 33*** *Verificación del grupo de María y Ángela para la P4_ES_prop1*

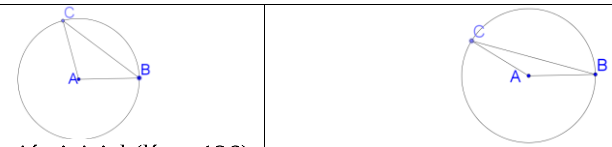
Cuando la profesora se acerca a Cristian (quién trabajo solo) él ya ha realizado su construcción (figura 4.34), que aparentemente es como la P4_ES_prop3. Él intenta afirmar por qué el triángulo construido es equilátero, pero durante el diálogo con la profesora afirma que el punto $C$ puede ser cualquier punto de la mediatriz (P, 325 y 326). Así, la construcción que presenta corresponde a la P4_ES_prop1.

Construcción inicial (línea 327) | Propuesta resultante durante el diálogo (línea 333)

***Figura 4. 34*** *Propuesta de Cristián para la P4_ES_prop1*

Cuando la profesora se acerca a Raúl y Juan, ellos le presentan la construcción P4_ES_prop2. Dicen que construyeron una circunferencia con centro en $A$ y radio $\overline{AB}$, otro radio $\overline{AC}$ y el $\overline{BC}$ (Raúl 120 y 124). Los estudiantes le colocan animación[20] al punto $C$ y afirman que el triángulo es isósceles; pero la profesora les recuerda que el reto era hacer un triángulo equilátero.

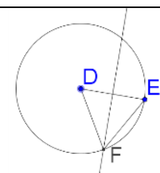
[20] Herramienta de GeoGebra que mueve de forma automática los objetos.




Construcción inicial (línea 126) | Al usar la herramienta de animación (línea 126)

***Figura 4. 35*** *Verificación del grupo de Raúl y Juan para la P4_ES_prop2*

Mariana (estudiante que trabajó sola) realiza la construcción (P4_ES_prop3). Ella construye un punto $D$ y una circunferencia con centro en $D$ y radio $DE$. Después construye el segmento $DE$ y su mediatriz y señalan el punto $F$ como punto de intersección entre la circunferencia y la mediatriz. (Mariana 142a). Mariana explica a la profesora por qué el triángulo construido es equilátero, pero la cámara se encuentra lejos y no se escucha claramente. Dentro de lo que se alcanza a oír, ella menciona haber usado el hecho geométrico de la circunferencia.



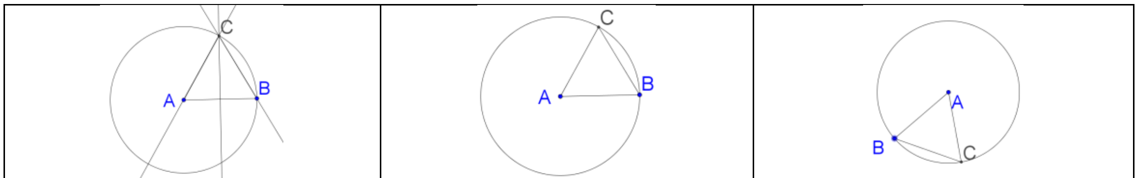

Construcción inicial (línea 142a)

***Figura 4. 36*** *Propuesta de construcción presentada por el grupo de Mariana*

José y David presentan al investigador 1[21]la construcción que corresponde a la P4_ES_prop3 así: "empezamos con un segmento $[\overline{AB}]$, después, colocamos, una mediatriz, en este segmento. Luego, colocamos una circunferencia centro punto[22]. Después colocamos un punto $[C]$ acá (en una de las intersecciones entre la mediatriz y la circunferencia). (José, 175). José construye $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ y los segmentos $AC$ y $BC$. Por último, oculta las rectas (José, 179). Después de presentar la propuesta, el investigador pregunta a los estudiantes cómo se puede afirmar que el triángulo es equilátero y ellos afirman que moviendo los puntos. Más adelante con la orientación del investigador logran explicar el por qué el triángulo construido es equilátero.

[21] Durante la investigación la profesora titular y la practicante tuvieron el estatus de profesoras indistintamente y eran quienes interactuaban con los estudiantes. Cuando el camarógrafo interactuaba con los estudiantes se le nombraba "investigador 1".

[22] Herramienta de GeoGebra que permite construir una circunferencia haciendo uso de dos puntos, uno como centro de la circunferencia y otro como punto de la misma.

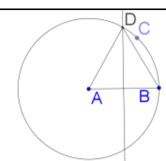



Construcción inicial (Línea 179) | Al ocultar las rectas (Línea 179) | Al mover el punto $B$ (Línea 181)

***Figura 4. 37*** *Primera presentación de la propuesta del grupo de José y David (P4_ES_prop3)*

Después del diálogo entre el grupo de José y el investigador 1, José llama a la profesora mientras mueve todos los puntos libres de la construcción (José, 230). Él reconstruye su propuesta en un nuevo archivo mencionado lo siguiente: "este es el segmento base [$\overline{AB}$], o sea, el que va así (mueve su mano de forma horizontal)" (José, 242), "después voy a construir una mediatriz, y ¿te digo por qué?" "Porque quiero que cuando, digamos, queden los otros segmentos así (Mueve su mano sobre segmentos imaginarios que aparentemente tienen un extremo en la mediatriz y otro extremo en el punto $A$ y en el punto $B$), la mediatriz me garantiza, que es equidistante (señala un punto cualquiera de la mediatriz) de los dos lados (señala los puntos $A$ y $B$), entonces ya sabré que los dos segmentos de los lados son de la misma medida" (José, 248 y 249). Luego, José indica que construye una circunferencia con centro en el punto $A$ y radio el $\overline{AB}$ y muestra la ubicación del punto $C$ en la intersección de la mediatriz (José, 252 y 254). La profesora pregunta por qué construye la circunferencia y él dice: "porque este y este son los radios (Señala el $\overline{AB}$ y un segmento imaginario cuyos extremos serían los putos $A$ y $C$)" (José, 258) "y digamos, tienen la misma medida los dos radios porque es una misma circunferencia" (José, 260). Por último, construye los $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ para formar el $\Delta ABC$. José y David explican a la profesora que el triángulo es equilátero mencionando la congruencia entre parejas de segmento: para afirmar que $\overline{AC} \cong \overline{CB}$ hacen uso del hecho geométrico de la mediatriz y para $\overline{AC} \cong \overline{AB}$ usan el hecho geométrico de la circunferencia. Como los estudiantes no afirman que $\overline{BC} \cong \overline{AB}$ porque deben usar un hecho que no han estudiado en clase (la propiedad transitiva de la congruencia entre segmentos), la profesora les hace una explicación por analogía y les dice: "Tu y yo tenemos veinte años (señala a José) y tú y él (señala a José y a David) tienen veinte años, ¿los tres tenemos veinte años?" (P, 302). Después, ella les explica que lo mismo sucede con la congruencia entre segmentos.

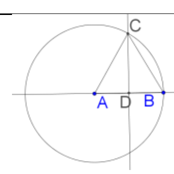
Cuando la profesora se acerca a Tatiana (estudiante que trabajó sola) ella ya ha realizado su propuesta de construcción (figura 4.38) y relata a la profesora los pasos realizados, que corresponden a la P4_ES_prop3. Después, la estudiante dice: "entonces, primero (…), ya tenía la circunferencia, luego hice la mediatriz, sobre (…) del segmento $AB$ […]". (Tatiana, 374). La profesora pregunta si el punto $D$ es cualquier punto de la mediatriz (Línea, 383). Tatiana responde: "pues, en este caso, lo puse sobre la circunferencia para que (señala el segmento $AD$) sea congruente con este lado (señala el segmento $AB$)" (Tatiana, 386). Tatiana llega a que $\overline{BD} \cong \overline{AD}$ y $\overline{AD} \cong \overline{AB}$ por los hechos geométricos de la mediatriz y de la circunferencia respectivamente. Para explicar que $\overline{BD} \cong \overline{AB}$ la profesora realiza una analogía con ayuda de José y dice: "Si tú, eres mi hermana, y él es mi hermano (señala a José), ustedes dos, ¿qué son?" (P, 421). Ella explica que lo mismo sucede con la congruencia de segmentos.




Construcción inicial (Línea 374)

***Figura 4. 38*** *Propuesta de solución presentada por Tatiana*

Cuando la profesora se acerca al grupo de Ana y Paola, las estudiantes ya tienen realizada la construcción como se presenta en la figura 4.39. La diferencia con la propuesta presentada por el grupo de Tatiana está en la construcción de $\overleftrightarrow{AB}$ y que ubican un punto $D$ en la intersección de la mediatriz y el segmento. En su relato afirman que los puntos $A$ y $B$ equidistan de los puntos $D$ y $C$, ellas explican que $\overline{BC} \cong \overline{AC}$ y $\overline{AC} \cong \overline{AB}$ haciendo uso de los mismos hechos que Tatiana. Para explicar la propiedad transitiva de la congruencia, la profesora usa la analogía de los hermanos.




Construcción inicial (Línea, 432)

***Figura 4. 39*** *Propuesta de solución presentada por el grupo de Ana y Paola*

Actividad demostrativa del P4 en la exploración y solución del problema

En la tabla 4.4, se presenta instrumento analítico, con los fragmentos de interacción en donde se evidencia la actividad demostrativa de los estudiantes, al momento de la exploración y solución del problema P4.

La acción ***anticipar el invariante*** no se presenta de forma explícita por los estudiantes antes de proponer sus construcciones; sin embargo, en la conversación entre la profesora y José, él se refiere al triángulo equilátero como aquel que tiene sus lados de la misma medida (L, 183). En cuanto a los demás grupos, esta acción se presenta de manera implícita porque cuando presentan sus propuestas intentan que los tres lados sean congruentes.

La ***selección de elementos teóricos*** se ve presente en todas las propuestas de construcción. Algunos estudiantes utilizan la mediatriz de un segmento porque saben que, por el hecho geométrico de la mediatriz, pueden garantizar que dos de los lados del triángulo son congruentes (L, 113, 336 y 338). Así mismo, algunos construyen una circunferencia y por el hecho geométrico de la circunferencia garantizan que sus radios son congruentes.

La acción de ***verificar el invariante*** se ve presente en el grupo de María y Ángela, cuando mueven el punto $A$ (figura 4.33) para ver que la construcción solo cambia su tamaño ante el arrastre. Sin embargo, su verificación se basa en mover un solo punto y no notan que si mueven el punto $C$ su construcción cambia considerablemente. El grupo de Juan y Raúl verifican que el triángulo es isósceles, cuando usan la herramienta de animación en el punto $C$ (L, 126). Sin embargo, ese no era el problema propuesto. El grupo de José y David verifican que su construcción se encuentra bien hecha cuando mueven el punto $B$ (L, 181). En los demás grupos esta acción no se presenta de manera explícita, debido a que al inicio de la clase la profesora recordó que, antes de presentar una propuesta de solución, debían someterla la construcción al arrastre y observar que las características del objeto geométrico no se modificaran.

<table>
<tr><th>RP</th><th colspan="3">Anticipar invariantes</th></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">No se anticipa explícitamente la definición de triángulo equilátero. Sin embargo, después de proponer la construcción, ellos responden a una pregunta realizada por la profesora:<br>"[…] ¿Cuál es la definición de un triángulo equilátero?". (P, 182)<br>"Que todos sus lados tengan una misma medida". (José, 183)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">PSP</td><td colspan="3">Verificar invariantes en propuestas</td></tr>
<tr><td colspan="3">¿Cumple congruencia de todos sus lados?</td></tr>
<tr><td></td><td>No</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td rowspan="4">P4_ESP_prop1</td><td>HGC[23]</td><td></td><td>(Fig. 4.34) En el $\Delta ABC$ "[…] ¿quién tiene la misma medida? […]" (P, 365)<br>"$\overline{AC}$ y $\overline{CB}$" "Porque están en la circunferencia" (Cristian, 366 y 368)<br>"¿ambos son radios de la circunferencia?" […]" P, 369<br>"$\overline{AC}$ no, estoy confundido" (Cristian, 370)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">HGM[24]</td><td></td><td>(Fig. 4.33) "Porque mantiene la congruencia, por el hecho geométrico de la mediatriz […]" (María, 111)<br>"pues ya que la mediatriz se…, pues, hace que punto $C$ sea equidistante con el punto $A$ y con el punto $B$ [...]" (María, 113)</td></tr>
<tr><td></td><td>(Fig. 4.34) "¿El triángulo $DAB$?, ¿es equilátero?" (P, 335)<br>"Si porque (…) es el segundo hecho de la mediatriz, que cualquier punto que este contenido en la mediatriz del segmento es equidistante a los extremos (…) de los puntos" (Cristian, 336)<br>"¿qué segmentos son congruentes?" (P, 337)<br>"$\overline{AD}$ y $\overline{DB}$" (Cristian, 338)<br>"[…] si tiene dos lados congruentes en este caso ¿cómo se llama?" (P, 339)<br>"Isósceles" (Cristian, 340)</td></tr>
<tr><td>T[25]</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">P4_ESP_prop2</td><td>HGC</td><td></td><td>(Fig. 4.35) "[…] ¿Cómo hicieron eso?" (P, 115)<br>"Con la circunferencia y con segmentos" "[…] hice (…), un radio. (…) No, hice dos" (Raúl, 116 y 120)<br>"[…] ¿ese qué tipo de triángulo es?" (P, 131)<br>"[…] un triángulo isósceles" (Raúl, 132)</td></tr>
<tr><td>HGM</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>T</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>HGC</td><td></td><td>José y David con el investigador<br>(Fig. 4.37) "O sea, mira, la circunferencia nos da la medida de este radio y este radio (señala los segmentos $AC$ y $AB$)." (José, 217)</td></tr>
</table>

[23] Siglas para indicar el Hecho geométrico de la circunferencia.
[24] Siglas para indicar el Hecho geométrico de la mediatriz.
[25] Sigla para indicar la propiedad transitiva de la congruencia entre segmentos.

<table>
<tr><td rowspan="9">P4_ESP_prop3</td><td rowspan="5"></td><td></td><td>“Sí, nos dice que son congruentes.” (Investigador 1, 218)<br>“Listo, y $\overline{AC}$ con $\overline{AB}$ ¿es congruente por...?” (Investigador 1, 222)<br>“La circunferencia”. (José, 223)<br>“Por el hecho” (Investigador 1, 224)<br>“geométrico de una circunferencia”. (José, 225)</td></tr>
<tr><td></td><td>José y David con la profesora<br>(Fig. 4.37) “Y a su vez, con la circunferencia, este y este [son congruentes] (señala los segmentos $AB$ y $AC$)”. (José, 277)</td></tr>
<tr><td></td><td>(Fig. 4.38) “Y también son congruentes $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ (…) porque son radios de la circunferencia con centro en $A$”. (Tatiana, 398)</td></tr>
<tr><td></td><td>(Fig. 4.36) “(…) ¿Cuáles son radios de la circunferencia?” (P, 152)<br>“$\overline{DF}$ y $\overline{ED}$ son radios de la circunferencia” (Mariana, 153)<br>“Ah, ¿y esos son congruentes?” (P, 154)<br>“Sí” (Mariana, 155)<br>“¿Por qué?” (Profesora, 156)<br>“Porque todos los radios de la circunferencia son congruentes” (Mariana, 157)<br>“Y eso es por” (P, 158)<br>“El hecho geométrico de la circunferencia” (Mariana, 159)</td></tr>
<tr><td></td><td>(Fig. 4.39) “Por el hecho geométrico de la circunferencia que dice que (…) todos los radios son congruentes” “Con solo el de la circunferencia $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$” (Ana, 441 y 445)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">HGM</td><td></td><td>José y David con el investigador 1<br>(Fig. 4.37) “(…) hay algo que utilizó, de entrada, para garantizar que esto y esto sean congruentes (señala $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$)” (Investigador 1, 200)<br>“(…) Usé una mediatriz”. (José, 201)<br>“Con la mediatriz, ¿usted que garantizó?” (Investigador 1, 202)<br>“Que sea equidistante, los dos extremos”. (José, 203)<br>“¿Cuáles?” (Investigador 1, 204)<br>“[…] El punto $A$ y el punto $B$”. (José, 205)<br>“Listo, ¿Cuál equidista del punto $A$ y del punto $B$?” (Investigador 1, 206)<br>“El [punto] $C$”. (José, 207)<br>“(…) ¿qué podemos decir del $\overline{AC}$ y el $\overline{BC}$?” (Investigador 1, 208)<br>“Que son congruentes”. (José, 209)</td></tr>
<tr><td></td><td>José y David con la profesora<br>(Fig. 4.37) “(…) o sea, te acuerdas que como yo al principió trace la mediatriz y que este y este iban a ser congruentes (señala los segmentos $AC$ y $BC$) (…)” (José, 275)</td></tr>
<tr><td></td><td>(Fig. 4.38) “El $\overline{AD}$ y el $\overline{DB}$ son congruentes” “(…), por el hecho geométrico de la mediatriz de un segmento” (Tatiana, 394 y 396)</td></tr>
</table>

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | (Fig. 4.36) "Y esta (señala la mediatriz), es la que me ayuda a ubicar este punto cuando se intercepten (Mariana, 159)<br>"¿Cuáles son congruentes por la mediatriz? (P, 162)<br>"$\overline{DE}$ y $\overline{FE}$" (Mariana, 163) |
| | | | (Fig. 4.39) "$A$ y $B$ son equidistantes del punto $D$ y del punto $C$". (Ana, 437)<br>"(…) entonces quiere decir que $\overline{CB}$ y $\overline{CA}$ ¿son?" (P, 438)<br>"Congruentes" (Ana, 439) |
| | T | | José y David con la profesora:<br>"(…) ¿por qué el triángulo es equilátero?" (P, 278)<br>"Porque tiene los tres lados de la misma medida" (José 280)<br>"(…) ¿por qué me aseguras los tres lados de la misma medida?, si sumercé me dijo que los congruentes eran este con este (señala $\overline{CB}$ y $\overline{AC}$) y este con este (señala $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$)". (P, 280)<br>"No. O sea, para asegurar con la mediatriz era este y este (señala $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$)" "Y después con la circunferencia puedes asegurar este y este (señala $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$)". (José, 281 y 283)<br>"¿Y por qué con esas dos hipótesis me dices que los tres son congruentes? (…)" "Tú y yo tenemos veinte años (señala a José) y tú y él (señala a José y a David) tienen veinte años, ¿los tres tenemos veinte años?" (P, 282 y 302)<br>"Sí" (José 303)<br>"¿Por qué?" (P, 304)<br>"Porque tú tienes veinte, yo veinte y él veinte" (José 305)<br>"Ah bueno, entonces este tiene la misma medida, este tiene la misma medida y este tiene la misma medida (señala los tres segmentos)" (José, 307) |
| | | | (Fig. 4.38) "(…) ¿Cómo garantizaste, que $\overline{DB}$ y $\overline{BA}$ son congruentes?" (P, 399)<br>"Pues (…) ahí si no se (… …) por qué" (Tatiana, 400)<br>"Bueno, usemos colorcitos ¿sí?, para identificar los segmentos que son congruentes por el hecho geométrico de la circunferencia, usa colorcitos". (P, 401)<br>"Listo, ¿qué pasa con el $\overline{AD}$?" "O sea, ¿cuántos colores tiene?" (P, 417 y 419)<br>"Dos" (Tatiana, 420)<br>"(…), démonos cuenta que $\overline{AD}$ es congruente a dos segmentos (…), entonces mirémelo así. Si tú, eres mi hermana, y él es mi hermano (señala a José), ustedes dos, ¿qué son?" (P, 421)<br>"Hermanos" (José, 422)<br>"Si este segmento es hermanito de este (señala $\overline{AD}$ y $\overline{AB}$), y este es hermanito de este (señala $\overline{AD}$ y $\overline{DB}$), ¿qué relación tienen $\overline{DB}$ y $\overline{AB}$?" (P, 425)<br>"Pues, que los tres son hermanos" (José, 426)<br>"Entonces, si los tres son hermanos, ¿qué podemos decir? (…) pasándolo a la geometría" (P, 427)<br>"Que es un triángulo equilátero" (Tatiana, 428)<br>"¿Por qué?" (P, 429)<br>"Porque (…), porque los tres lados son congruentes" (Tatiana, 430) |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | (Fig. 4.39) "Listo, ya tenemos que este segmento es congruente a este (señala $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$), pero yo quiero que los tres sean congruentes, ¿Cómo garantizaste que $\overline{AB}$ fuera congruente?" (P, 440)<br>"Por el hecho geométrico de la circunferencia que dice que (…) todos los radios son congruentes."(Ana, 441)<br>"(…) ¿eso nos garantiza que todos son congruentes?" (P, 446)<br>"No, los dos, sí" (Ana, 447)<br>"Tenemos que parejitas son congruentes, (…) allá en el programa (…) con un color, construir segmentos (…) que son congruentes por el hecho geométrico de la circunferencia" "y con otro color, los que son congruentes por el hecho geométrico de la mediatriz que mencionaste". (P, 448 y 452)<br>"¿Qué pasa con el $\overline{CA}$?, ¿cuántos colores tiene?" (P, 456)<br>"Dos" (Ana, 457)<br>"(…) bueno, si puede tener dos colores, pero (…). A ver, vamos a pensar en esto, el ejemplo de los hermanitos ¿si los escucharon? (…) A ver, si ella es hermana mía (Señala Paola) y yo soy hermana tuya, ¿ustedes dos qué son?" (P, 458)<br>"Hermanas" (Ana, 459)<br>"Hermanas, entonces, ¿qué sucede con estos segmentos?, ¿qué segmentos son hermanos?" (P, 460)<br>"$\overline{AC}$ y $\overline{AB}$" "$\overline{AC}$ y $\overline{CB}$" (Paola, 462 y Ana, 464)<br>"Entonces, ¿qué podemos decir de $\overline{CB}$ y $\overline{AB}$?" (P, 465)<br>"(…) que también son congruentes" (Ana, 466)<br>"(…) entonces ¿qué podemos decir del triángulo?" (P, 467)<br>"Que si es equilátero". (Ana, 468) |

***Tabla 4. 4*** *Fragmentos de la exploración y solución del problema P4*

La acción de ***formular conjetura*** se presenta implícitamente en los grupos que proponen la P4_ES_prop3, ya que los grupos aseguran con plena certeza que el triángulo construido es equilátero. En varios grupos, la profesora se acerca cuando la construcción ya fue realizada. Sin embargo, el grupo de José reconstruye su propuesta de solución (L, 242 y 262). De ahí que, la conjetura se puede ver como: "*Si* construyo $\overline{AB}$, su mediatriz, una circunferencia con centro en $A$ y radio $\overline{AB}$ y ubico un punto $C$ en una de las intersecciones entre la circunferencia y la mediatriz *entonces* el $\Delta ABC$ es equilátero".

Con respecto a la acción ***corroborar la conjetura*** se evidencia en el grupo de José (L, 230) cuando el estudiante arrastra los puntos libres de la construcción para mostrarle a la profesora que su construcción es la de un triángulo equilátero.

En cuanto al ***proceso de justificación,*** se evidencia el uso de argumentos teóricos para validar las construcciones presentadas. El primer y segundo argumento que presentan los estudiantes es para justificar por qué el triángulo construido en la P4_ES_prop3 es equilátero.

En el primer argumento, los estudiantes garantizan la congruencia de dos lados usando el hecho geométrico de la mediatriz. En este caso, los estudiantes parten de que el punto $C$[26] pertenece a la mediatriz de $\overline{AB}$ para concluir que $\overline{AC} \cong \overline{CB}$. Se considera un argumento teórico porque algunos estudiantes mencionan explícitamente el uso del hecho geométrico de la mediatriz; es el caso de Tatiana (L 394 y 396). Otros lo usan cuando afirman, con plena certeza, que el usar la mediatriz les permite garantizar congruencia; es el caso de José y David (L, 201, 203, 209 y 275), Mariana (L, 163) y Ana y Paola (L, 437, 438 y 439).

[26] Se usa el nombre de un punto específico, sin embargo, los nombres de los puntos varían en los grupos.

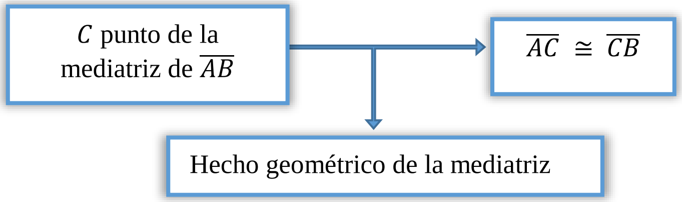



***Figura 4. 40*** *Primer argumento teórico presentado por los grupos para la P4_ES_prop3*

En el segundo argumento, los estudiantes garantizan la congruencia de otros dos lados del triángulo usando el hecho geométrico de la circunferencia. En este caso, parten de que los puntos $C$ y $B$ pertenecen a la circunferencia con centro $A$ y radio $\overline{AB}$ para concluir que $\overline{AC} \cong \overline{AB}$. Se considera argumento teórico porque los grupos de José y David (L, 225), Ana y Paola (L, 441 y 445) y Mariana (L, 157 y 159) mencionan explícitamente que usan el hecho geométrico de la circunferencia. El grupo de Tatiana (L, 398) lo parafrasea en su discurso.

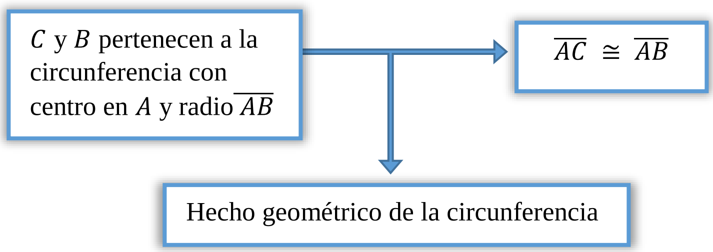
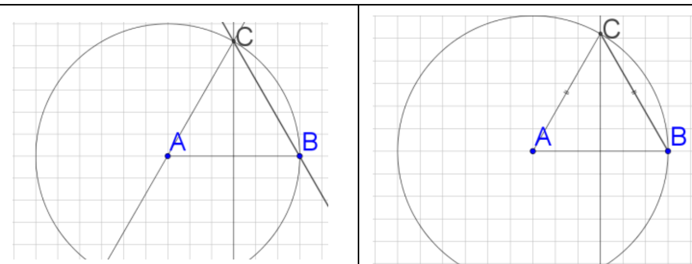



***Figura 4. 41*** *Segundo argumento teórico presentado por los grupos para la P4_ES_prop3*

<u>Reconstrucción de P4 en la puesta en común</u>

Debido a falta de Video Beam en el aula en el que se desarrolla la clase, la profesora solicita que un estudiante pase al tablero a explicar su solución al problema propuesto. Por cuestiones de tiempo, la profesora decide que no se presenten las tres propuestas que se evidenciaron al momento de la exploración y solución del problema; solamente se presenta la P4_ES_prop3. Al momento de la puesta en común, denotaremos la propuesta como P4_PC_prop1, esta es presentada por dos estudiantes que pertenecen a grupos distintos.

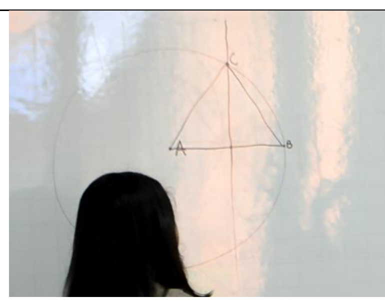
José dibuja el $\overline{AB}$ usando las líneas de la cuadrícula del tablero (José, 473), dibuja la mediatriz del $\overline{AB}$ y una circunferencia con centro en $A$ y radio $\overline{AB}$ (José, 486 y 495). Antes de que José continúe, la profesora pregunta a los demás estudiantes por qué creen que él usa una circunferencia y la mediatriz. Vanesa, Carolina y Laura afirman que con dichos objetos geométricos se garantiza la congruencia entre segmentos (L, 506, 508 y 510). José continúa con la construcción, ubicando el punto $C$ en una de las intersecciones entre la mediatriz y la circunferencia, y construye las rectas $AC$ y $BC$. Sin embargo, Tatiana lo interrumpe diciendo que las rectas no son necesarias. José borra las rectas realizadas y dibuja $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, obteniendo, de esa manera, el triángulo equilátero $ABC$ (figura 4.42). José explica a sus compañeros por qué el triángulo construido es equilátero y dentro de su relato hace uso de la analogía de los hermanos.




Dibujo con las rectas (línea 518) | Dibujo final (Línea 586)

***Figura 4. 42*** *Propuesta de José en el tablero*

La propuesta presentada por Mariana (figura 4.43) es muy similar a la de José. La diferencia está en que ella inicia dibujando una circunferencia y no el $\overline{AB}$. Esta similitud entre las construcciones es notada por los estudiantes, quienes afirman que es la misma propuesta de José. Sin embargo, Mariana continúa y explica con sus palabras por qué su triángulo es equilátero.



Dibujo de Mariana (Línea 616)

***Figura 4. 43*** *Propuesta de Mariana en el tablero*

Actividad demostrativa del P4 en la puesta en común

En la tabla 4.5 presentamos el instrumento analítico con los fragmentos de interacción en donde se evidencia la actividad demostrativa de los estudiantes, al momento de la puesta en común. En esta tabla se observa la realización de algunas de las acciones que están involucradas en la actividad demostrativa.

La acción ***anticipar el invariante***, no se hace explícita en la puesta en común, debido a que se presenta al momento de la exploración y solución del problema. Sin embargo, es notorio que los estudiantes son conscientes de que el triángulo que presentan como producto final debe tener los tres lados congruentes.

La ***selección de elementos teóricos*** se ve explícitamente, ya que, para garantizar la congruencia de los lados del triángulo, los estudiantes usan la mediatriz de un segmento y dicen que por el hecho geométrico de la mediatriz pueden garantizar la congruencia de dos lados (L, 579, 581, 584, 616 y 634). De igual forma, construyen la circunferencia para garantizar la congruencia de otro par de lados del triángulo (L, 506, 510, 611 y 656).

La acción de ***verificar el invariante*** no se presenta en la puesta en común. Sin embargo, es notorio que los estudiantes están seguros de que el triángulo es equilátero porque de antemano previeron cómo garantizar que lo fuera al hacer la construcción en GeoGebra.

La acción de ***formular conjetura*** no se evidencia de manera explícita, y al igual que en el momento de experimentación y solución al problema, se considera que los pasos de construcción constituyen el antecedente que permite llegar a la construcción de un triángulo equilátero. Así, cuando José reconstruye su propuesta de solución (L, 487 y 586) la conjetura que guía su proceder es: "*Si* se construye $\overline{AB}$ y su mediatriz, una circunferencia con centro en $A$ y radio $\overline{AB}$ y se ubica el punto $C$ en una de las intersecciones entre la circunferencia y la mediatriz *entonces* el $\Delta ABC$ es equilátero". De igual manera para la propuesta presentada por Mariana.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **RP** | **Anticipar invariantes** | | |
| | No se anticipa explícitamente definición de triángulo equilátero. Sin embargo, después de proponer la construcción, ellos responden a una pregunta realizada por la profesora:<br>"[…] ¿Cuál es la definición de un triángulo equilátero?". (P, 182)<br>"Que todos sus lados tengan una misma medida". (José, 183) | | |
| **PSP** | **Verificar invariantes en propuestas** | | |
| | ¿Cumple congruencia de todos sus lados? | | |
| | | No | Sí |
| **P4_PC_prop1** | HGC | | (Fig. 4.42) ¿Para qué creen que José va a hacer la circunferencia? (P, 501)<br>Para que quede de la misma medida. (Carolina, 506)<br>Para, para hacer la circunferencia para ayudarse del radio de la medida del segmento. (Laura, 510) |
| | | | (Fig. 4.43) "Primero, voy a partir de una circunferencia con centro en $A$". (Mariana, 611)<br>"[…] los segmentos $AB$ y $AC$ son congruentes porque son radios". (Mariana, 656) |
| | HGM | | (Fig. 4.42) "(…) ¿para qué quieres que $C$ este en la mediatriz?" (P 570)<br>"Bueno, eso. La mediatriz eh (…), digamos, nos garantiza que es equidistante de los dos lados (señala los segmentos $AB$ y $AC$)." (José, 579)<br>"De los extremos (Todos los estudiantes gritan intentando corregir a José)" (Varios, 581)<br>"De los extremos, ¡Ya!" (José, 582)<br>"Y entonces si pongo el punto C en la mediatriz me garantiza que si pongo un segmento de $C$ a $A$ y de $C$ a $B$ tengan la misma medida." (José, 584) |
| | | | (Fig. 4.43) "[…] Entonces después de tener la mediatriz, pongo un punto donde se intercepte la mediatriz del segmento $AB$ y la circunferencia. Ahora este punto, va a ser el punto $C$, después, voy a unir los dos segmentos y queda (construye los segmentos $AC$ y $CB$)". (Mariana, 616)<br>"¿Cómo confirmas que $C$ es la mediatriz de $\overline{AB}$?" (Ana, 626)<br>"O sea, no es la mediatriz, o pues, es un punto de la mediatriz, porque la mediatriz es toda una recta. Y $C$ es un punto de la mediatriz". (Mariana, 627)<br>"Porque tienen que estar (…) punto que haga parte de la mediatriz, porque si no, no van a ser congruentes el segmento $A$ y $B$". (Mariana, 632)<br>"¿$A$ y $B$? pero ¿$A$ y $B$ no son puntos? … ¿Cuáles segmentos son congruentes por la mediatriz?". (Profesora, 633)<br>"$A$ y $C$ (señala el segmento $AC$) y $B$ y $C$ (señala el segmento $BC$)". (Mariana, 634) |
| | T | | (Fig. 4.42) "Y para qué quieres que esté en la circunferencia ¿también?" (P. 587)<br>"Para que, digamos, aquí como la circunferencia también nos aclara que, digamos, el radio $AC$ y el radio $AB$ sean congruentes, ¿no? Entonces, por eso quiero que este (…) es como que digamos este (señala el segmento $AC$) es hermanito de este (señala el segmento $CB$) por la mediatriz y, este (señala el segmento $AC$) es hermanito de este (señala el segmento |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | $AB$) por la circunferencia, entonces, si este es hermanito de este (señala los segmentos $AC$ y $CB$) y este es hermanito de este (señala los segmentos $AC$ y $AB$) entonces los tres son hermanos. (José, 588) |
| | | | (Fig. 4.43) "[…] ¿y $\overline{AB}$ es congruente con $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$?". (P, 635)<br>"Porque gracias a la mediatriz, pues los dos, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ van a ser congruentes. Pues la mediatriz es el que parte por la mitad, o divide por la mitad a un segmento". (Mariana, 643)<br>"Bueno, pero entonces de donde sacas que sean congruentes a $\overline{AB}$, al segmento $AB$. O sea, ¿$\overline{AB}$ por qué es congruente con los otros dos también?" (P, 644)<br>"Por la mediatriz". (Mariana, 645)<br>"¿Sí?, segmento $AB$ Mariana. (La profesora le pasa a Mariana un marcador rojo, para que con él señale los segmentos que son congruentes gracias a la mediatriz). Listo." (P, 646)<br>"Esos son hermanitos." (José, 647)<br>"Ahora, esos son los segmentos $AC$ y $CB$ ¿cierto?, que son congruentes por la mediatriz. Ahora, ¿por qué $AB$, segmento $AB$, es congruente con los que tú ya dijiste que son congruentes?" (P, 648)<br>"Por la circunferencia." (Mariana, 649)<br>"¡Ah!, ¿Qué pasa con la circunferencia?" (P, 650)<br>"Porque $C$ está, $C$ está contenido en la circunferencia y en la mediatriz." (Ángela, 655)<br>"No, pero también porque, o sea, los segmentos $AB$ y $AC$ son congruentes porque son radios y, (…) ¿qué? y también son congruentes porque el punto $C$ es equidistante al punto $A$ y al punto $B$, y al ser equidistantes, pues, ya se sabe que son congruentes." (María, 656) |

***Tabla 4. 5*** *Fragmentos de la puesta en común del problema P4*

En cuanto a la acción ***corroborar la conjetura*** no se evidencia en este momento de la clase. Por otra parte, en el ***proceso de justificación*** se evidencia el uso de argumentos teóricos para validar las construcciones presentadas por José y Mariana, y el empleo de una analogía (inducida) por parte de José para concluir que todos los lados del triángulo son congruentes (L, 588).

Los argumentos presentados por José y Mariana se centran en afirmar que los triángulos construidos son equiláteros. Para ello, hacen uso del hecho geométrico de la mediatriz para concluir que $\overline{AC} \cong \overline{CB}$ (L, 579, 584, 632 y 634) y del hecho geométrico de la circunferencia para concluir que $\overline{AC} \cong \overline{AB}$ (L, 506, 510 y 656). Estos argumentos son los mismos presentados en el trabajo por parejas y se pueden evidenciar en las figuras 4.40 y 4.41. Adicionalmente, en la puesta en común, José propone un argumento por analogía (inducida) de acuerdo a su experiencia en el trabajo por parejas. Él parte de la congruencia de las parejas de segmentos para concluir que los tres segmentos son congruentes entre sí, y su garantía es una analogía en la que el afirma: "[…] es como que digamos este (señala el segmento $AC$) es hermanito de este (señala el segmento $CB$) por la mediatriz y, este (señala el segmento $AC$) es hermanito de este (señala el segmento $AB$) por la circunferencia, entonces, si este es hermanito de este (señala los segmentos $AC$ y $CB$) y este es hermanito de este (señala los segmentos $AC$ y $AB$) entonces los tres son hermanos."

El argumento presentado por José se puede ver de la siguiente manera:

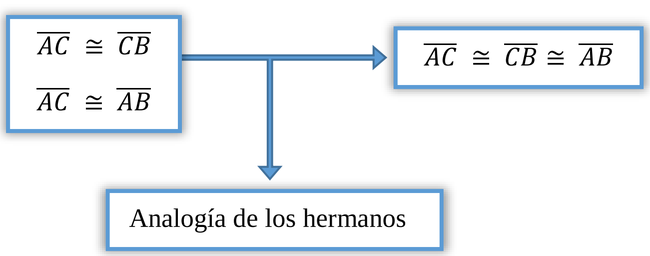



***Figura 4. 44*** Argumento por analogía presentado por José y Mariana

# 5. CONCLUSIONES

## Acerca de los objetivos

La presente investigación se realizó con el propósito de buscar recursos para romper la brecha existente entre la geometría que se enseña en los primeros años de básica secundaria y los desempeños que deben alcanzar los estudiantes en el cuarto ciclo de educación. Como se puede evidenciar en los análisis, durante el desarrollo de la secuencia los estudiantes de sexto grado realizaron actividad demostrativa y argumentativa. Podemos afirmar que el objetivo planteado en el primer capítulo se cumplió parcialmente, debido a que muchos de los argumentos presentados por los estudiantes se debían a que la profesora utilizaba estrategias basadas en el uso de preguntas guiadas para que los estudiantes presentaran argumentos aproximados a lo esperado. Esto no quiere decir que los argumentos no hayan sido genuinos, sino que la profesora debía intentar que los estudiantes expresaran sus ideas; por ejemplo, cuando los estudiantes hacían uso de una circunferencia en su construcción, la profesora debía preguntar el por qué y para qué de su uso, y eso hacía que las respuestas de los estudiantes fueran de algún modo propiciadas por la profesora, a partir de preguntas o acciones.

Una ambición que se tenía al iniciar la investigación era que los estudiantes presentaran los argumentos teóricos de manera espontánea a todo momento, pero esto no fue así. En la etapa denominada exploración y solución al problema, la profesora debía hacer muchas preguntas para que los estudiantes expresaran sus ideas; mientras que en la puesta en común los argumentos de carácter teórico, surgían de una forma más espontánea, de pronto porque sus ideas ya habían sido presentadas a la profesora y aceptadas por ella, y eso les generaba seguridad para presentarlas ante sus compañeros. Esto nos ha permitido reflexionar sobre si a esa edad se puede o no favorecer una argumentación totalmente autónoma. Creemos que con más tiempo, se puede desarrollar el uso apropiado del lenguaje matemático y así mismo se pueden obtener mejores resultados. Sin embargo, podemos afirmar que se logró un avance de los estudiantes y tanto la profesora como algunos de los estudiantes se mostraron satisfechos con la dinámica de la clase.

En relación a los objetivos específicos, estos se cumplieron. Propusimos una modificación para el constructo actividad demostrativa en problemas de construcción, la cual fue discutida en algunas ocasiones con el grupo de investigación; en general, se puede decir que esta investigación se constituye en insumo para su validación. Otro objetivo alcanzado fue la elaboración de una propuesta de secuencia de enseñanza que se concibió cuidadosamente, implementó y evaluó y que puede ser de utilidad en otras instituciones. Sin embargo, de acuerdo a los análisis, consideramos necesario realizar los siguientes ajustes: hacer un trabajo previo con el lenguaje a utilizar al momento de presentar los argumentos y fomentar más la presentación de las conjeturas con la estructura condicional "Si… entonces…". Hacemos esta última recomendación, debido a que, en las reuniones sostenidas con el grupo de investigación, se presentaron opiniones diferentes en relación a afirmar que realizar una construcción que mantiene ciertas propiedades ante el arrastre se puede considerar o no como una conjetura implícita. Cabe aclara, que para nosotros sí son conjeturas que deben ser justificadas; sin embargo, pueden hacerse explícitas si se acostumbra a los estudiantes a formularlas en la estructura gramatical condicional.

Uno de los logros alcanzados, pero no previstos, fue la presentación de los resultados investigativos en dos eventos académicos: El primero fue el *VI Encuentro Nacional Estudiantil en Educación Matemática y Física: Enseñanza de las Ciencias y las Matemáticas en Tiempos Contemporáneos* llevado a cabo en la Universidad de Antioquia (Medellín) entre el 13 y 15 de junio del presente año. Allí, algunos de los asistentes que eran profesores de la universidad manifestaron que la propuesta es interesante y que sería muy beneficioso para los estudiantes desarrollar prácticas argumentativas a temprana edad, ya que ellos en sus prácticas con estudiantes universitarios han encontrado dificultades como las señaladas en el trabajo. El segundo evento, fue el *Primer encuentro Latinoamericano de Etnomatemática*, realizado en la Universidad del Valle campus Altiplano en Sololá – Guatemala entre los días

20 y 24 de junio de 2016. Al igual que en el primer evento, los asistentes reconocieron la importancia de promover las prácticas argumentativas a temprana edad. Además, propusieron que sería pertinente estudiar cómo desarrollar la actividad demostrativa sin el uso de software, debido a que las instituciones no siempre cuentan con computadores, y por lo tanto no hay acceso a software de geometría dinámica.

**Acerca de las preguntas de investigación**

Una posible respuesta a las preguntas de investigación es la siguiente: con respecto a la primera, los procesos de la actividad demostrativa que realizan los estudiantes dependen del momento de la clase. En la etapa de exploración y solución del problema, la anticipación, y verificación del invariante, fueron los procesos que más se evidenciaron, debido a que los estudiantes se valían del programa para arrastrar las construcciones realizadas y observar si las propiedades anticipadas del objeto geométrico se mantenían. En la puesta en común, las acciones se centraban en la justificación, ya que, en la mayoría de las ocasiones, la profesora era quien presentaba las propuestas evidenciadas en el trabajo por parejas y ellos se centraban en justificar por qué la propuesta debería o no descartarse.

Sobre la segunda pregunta, los argumentos que se promovieron en los estudiantes fueron en su mayoría teóricos, ya que los estudiantes mostraban tener la certeza de que el uso de un determinado objeto geométrico les permitía garantizar una propiedad. Los argumentos empíricos fueron más frecuentes en los primeros problemas. Los argumentos presentados por los estudiantes en algunas ocasiones se volvían repetitivos debido a que por la edad en la que se encontraban, sentían la necesidad de dar a conocer su trabajo, lo que habían aprendido o lo que habían comprendido.

**Acerca de la proyección académica**

El trabajo realizado es un aporte al desarrollo investigativo del grupo de investigación de Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría ($\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$) en dos aspectos: el primero, porque hacemos una propuesta para favorecer la actividad demostrativa en edades tempranas, cuyo tema central es la equidistancia y la congruencia de segmentos. El segundo, porque hacemos una propuesta de actividad demostrativa en problemas de construcción, la cual, como mencionamos anteriormente, es un insumo para su validación.

Por otra parte, creemos que este trabajo puede servirnos de base para llevar la actividad demostrativa a la primaria, como se pretendía en un principio. Por dificultades para conseguir el grupo de estudiantes no se hizo; pero sería bueno evaluar qué tipos de argumentos se puede fomentar con estudiantes de primaria, para ir mejorando cada vez más los procesos de argumentación en los estudiantes. Consideramos, que, para llevar a cabo una investigación de ese tipo, sería necesario mucho más tiempo, ya que en primaria los estudiantes tienen más dificultades para comunicar sus ideas de forma precisa y entendible.

**Acerca de la experiencia académica**

Esta experiencia nos ha permitido conocer cómo se debe formular una propuesta investigativa, cómo se deben construir las preguntas de investigación, cómo hay que escribir un documento en el que se presenten de manera coherente los objetivos, la metodología, el marco teórico y cómo hacer un instrumento de análisis que permita presentar los resultados presentados por los estudiantes. Además, con la realización del documento hemos fortalecido las habilidades que nos permiten "aterrizar" todo lo que se piensa, para que otra persona pueda leerlo y entenderlo.

La investigación, también nos permitió reflexionar respecto a la comunicación en el aula. Al realizar las transcripciones evidenciamos que las "estrategias" utilizadas por la profesora para comunicarse con los estudiantes llevaban al deterioro del lenguaje. Es decir, dentro del ambiente de la clase era fácil entender lo que ambas partes estaban hablando, pero para el análisis, nos hizo falta que tanto estudiantes como profesora hablaran de forma más adecuada, para no tener que hacer tantas inferencias, y de este modo la investigación tenga más validez.

Por otra parte, este trabajo nos permitió acercarnos a los estudiantes de manera más estrecha para conocer su forma de pensar cuando se enfrentan a los problemas de construcción y la interacción con ellos no se limitó, como sucede muchas veces en el ejercicio de la docencia, a que realizaran un trabajo y lo entregaran. Así mismo, el desarrollo de este trabajo nos ha permitido compartir el tema de interés entre pares –profesora asesora, compañero(a) de carrera–, mostrando así los puntos de vista que se tienen con el objetivo de mejorar la propuesta.

# BIBLIOGRAFÍA


Barbosa, F. & Escobar, J. (2014). *La demostración en Geometría: Una mirada en la Educación Primaria*. (Tesis de Maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá D.C., Colombia.

Bolívar, C. & Martín, M. (2010). *Caracterización de la actividad demostrativa. Una experiencia en secundaria*. (Tesis de Maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá D.C., Colombia.

Franco, B. & Moreno, G. (2011). *La argumentación como núcleo de la Actividad Demostrativa.* (Tesis de Maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá D.C., Colombia.

Healy, L. (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri constructions. En T. Nakahara & M. Koyama (Eds.) *Proceedings of the Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education. PME 24th.* (pp. 103 - 117) Japan: Hiroshima University.

Leung, A. (2014). *Principles of acquiring invariant in mathematics task design: a dynamic geometry example*. Hong Kong Baptist University.

Luque, C. Ávila, J., & Soler, M. (2013). *Actividades Matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: razonar*. (pp. 35 - 46) Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional, CIUP.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). Estándares Básicos de Competencia Matemática. En MEN, *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas* (pp. 46-95). Colombia: Proyecto editorial y coordinación.

Molina, M., Castro, E., Molina, J.L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), (pp. 75–88)

Perry, P., Samper, C., Camargo, L., & Molina, O. (2013). Innovación en el aula de geometría de nivel universitario. En C. Samper, & O. Molina, *Geometría Plana* (pp. 11-34). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Pinzón, I. & Rodríguez, A. (2011). *Acciones del profesor que favorecen el desarrollo de la Actividad Demostrativa en grado Noveno*. (Tesis de Maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá D.C., Colombia.