LA IGUALDAD Y LA LETRA DESDE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS Y LIBROS DE TEXTO ESCOLARES

DIANA MARCELA MARTIN CHAPARRO

Código 2013240036

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D.C.

2017

LA IGUALDAD Y LA LETRA DESDE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS Y LIBROS DE TEXTO ESCOLARES

Trabajo de grado asociado al interés profesional del estudiante

Para optar por el título de
Licenciado en Matemáticas

Diana Marcela Martín Chaparro
C.C. 1016013089

Asesora Lyda Constanza Mora Mendieta
Profesora Departamento de Matemáticas

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
2017

DEDICATORIA

A mis padres Martha y José y a mi hermano Diego,

por su inagotable amor y comprensión,
porque siempre han creído en mí,
y por todos sus sacrificios.

AGRADECIMIENTOS

*A todos los profesores de la Universidad Pedagógica Nacional,
especialmente, a la profesora Lyda Mora por su disposición
durante todo el proceso de elaboración de este trabajo y
por su sabiduría y ejemplo que desde el aula me inspiró
a ser mejor docente y persona.*

*A mis amigas Laura, Natalia y Angélica quienes han estado
pendientes y siempre me han brindado su apoyo incondicional
desde que empecé a estudiar en la Universidad,
especialmente a Angélica por su inmensa colaboración
en la culminación de este trabajo.*

*A Camilo, por ser un hombre maravilloso,
por su apoyo incondicional, por sus consejos, compañía y
por su colaboración en la culminación de este trabajo.*

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	La igualdad y la letra desde la Historia de las Matemáticas y libros de texto escolares
Autor(es)	Martín Chaparro, Diana Marcela.
Director	Profesora Lyda Constanza Mora Mendieta
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2017. 108 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional.
Palabras Claves	ÁLGEBRA, SÍMBOLO, SIGNO, LENGUAJE ALGEBRAICO, INCÓGNITA, HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS, LENGUAJE DE SIGNOS

2. Descripción

En este trabajo se describe la evolución de la igualdad y la letra en álgebra, teniendo en cuenta aspectos como el tipo de lenguaje y tipo de signo, tanto en la Historia de las Matemáticas como a través del análisis de textos escolares de una serie editorial particular. Se identificaron los usos o significados que se le atribuyeron a estos a lo largo de la historia y los presentes en los libros de la serie de Matemáticas Espiral (de Inicial a Undécimo), con el fin de establecer un análisis comparativo.

3. Fuentes

Ake, L. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación* (tesis doctoral). Universidad de Granada. España.

Asquith, P., Stephens, A., Knuth, E., y Alibali, M. W. (2007). Middle school mathematics teachers' knowledge of students' understanding of core algebraic concepts: equal sign and variable. *Mathematical Thinking and Learning*, 9(3), 249-272.

Bednarz, N., Kieran, C., Lee, L. (Eds.) (1996*). Approaches to Algebra.* Perspectives for Research and Teaching. Dordrecht: Kluwer.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática.* Madrid, España: Alianza Editorial.

Brown, T. (2001). *Mathematics, Education and Language: Interpreting hermeneutics and post- structuralism.* (Rev. 2 ed.). Dordrecht: Kluwer.

Cajori, F. (1928). *A history of mathematical notations.* Volume I. Chicago, United States of America: The Open Court Publishing Company.

Cajori, F. (1952). *A history of mathematical notations.* Volume II. Chicago, United States of America: The Open Court Publishing Company.

Castro, E., Castro, E. y Molina, M. (2007). *Historia del signo igual*. En M. Guzmán, Humanidades y Ciencias. Aspectos Disciplinares y Didácticos. Homenaje a la Profesora Ana Vilches Benavides (pp. 249-261). Granada: Editorial Atrio.

Colebrooke, H. (1817). *Algebra, Arithmetic and Mensuration,* from the Sanskrit of Brahmagupta and Bhaskara. John Murray, London.

Duval, R. (1995). *Sémiois et pensée humaine. Registres sémiiotiques et apprentissages intellectuels*. Berna, Suíza: Peter Lang.

Duval, R. (2006). *A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics*, Educational Studies in Mathematics, 61(1-2), p.p 103-131.

Esquinas, A. (2008). *Dificultades de Aprendizaje del Lenguaje Algebraico: del Símbolo a la Formalización Algebraica: Aplicación a la Práctica Docente* (tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid, España.

Fernández, F. (1997). *Aspectos históricos del paso de la aritmética al álgebra*. *Implicaciones para la enseñanza del lenguaje simbólico algebraico*. Revista de didáctica de las matemáticas, p.p 14,75-91.

Filloy, E., Rojano, T., Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach.* New York: Springer.

Freudenthal, H. (1994). *Fenomenológica Didáctica de las Estructuras Matemáticas*. (Textos Seleccionados). Traducción, notas e introducción de L. Puig. México D.F: Cinvestav del IPN.

Godino, J., Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. España: La Medina.

González, A. y González F. (2012). *Exploración del Pensamiento Algebraico de Profesores de Matemática en Formación*. La Prueba EVAPAL". Scientiae. (Revista en línea). Disponible en: http://www.ulbra.br/actascientiae/edicoesanteriores/acta_scientiae_v.13_%20n1_2011.pdf., (Consulta, 2017, enero).

González, A. y González F. (2014). *Historia Social de la Educación Matemática en Iberoamérica: Consideraciones Históricas y Didácticas Relacionadas con el Símbolo Algebraico de Igualdad*. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Número 37. 181 – 198.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707–762). Charlotte, NC: Information Age.

Küchemann, D. *The understanding of generalised arithmetic (algebra) by secondary school children*. 1980. 232h. Tesis (Doctoral en Filosofía) sin publicar, University of London, London, 1980.

Manrique, J., Triana, J. (2013). *El papel de la historia del álgebra en un curso de didáctica para la formación inicial de profesores de matemáticas* (tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria.* (tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

Molina, M., Castro, E. y Castro, E. (2007). *Historia del signo igual*. Humanidades y Ciencias. Aspectos Disciplinares y Didácticos. Homenaje a la Profesora Ana Vilches Benavides. Granada: Editorial Atrio.

Peirce, C. (1987). *Obra Lógico-Semiótica*. Edición de Armando Sercovich. Madrid: Taurus.

Pimm, D. (1987). *Speaking Mathematically*. *Communication in Mathematics Classrooms*.
New York: Routledge & Kegan Paul.

Pimm, D. (1999). *El Lenguaje Matemático en el Aula*. Madrid, España: Morata.

Radford, L. (2003). *On the epistemological limits of language: Mathematical knowledge and social practice in the Renaissance*. Educational Studies in Mathematics, (52), p.p. 123-150.

Radford, L. (2006). The anthropology of meaning. *Educational Studies in Mathematics*, 61 (1/2), 39-65.

Socas, M., Camacho, M., Palarea, M., Hernandez, J. (1989). *Iniciación al Algebra.* Madrid, España: Editorial Síntesis, S.A**.**

Usiskin, Z. (1998). *Conceptions of School Algebra and uses of variables*. In: A.F. COXFORD. The ideas of Algebra, K-12. p.p 8-19.

4. Contenidos

Este documento inicia con los aspectos generales bajo los cuales se realizó el trabajo de tesis, dentro de estos está la justificación, los objetivos y la metodología que se eligió para la consecución del mismo. Seguidamente se presenta el marco de referencia en el que se presenta el álgebra desde la Historia de las Matemáticas [HM] y desde la escuela, se alude también al significado de la simbolización y lenguaje algebraico, desde la HM y desde la Didáctica de las Matemáticas [DM]. Luego se inicia con la revisión del igual y la letra también analizados bajo la luz de la HM y la DM. Después se presentan los tipos de signos asociados a la igualdad y a la letra, tipo de lenguaje empleado y el uso o significado asuntos identificados en una serie de libros de textos escolares, la serie Espiral de editorial Norma.
Finalmente se muestra el análisis comparativo sobre el signo igual y la letra con base en los hallazgos encontrados en la HM y en la serie de textos escolares.

5. Metodología

La metodología se organiza en estas etapas:
1. Caracterización del álgebra, lenguaje algebraico, simbolización, igualdad y letra desde dos ámbitos la Historia de las Matemáticas y la Didáctica de las Matemáticas.
2. Determinación de los elementos representativos del álgebra (igualdad y letra), así como de los aspectos a revisar en tales elementos.
3. Revisión en la HM y en la serie Espiral de la igualdad y la letra.
4. Análisis comparativos de las revisiones en la HM y en los textos escolares.

6. Conclusiones

<u>Con respecto a los objetivos:</u>

- En los libros de texto, al menos en los de preescolar a quinto de primaria, debería estar más presente el uso del lenguaje retórico sin acudir de manera temprana al uso del lenguaje simbólico, muchas veces carente de significado para los estudiantes. Esto no quiere decir que en los libros de texto de los demás grados de la escolaridad no deba estar presente el lenguaje retórico, solo que en la secundaria tiene mayor sentido la prevalencia del lenguaje simbólico (los estudiantes de este nivel de educación ya están en el periodo de las operaciones formales). Esto fundamentalmente para que el estudiante comprenda la necesidad de usar el lenguaje algebraico y además pueda participar en la construcción de dicho lenguaje.

- El uso inicial de un lenguaje retórico para la letra podría permitir al estudiante entender el significado de lo que se está representando o puede representar.

- A través de la revisión bibliográfica sobre la historia de la simbolización de la igualdad y la letra, y los usos o significados asociados a cada uno de ellos, podemos destacar los siguientes aspectos:

  - ✓ Tanto en la igualdad como en la letra la simbolización se dio a través de los tres estadios del lenguaje: retórico, sincopado y simbólico, y aunque, en términos generales, se pude evidenciar que siguieron este mismo orden, también se pudo corroborar que incluso en algunos momentos los tres tipos de lenguaje subsistieron.

- ✓ Para el uso del lenguaje sincopado, aunque estuvo presente en la historia, su tiempo de vigencia fue considerablemente más corto que el uso del leguaje retórico y el lenguaje simbólico. De este tipo de lenguaje también se encontró que su uso fue significativamente menor con respecto al uso que se le dio al lenguaje retórico y sincopado.

- ✓ Un aspecto interesante que se observó en algunos autores de la historia, es que en una misma expresión utilizaban dos lenguajes al mismo tiempo, por ejemplo, Diofanto usaba lenguaje retórico o sincopado para expresar la igualdad, mientras que para la letra usó lenguaje simbólico.

- ✓ Fue interesante identificar que la simbolización también se vio marcada por el reconocimiento del autor que lo proponía. En el caso específico de la igualdad, aun cuando el signo que usamos en la actualidad fue propuesto en 1557, no se instauró en esa época, pasaron aproximadamente 70 años hasta que algunos matemáticos de nombre lo emplearon y finalmente se popularizó.

- ▪ Ciertamente la evolución de la simbología tanto para el igual como para la letra en la historia fue un proceso bastante complejo y prolongado, muy diferente a lo que se constató en los libros de texto analizados en los que, por ejemplo, para el igual solo en el libro de preescolar se usa lenguaje retórico y en ese mismo se introduce el signo actual. Respecto a la letra hay un poco más de tratamiento con el lenguaje retórico, pero únicamente para tratar la letra como incógnita.

<u>Personales</u>

- ▪ En el desarrollo de este trabajo se encontró algunas veces que la letra *p* se utiliza para simbolizar *perímetro*. Sin embargo, surgió la idea que este tipo de simbolización no atañe a un lenguaje simbólico sino sincopado, ya que, esta letra es la inicial de la palabra que se va a simbolizar, cosa que no sucede por ejemplo con las letras *x*, *y* e *z* que se usan también para representar la letra en álgebra.

- ▪ Si bien el lenguaje sincopado no aparece en los libros de texto, muy seguramente sí es utilizado por los niños y jóvenes en el desarrollo de algunos contenidos matemáticos, por ejemplo, en las hojas que se entregan a los estudiantes para realizar operaciones correspondientes a una prueba o examen es usual que se use lenguaje sincopado.

- ▪ Considero que es importante en mi formación como docente estudiar Historia de las Matemáticas, en primera instancia, porque permite ver el proceso y los supuestos que llevaron a que se diera un objeto matemático, por ejemplo, el surgimiento del estudio de las funciones y el porqué de su notación actual, y también las dificultades que se presentaron en la antigüedad; En segunda instancia, porque al conocer sobre las razones por las que surgió el objeto, sus dificultades y como fueron solucionadas este conocimiento se podría extrapolar a las aulas de clase, quizás, por ejemplo, identificando si surgen errores similares.

- Durante mi formación como docente en la universidad una de las ideas que más causó impacto era entender que la educación y el proceso de enseñanza debe consolidarse bajo contextos, de la ciudad o pueblo, de la población, familiar, entre otros. Esto pude constatarlo en el estudio de la simbología asociada a la igualdad y a la letra, pues se hizo evidente que el estudio de algunos objetos matemáticos estaba influenciado por la nacionalidad del autor, por sus "amigos" matemáticos con los que establecía correspondencia, incluso por eventos sociales. En el proceso de simbolización vimos que el signo "=" se consolidó 100 años después de que fue propuesto, y esto sucedió porque otros matemáticos más destacados y respetados preferían otros signos.

Cuestiones abiertas

Podría ser interesante realizar investigaciones sobre:

- El lenguaje retórico y sincopado no formal que utilizan los estudiantes dentro del aula.
- Hasta qué punto el uso de un lenguaje retórico y la una transición lenta hasta el lenguaje simbólico podría significar una solución para algunos errores y dificultades que se presentan con el tratamiento y la interpretación de la letra por parte de los estudiantes.
- ¿Tendría alguna incidencia introducir el signo para la igualdad desde los diferentes usos y significados que este posee?, ya que en este momento el signo solo se muestra para realizar diferentes actividades, sin hacer énfasis en su uso.
- Es posible que algunos errores y dificultades asociados a la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas puedan responderse desde la Historia, por ejemplo, las dificultades asociadas a la comprensión de la letra como variable, asunto que podría constituir otro trabajo de grado.

Elaborado por:	Diana Marcela Martín Chaparro
Revisado por:	Profesora Lyda Constanza Mora Mendieta

Fecha de elaboración del Resumen:	09	05	2017

Tabla de contenido

Tabla de Ilustraciones

Tabla de esquemas

Tabla de imágenes

Lista de tablas

Introducción

Este documento contiene el trabajo de grado “La igualdad y la letra desde la Historia de las Matemáticas y libros de texto escolares”, el cual se presenta como monografía asociado al interés personal de la docente en formación, en el marco de la Licenciatura del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

Para este trabajo se asumieron como objeto de estudio, dos elementos representativos del lenguaje algebraico, la igualdad y la letra. Para cada uno se hizo una revisión en la Historia de las Matemáticas y en una serie de libro de texto, Espiral. Esto con el fin de establecer un análisis comparativo de los signos y usos asociados a la igualdad y la letra desde la HM y los libros.

El documento presenta en primer lugar los aspectos generales (capitulo 1) sobre los cuales se determinaron las bases y objetivos principales para la elaboración de este trabajo, también se presenta la justificación y la metodología que se siguió.

Luego de presentar los aspectos generales, en el capítulo 2 (Marco de Referencia), se describe algebra desde la Historia de las Matemáticas [HM] y desde la Didáctica de las Matemáticas [DM], atendiendo, por supuesto, a aspectos como el tipo de lenguaje, concepciones y definiciones. En este capítulo también se define simbolización y lenguaje algebraico, este último desde la HM y la DM. Así como también se muestra la revisión de la igualdad y la letra bajo la mirada de la DM.

En el capítulo 3, se muestra la revisión hecha de la igualdad y la letra a través de la historia, se eligieron ejercicios de los autores estudiados y se clasificaron según el tipo de lenguaje y el uso o significado de la igualdad y la letra.

En el capítulo 4, aparece la revisión de la igualdad y la letra en la serie de libros de texto de Matemáticas Espiral.

En capítulo 5 se realizó el análisis comparativo de los resultados obtenidos en el capítulo 3 y 4. Finalmente, en el capítulo 6 se presentan las conclusiones respecto de los objetivos, personales y cuestiones abiertas.

1. Aspectos Generales

1.1 Justificación

Este proyecto surge de la motivación de la maestra en formación al evidenciar (durante las prácticas en aula e integración profesional a la escuela de la Licenciatura en Matemáticas) las constantes dificultades de los estudiantes de Básica Secundaria en la interpretación de los símbolos en Matemáticas, especialmente en Álgebra. Algunos investigadores como Socas (1997) y Arcavi (1994) han estudiado las dificultades asociadas a la comprensión y adquisición del lenguaje matemático. Socas (1997) por su parte propone tres (3) instancias para analizar el origen de los errores en Álgebra: Obstáculo, ausencia de sentido y actitudes afectivas y emocionales. Dentro del origen por ausencia de sentido propone un tipo de error debido a la caracterización propia del lenguaje algebraico. De Arcavi (1994) se resaltan sus trabajos relacionados con el "sentido del símbolo". Esto nos muestra que la enseñanza del Álgebra y las dificultades asociadas a su simbolismo constituyen un asunto inquietante para los investigadores.

Por otro lado, hay que reconocer que los avances en Matemáticas que tenemos hasta el día de hoy, son el producto de un arduo trabajo, de varios siglos y de varios pensadores, investigadores e incluso de personas comunes interesadas en algún concepto matemático.
En el siglo III Diofanto introdujo conscientemente escritura algebraica (Kline, 2000), sin embargo, fue hasta el siglo XVI que empezó el desarrollo de una mejor simbolización. Por su parte los alemanes introdujeron los símbolos + y – en el siglo XV. Más adelante François Vietá fue quizás uno de los precursores más importantes respecto al simbolismo en Álgebra, pues fue el primero en usar letras no solo para representar incógnitas sino también como coeficientes generales. En otras palabras, la construcción del simbolismo se dio a lo largo de varios periodos y se fue modificando hasta llegar a los desarrollos conocemos actualmente.

En el aula de clase no se debe desconocer la importancia de los desarrollos históricos de cada contenido en las matemáticas por varias razones. Por ejemplo, Pérez (1993) en sus investigaciones identifica que algunos estudiantes usan esquemas alternativos y concepciones históricas para resolver problemas, los cuales durante el desarrollo evolutivo de las Matemáticas fueron modificándose o cambiándose por los conocimientos actuales, y precisa que este comportamiento no se debe considerar accidental, sino que corresponde a maneras análogas de abordar los problemas.

Bajo estas dos motivaciones la autora estudio dos de los elementos representativos en la simbología del álgebra la igualdad y la letra. Bajo dos miradas, la evolución histórica y su tratamiento en los libros de texto. El análisis de libros, actualmente hace parte de la preocupación de los investigadores pues se considera una herramienta esencial en los procesos de enseñanza y aprendizaje, además tanto para docentes como maestros en formación constituyen la primera guía para abordar los diferentes contenidos. El maestro de Matemáticas, debe interesarse en analizar libros de texto escolares teniendo en cuenta las diferentes investigaciones en Educación Matemática para generar procesos de enseñanza consientes y coherentes con la actualidad.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo General

Establecer un análisis comparativo entre la evolución del signo para la igualdad y la letra en la Historia de las Matemáticas y en una serie de textos escolares de Matemáticas, a la luz del tipo de lenguaje y significado o uso atribuido, con el fin de ampliar el conocimiento del profesor de matemáticas en formación inicial.

1.1.2 Objetivos específicos

- Analizar el surgimiento del signo actual para la igualdad y la letra, y los usos que estos tuvieron en la Historia de las Matemáticas.

- Identificar tipo de lenguaje y uso o significado, del igual y la letra, en la Historia de las Matemáticas y en una serie de textos escolares de Matemáticas.

- Establecer semejanzas y diferencias en los tipos de signos empleados para denotar la igualdad y la letra, y en sus significados o usos, entre lo hallado en la Historia de las Matemáticas y lo reconocido en una serie de libros de texto escolares.

1.2 Metodología

La metodología del trabajo se realizó en tres etapas, en la primera se realizó una caracterización del álgebra, lenguaje algebraico, simbolización, igualdad y letra desde dos ámbitos: la Historia de las Matemáticas y la Didáctica de las Matemáticas. Se escogió igualdad y letra como elementos representativos del leguaje algebraico, para realizar el análisis.

En la segunda etapa se hizo la revisión en la HM y en la serie Espiral de la igualdad y la letra, la revisión se consolidó en 4 líneas de tiempo en las que aparece clasificados los usos y el tipo de lenguaje.

Y finalmente, en la tercera etapa se realizaron los análisis comparativos de las revisiones hechas en la segunda etapa.

2. Marco de referencia

2.1. ¿Qué es álgebra?

Es primordial, dado los intereses de este trabajo dar respuesta a esta pregunta, pues con este trabajo se pretende analizar la evolución y uso de algunos símbolos propios del álgebra.

Para dar respuesta a tal pregunta esta sección se organiza desde dos pilares. Primero se presenta de manera sucinta, el álgebra desde la Historia de las Matemáticas, centrando el interés en los hitos más importantes en el desarrollo de la simbolización algebraica. Y luego se analiza el álgebra desde el punto de vista escolar, significado y concepciones del álgebra haciendo énfasis también en la simbolización o el lenguaje que se emplea.

2.1.1. Álgebra desde la Historia de las Matemáticas

El origen del álgebra se atribuye a la necesidad que tuvo la humanidad ante la imposibilidad para solucionar problemas empleando métodos conocidos (Socas, 1989). La resolución de ecuaciones, la generalización de procesos aritméticos y el estudio de las operaciones y propiedades aritméticas originaron el *álgebra clásica* (o álgebra antigua), de esta fase del álgebra se destacan tres grandes vertientes, álgebra retórica, álgebra sincopada y álgebra simbólica, las cuales se tratarán más adelante en la sección 1.3 (Lenguaje algebraico) aunque cabe resaltar, que estas tres vertientes están centradas en el uso que se le dio al lenguaje, mas no al álgebra en general. En el siglo XIX surge otra concepción del álgebra reconocida actualmente como *álgebra moderna* o abstracta.

En un principio el álgebra estuvo asociada a lo numérico, pues en la antigüedad los números eran percibidos como una propiedad de los objetos, los cuales operaban para resolver problemas de otras áreas de las matemáticas. Por ejemplo, en la geometría de los griegos se evidencia uso de magnitudes desconocidas dadas por hipótesis o definidas convenientemente para solucionar problemas (Bednardz, Kieran y Lee, 1996). En aritmética, el álgebra sirvió para resolver ecuaciones y estudiar las operaciones (Esquinas, 2008), esto se evidencia en los papiros dejados por los egipcios, en los que se consignaron gran cantidad de problemas aritméticos relacionados con la vida cotidiana (Socas, 1989). Es importante mencionar, para los fines de este trabajo, que el uso de las letras durante este periodo fue inicialmente para indicar números arbitrarios o desconocidos (en aritmética y álgebra), para indicar variables (variables numéricas) que se asociaban al estudio de las funciones (esto ya en la edad media o en el renacimiento), aunque también vale resaltar que las letras se usaron para representar segmentos, puntos, etc. (en geometría).

La evolución del álgebra analizada a través del desarrollo de su lenguaje y de la necesidad de resolver problemas cada vez más complejos, favoreció el surgimiento del álgebra abstracta o moderna, esto supuso la desvinculación del álgebra con otras áreas de las matemáticas, de la aritmética y de la geometría (Socas, 1998). Dejando atrás, por ejemplo, la idea de considerarla solo como una extensión del dominio matemático (como una generalización de la Aritmética), el álgebra moderna se refiere entonces a las estructuras algebraicas generalizadas, como por ejemplo los anillos, campos, grupos, etc. Del estudio de dichas estructuras surge la noción o la idea de considerar el álgebra en sí como una estructura (objeto matemático). También durante este periodo surgen diferentes álgebras: lineal, de funciones, booleana, vectorial, homológica, entre otras; y aquí, por ejemplo, las letras ya no representan números (desde la concepción tradicional de número) sino que pueden representan funciones, matrices, etc.

Aunque se ha presentado brevemente el álgebra desde dos corrientes principales, es válido manifestar que tal subdivisión no es del todo disyunta, dado que, por ejemplo, si bien el estudio de las ecuaciones como objeto para el cual se buscaban métodos generales se dio en lo que se conoce como álgebra clásica, también se estudian en el álgebra moderna, pero desde otra óptica. Por ejemplo, se tienen indicios que en la época antigua las ecuaciones también se estudiaron como objeto matemático y no solo como herramienta (Manrique y Triana, 2013).

2.1.2. Álgebra desde la escuela

Con el fin de continuar buscando respuestas a la pregunta original, a continuación, se presentan las concepciones de álgebra escolar propuestas por tres autores: Esquinas (2008), Usiskin (1998) y Berdnarz (1996) aclarando que estas no están desligadas una de la otra, lo cual se resume en la tabla 1. Para la construcción de esta tabla se buscó ubicar en la misma fila, concepciones relacionadas.

Esquinas (2008) Define álgebra desde cuatro perspectivas	**Usiskin (1998)** Plantea significados del álgebra	**Bednarz et. al (1996)** Establece concepciones para el álgebra
1. Como método que generaliza la aritmética.	1. Como aritmética generalizada, que formaliza distintos patrones numéricos asociados a propiedades de la aritmética, en los que los números se sustituyen por variables.	1. El estudio de procedimientos para resolver ciertas clases de problemas, el álgebra concebida no solo como herramienta para solucionar ciertas clases de problema, sino como herramienta para expresar soluciones generales.
2. Como método para la resolución de problemas.	2. Como método para la resolución de ciertos tipos de problemas matemáticos en los que se desconoce algún/os valor/es, llamado/s incógnita/s.	
3. Como estudio de estructuras matemáticas	3. Como estudio de estructuras matemáticas, por ejemplo, grupos, polinomios, etc.	
4. Como objeto matemático dotado de una estructura[1], operaciones y elementos que se relacionan entre sí por medio de métodos y conceptos algebraicos.	4. Como estudio de las relaciones entre magnitudes, que implica la variación conjunta y el concepto de función.	2. El estudio de las relaciones entre fenómenos que se expresan por medio de modelaciones.
		3. El estudio del lenguaje y su sintaxis.
		4. El estudio de regularidades que gobiernan relaciones numéricas y puede ser extendida a procesos de prueba y validación (Margolinas, 1991).

Tabla 1. Concepciones del Álgebra.

[1]*Un conjunto E dotado de una adición y un producto interno y de un producto externo definido de $K \cdot E$ en E, respecto de los cuales: E tiene estructura de espacio vectorial sobre K para la adición y el producto externo; E tiene estructura de anillo para la adición y el producto interno (supuesto asociativo);$\lambda \cdot (x \times y) = (\lambda \times x) \times y$, para todo λ de K y todo par (x, y) de $E \times E$.* Diccionario enciclopédico Larousse.

Esquinas (definiciones 1 y 2), Usiskin (significados 1, 2 y 4) y Bednarz (concepciones 1, 2 y 4) relacionan el álgebra con métodos que pueden ser aplicados en distintas áreas de las ciencias, como aritmética, geometría, cálculo, física, etc.; es decir se concibe al **álgebra como herramienta** para obtener información de cierto comportamiento o fenómeno de interés. La tercera idea de Esquinas y de Usiskin relaciona al álgebra con las estructuras abstractas, donde su carácter no es utilitario. En el significado 4 de Usiskin el álgebra se entiende como estudio de relaciones entre magnitudes, lo cual se relaciona con la concepción 2 de Berdnarz quien explicita el estudio de relaciones entre fenómenos expresados por medio de modelaciones, lo cual incluye implícitamente el concepto de función, el cual también se asocia con la concepción 4 del mismo autor.

Cabe mencionar que la definición 4 de Esquinas y la concepción 4 de Bednarz, el álgebra como estructura matemática, entendida como un objeto propio de las mismas, y la concepción del álgebra como el estudio del lenguaje y su sintaxis, respectivamente, no se relacionan con alguno de los significados de Usiskin.

Las diferentes ideas presentadas permiten hacer una primera tipificación del álgebra en seis concepciones.

1. El Álgebra como un método para resolver problemas de Aritmética y Geometría.
2. El álgebra como el estudio de relaciones (entre magnitudes, variación, funciones, etc.).
3. El álgebra como generalización de la aritmética.
4. El álgebra como un lenguaje.
5. El álgebra como herramienta para el estudio de estructuras.
6. El álgebra considerada como un objeto matemático.

Como ya se mencionó, en la evolución histórica del álgebra la presencia del lenguaje es ineludible. El lenguaje también a lo largo de la historia tuvo procesos de transformación, sistematizándose y por supuesto con mayor nivel de generalización. En todas las áreas de las matemáticas es común el uso de lenguajes diferentes al leguaje ordinario (habitual), en este caso se considerará el lenguaje algebraico como un elemento constitutivo del álgebra, pues es precisamente en el álgebra donde el uso de las letras adquirió una connotación diferente, por ejemplo, en relación con el uso de la letra en geometría. A continuación, se da una breve descripción de lo que llamaremos lenguaje algebraico, simbolismo en álgebra y la historia de cómo ha evolucionado.

2.2. Simbolización

Los seres humanos usamos el lenguaje habitual para comunicar ideas, y aunque en las matemáticas también hacemos uso de dicho lenguaje, algunas palabras como, por ejemplo, razón, producto y diferencia presentan significados distintos en el lenguaje habitual con respecto a sus significados en el lenguaje matemático.

Según Socas (1989), el lenguaje de las matemáticas está inmerso en dos niveles: semántico y sintáctico. En el primero, los símbolos están dotados de un significado claro y preciso, y en el segundo las reglas son operadas sin referirse a ningún significado concreto.

En matemáticas los símbolos son absolutamente necesarios para comunicar las ideas (González y González, 2014), los símbolos sirven para condensar argumentos y el proceso de simbolización es el eje central del álgebra, aunque no debe confundirse con la noción de que el álgebra es solo cuestión de símbolos (Bednarz et al., 1996).

Algunos autores (Pimm, 1987; Duval, 1995, 2006; Brown, 2001; Radford, 2003, 2006 y Filloy, Puig y Rojano, 2008) coinciden en que el uso del simbolismo en matemáticas y en particular en álgebra es imprescindible y que su correcto uso, apropiación y dominio está estrechamente ligado con el desarrollo del álgebra.

Sin embargo, hay que mencionar que dichos autores divergen un poco en cuanto al significado que se le da a ese simbolismo en álgebra. Mientras para Radford (2003) y, Filloy, Puig y Rojano (2008) el simbolismo es en esencia un instrumento/herramienta de trabajo para el álgebra (el simbolismo adquiere significado por el uso), para Pimm (1987), Duval (1995, 2006) y Brown (2001) el simbolismo posee un significado *per se*, y analizan dicho significado desde posturas distintas (Ake, 2013).

Filloy, Puig y Rojano (2008), para caracterizar el lenguaje matemático, se refieren un sistema matemático de signos (MSS, siglas en inglés), usan la palabra sistema pues consideran que está compuesto por signos matemáticos (no todos son de naturaleza lingüística, son estrictamente matemáticos) y por signos en el idioma natural. Además, afirman que es el sistema (conjunto de los dos tipos de signos) el que es de naturaleza matemática y que este sistema es el que les da el significado a los textos.

Si aceptamos la idea de que los signos matemáticos no son solo de naturaleza lingüística, entonces no podemos tratar estos signos bajo la definición propuesta por esta ciencia donde a los signos se les da un significado diádico: significante/significado (Filloy et al. 2008).

Pierce, establece una triada para referirse al signo, para él existe una estrecha relación entre el signo (S), el objeto (O) y el intérprete (I). A continuación, se presenta la definición de signo que propone Pierce para precisar el significado de estos tres componentes.

> *Signo*: Cualquier cosa que determina alguna otra (su *interpretante*) para que se refiera a un objeto al cual él mismo se refiere (su *objeto*); de la misma manera el interpretante se convierte en un signo, y así *ad infinitum*. (Peirce, 1987, pág. 274.)

De esta definición entendemos que la relación que hace el intérprete del signo no es arbitraria, sino que el signo obliga a este a referirse a un objeto concreto. Cabe resaltar la definición que establece Pierce para el interpretante (I).

> Un signo […] se dirige a alguien; es decir, crea en la mente de esa persona un signo equivalente, o quizás un signo más desarrollado. A ese signo que crea yo lo llamo el Interpretante del primer signo. Ese signo ocupa el lugar de algo: de su Objeto. (Peirce, 1987, pág. 33.)

Pierce también establece una clasificación para los signos, los clasifica en tres tipos: iconos, índices y símbolos.

- Iconos: son signos que tienen alguna semejanza con el objeto y tienen el carácter que los hace significar incluso si el objeto no existiera.
- Índices: no se parecen a los objetos correspondientes, sino que lo señalan, fuerzan la atención hacia ellos, pero no los describen.
- Símbolos: dejan de significar sin interpretante.

A continuación, se muestra la explicación de Pierce para esta clasificación:

> […] existe una triple conexión del signo, la cosa significada y la cognición producida por la mente. Puede haber una simple relación racional entre el signo y la cosa; en ese caso, el signo es un icono. O bien puede haber una conexión física directa; en ese caso, el signo es un índice. O bien puede haber una relación que consiste en que la mente asocia el signo con su objeto; en ese caso el signo es un nombre (o símbolo). (Peirce, 1987, pág. 175.)

Otro autor que ha dedicado sus estudios a la compresión y significados del lenguaje de las matemáticas y el simbolismo es Pimm (1999), él afirma que los símbolos poseen más de una función, es decir que además de representar estructuras, también promueven las manipulaciones entre objetos intangibles y además permiten un paso fundamental en la comprensión de las matemáticas que es la reflexión.

Pimm (1999) establece una clasificación para la simbología matemática, separando los símbolos en cuatro (4) categorías:

1. *Logogramas* en este entran los signos inventados, usados para nombrar conceptos y los símbolos que designan operaciones ejemplo 1, 2, 3, +, -. En este sentido los logogramas sustituyen a palabras completas.
2. *Pictogramas* son imágenes que representan también algunos (pocos) conceptos, ejemplos ⊾, ⊿. En estos el símbolo está muy relacionado con el significado.
3. *Símbolos de puntuación* a los cuales se les asigna un significado concreto, ejemplos [ ], { }, || ||.
4. *Símbolos alfabéticos*, que obviamente pertenecen al alfabeto (principalmente al romano y al griego) pero que son usadas con significado y finalidad, ejemplos

x, y, π, β. Para el uso de los símbolos alfabéticos existen algunas convenciones, así por ejemplo las letras iniciales del alfabeto designan o representan parámetros y las letras del final denotan variables.

2.3. Lenguaje algebraico

2.3.1. Lenguaje algebraico desde la Historia de las Matemáticas

En el desarrollo histórico del Álgebra (relacionado con la notación) se pueden estudiar tres periodos bastante diferenciados:

- El periodo **retórico** (verbal) en el que todas las expresiones y argumentos se realizaban con palabras y frases, es decir que los cálculos se comunicaban por medio de palabras que hacían referencia a objetos y a relaciones entre estos (Manrique y Triana, 2013). Este periodo está comprendido desde los babilonios 1700 a. de C. hasta Diofanto 250 d. de C., uno de los exponentes de este periodo es Al-Khwarizmi.

- El periodo **sincopado** (abreviado) en donde se empezó a evidenciar el uso de abreviaturas (Desde Diofanto hasta comienzos del siglo XVI - Vietá). Un exponente de este periodo es Bhaskara, se muestra un ejemplo tomado de Colebrooke (1817), en donde la expresión $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ escrita en la notación de Bhaskara aparece así:

$$ya\ gh\ 1\ ya\ v.ca\ bh3\ ca\ v.ya\ bh3\ ca\ gh1$$

En donde $ya, ca, v., gh,$ y bh son las abreviaciones de $yavát$, $calaca$, $varga$, $ghana$ y $bhavita$ respectivamente.

Durante este periodo, aunque se usaron algunos símbolos para simplificar palabras, se seguía haciendo uso del lenguaje ordinario para solucionar y comunicar ideas.

- Finalmente, el tercer periodo llamado **simbólico** (desde siglo XVI a la actualidad), que se caracteriza, como su nombre lo indica, por la utilización de diversidad de símbolos y signos matemáticos (Socas, 1989) que se usan para denotar objetos matemáticos, sus relaciones y las operaciones (Manrique y Triana, 2013). Este periodo surge con Vietá quien fue el primero en usar letras como incógnitas y como números dados. Durante este último periodo la simbolización cambió gracias a los aportes de distintos matemáticos como Descartes, Heinrich, Wallis y Leibniz, entre otros.

El lenguaje en general cumple un papel importante en la comunicación de los seres humanos. Si se hace un recorrido histórico de las matemáticas, podemos evidenciar que inicialmente se usaron signos lingüísticos para comunicar las ideas; sin embargo, el avance de la ciencia y la necesidad de emplear un lenguaje más conciso y práctico trajo consigo la invención de signos estrictamente matemáticos, los cuales actualmente se integran en un sistema junto con el lenguaje natural para trasmitir ideas matemáticas.

2.3.2. El lenguaje algebraico desde la Didáctica de las Matemáticas

Para caracterizar el lenguaje algebraico, es necesario primero caracterizar el lenguaje matemático en general. Hay investigaciones que señalan que las matemáticas deben considerarse como un lenguaje (Ake, 2013), pues como lo describe Fernández (1997) los sistemas simbólicos y los objetos simbolizados en matemáticas hacen que estas tengan un lenguaje propio (por supuesto un lenguaje que se sustenta en el lenguaje habitual). El uso de símbolos tiene como función principal facilitar la expresión de conceptos matemáticos (Ake, 2013), incluso, según Kieran (2007) el álgebra es reconocida como una herramienta para manipular símbolos y conseguir la solución de problemas.

Respecto al lenguaje algebraico, Ake (2013) lo define como un lenguaje preciso, que obedece a reglas exactas y que posee un significado únicamente cuando se hace la interpretación de sus símbolos. Es decir, que los símbolos deben escribirse haciendo uso de unas reglas para que adquiera un significado dentro del contexto algebraico.

La función del lenguaje algebraico no es tan diferente respecto al lenguaje habitual. Los sistemas de signos[2] y los objetos que simbolizan hacen que el álgebra posea un lenguaje característico, que como vimos en la sección anterior tuvo una transformación o evolución a lo largo de la historia por tres periodos.

Dentro del sistema de signos del lenguaje algebraico, cobran gran importancia la igualdad (el igual) y la letra, esto se debe a que el álgebra trata de igualdades y de representaciones de objetos para los cuales la letra es el signo por naturaleza. De otro lado, es reconocido que su interpretación y uso a lo largo de los años escolares lleva a los estudiantes a un sin número de dificultades y errores, especialmente en la transición de la aritmética al álgebra (Ake, 2013).

La igualdad y la letra representan una dificultad debido a que están asociados a diferentes usos o significados que casi nunca se hacen explícitos, por ejemplo, en aritmética los estudiantes se familiarizan con el uso de igual como operador, en la mayoría de los casos su uso está limitado a encontrar una respuesta para cierta operación; mientras que en el tratamiento del igual en álgebra, se espera que el estudiante comprenda o evidencie un uso relacional, particularmente que consigan "*encontrar y resolver ecuaciones algebraicas con operaciones a ambos lados del símbolo*" (Ake, 2013, p. 41), esto es, que a través del desarrollo del ejercicio, el estudiante sea consciente que en cada paso se está conservando una relación de equivalencia.

Por su parte, con respecto al tratamiento con la letra también se presentan errores y dificultades, debido a que esta también posee diferentes significados o usos, uno de ellos es el uso como variable, en el que en la mayoría de los casos los estudiantes ven la letra como

[2] Se dice sistema por que los signos deben ser considerados dentro de un conjunto, que cumple ciertas reglas y características específicas. Además, el sistema se compone de dos subconjuntos, los signos propiamente matemáticos y los del lenguaje natural.

una etiqueta o abreviaturas, cuando deberían verla como una letra que representa cantidades (Asquith, Stephens, Knuth y Alibali, 2007).

2.3.2.1. La igualdad desde la Didáctica de las Matemáticas

Actualmente la igualdad se designa con el signo igual “=”; sin embargo, este signo se usa en diferentes contextos matemáticos y por supuesto con variedad de significados. Incluso el signo se usa para denotar objetos que estrictamente no son iguales. De hecho, cabe resaltar que en matemáticas no existe una noción única de igualdad (Castro, Castro y Molina, 2007), esto sucede porque el signo es usado en las diferentes áreas de las matemáticas, algunas veces para denotar u operar diferentes objetos matemáticos, otras veces para establecer relaciones de equivalencia, también se emplea para definir objetos matemáticos, entre otros. De ahí que el uso de la igualdad está determinado por el contexto matemático y por el significado que adquieren los objetos dentro de dicho contexto (Freudenthal, 1994).

Molina (2006), en su tesis de doctorado recoge los significados y usos[3]asociados al signo igual que distinguen varios autores. Estos significados o usos se pueden encontrar tanto en el terreno algebraico como en el aritmético, e incluso en el cálculo y la geometría; estos son:

1. **Propuesta de actividad de cálculo:** Se identifica este uso cuando se escriben expresiones incompletas, es decir, expresiones que finalizan con el signo igual a la derecha. Invitan a completar un cálculo u operación.
   Ejemplos: $\frac{2}{10} =$, $5x(2x+3) =$, $4 \times 5 =$

2. **Operador:** Cuando se presentan expresiones en las cuales, a un lado de la igualdad se disponen las operaciones, y al otro lado la respuesta.
   Ejemplos: $2 \times 3 = 6$
   $x(x+3) + x^2 = 2x^2 + 3x$

[3] Molina incluye usos o significados otorgados por los estudiantes o por los libros de texto de primaria.

3. **Como separador**[4]: significado que le dan los estudiantes para indicar o separar los pasos de un procedimiento.

Ejemplo: $\mathbf{4(x+2)(x-5)+10} \quad = \mathbf{(4x+8)(x-5)+10}$

$$= 4x^2 - 20x + 8x - 40 + 10$$

$$= 4x^2 - 12x - 30$$

4. **Expresión de una equivalencia condicional:** Este significado se encuentra asociado a las ecuaciones en las que la expresión es equivalente o válida solo para algún valor de la variable.

   Ejemplo: $2x + 3 = 5x - 10$

5. **Expresión de una equivalencia numérica:** Significado en expresiones aritméticas en las que el igual representa el mismo valor numérico a cada lado (tras realizar las operaciones, o porque el igual muestra dos formas de escribir el mismo número)

   Ejemplos: $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$, $3 + 1 = 2 + 2$

6. **Expresión de una equivalencia simbólica:** significado en expresiones algebraicas en las que para cualquier valor que tome la variable se obtiene el mismo valor numérico a cada lado.

   Ejemplo: $3x(x - 2) = 3x^2 - 6x$

7. **Identidad estricta:** cuando se representa exactamente el mismo número o incógnita a cada lado de la igualdad.

   Ejemplos: $3 = 3$, $a = a$

[4] Para Martha Molina (2006), este uso representa un error. En esta tesis no sé consideró como error, solo se consideró como la separación de la secuencia de pasos, por ejemplo, para resolver una ecuación.

8. **Equivalencia por definición o notación:** significado en expresiones aritméticas o algebraicas en las que el igual denota equivalencia de significado por la notación utilizada.
   Ejemplo: $100\ cm = 1\ m$

9. **Expresión de una relación funcional o de dependencia:** Aquí el signo igual se usa para representar dependencia entre variables.
   Ejemplos: $A = l \times l$ (área de un cuadrado), $y = 2x + 3$

10. **Indicador de cierta conexión o correspondencia:** Se usan objetos matemáticos y no matemáticos. Asociaciones de palabras (lenguaje normal) con números o expresiones numéricas.
    Ejemplos: $\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit = 4$
    Precio de una camiseta $= 4x + 10$

11. **Aproximación:** Se usa el signo igual para relacionar una expresión con su respectiva aproximación numérica.
    Ejemplo: $\pi = 3.14$
    $\frac{1}{3} = 0.33$

12. **Definición de un objeto:** El signo igual define un objeto matemático.
    Ejemplos: $a^1 = a$, a número real.
    $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$

2.3.2.2. La letra desde la Didáctica de las Matemáticas

Dentro del lenguaje algebraico, las letras ocupan un papel principal. Las letras en álgebra son símbolos que sirven para representar cualquier elemento de un conjunto (números u objetos)

(Font y Godino, 2003). Küchemann (1980), realizó una investigación con estudiantes ingleses (15 y 18 años) de secundaria, en la que concluyó los siguientes seis (6) usos de la letra en algebra:

1. **Letra evaluada:** Corresponde a expresiones en las que se les asigna un valor numérico desde el principio.

2. **Letra usada como objeto:** La letra representa un objeto.

3. **Letra como incógnita específica:** Expresiones en las que la letra es desconocida, sin embargo, representa un número específico.

4. **Letra como número generalizado:** Aquí la letra puede tomar diferentes valores, pero no se considera una variable.

5. **Letra como variable:** La letra representa un rango de valores, y además representa una relación entre dos o más conjuntos.

6. **Letra no usada:** Expresiones en las que se reconoce la existencia de la letra, pero no se le atribuye un significado[5].

Küchemann además advirtió que los tres primeros usos corresponden a un nivel elemental del manejo de la letra, y que las tres últimas suponen un nivel superior de entendimiento en el manejo de la misma.

[5] Este uso asociado a la letra, es considerado por los autores como un error de los estudiantes. Por esta razón no será tenido en cuenta en el análisis de este trabajo.

3. Historicidad de la igualdad y la letra

Dados los objetivos de este trabajo, se hará una caracterización y un análisis la historicidad de la igualdad y de la letra. Esto con el fin de identificar los signos asociados para cada uno y los usos que estuvieron asociados a lo largo de la historia. Cabe mencionar que la historicidad que se presentara en la sección 5.1 no solo está centrada en el álgebra.

3.1. Historicidad de la igualdad

Como ya se mencionó, la aparición de la simbolización algebraica no surgió siguiendo una secuencia uniforme. En el caso del símbolo igual, este tuvo diferentes signos asociados (lenguaje retórico, sincopado y simbólico). Incluso, también como sucede hoy en día en la escuela, el igual tuvo diferentes significados y usos. De hecho, el signo que hoy usamos para denotar la igualdad ya había sido usado para denotar otros conceptos matemáticos como la diferencia aritmética (González y González, 2014).

El signo "=" (igual) apareció en la época renacentista (s. XV - XVI); específicamente en 1557, sin embargo, aún después de que algunos autores reconocieran los dos segmentos de rectas paralelas (=) para denotar igualdad otros matemáticos muy reconocidos (por ejemplo, Vietá) continuaban usando palabras, abreviaciones y otros símbolos distintos.

Como se mencionó anteriormente, Vietá es el principal exponente del lenguaje simbólico; no obstante, para la igualdad continuaba usando lenguaje retórico (palabra completa), incluso en 1615 como se evidencia en su libro *De emendatione aequationum traductus secundus*:

Lenguaje Vietá	Lenguaje Moderno
A cubus + B plano 3 in A, **aequari** Z solido 2	$x^3 + 3B^2x = 2Z^3$

Tabla 2. Expresión algebraica usando simbología de Vietá.

Recorde es el personaje reconocido por usar el signo "=" para la igualdad, aunque según Cajori (1928), antes de él, entre 1550 y 1568, hubo un matemático que usó los dos segmentos paralelos para expresar igualdad, pero fue hasta la obra "The Whetstone of Witte" de Robert

Recorde en 1557cuando empezó a instaurarse este signo. Recorde inicialmente usó el signo más largo y con una distancia menor entre las líneas, aludiendo a que no existían en el mundo dos cosas más iguales que un par de rectas paralelas (Boyer, 1986).

Tras la publicación de Recorde, varios matemáticos de la época emplearon y apropiaron este signo (en algunas ocasiones con modificaciones); sin embargo, matemáticos como Vietá, Buteo, Holtzmann, Descartes, entre otros, adoptaron signos totalmente diferentes (Cajori, 1928).

Aunque no es propósito de este trabajo, cabe mencionar que el signo "=" a lo largo de la historia se usó para denotar diferentes significados; por ejemplo, Descartes en 1638 usó este símbolo para denotar el doble signo (±) (de esta forma es comprensible porque era uno de los matemáticos que se rehusaba a usarlo para denotar igualdad); por su parte, Vietá en 1591 lo usó para denotar la diferencia aritmética. Otros matemáticos como Johann Caramuel lo usaban para separar la parte entera de la parte decimal de un número. Y algunos otros matemáticos (como Dulauren y Reyher) como referente geométrico para indicar el paralelismo entre rectas (González y González, 2014).

También el símbolo igual ha presentado modificaciones en su escritura para representar conceptos que están relacionados con la igualdad (Castro, Castro y Molina, 2007), es así como Bolilla en 1832, lo usó así $A(= B$ o B=)A para señalar que cada valor de A es igual a algún valor de B, y usó $A(=)B$ para indicar que alguno de los valores de A es igual a uno de B.

Así como no solo se utilizaron distintos signos para representar el igual, también, a lo largo de la historia se reconocen distintos significados. A continuación, se mostrarán algunas traducciones al lenguaje moderno de enunciados o problemas matemáticos propuestos por algunos exponentes pertenecientes a las tres etapas del lenguaje algebraico (retórico, sincopado y simbólico). Los ejemplos se tomaron del libro *A history of mathematical notations*, escrito por Florian Cajori y publicado en 1928.

- Uno de los primeros signos que se puede clasificar en el lenguaje retórico es  que significaba "da", se encuentra en los papiros egipcios de Ahmes, que se remontan a

1550 a.C. El siguiente es el enunciado del problema número 34 de la placa XIII. Por la escritura, el problema se debe leer de derecha a izquierda.

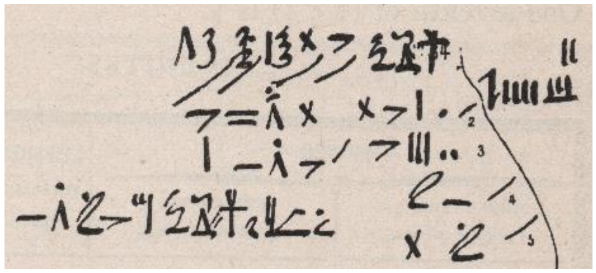


Imagen 1. Ecuación algebraica en papiro de Ahmes, 1700 a. C.

En nuestra simbología actual el problema traduce “Montón, su mitad, su cuarto, el conjunto **da** 10” (Cajori, 1928).

Otro exponente del lenguaje retórico, aunque también del lenguaje sincopado, es Diofanto (200 d.C. aprox.), quien representó la igualdad con los siguientes símbolos: **ἴσς** y **ἴ**$^{\sigma}$,usándolos indistintamente; por ejemplo, en el libro I, problema 28, respecto al problema: “*Encontrar dos números tales que su suma y la suma de sus cuadrados sean números dados.”*, se propone la siguiente solución:

Traducción hecha por Planudes usando la simbología de Diofanto				**Simbología actual**
	$\overline{\kappa}$		$\sigma\eta$	(Dados los números) 20 y 208
$\boldsymbol{\epsilon\kappa\theta}$.	$\varsigma\bar{\alpha}\mu^{\circ}\bar{\iota}$		$\bar{\alpha}$	**Poner los números** $x + 10$ y $10 - x$
$\boldsymbol{\tau\epsilon\tau\rho}$.	$\Delta^{\Upsilon}\bar{\alpha}\varsigma\bar{\kappa}\mu^{\circ}\bar{\rho}$	**ἴ**$^{\sigma}$	$\Delta^{\Upsilon}\mu^{\circ}\bar{\rho}\pitchfork\varsigma\bar{\kappa}$	**El cuadrado de los números**:
				$x^2 + 20x + 100;$ $x^2 - 20x + 100$
σύνθ.	$\Delta^{\Upsilon}\bar{\beta}\mu^{\circ}\bar{\sigma}$	**ἴ**$^{\sigma}$	$\mu^{\circ}\overline{\sigma\eta}$	**Sumándolos** $2x^2 + 200 = 208$
ἀφ.	$\Delta^{\Upsilon}\bar{\beta}$	**ἴ**$^{\sigma}$	$\mu^{\circ}\bar{\eta}$	**Restando** $2x^2 = 8$
$\boldsymbol{\mu\epsilon\rho}$.	$\Delta^{\Upsilon}\bar{\alpha}$	**ἴ**$^{\sigma}$	$\mu^{\circ}\bar{\delta}$	**Dividiendo** $x^2 = 4$
				$x^2 = 2$
ἔπ	$\varsigma\bar{\alpha}$		$\mu^{\circ}\bar{\beta}$	**Resultado** (Los números son) 12 8

Tabla 3. Expresión algebraica usando simbología de Diofanto- Lenguaje Sincopado.

En la tabla se observa que usó la abreviatura $\acute{\iota}^{\sigma}$para sustituir la palabra igual mientras explica el proceso para resolver un problema. Mientras que en el problema 3, también del libro I, se encuentra escrito así:

Tannery (1895), usando simbología de Diofanto	Simbología actual
$\mu^{\circ}\overline{o\zeta}\acute{\iota}\sigma\varsigma\varsigma \quad \overline{\delta}$	$76 = 4x$

Tabla 4. Expresión algebraica usando simbología de Diofanto - Lenguaje Retórico

- En 1881 fue encontrado un manuscrito en Bakhshali, una pequeña ciudad de Pakistán. En dichos escritos se encontraron procedimientos matemáticos para resolver ecuaciones y operaciones básicas en general. En el manuscrito se encuentra la siguiente multiplicación.

Simbología en los manuscritos de Bakhshali	Simbología actual
5 32 ***phalaṁ* 20** **8 1**	$\frac{5}{8} \times \frac{32}{1} = 20$

Tabla 5. Expresión algebraica usando simbología de manuscritos de Bakhshali.

No se sabe a ciencia cierta la fecha en la que fueron elaborados los manuscritos; sin embargo, algunos autores concuerdan en que es posible que daten de los siglos III y IV d.C. Es evidente que al menos para el símbolo asociado a la igualdad se presentaba un lenguaje retórico. Aunque también se ha encontrado que usaban la abreviación dephalaṁ,pha, la cual pertenece al lenguaje sincopado.

- Bhaskara Áchabrya, matemático indio (1114 – 1185 d. C.). También fue un exponente del lenguaje retórico. Él usaba la palabra *bhávita*, que en nuestro leguaje significa “llegar a ser”; enseguida un ejemplo:

Simbología Bhaskara	Simbología actual
$\boldsymbol{ya \quad 5 \quad ru \quad \dot{1}}$ $\boldsymbol{bh\acute{a}vita \ ya \ v \ 15 \ ya \ 7 \ ru \ \dot{2}}$ $\boldsymbol{ya \quad 3 \quad ru \quad 2}$	$(5x-1)(3x+2) = 15x^2 + 7x - 2$

Tabla 6. Expresión algebraica usando simbología de Bhaskara.

- Al-Khwarizmi quien de quien se estima que vivió entre el 780 y el 850 d. C. (exponente del lenguaje retórico), considerado por algunos como el padre del álgebra, usaba el lenguaje natural para expresar todo contenido matemático. Por ejemplo, en el problema 4 dice:

Traducción al español	Simbología actual
Veintiuna cosa y dos tercios de una cosa menos dos $\boldsymbol{m\bar{a}ls}$[6] y un sexto **es igual** a cien y dos $\boldsymbol{m\bar{a}ls}$menos veinte cosas.	$21\frac{2}{3}x - 2\frac{1}{6} = 100 + 2x^2 - 20$

Tabla 7. Expresión algebraica usando simbología Al-Khwarizmi.

- Leonardo of Pisa (aproximadamente 1170 – 1240 d.C.) usó la palabra **equantur** para representar la igualdad; enseguida un ejemplo:

Simbología Leonardo	Simbología actual
Dou census, et decem radices **equantur** denariis 30	$2x^2 + 10x = 30$

Tabla 8. Expresión algebraica usando simbología de Leonardo.

- Al – Qalasadi (1412 – 1486) usó la letra  del alfabeto griego para denotar igualdad; así:

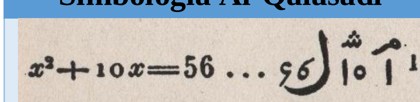
Simbología Al-Qalasadi	Simbología actual
	$x^2 + 10x = 56$

Tabla 9. Expresión algebraica usando simbología de Al-Qalasadi.

[6] Se usaba $m\bar{a}ls$ para denotar el cuadrado de una cosa o número.

- Johan Müller, conocido como Regiomontanus (1436 – 1476) es un exponente del lenguaje simbólico. El usó un guion largo. En el ejemplo (tabla 10) se muestra una parte de la solución para el problema “Dividir 100 por un cierto número, luego dividir 100 por el número incrementado en 8; la suma de las cantidades es 40. Encuentre el primer divisor”

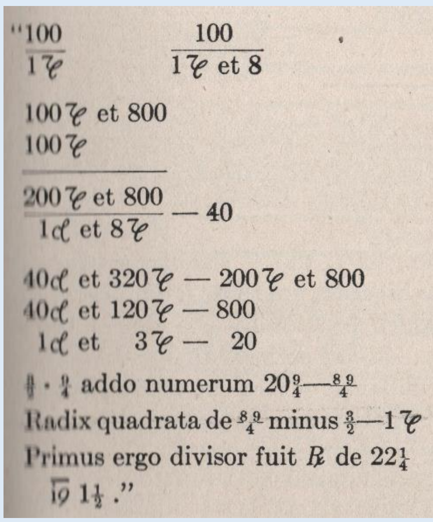
Simbología Regiomontanus	Simbología actual
 “100 / 1𝒞 100 / 1𝒞 et 8 100𝒞 et 800 100𝒞 200𝒞 et 800 / 1𝒸 et 8𝒞 — 40 40𝒸 et 320𝒞 — 200𝒞 et 800 40𝒸 et 120𝒞 — 800 1𝒸 et 3𝒞 — 20 $\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{4}$ addo numerum $20\frac{9}{4}$—$\frac{89}{4}$ Radix quadrata de $\frac{89}{4}$ minus $\frac{3}{2}$—1𝒞 Primus ergo divisor fuit ℞ de $22\frac{1}{4}$ ꝭ $1\frac{1}{2}$.”	$\frac{100}{x}\ \frac{100}{x+8}$ $100x+800$ $\frac{100x}{}$ $\frac{200x+800}{x^2+8x}=40$ $40x^2+320x=200x+800$ $40x^2+120x=800$ $x^2+3x=20$ $\frac{3}{2}\mid\frac{9}{4}$ adicionando el número $20\frac{9}{4}=\frac{89}{4}$ $\sqrt{\frac{89}{4}}-\frac{3}{2}=x$ Entonces el primer divisor fue $\sqrt{22\frac{1}{4}}-1\frac{1}{2}$.

Tabla 10. Expresión algebraica usando simbología de Regiomontanus.

El guion largo lo usaron también Luca Pacioli (1445 – 1517), Ghaligai (1498 – 1573) y otros matemáticos italianos (Cajori, 1928).

- Algunos autores como Hieronymo Cardan (1501 – 1576) no usaron signo alguno para denotar la igualdad. Este matemático, por ejemplo, dejaba un espacio en blanco antes de escribir el resultado (tabla 11).

Simbología Cardan	Simbología actual
$\boldsymbol{r.p^{m}\tilde{p}.6.cub.}$ **80**	$x^5+6x^3=80$

Tabla 11. Expresión algebraica usando simbología de Cardan.

- Cardan es uno de los exponentes que usó diferentes representaciones para la igualdad. En su obra *Ars magna*, p. 297, se observan las palaras **aequal**, **aequentur** y **aequalia** (tabla12) en la solución de un mismo problema. En este ejemplo no es posible identificar un uso o significado diferente para cada una de las representaciones.

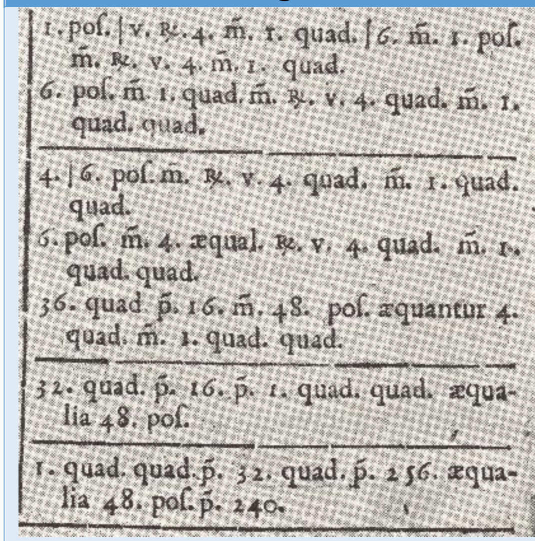
Simbología Cardan	Simbología actual
 1. pos. | v. R. 4. m̄. 1. quad. | 6. m̄. 1. pos. m̄. R. v. 4. m̄. 1. quad. 6. pos. m̄. 1. quad. m̄. R. v. 4. quad. m̄. 1. quad. quad. 4. | 6. pos. m̄. R. v. 4. quad. m̄. 1. quad. quad. 6. pos. m̄. 4. æqual. R. v. 4. quad. m̄. 1. quad. quad. 36. quad. p̄. 16. m̄. 48. pos. æquantur 4. quad. m̄. 1. quad. quad. 32. quad. p̄. 16. p̄. 1. quad. quad. æqualia 48. pos. 1. quad. quad. p̄. 32. quad. p̄. 256. æqualia 48. pos. p̄. 240.	$x \mid \sqrt{4-x^2} \mid 6x - x - \sqrt{4-x^2} \mid$ $6x - x^2 - \sqrt{4x^2 - x^4}$ $4 \mid 6x - \sqrt{4x^2 - x^4}$ $6x - 4 = \sqrt{4x^2 - x^4}$ $36x^2 + 16 - 48x = 4x^2 - x^4$ $32x^2 + 16 + x^4 = 48x$ $1x^4 + 32x^2 + 256 = 48x + 240$

Tabla 12. Simbología Cardan- Diferentes expresiones para la igualdad.

- En *L'algebra* de Bombelli (1572) se encuentra otro ejemplo de lenguaje retórico para la igualdad[7]. Bombelli escribe **eguale á**.
- Como ya se mencionó, Robert Recorde (1510 – 1558), fue el segundo en emplear el signo "=" (ligeramente más largo y con menos distancia entre los segmentos de recta). A continuación, se muestra un ejemplo tomado de su obra *Whetstone of Witte*. El literal 1 traduce en la simbología actual $14x + 15 = 71$.

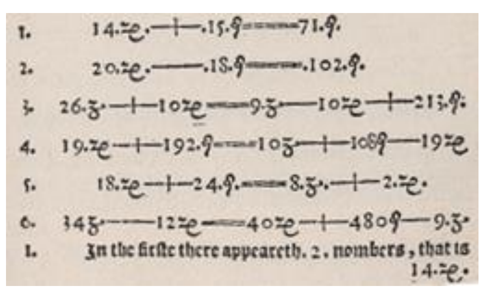


Imagen 2. Tomado de Wheststone of Witte de Robert Recorde (1557)

[7] Más adelante se verá que Bombelli es uno de los autores que para la igualdad usaba lenguaje retórico, mientras que para la variable ya empleaba el lenguaje simbólico.

- Jean Buteon (1492 – 1572) es otro exponente del lenguaje simbólico. Este autor representó la igualdad con el paréntesis cuadrado [:

Simbología Buteon	Simbología actual
$\frac{1}{4}\ \Diamond\ [100$	$\frac{1}{4}x^2 = 100$

Tabla 13. Expresión algebraica usando simbología de Buteon.

- René Descartes (1596 – 1650), continuó usando otro símbolo para denotar la igualdad. Aun cuando Recorde ya había publicado su obra. René usó un signo parecido al del infinito ꝏ, pero con la abertura hacia la derecha. Cabe mencionar que se han encontrado manuscritos donde usa el signo de Recorde, pero nunca se encontró la razón por la cual adoptó un nuevo signo.

  Es posible que el reconocimiento o la influencia que ejercía Descartes hayan provocado que casi por 200 años se usara su signo y no el que conocemos en la actualidad.

  Johann Bernoulli (1713), propuso las fórmulas para las sumas de las potencias pares de los primero *n* enteros. La siguiente es una de las fórmulas descritas por Bernoulli. (Bernoulli usaba el signo de igualdad propuesto por Descartes).

$$\int n \text{ ꝏ } \frac{1}{2}nn + \frac{1}{2}n$$

- En 1757, Vicenzo Riccati, describió el coseno hiperbólico como se muestra en la tabla 14.

Simbología Riccati	Simbología actual
$\boldsymbol{\overline{Ch.\mu}^2 - \overline{Sh.\mu}^2 = r^2}$	$cosh^2\, x - sinh^2\, x = 1$

Tabla 14. Expresión algebraica usando simbología de Riccati.

- Leibniz es otro de los autores que usó diferentes signos para la igualdad. En el documento *Leibnizens mathematische Schriften*. Volumen 1 *(1849)*, aparece el signo $\sqcap$, en ese mismo volumen usa también el signo =. En el volumen 5 usa el signo usado por Descartes. En la tabla 15 se muestra cada uno de los ejemplos.

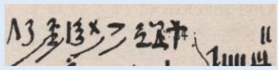
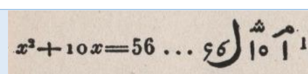
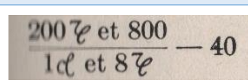
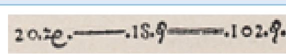
Simbología Leibniz	Simbología actual
$\boldsymbol{x^y + y^y \sqcap xy \quad et \ x^y + y^y \sqcap x + y}$	$x^y + y^y = xy \quad yx^y + y^y = x + y$
" … $\boldsymbol{radium = r, \quad arcum = a}$ $\boldsymbol{et \ \ tangentem \, t \ \ erit}$ $$\boldsymbol{t = a + \frac{a^3}{3r^2} + \frac{2a^5}{15r^4} + \frac{17a^7}{315r^6} + \frac{62a^9}{2835r^8} \ etc}"$$	" $\ldots .radio = r, \quad arco = a$ $y \ \ tangente \ \ t \ \ entonces$ $$\boldsymbol{t = a + \frac{a^3}{3r^2} + \frac{2a^5}{15r^4} + \frac{17a^7}{315r^6} + \frac{62a^9}{2835r^8} \ etc}"$$

Tabla 15. Expresión algebraica usando simbología de Leibniz.

Aproximadamente en 1631, tras las publicaciones de matemáticos como Thomas Harriot, William Oughtred, Richard Norwood, John Wallis, Isaac Barrow e Isaac Newton donde emplearon el signo de Recorde, finalmente este empezó a instaurarse universalmente (aproximadamente a finales del siglo XVII) (Cajori, 1928).

Grosso modo debemos mencionar que la aparición del símbolo que se emplea actualmente para denotar igualdad, no siguió una transformación lineal, por el lenguaje retórico, luego el sincopado y finalmente el simbólico. Aunque se puede afirmar que el paso a cada nivel (1. Retórico, 2. Sincopado y 3. Simbólico) supone un mejor desarrollo del lenguaje algebraico, algunos matemáticos usaban al mismo tiempo lenguaje retórico–sincopado o sincopado–simbólico, ejemplo que se pudo evidenciar en Diofanto. No obstante, estas tendencias fueron reemplazadas finalmente, para consolidar al lenguaje simbólico como el lenguaje regente en las matemáticas.

A continuación, se muestra una tabla que resume lo anterior y relaciona distintas representaciones atribuidas a la igualdad a lo largo de la historia con los significados que se enunciaron en la sección 1.3.2.1. Esto con el fin de identificar cuáles de los usos que en la actualidad se tienen para la igualdad, existían en la antigüedad.

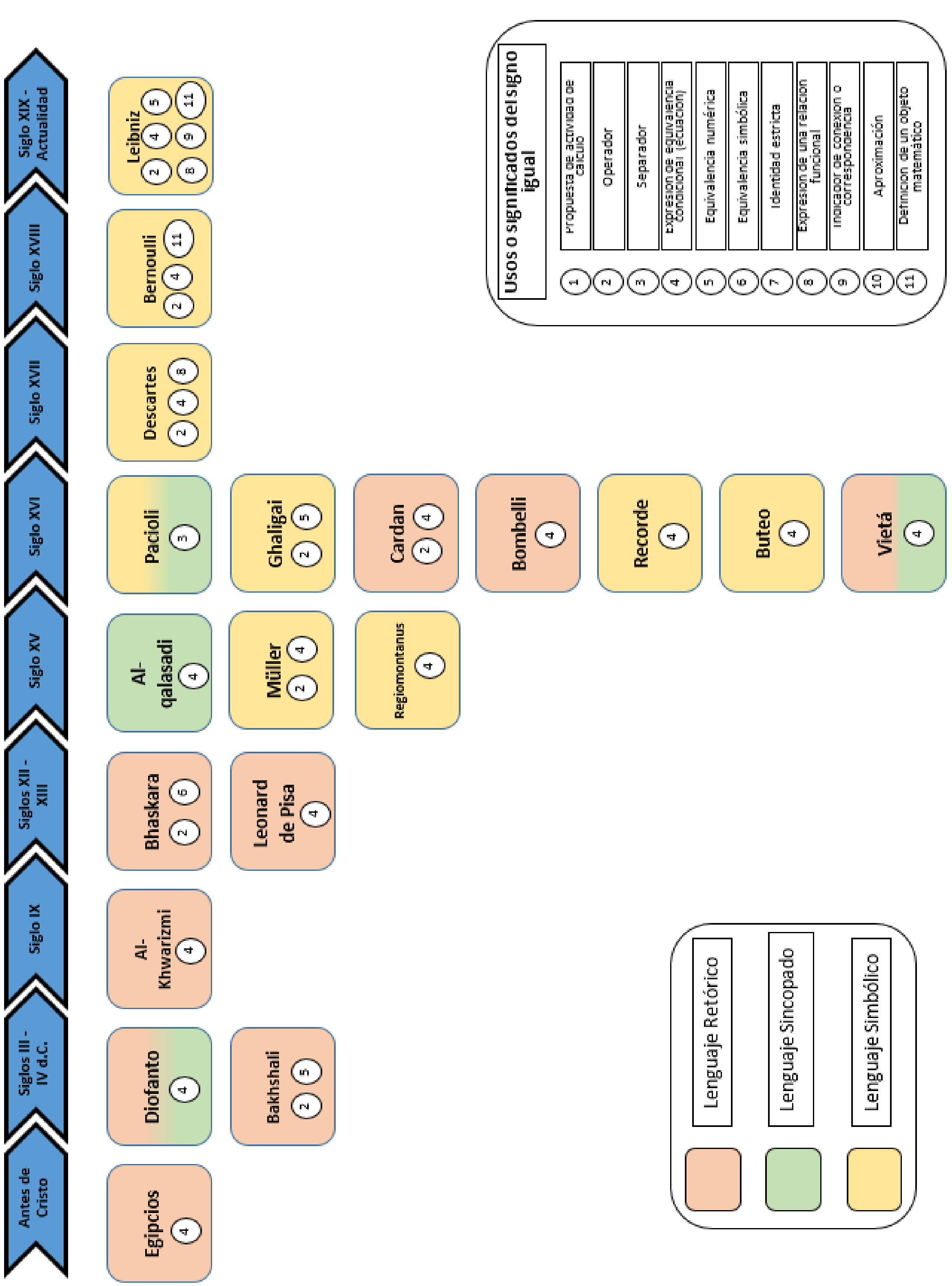
Exponente	Representación original[8]	Traducción a la simbología actual	Uso del signo igual
Egipcios		Montón, su mitad, su cuarto, el conjunto **da** 10	
Diofanto	$\mu^{\circ}\overline{o\zeta}\,\boldsymbol{\acute{\iota}\sigma\varsigma}\varsigma\bar{\delta}$	$76 = 4x$	
Brahmagupta	ca 1644 $ní$ 1 ru 6302." $(ya)197$	$x = \frac{1644y + z + 6302}{197}$	
Bombelli	1. $\boldsymbol{Eguale}\grave{a}\breve{1}$.	$1 = x$	
Al - Khwarizmi	Veintiuna cosa y dos tercios de una cosa menos dos $m\bar{a}ls$ y un sexto es igual a cien y dos $m\bar{a}ls$menos veinte cosas.	$21\frac{2}{3}x - 2\frac{1}{6} = 100 + 2x^2 - 20$	Ecuación
Leonardo of Pisa	Dou census, et decem radices **equantur** denariis 30	$2x^2 + 10x = 30$	
Al - Qalasadi		$x^2 + 10x = 56$	
Regiomontanus		$\frac{200x + 800}{x^2 + 8x} = 4$	
Cardán	$r.p^m\tilde{p}.6.cub.\quad 80$	$x^5 + 6x^3 = 80$	
Recorde		$20x - 18 = 102$	
Buteo	$\frac{1}{4}$ ◇ [100	$\frac{1}{4}x^2 = 100$	
Ghaligai	$n^{\circ} - -Número$ $c^{\circ} - -Cofa$ ⊡ $- -$ $Cenfo$ ⊞ $- Dromico$	$x^0 = Número$ $x^1 = Cosa$ $x^2 = Censo$ $x^{13} = Dromico$	Indicador de cierta conexión o correspondencia

[8] Ejemplos y traducciones tomados de Cajori 1993.

Leibniz	$\boldsymbol{radium = r, arcum = a}$	$radio = r, \;\; arco = a$	
Cardan	$13. pos. \mathcal{R}\ 144.$ $\boldsymbol{aequal}\ 25.$	$13 + \sqrt{144} = 25$	Operador
Bakhshali	5 32 $phala\dot{m}$ 20 8 1	$\frac{5}{8} \times \frac{32}{1} = 20$	
Bhāskara	$ya\ 5\ ru\ \dot{1}$ $ya\ 3\ ru\ 2$ $\boldsymbol{Product}$: $ya\ v\ 15\ ya\ 7\ ru\ \dot{2}$	$(5x - 1)(3x + 2)$ $= 15x^2 + 7x - 2$	
Descartes	z ꝏ $\frac{1}{2}a - -\sqrt{\frac{1}{4}aa - -bb}$	$z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$	Expresión de una relación funcional
Vicenzo Riccati	$\overline{Ch.\mu}^2 - \overline{Sh.\mu}^2 = r^2$	$cosh^2\,x - sinh^2\,x = 1$	
Johann Bernoulli	$\int n$ ꝏ $\frac{1}{2}nn + \frac{1}{2}$	$\int n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}$	Definición de un objeto matemático

Tabla 16. Usos del signo igual en la historia.

Para finalizar, se muestra el esquema 1 en el que se resumen los usos de la igualdad y el tipo de lenguaje empleado, organizados en una línea de tiempo.



Esquema 1. Tipo de lenguaje y usos asociados a la igualdad en la Historia de las Matemáticas.

3.2. Historicidad de la letra

En esta sección se hará un recuento de la simbología asociada a la letra a lo largo de la historia, analizando el paso por los estadios del leguaje ya mencionados, y finalmente identificando cuáles de los usos de la letra descritos en la sección 1.3.2.2 se encuentran en los ejemplos que se presentarán en esta unidad (historicidad de la letra).

De la misma forma como sucedió con el signo igual, la letra en álgebra tuvo un surgimiento que pasó por los tres estadios (retórico, sincopado y simbólico), en los siguientes ejemplos se mostrará que estos tres tipos de lenguaje subsistieron al tiempo, aunque analizado globalmente se evidencia el paso evolutivo de retórico a sincopado, y de sincopado a simbólico.
El uso de la letra aparece asociado al estudio de la solución de ecuaciones. Por esta razón la mayoría de los ejemplos que se presentan a continuación se ubican dentro del contexto de las ecuaciones. (Los ejemplos mostrados a continuación son tomados del Volumen 1 y 2 de Cajori)

- En el problema 24 del papiro de Rhind[9] aparece la palabra “montón” para referirse a la incógnita: “El montón y un séptimo del montón hacen 19”, este ejemplo, por supuesto hace parte del lenguaje retórico.

- En Mesopotamia también emplearon palabras, pero específicas, es decir, aludían a un objeto concreto. Ejemplo: “Hallar el **lado** de un cuadrado sabiendo que área menos el lado es igual a 14,30”

- Por su parte Diofanto (200 d. C. aprox.) resulta ser uno de los primeros en usar símbolos para representar una incógnita.

[9] O también denominado papiro Ahmes, fue escrito a mediados del siglo XVI a.C. en Egipto. Es un documento que contiene problemas matemáticos.

Simbología Diofanto	Simbología moderna
Δ^{γ}	X^2
$\boldsymbol{K}^{\gamma}$	X^3
$\Delta^{\gamma}\Delta$	X^4
$\Delta\boldsymbol{K}^{\gamma}$	X^5
$\boldsymbol{K}^{\gamma}\boldsymbol{K}$	X^6

Tabla 17. Simbología de Diofanto para la incógnita.

De esta manera la expresión $x^3 + 13x^2 + 5x + 2$, en la simbología de Diofanto sería, $K^{\gamma}\bar{\alpha}\Delta^{\gamma}\bar{\iota\gamma}\varsigma\bar{\epsilon}\dot{M}\bar{\beta}$. Donde $\dot{M}$, se usaba para representar las cantidades independientes. Es de resaltar que uno de los pocos objetos para los que Diofanto no tenía un signo era para el igual.

- Brahmagupta (598 – 670 d.C.), por su parte usó abreviaciones de palabras hindúes. Por ejemplo para expresar x^2 escribía "$ya\ v$". Yaes la abreviación de la palabra yavát-tavaty v la contracción de la palabra varga.

- Bakhshali (manuscrito encontrado en 1881), usó también palabras para expresar las variables así:

$$varga = x^2$$
$$g'hana = x^3$$
$$varga\ varga = x^4$$
$$varga - g'hana - ghata = x^5$$
$$varga - varga - g'hana - ghata = x^7$$

- Para Al-Khwarizmi (780 – 850 d.C.) la palabra mal representaba x^2, $ka^{\text{c}}b$ significaba x^3. ,así para representar x^5 escribía $mal\ ka^{\text{c}}b$.

- Leonard of Pisa (1170 – 1240 d. C. aprox.), usó también palabras para expresar literales matemáticos.

Lenguaje Leonard of Pisa	Lenguaje actual
Duo **census**, et decem **radices** equantur denariis 30	$2x^2 + 10x = 30$

Tabla 18. Simbología de Leonard of Pisa para la incógnita.

- Al-Qalasadi (1412 – 1486 d. C.) fue uno de los primeros autores que representó las variables con letras del alfabeto árabe.

Lenguaje Al-Qalasadi	Lenguaje actual
ش	x
ص	x^2
ك	x^3

Tabla 19. Simbología de Al-Qalasadi para la incógnita.

- Regiomontanus (1436 – 1476 d. C.) es uno de los primeros en usar símbolos

Lenguaje Regiomontanus	Lenguaje actual
	x
	x^2

Tabla 20. Simbología de Regiomontanus para la incógnita.

- Luca Pacioli (1445 – 1517 d. C.), usó abreviaturas: $co.$ (cosa), $ce.$ (censo), $cu.$ (cubo), $ce.ce.$ (censo de censo), $p^{\circ}.r^{\circ}.$ (primo relato). Las cuales representaban x, x^2, x^3, x^4 y x^5 respectivamente.

- Ghaligai (1498 - 1573), usó las mismas palabras que Pacioli pero completas y en algunos casos usó figuras con cuadrados para expresar las variables y sus potencias, por ejemplo, escribía $\frac{1}{4}\boxdot\boxdot\ \dot{m}\ 4\ \boxdot\ ---4\ \boxdot$para representar lo que en el lenguaje actual corresponde a $\frac{1}{4}x^4 - 4x^2 = 4x^2$

- Cardan (1501 – 1576 d. C.), aunque para las operaciones de suma y resta usaba la letra inicial (p y m, respectivamente), no lo hizo con el signo igual ni las variables. El valor desconocido lo representó con *Pof*. Y la variable x^2 la simbolizó como *quad*.

- Nicolo Tartaglia (1537), es un exponente del lenguaje retórico y sincopado. En algunos escritos se encuentra, por ejemplo, "$.1.\,cubo\ de\ censo\ piu\ .48.\ \ equal\ a\ 14\ cubi$", que representa en notación actual "$x^6 + 48 = 14x^3$". Mientras que en otros textos era recurrente que usara las abreviaciones $co.$, $ce.$, $cu.$, etc., para $cose$, $censo$, $cubi$, etc.

- Gramateus (1535), es otro representante de las abreviaciones (lenguaje sincopado). $9\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}} + 30\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - 6\boldsymbol{x} + 48$, en su lenguaje lo escribía como, $9\ \boldsymbol{ter}. + 30\ \boldsymbol{se}. -6\ \boldsymbol{pri}. + 48$

- Bombelli (1572), es un exponente del lenguaje simbólico. Él hizo una representación muy interesante, ya que esta fue la primera en la que el valor de la potencia se escribió como un superíndice, representación que es similar a la actual:

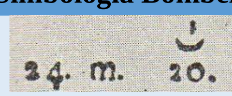
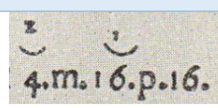
Simbología Bombelli	Simbología actual
	$24 - 20x$
	$4x^2 - 16x + 16$

Tabla 21. Simbología de Bombelli para la incógnita.

- Michael Stifel (1553), empleó un signo diferente para cada potencia de la incógnita. En la tabla 22 se muestra la solución de una multiplicación entre dos expresiones algebraicas.

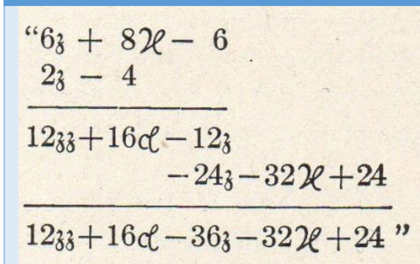
Simbología Stifel	Simbología actual
	$6x^2 + 8x - 6$ $2x^2 - 4$ $12x^4 + 16x^3 - 12x^2$ $-24x^2 - 32x + 24$ $12x^4 + 16x^3 - 36x^2 - 32x + 24$

Tabla 22. Simbología de Stifel para la incógnita.

- Otros autores optaron por ignorar una simbología para la incógnita y solo concentrarse en mostrar la potencia que representaba. Por ejemplo, Simón Stevin (1585) encerró en un círculo el valor de la potencia el cual ubicaba encima, al lado derecho o debajo del coeficiente. En la tabla 23 se ilustra un ejemplo.

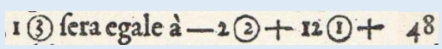
Simbología Stevin	Simbología actual
 1 ③ fera egale à — 2 ② + 12 ① + 48	$x^3 = -2x^2 + 12x + 48$

Tabla 23. Simbología de Stevin para la incógnita.

- Albert Girard (1629), escribía (2), (3), (4), … para indicar el valor de la potencia. Así, $x^3 = -6x + 20$, lo representaba como $1(3)$ *esgale* á $- 6(1) + 20$

- Buteo (1492 – 1572 d. C.) , es otro autor que usó símbolos geométricos. Cuando había más de una cantidad desconocida, el usaba las letras A, B y C.

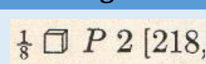
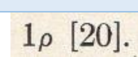
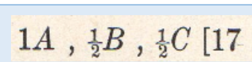
Simbología Buteo	Simbología actual
 $\frac{1}{8}$ ◻ P 2 [218,	$\frac{1}{8}x^3 + 2 = 218$
 1ρ [20].	$3x - 7 = 8$
 1A , $\frac{1}{2}$B , $\frac{1}{2}$C [17	$x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 17$

Tabla 24. Simbología de Buteo para la incógnita.

- Vietá, es un personaje importante para el álgebra. Él hacía distinciones entre la incógnita (denotaba con vocales) y los coeficientes indeterminados (denotados por consonantes). Ambos los escribía usando las letras en mayúsculas. Para escribir las potencias, Vietá usó la misma simbología de Diofanto.

Simbología Vietá	Simbología actual
$\boldsymbol{2\ A\ q - 5\ A\ aeq\ 23}$	$2x^2 - 5x = 23$

Tabla 25. Simbología de Vietá para la incógnita.

- René Descartes (1596 – 1650), usó una notación parecida a la moderna. Con la diferencia que él repetía la letra cuantas veces fuera su exponente. Así, a^2 lo representaba asíaa.

  En la imagen 3 aparecen dos ejemplos que representan su notación.

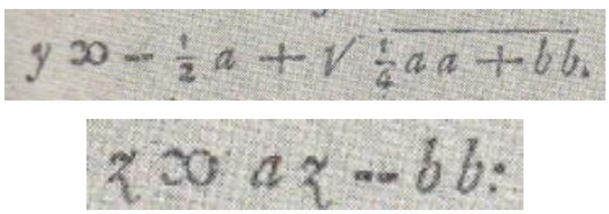
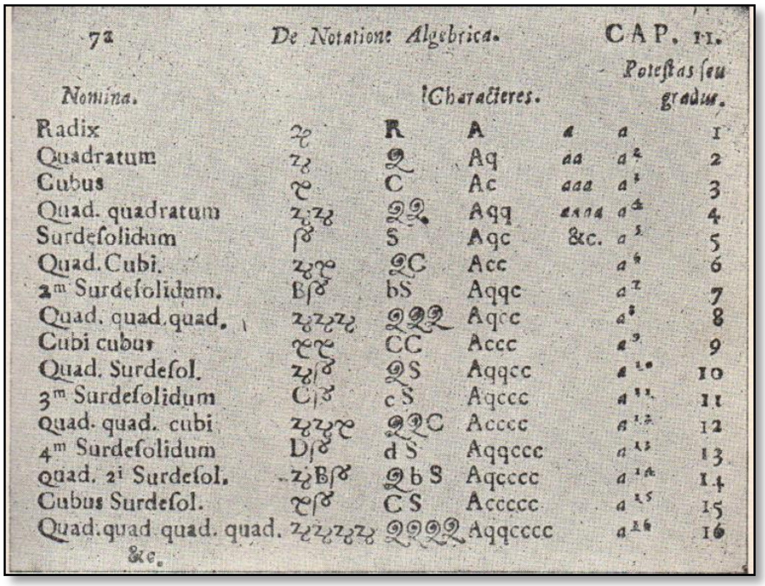


Imagen 3. Notación de Descartes para la letra.

- Jhon Wallis (1657), fue uno de los primeros en usar la notación moderna para las incógnitas. En la imagen 4, se observa que elaboró una tabla en donde relacionó el nombre (lenguaje retórico), las abreviaciones y símbolos, y finalmente el símbolo que el proponía para dicha expresión.



72 De Notatione Algebrica. CAP. 11.

Nomina.	Characteres.					Potestas seu gradus.
Radix	℞	R	A	a	a	1
Quadratum	zz	Q	Aq	aa	a^2	2
Cubus	ℭ	C	Ac	aaa	a^3	3
Quad. quadratum	zzzz	QQ	Aqq	aaaa	a^4	4
Surdesolidum	ʃz	S	Aqc	&c.	a^5	5
Quad. Cubi.	zzℭ	QC	Acc		a^6	6
2m Surdesolidum.	Bʃz	bS	Aqqc		a^7	7
Quad. quad. quad.	zzzzzz	QQQ	Aqcc		a^8	8
Cubi cubus	ℭℭ	CC	Accc		a^9	9
Quad. Surdesol.	zzʃz	QS	Aqqcc		a^{10}	10
3m Surdesolidum	Cʃz	cS	Aqccc		a^{11}	11
Quad. quad. cubi	zzzzℭ	QQC	Acccc		a^{12}	12
4m Surdesolidum	Dʃz	dS	Aqqccc		a^{13}	13
Quad. 2i Surdesol.	zzBʃz	QbS	Aqcccc		a^{14}	14
Cubus Surdesol.	ℭʃz	CS	Accccc		a^{15}	15
Quad. quad. quad. quad. &c.	zzzzzzzz	QQQQ	Aqqcccc		a^{16}	16

Imagen 4. Notación propuesta por Jhon Wallis para la letra.

- Leibniz (1646 – 1716) usaba letras minúsculas como x, a, b para representar magnitudes. Letras mayúsculas para indicar puntos en una figura. Para magnitudes conocidas usaba especialmente letras como a y b y para magnitudes desconocidas x e y. En la tabla 26 se muestra una ecuación escrita en notación de Leibniz.

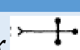
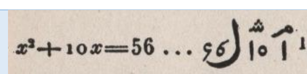
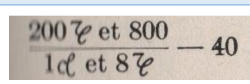
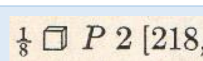
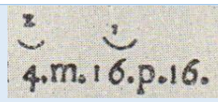
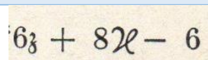
Simbología Leibniz	Simbología actual
$\mathbf{10xx}$  $\mathbf{11x}$  $\mathbf{12 = 0}$	$10x^2 + 11x + 12 = 0$

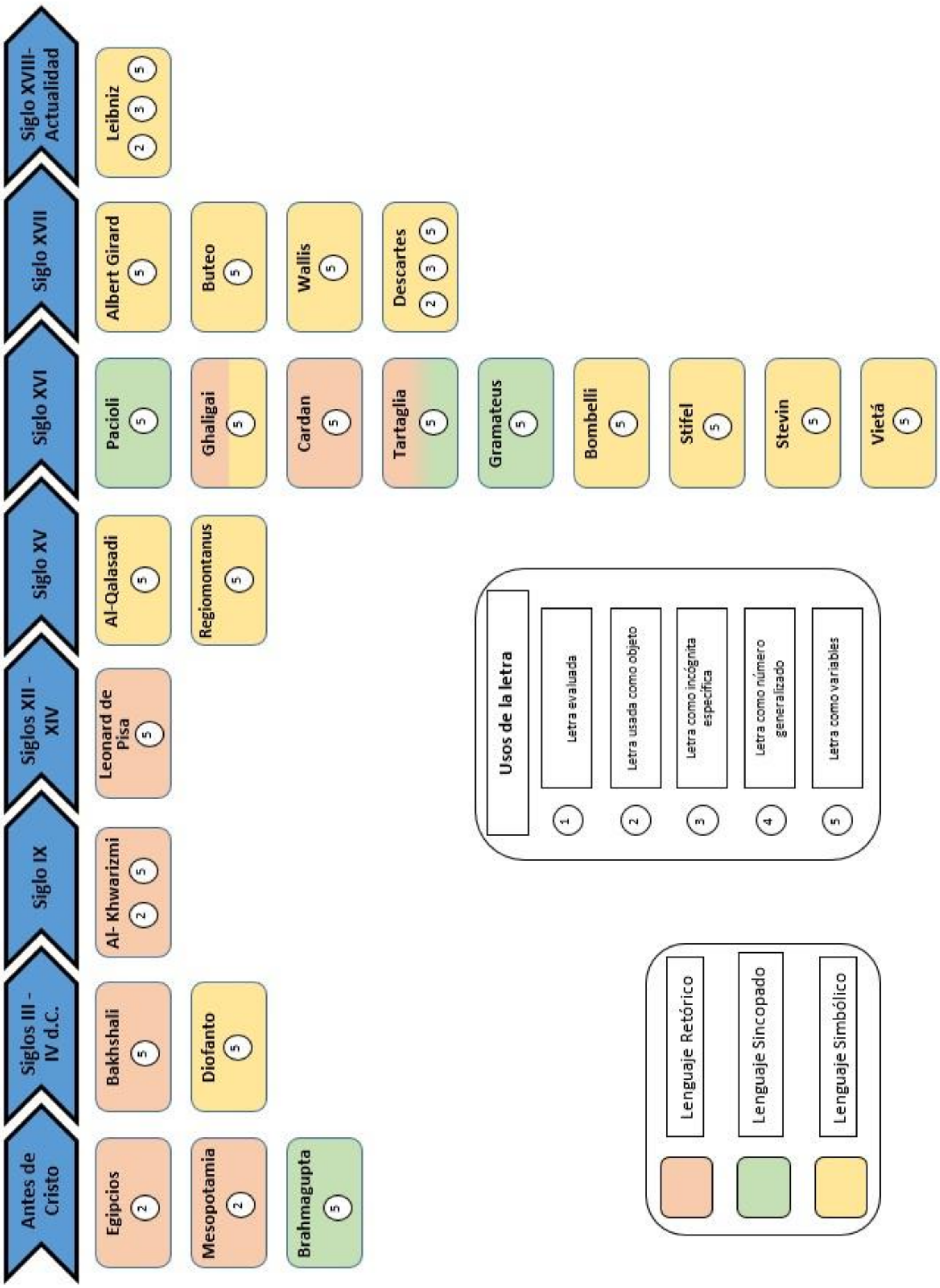
Tabla 26. Simbología de Leibniz para la incógnita.

En la siguiente tabla se relacionan los símbolos asociados a la letra en la historia y los usos descritos anteriormente.

Exponente	**Representación original**	**Traducción a la simbología actual**	**Uso de la letra**
Egipcios		El **montón** y un séptimo del montón hacen 19	Como objeto
Mesopotamia		Hallar el **lado** de un cuadrado sabiendo que área menos el lado es igual a 14,30	
Al - Khwarizmi	Veintiuna cosa y dos tercios de una cosa menos dos $m\bar{a}ls$ y un sexto es igual a cien y dos $m\bar{a}ls$menos veinte cosas.	$21\frac{2}{3}x - 2\frac{1}{6} = 100 + 2x^2 - 20$	
Diofanto	$K^{\gamma}\bar{\alpha}\Delta^{\gamma}\overline{\iota\gamma}\varsigma\bar{\epsilon}\dot{M}\bar{\beta}$	$x^3 + 13x^2 + 5x + 2$	Como variables
Brahmagupta	ca 1644 $ní$ 1 ru 6302." (ya)197	$x = \frac{1644y + z + 6302}{197}$	
Leonard of Pisa	**Duo** census**, et decem** radices **equantur denariis 30**	$2x^2 + 10x = 30$	
Al - Qalasadi		$x^2 + 10x = 56$	
Regiomontanus		$\frac{200x + 800}{x^2 + 8x} = 4$	
Ghaligai	$\frac{1}{4}\boxdot\boxdot\ \dot{m}\ 4\boxdot\ ---4\boxdot$	$\frac{1}{4}x^4 - 4x^2 = 4x^2$	
Tartaglia	$.1.cubo\ de\ censo\ piu\ .48.\ e$	$x^6 + 48 = 14x^3$	
Buteo		$\frac{1}{8}x^3 + 2 = 218$	
Gramateus	$9\ \boldsymbol{ter}. + 30\ \boldsymbol{se}. -6\ \boldsymbol{pri}. + 48$	$9\boldsymbol{x}^3 + 30\boldsymbol{x}^2 - 6\boldsymbol{x} + 48$	

Bombelli		$4x^2 - 16x + 16$	
Stifel		$6x^2 + 8x - 6$	
Girard	$1(3)\ esgale$ á $- 6(1) + 20$	$x^3 = -6x + 20$	
Vietá	$2\ A\ q - 5\ A\ aeq\ 23$	$2x^2 - 5x = 23$	
Leibniz	$10xx$  $11x$  $12 = 0$	$10x^2 + 11x + 12 = 0$	
Descartes		$z = az - b^2$	Como incógnita específica

Para finalizar se muestra el esquema 2, que resume los usos y lenguaje asociado a letra ubicados en una línea de tiempo.



Esquema 2. Tipo de lenguaje y usos asociados a la letra en la Historia de las Matemáticas.

4. La igualdad y la letra en los libros de texto

Para el desarrollo del presente trabajo se escogió la *serie para Preescolar y Básica Primaria Espiral* (inicial – quinto) y la *serie Matemáticas para Básica Secundaria y Media Espiral* (sexto – undécimo). La serie Espiral del grupo editorial Norma fue publicada entre los años 2004 y 2006. Tuvo vigencia hasta el año 2010. Actualmente no se comercializa en el mercado formal.

4.1. Revisión de la igualdad en libros de texto

A continuación, se muestra para cada uno de los libros que componen la serie (12 en total) la revisión de los símbolos y el tipo de lenguaje asociados a la igualdad, además de los usos o significados.

1. ***Grado Transición (Espiral inicial):***

En todo el libro se observan asociaciones de objetos no matemáticos (como frutas, animales u objetos) (ilustración1) con los números. Aunque no se escribe el signo igual, ni se usan palabras que representan la igualdad, se infiere que usar una figura (que contiene cierta cantidad de un mismo objeto) y asignarle un número a esta, representa una asignación o correspondencia, la cual en la sección 3.2.1 denominamos como uno de los usos actuales de la igualdad, esto es como **indicador de cierta conexión o correspondencia**.

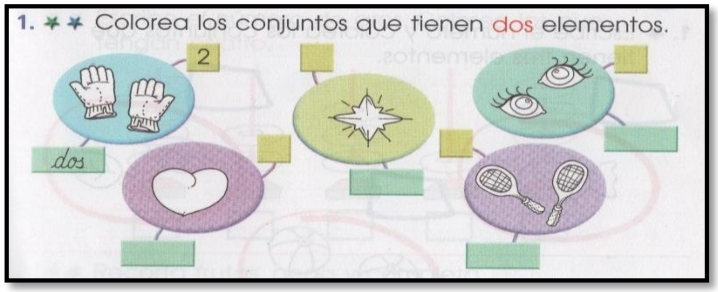


Ilustración 1. Uso como indicador de cierta conexión o correspondencia. Libro Espiral inicial pág. 31.

En el libro se encontró una actividad cuyo objetivo es *reconocer diferentes maneras de descomponer el número 6*. La actividad propuesta consiste en ubicar elementos a izquierda y derecha de un mismo conjunto y solicitar al estudiante escribir el número de elementos que hay en cada lado y la suma de estos dos datos. En la ilustración 2 se muestra el primer ejercicio indicado en el libro.

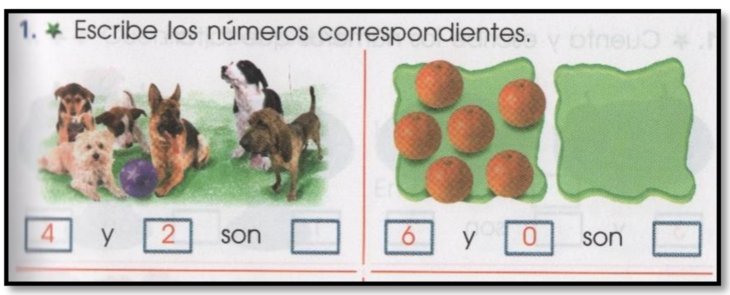


Ilustración 2. Uso como operador y como propuesta de actividad de cálculo (lenguaje retórico). Libro Espiral inicial pág. 31.

Luego se propone la misma actividad para descomponer los números 8 y 9.

De estas actividades se interpreta que la palabra "*son*" alude a la igualdad o puede representar el signo igual en lenguaje retórico, pues corresponde al resultado de sumar la cantidad de elementos en los dos conjuntos. Además, en el libro, luego de estas actividades, bajo el mismo formato, solicitan al estudiante hacer la misma acción, pero ahora usando símbolos (empleando el signo + y el =) (ilustración 3), en estos dos ejercicios se usa el igual como **operador** y como **propuesta de actividad de cálculo**.

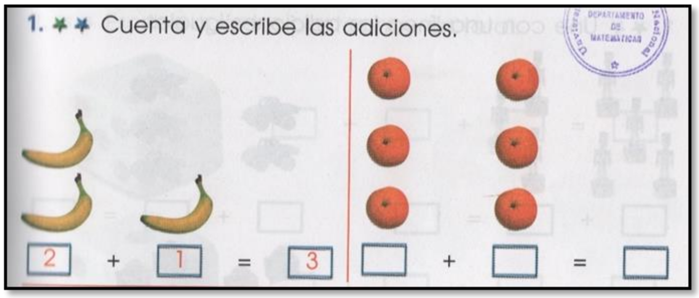


Ilustración 3. Uso como operador y como propuesta de actividad de cálculo (lenguaje simbólico). Libro Espiral inicial pág. 53.

Hay otras actividades donde se usan otras palabras alusivas al igual, por ejemplo, como se lee en la ilustración 4, se le pide al estudiante contar y escribir el resultado en un cuadro, aquí las palabras "*en total hay*" representan el resultado luego de hacer la operación o el conteo (El número que escribe el estudiante es igual al número de elementos que hay dibujados).

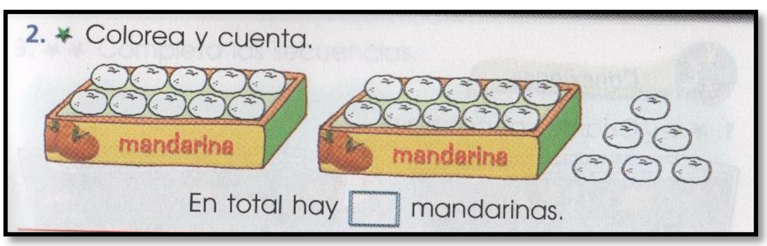


Ilustración 4. Propuesta de actividad de cálculo (lenguaje retórico). Libro Espiral inicial pág. 57.

Al final del libro en la sección de actividades de refuerzo, se encuentra la siguiente tarea (ilustración 5)

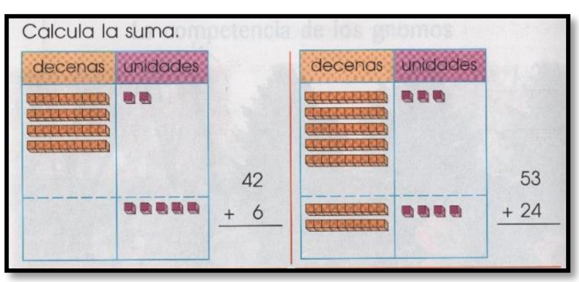


Ilustración 5. Propuesta de actividad de cálculo (lenguaje simbólico). Libro Espiral inicial pág. 95.

Aquí se pide realizar la suma y escribir el resultado bajo la línea larga (línea que representa el igual).

Estos dos últimos ejemplos aluden al uso del igual como **propuesta de actividad de cálculo**, usando lenguaje diferente. En el primero se usa lenguaje retórico y en el segundo simbólico.

2. *Grado primero (Espiral 1):*

En la parte final de la unidad 1, se estudian las relaciones "más … que", "menos… que" y "tantos… como", esta última hace referencia a la noción de igual a través del uso de conjuntos. No se hace uso de algún símbolo específico, salvo el uso del lenguaje retórico. Se podría afirmar que hay uso de la igualdad como **indicador de cierta conexión o correspondencia** (dibujando tantos objetos como), en la ilustración 6 y 7 se puede observar esto.

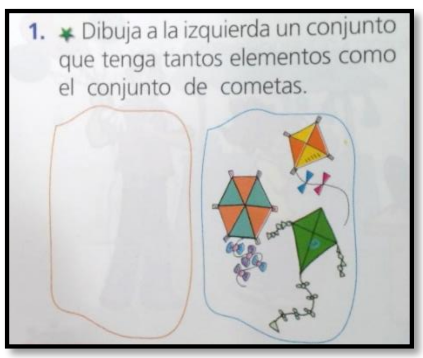


Ilustración 6. Indicador de cierta conexión o correspondencia. Libro Espiral 1. Pág. 32

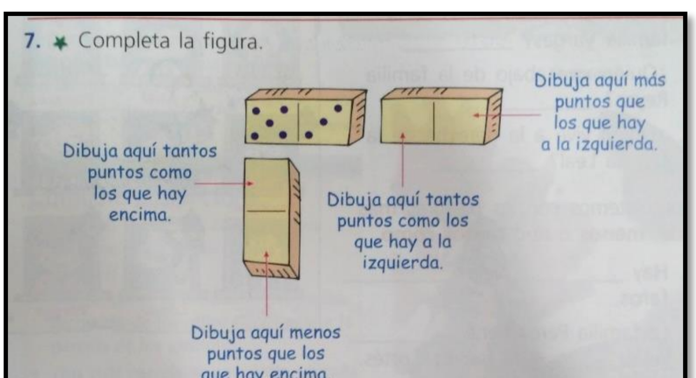


Ilustración 7. Indicador de cierta conexión o correspondencia. Libro Espiral 1. Pág. 33

El signo “=”, aparece hasta la página 46, primero una acotación para indicar que el “=” se usa para comparar números, así:

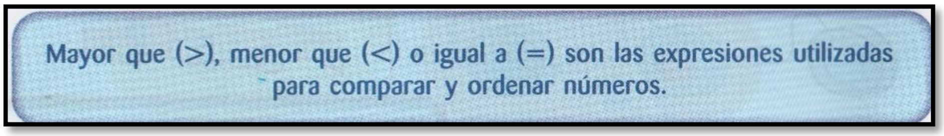

Mayor que (>), menor que (<) o igual a (=) son las expresiones utilizadas para comparar y ordenar números.

Ilustración 8. Libro Espiral 1. Pág. 46.

Luego, en la misma página, se muestra un ejercicio en donde el signo para la igualdad se usa como **identidad estrícta**(ilustración 9)

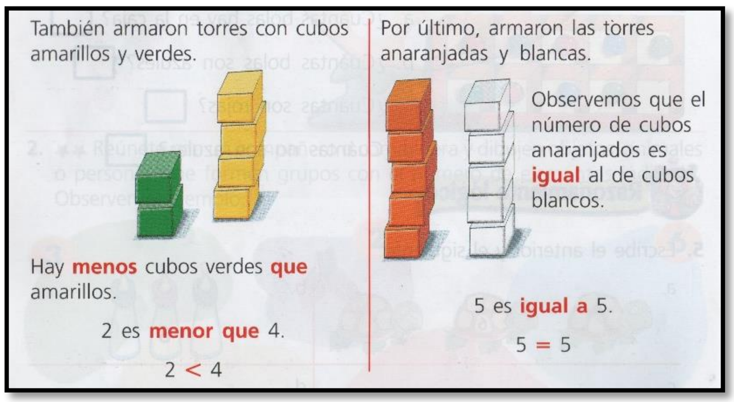


Ilustración 9. Uso del signo igual como identidad estricta. Libro Espiral 1. Pág. 46.

En la página 47, se indica el siguiente ejercicio

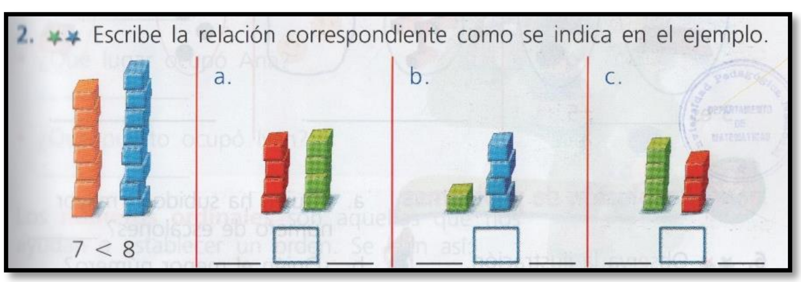


Ilustración 10. Uso como identidad estricta. Espiral 1, pg. 47.

Este corresponde nuevamente, al uso del “=” como una **identidad estricta.**

Más adelante, aparece de nuevo el signo, esta vez para expresar el resultado de operaciones (suma y resta) (uso como **operador**), que se evidencia en la ilustración 10.

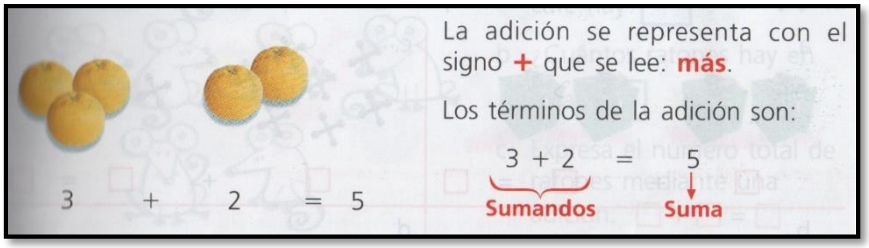


Ilustración 11. Uso como Operador. Libro Espiral 1. Pág. 53.

En la página 97, se usa el "=" como **equivalencia numérica** (ilustración12)

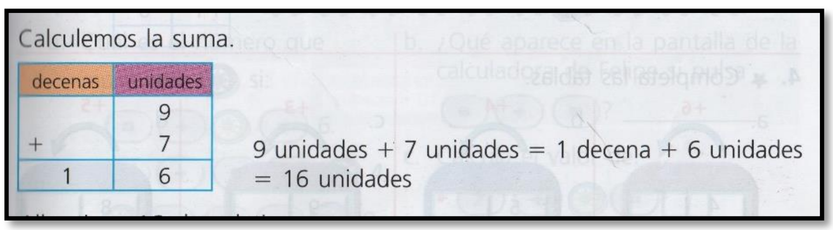


Ilustración 12. Equivalencia numérica. Libro Espiral 1. Pág. 97.

De ahí en adelante el signo "=" es usado para desarrollar ejercicios de operaciones y también ejercicios de descomposición de números en unidades y decenas, (se emplean dos usos como **operador** y como **propuesta de actividad de cálculo**).

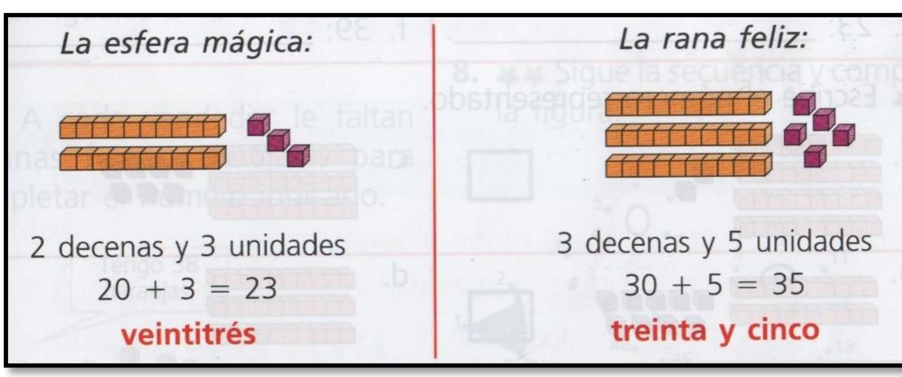


Ilustración 13. Uso como Operador. Libro Espiral 1. Pág. 107.

Finalmente se usa para relacionar unidades de medida como se muestra en la ilustración 14, en este caso se atribuye el uso del igual como **equivalencia numérica.**

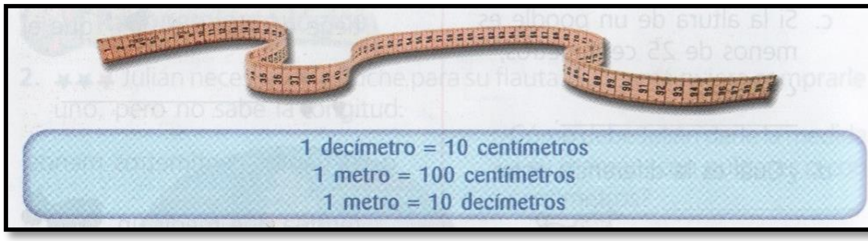
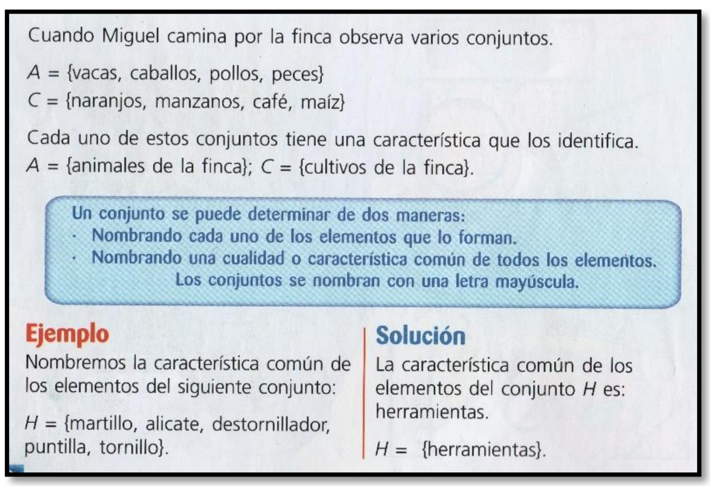


Ilustración 14. Equivalencia numérica. Libro Espiral 1. Pág. 188.

3. *Grado segundo (Espiral 2)*

El primer empleo del "=" se observa en la página 10 (mucho antes que en los dos libros anteriores). Aquí lo usan para denotar conjuntos (ilustración 15), este uso corresponde a **definición de un objeto matemático**.



Cuando Miguel camina por la finca observa varios conjuntos.

A = {vacas, caballos, pollos, peces}
C = {naranjos, manzanos, café, maíz}

Cada uno de estos conjuntos tiene una característica que los identifica.
A = {animales de la finca}; C = {cultivos de la finca}.

Un conjunto se puede determinar de dos maneras:
- **Nombrando cada uno de los elementos que lo forman.**
- **Nombrando una cualidad o característica común de todos los elementos.**

Los conjuntos se nombran con una letra mayúscula.

Ejemplo

Nombremos la característica común de los elementos del siguiente conjunto:

H = {martillo, alicate, destornillador, puntilla, tornillo}.

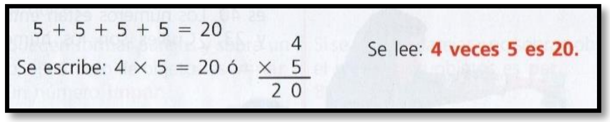
Solución

La característica común de los elementos del conjunto H es: herramientas.

H = {herramientas}.

Ilustración 15. Uso como definición de un objeto matemático. Libro Espiral 2. Pág. 10.

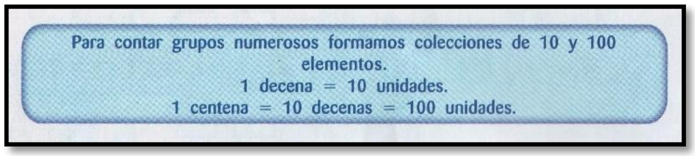
Al igual que en los dos primeros libros, se usa el signo para la igualdad, para escribir operaciones (ilustración 16, las cuatro operaciones básicas), y relaciones entre unidades (ilustración 17), esto es los usos como **operador** y como **equivalencia numérica**.


5 + 5 + 5 + 5 = 20

Se escribe: 4 × 5 = 20 ó $\begin{array}{r} 4 \\ \times\ 5 \\ \hline 20 \end{array}$

Se lee: **4 veces 5 es 20.**

Ilustración 16. Operaciones Básicas. Libro Espiral 2. Pág. 92.

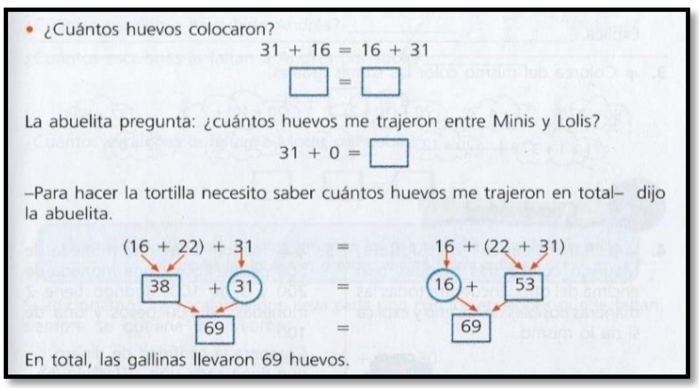

Para contar grupos numerosos formamos colecciones de 10 y 100 elementos.

1 decena = 10 unidades.

1 centena = 10 decenas = 100 unidades.

Ilustración 17. Uso como operador y equivalencia numérica. Libro Espiral 2. Pág. 28.

En este libro también se emplea el signo "=", para mostrar propiedades aritméticas de los números naturales como se muestra en la ilustración 18, aquí se usa el igual como **propuesta de actividad de cálculo**, como **operador** y como **equivalencia numérica**.


• ¿Cuántos huevos colocaron?

31 + 16 = 16 + 31

$\square = \square$

La abuelita pregunta: ¿cuántos huevos me trajeron entre Minis y Lolis?

31 + 0 = $\square$

–Para hacer la tortilla necesito saber cuántos huevos me trajeron en total– dijo la abuelita.

(16 + 22) + 31 = 16 + (22 + 31)

$\boxed{38}$ + 31 = 16 + $\boxed{53}$

$\boxed{69}$ = $\boxed{69}$

En total, las gallinas llevaron 69 huevos.

Ilustración 18. Uso como operador y equivalencia numérica. Libro Espiral 2. Pág. 49.

Al final del libro, en las actividades para el pensamiento métrico, usan el signo de la igualdad para expresar relaciones de perímetro (ilustración 19), el igual se usa como **indicador de cierta conexión o correspondencia**.

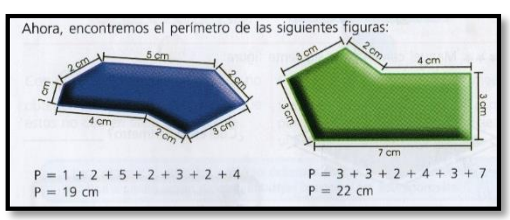


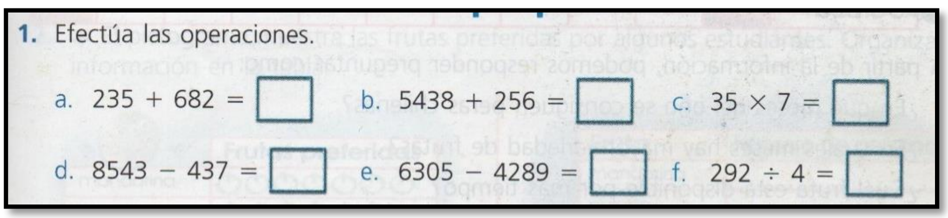
Ilustración 19. Indicador de cierta conexión o correspondencia. Libro Espiral 2. Pág. 189.

Aparece nuevamente el uso como **definición de un objeto matemático**, en el contexto de los conjuntos.

En este libro no se evidencia uso del lenguaje retórico para la igualdad, se usa o bien el signo “=” o la línea horizontal.

4. *Grado Tercero (Espiral 3)*

- Los primeros usos que aparecen son como **operador** y como **propuesta de actividad de cálculo**. En la ilustración 20 se muestra un ejemplo del segundo.



1. Efectúa las operaciones.

a. 235 + 682 = ☐ b. 5438 + 256 = ☐ c. 35 × 7 = ☐

d. 8543 − 437 = ☐ e. 6305 − 4289 = ☐ f. 292 ÷ 4 = ☐

Ilustración 20. Uso como operador y propuesta de actividad de cálculo. Libro Espiral 3. Pág. 9.

- El libro trabaja tablas (ilustración 21) en las que aparecen expresiones aritméticas y en otra columna el resultado. La palabra resultado (lenguaje retórico) puede considerarse como una expresión equivalente al signo igual (uso como **operador**).

Expresión en palabras	Operación	Expresión aritmética	Respuesta
Las ardillas duermen 5 veces más que los caballos.	Multiplicación	5 × 3	15

Ilustración 21. Uso como operador. Libro Espiral 3. Pág.14.

- Al igual que en el libro de segundo, se usa el igual como **definición de un objeto matemático** (ilustración 22) en el contenido relacionado con conjuntos.

a. A = {5, 10, 15, 20, 25, 30, 35} y
B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

Ilustración 22. Uso de la igualdad como definición de un objeto matemático. Libro Espiral 3. Pág. 25.

- Nuevamente se encuentra uso como **equivalencia numérica**, como se muestra en la ilustración 23.

2 h 20 min = <u>140 min</u>

a. 1 h 30 min = ________ min

b. 3 h 45 min = ________ min

c. 3 h 10 min = ________ min

Ilustración 23. Uso como equivalencia numérica. Libro Espiral 3. Pág. 153.

- Se muestran multiplicaciones escritas con notación no lineal (ilustración 24). Aquí la línea debajo de los dos factores representa el igual.

6 × 5 = 30
Factores Producto

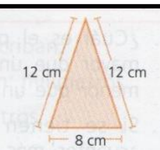
$$\begin{array}{r l} 5 & \rightarrow \text{Multiplicando} \\ \times\ 6 & \rightarrow \text{Multiplicador} \\ \hline 30 & \rightarrow \text{Producto} \end{array}$$
Factores

Ilustración 24. Uso operacional. Libro Espiral 3. Pág. 69.

- Aparece el uso como **indicador de cierta conexión o correspondencia** (ilustración 25).

5 **veces** 6 = 30.

c.

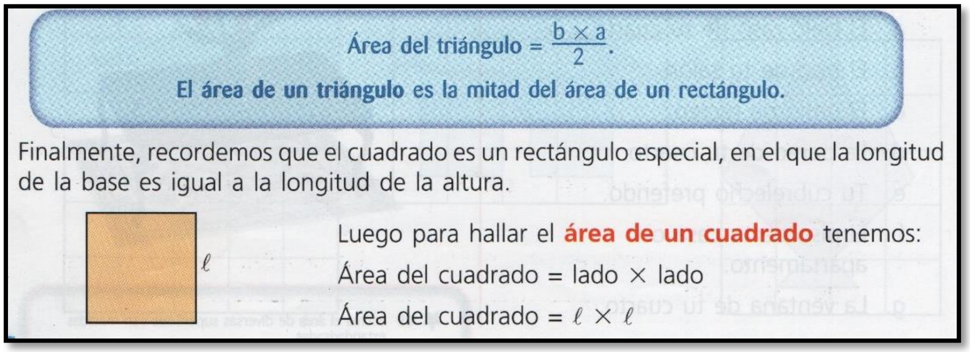


P = 12 cm + 8 cm + 12 cm

Perímetro = 32 cm

Ilustración 25. Uso como indicador de cierta conexión o correspondencia. Libro Espiral 3. Págs. 69 y 158.

- Primer libro en el que aparece el uso del signo igual como expresión de una relación funcional o de dependencia, como se evidencia en la ilustración 26.


Área del triángulo = $\frac{b \times a}{2}$.

El área de un triángulo es la mitad del área de un rectángulo.

Finalmente, recordemos que el cuadrado es un rectángulo especial, en el que la longitud de la base es igual a la longitud de la altura.

Luego para hallar el **área de un cuadrado** tenemos:

Área del cuadrado = lado × lado

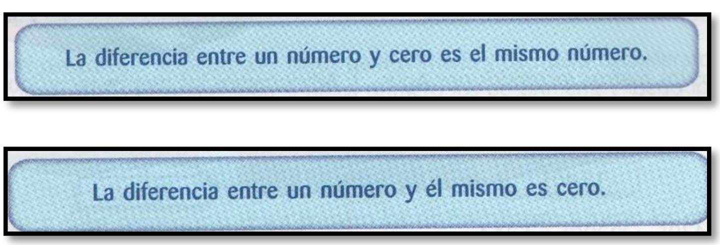
Área del cuadrado = $\ell \times \ell$

Ilustración 26. Uso como expresión de una relación funcional o de dependencia. Libro Espiral 3. Pág. 170

5. ***Grado Cuarto (Espiral 4)***

- Se encuentra nuevamente los siguientes usos:
  - ✓ **Propuesta de actividad de cálculo**
  - ✓ **Operador**
  - ✓ **Equivalencia numérica**
  - ✓ **Indicador de cierta conexión o correspondencia**
  - ✓ **Definición de un objeto matemático**

- Se hace uso de lenguaje retórico como se muestra en la ilustración 27, para el uso de definición de un objeto matemático. En este caso son propiedades de los números ℕ.


La diferencia entre un número y cero es el mismo número.

La diferencia entre un número y él mismo es cero.

Ilustración 27. Uso como definición de objeto matemático (lenguaje retórico). Libro Espiral 4. Pág.38

- Uso del igual como **expresión de una relación funcional o de dependencia** (ilustración 28), en el contenido de Geometría.

Perímetro de la circunferencia = 3,14 × diámetro

$$P = \pi \times D$$

Ilustración 28. Uso como expresión de una relación funcional o de dependencia. Libro Espiral 4. Pág. 206.

- Los usos nuevos que aparecen son los siguientes:
  - ✓ **Identidad estricta** (ilustración 29)
  - ✓ **Separador** (ilustración 30)

$$\begin{aligned} 3 \times 5 &= 5 \times 3 \\ 15 &= 15 \end{aligned}$$

Ilustración 29. Uso como identidad estricta. Libro Espiral 4. Pág. 43.

a. $$\begin{aligned} 75 \times 99 &= 75 \times (100 - 1) \\ &= (75 \times 100) - (75 \times 1) \\ &= 7500 - 75 \\ &= 7425 \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} 467 \times 999 &= 467 \times (1000 - 1) \\ &= (467 \times 1000) - (467 \times 1) \\ &= 467\,000 - 467 \\ &= 466\,533 \end{aligned}$$

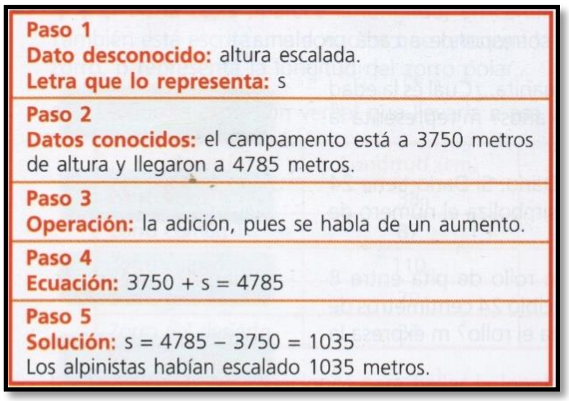
Ilustración 30. Uso como separador. Libro Espiral 4. Pág. 47.

6. <u>Grado Quinto (Espiral 5)</u>

- Se encuentra nuevamente los siguientes usos:
  - ✓ **Propuesta de actividad de cálculo**
  - ✓ **Operador**
  - ✓ **Separador**
  - ✓ **Equivalencia numérica**
  - ✓ **Expresión de una relación funcional o de dependencia**
  - ✓ **Indicador de cierta conexión o correspondencia**
  - ✓ **Definición de un objeto matemático**

- Los usos nuevos que aparecen son los siguientes:
  - ✓ **Expresión de equivalencia condicional (ecuaciones)** (ilustración 31)
  - ✓ **Equivalencia simbólica** (ilustración 32).

Se debe mencionar que solo hasta este grado (quinto), se hace uso del igual en relación con un objeto algebraico como lo son las ecuaciones, en los grados anteriores el uso está centrado en el campo de la aritmética.



Paso 1
Dato desconocido: altura escalada.
Letra que lo representa: s

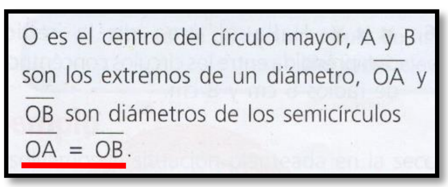
Paso 2
Datos conocidos: el campamento está a 3750 metros de altura y llegaron a 4785 metros.

Paso 3
Operación: la adición, pues se habla de un aumento.

Paso 4
Ecuación: $3750 + s = 4785$

Paso 5
Solución: $s = 4785 - 3750 = 1035$
Los alpinistas habían escalado 1035 metros.

Ilustración 31. Uso como expresión de equivalencia condicional. Libro Espiral 5. Pág.51.



O es el centro del círculo mayor, A y B son los extremos de un diámetro, $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ son diámetros de los semicírculos $\overline{OA} = \overline{OB}$.

Ilustración 32. Uso como expresión de equivalencia simbólica. Libro Espiral 5. Pág. 182.

7. ***<u>Grado Sexto (Espiral 6)</u>***

- Se encuentra nuevamente los siguientes usos:
  - ✓ **Propuesta de actividad de cálculo**
  - ✓ **Operador**
  - ✓ **Separador**
  - ✓ **Expresión de equivalencia condicional (ecuaciones)**

- ✓ **Equivalencia numérica**
- ✓ **Equivalencia simbólica**
- ✓ **Expresión de una relación funcional o de dependencia**
- ✓ **Indicador de cierta conexión o correspondencia**
- ✓ **Definición de un objeto matemático**

Se muestra en la ilustración 33, un ejemplo del igual como expresión de equivalencia condicional (ecuaciones).

Ecuación	¿Qué se busca?	Solución	Comprobación
v − 20 = 9	Un número que al **sustraerle** 20 dé 9.	v = 9 + 20 = 29	**29** − 20 = 9
35 − y = 8	Un número que al **sustraerlo de** 35 dé 8.	y = 35 − 8 = 27	35 − **27** = 8
12 + m = 23	Un número que al **adicionarlo con** 12 dé 23.	m = 23 − 12 = 11	12 + **11** = 23

Ilustración 33. Uso como expresión de equivalencia condicional. Libro Espiral 6. Pág. 94.

8. ***Grado Séptimo (Espiral 7)***

- Se encuentran 9 de los 12 usos del igual (se muestran algunos ejemplos en las ilustraciones 34, 35 y 36). No aparece el uso de identidad estricta, ni como aproximación.

c. $c^2 = c \times c$

d. $b^n \times b^m = b^{n+m}$

Ilustración 34. Uso como equivalencia simbólica. Libro espiral 7. Pág. 330.

1. Halla el valor de x en cada ecuación:

a. $x + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$

b. $x + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$

Ilustración 35. Uso como equivalencia condicional. Libro Espiral 7. Pág. 95.

Toda potencia de un número racional con exponente negativo se puede trasformar en otra potencia, cuya base es el recíproco de la base de la potencia dada y el exponente es positivo. Es decir:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{1}{\frac{a}{b}}\right)^{n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{n}}$$

Ilustración 36. Uso como definición de un objeto matemático. Libro Espiral 7. Pág. 26.

9. *Grado Octavo (Espiral 8)*

- Aparecen 9 de los 12 usos del igual, a continuación, se ejemplifican 7 de ellos, en las ilustraciones 37 - 43. No aparecen los usos de propuesta de actividad de cálculo, identidad estricta ni aproximación.

Interés ganado = (Saldo inicial − Retiro + Depósito) × 1,5%

Los datos en la columna **saldo final** se calculan así:

Saldo final = Interés ganado + (Saldo inicial − Retiro + Depósito)

Ilustración 37. Uso como expresión de una relación funcional. Libro Espiral 8. Pág. 17.

$$\frac{\left(\frac{1}{2}x^3yu^2v^5\right)^2}{\left(3x^{-2}y^{-4}u^3v^{-1}\right)^{-3}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2(x^3)^2(y)^2(u^2)^2(v^5)^2}{(3)^{-3}(x^{-2})^{-3}(y^{-4})^{-3}(u^3)^{-3}(v^{-1})^{-3}}$$

Ilustración 38. Uso como equivalencia simbólica. Libro Espiral 8. Pág. 54.

Colorfoto

$$
\begin{aligned}
c &= 6880 + 330(36)\\
&= 6880 + 11\,880\\
&= 18\,760
\end{aligned}
$$

Ilustración 39. Usos como asignación o correspondencia y separador. Libro Espiral 8. Pág. 332.

b. $2005 = 2005{,}0$

Ilustración 40. Uso como equivalencia por definición o notación. Libro Espiral 8. Pág. 34.

a. $-\dfrac{5}{4} = -1{,}25$

Ilustración 41. Uso como operador. Libro Espiral 8. Pág. 34

$$
\begin{aligned}
&(2^{-5}3^{2})(x^{-10})(y^{15}y^{-6})(u^{-20}u^{10})(v^{-16})\\
&=\left(\frac{1}{2^{5}}3^{2}\right)\left(\frac{1}{x^{10}}\right)(y^{9})(u^{-10})\left(\frac{1}{v^{16}}\right)\\
&=\left(\frac{9}{32}\right)\left(\frac{1}{x^{10}}\right)(y^{9})\left(\frac{1}{u^{10}}\right)\left(\frac{1}{v^{16}}\right) = \frac{9y^{9}}{32x^{10}u^{10}v^{16}}
\end{aligned}
$$

Ilustración 42. Uso como separador y equivalencia simbólico. Libro Espiral 8. Pág. 54.

Enunciado

Determinemos si cada una de las siguientes expresiones es una ecuación lineal con una incógnita con coeficiente entero o no lo es. Justifiquemos las respuestas.

a. $3 + x$

b. $\frac{1}{2}x = 3$

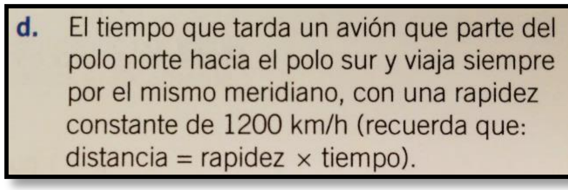
c. $x^{2} + 3 = 1 \times 5$

d. $5x - 1 = \frac{4}{3}$

Ilustración 43. Uso como equivalencia condicional. Libro Espiral 8. Pág. 79.

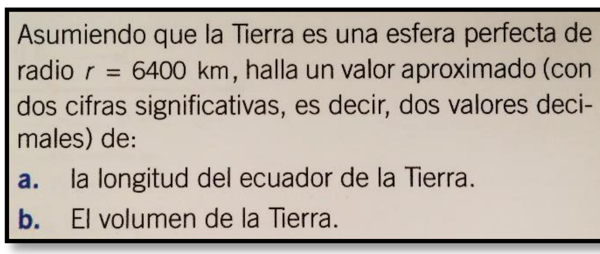
10. <u>Grado Noveno (Espiral 9)</u>

- Aparecen 9 de los 12 usos del igual, algunos se muestran en las ilustraciones 44 - 50. No aparecen los usos de propuesta de actividad de cálculo, identidad estricta y aproximación.



d. El tiempo que tarda un avión que parte del polo norte hacia el polo sur y viaja siempre por el mismo meridiano, con una rapidez constante de 1200 km/h (recuerda que: distancia = rapidez × tiempo).

Ilustración 44. Uso como expresión de una relación funcional. Libro Espiral 9. Pág. 9.

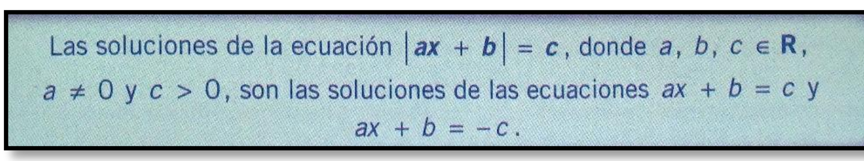


Asumiendo que la Tierra es una esfera perfecta de radio $r = 6400$ km, halla un valor aproximado (con dos cifras significativas, es decir, dos valores decimales) de:

a. la longitud del ecuador de la Tierra.

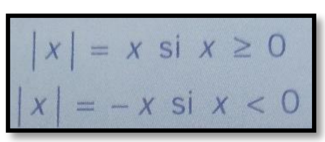
b. El volumen de la Tierra.

Ilustración 45. Uso como indicador de cierta conexión o correspondencia. Libro Espiral 9. Pág. 9.



Las soluciones de la ecuación $|\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}| = \boldsymbol{c}$, donde $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ y $c > 0$, son las soluciones de las ecuaciones $ax + b = c$ y $ax + b = -c$.

Ilustración 46. Uso como equivalencia condicional. Libro Espiral 9. Pág. 11.



$|x| = x$ si $x \geq 0$

$|x| = -x$ si $x < 0$

Ilustración 47. Uso como definición de un objeto. Libro Espiral 9. Pág. 10.

$-2 = (-2) \times 10^0$

$523{,}1416 = 5 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 1 \times 10^{-3} + 6 \times 10^{-4}$

Ilustración 48. Uso como equivalencia por definición o notación. Libro Espiral 9. Pág. 16.

a. $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}} = \dfrac{(\sqrt{2}+1)\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,\sqrt{3}}$

$= \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3}$

Ilustración 49. Usos como Equivalencia numérica y separador. Libro Espiral 9. Pág. 26.

Enunciado

La Tierra puede considerarse como una esfera de 6400 km de radio, aproximadamente. ¿Cuál es la distancia entre el ecuador terrestre y un punto situado a 42° latitud norte?

Solución

Un ángulo de 42° equivale a $\frac{7}{30}\pi$ rad, entonces la distancia entre el ecuador y un punto a 42° de latitud norte estará dada por la longitud de arco (M) correspondiente.

$M = \frac{7\pi}{30}\ 6400\ \text{km} = 4691\ \text{km}$, aproximadamente.

Ilustración 50. Uso como indicador de cierta conexión o correspondencia. Libro Espiral 9. Pág. 15.

11. <u>Grado Décimo (Espiral 10)</u>

- Nuevamente, no aparecen los usos del igual como propuesta de actividad de cálculo, identidad estricta y aproximación. Se muestran ejemplos de los usos encontrados (ilustraciones 51 - 59).

Luego, $14{,}36° = 14°21{,}6'$, y $21{,}6' = 21' + 0{,}6'$.

Ilustración 51. Uso como equivalencia por definición o notación. Libro Espiral 10. Pág. 13.

$\sqrt{y-1} = x$ definida por todo $y \geq 1$

Ilustración 52. Uso como relación funcional o dependencia. Libro Espiral 10. Pág. 171.

$$m \measuredangle C = 90°$$

Ilustración 53. Uso como indicador de cierta conexión o correspondencia. Libro Espiral 9. Pág. 18.

En resumen, para cada ángulo agudo de un triángulo rectángulo con ángulo recto en C, se definen las siguientes razones trigonométricas:

$$\operatorname{sen} A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c} \qquad \csc A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{a}$$

$$\cos A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c} \qquad \sec A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{c}{b}$$

$$\tan A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b} \qquad \cot A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{b}{a}$$

Ilustración 54. Uso como definición de un objeto matemático. Libro Espiral 10. Pág. 22.

Verifiquemos que la expresión $\tan^2 A + 1 = \frac{\sec A}{\cos A}$, es una identidad.

Ilustración 55. Uso como equivalencia simbólica. Libro Espiral 10. Pág. 29

$$\begin{aligned}\sqrt{25 - b^2} &= \sqrt{25 - (5\cos A)^2}\\ &= \sqrt{25 - 25\cos^2 A}\\ &= \sqrt{25(1 - \cos^2 A)}\\ &= 5\sqrt{1 - \cos^2 A}\\ &= 5 \operatorname{sen} A\end{aligned}$$

Ilustración 56. Uso como separador. Libro Espiral 10. Pág. 31.

$$\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4} \text{ rad.}$$

Ilustración 57. Uso como operador. Libro Espiral 10. Pág. 46.

$$\frac{|2-(-2)|}{2} = \frac{|4|}{2} = 2$$

Ilustración 58. Uso como operador. Libro Espiral 10. Pág. 65.

a. $3x + 8 = -5$

b. $-9y - 12 = 26$

c. $4z + 15 = -3z + 34$

Ilustración 59. Uso como expresión de una equivalencia condicional. Libro Espiral 10. Pág. 95.

12. <u>Grado Once (Espiral 11)</u>

- En las ilustraciones 60 a 68 se muestran algunos de los usos encontrados en este libro para la igualdad.

Los valores de R y r están dados por las funciones $g(x)$ y $f(x)$, respectivamente. El volumen se calcula con la expresión $V = \pi \int_a^b [g(x) - f(x)]^2\, dx$.

Ilustración 60. Uso como definición de un objeto Matemático. Libro Espiral 11. Pág. 319

$$\begin{aligned}\left\{x \,\middle|\, \frac{x+13}{x-9} < 0\right\} &= \{x \mid (x+13) > 0,\ \text{y},\ (x-9) < 0\} \cup \{x \mid (x+13) < 0,\ \text{y},\ (x-9) > 0\}\\ &= \{x \mid x > -13,\ \text{y},\ x < 9\} \cup \{x \mid x < -13,\ \text{y},\ x > 9\}\\ &= \{x \mid -13 < x < 9\} \cup \varnothing\\ &= \{x \mid -13 < x < 9\}\end{aligned}$$

Ilustración 61. Usos como equivalencia simbólica y separador. Libro Espiral 11. Pág. 20.

$$\begin{aligned}(-1 \times -1) + (-1 \times 1) &= -1 \times (-1 + 1)\\ &= -1 \times 0\\ &= 0\end{aligned}$$

Ilustración 62. Uso como separador y operador. Libro Espiral 11. Pág. 15.

$$\frac{2}{5}x + 4 = -8$$

$$\left(\frac{2}{5}x + 4\right) + (-4) = -8 + (-4)$$

$$\frac{2}{5}x + (4 + -4) = -12$$

$$\frac{2}{5}x + 0 = -12$$

$$\frac{2}{5}x = -12$$

$$\left(\frac{2}{5}x\right)\left(\frac{5}{2}\right) = (-12)\left(\frac{5}{2}\right)$$

Ilustración 63. Uso como expresión de una equivalencia condicional. Libro Espiral 11. Pág. 11.

$$4\left(\frac{7}{8} + 6,51\right) = 4\left(\frac{7}{8}\right) + 4\,(6,51)$$

Ilustración 64. Uso como equivalencia numérica. Libro Espiral 11. Pág. 12.

c. $f(x) = 2$, y, $g(x) = \sqrt{4}$

d. $f(x) = \frac{3x^3}{3}$, y, $g(x) = x^3$

e. $f(x) = \sqrt{x^2}$, y, $g(x) = |x|$

Ilustración 65. Expresión de una relación funcional o dependencia. Libro Espiral 11. Pág. 48.

Escribe los cinco primeros términos y el término general de una sucesión aritmética usando los datos que se dan en cada caso.

a. $a = 7,\ d = 3$ **b.** $a = b\ \ d = c$

c. $a = -11,\ d = \frac{2}{3}$ **d.** $a = 9,\ d = -2$

Ilustración 66. Uso como indicador de cierta conexión o correspondencia. Libro Espiral 11. Pág. 110.

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{x^2 - x}{x + 1} = \frac{\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} (x^2 - x)}{\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} (x + 1)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} x^2 - \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} x}{\frac{3}{2}}$$

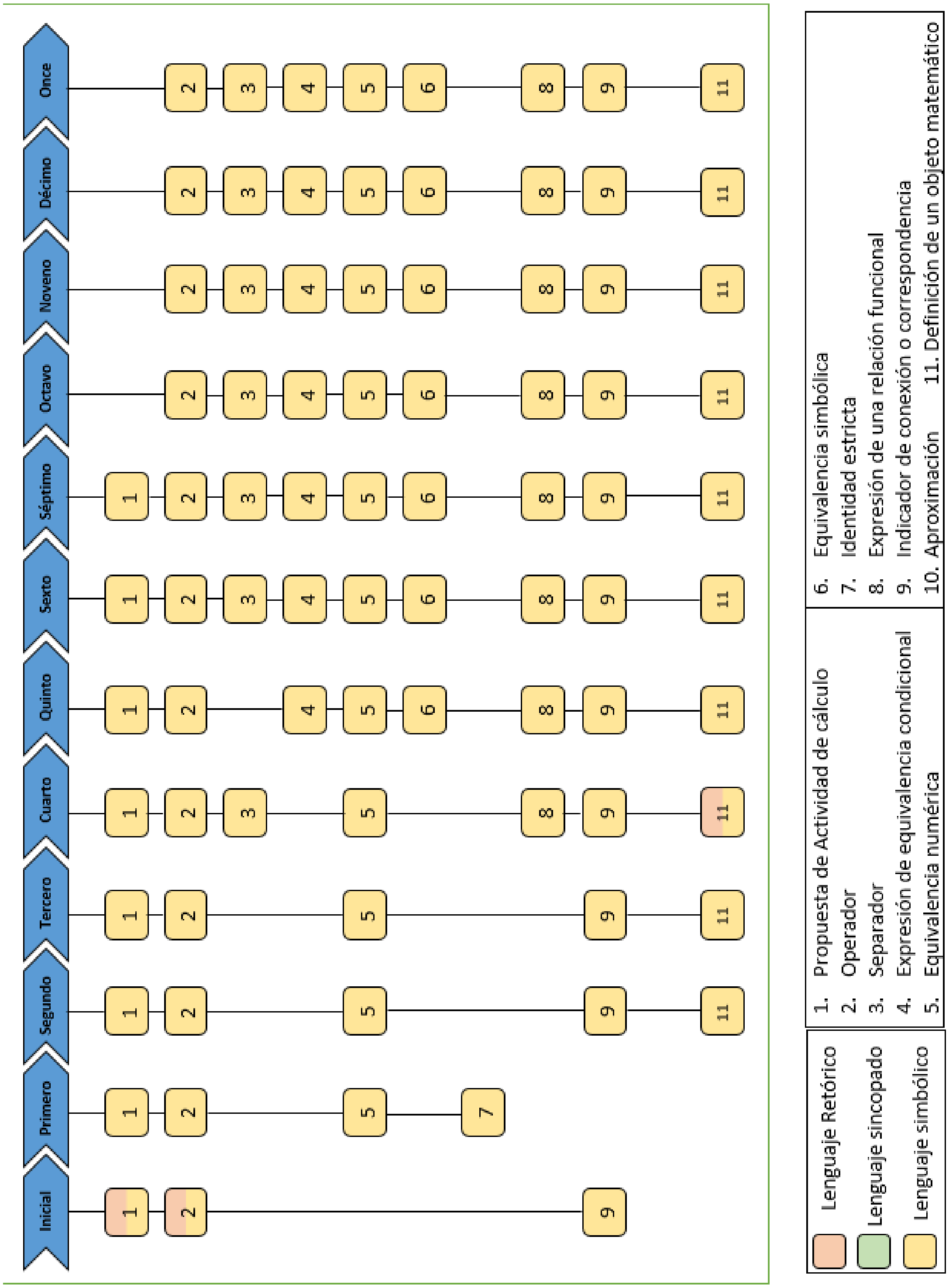
$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{6}$$

Ilustración 67. Uso como expresión de una equivalencia simbólica. Libro Espiral 11. Pág. 130.

$$2^{-1} \ln 2 = \frac{1}{2} \ln 2$$

Ilustración 68. Uso como equivalencia por definición o notación. Libro Espiral 11. Pág. 251.

En el siguiente esquema se muestran los usos y el tipo de lenguaje asociado a la igualdad en los 12 libros de la serie Espiral.



Esquema 2. Usos y lenguaje asociado a la igualdad en Serie de libros Espiral.

4.2. Revisión de la letra en libros de texto

1. ***Grados Transición y Primero (Espiral Inicial y 1)***

- Estos dos libros solo presentan el manejo de la letra como incógnita, a través de problemas. La letra está representada por los recuadros, por ejemplo, en la ilustración 49, la representación simbólica equivalente sería $x - y = z$.

Ilustración 69. Uso como incógnita. Libro Espiral inicial. Pág. 63.

2. ***Grado Segundo (Espiral 2)***

- Para el grado segundo, la serie continúa trabajando en la resolución de problemas. Como ya se mencionó aquí la letra está representada en lenguaje retórico y su uso es **como incógnita**. Se muestra un ejemplo en la ilustración 50, en este caso la letra estaría representada por "alimentos".

Ilustración 70 Letra como incógnita. Libro Espiral. Pág. 15.

3. Grado Tercero (Espiral 3)

- En la ilustración 71 se muestra un ejemplo asociado, de manera implícita, a la **letra como incógnita**, usando lenguaje retórico. La incógnita en este caso está representada por la expresión *Cuántas páginas* (cantidad de páginas).

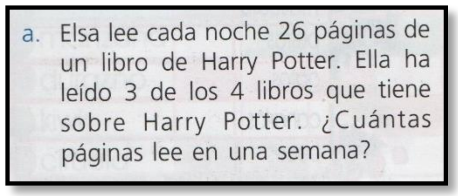
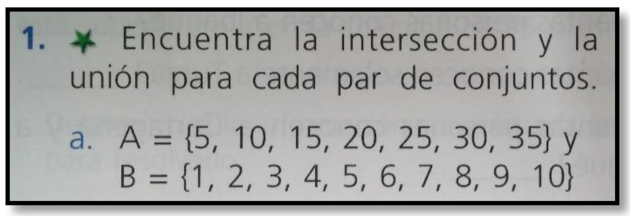
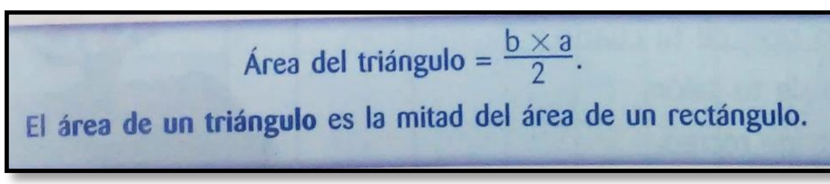

a. Elsa lee cada noche 26 páginas de un libro de Harry Potter. Ella ha leído 3 de los 4 libros que tiene sobre Harry Potter. ¿Cuántas páginas lee en una semana?

Ilustración 71. Letra como incógnita. Libro Espiral 3. Pág. 12.


1. Encuentra la intersección y la unión para cada par de conjuntos.

a. A = {5, 10, 15, 20, 25, 30, 35} y B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

Ilustración 72. Letra como objeto. Libro Espiral 3. Pág. 25.


Área del triángulo = $\frac{b \times a}{2}$.

El área de un triángulo es la mitad del área de un rectángulo.

Ilustración 73. Letra como objeto, como número generalizado y como variable. Libro Espiral 3. Pág.170.

En la ilustración 72, la letra *A*, representa un objeto matemático, un conjunto. Y en la ilustración 73, *Área del triángulo*, representa un objeto, mientras que las letras *b* y *a* representan número generalizados porque cada letra puede tomar valores diferentes, y también representan variables por que indican una relación entre sí.

4. Grado Cuarto (Espiral 4)

- Aparecen 4 de los 5 usos:
  - Letra como número generalizado

- Letra como incógnita
- Letra como Objeto
- Letra como variable

A continuación, se muestra un ejemplo de cada uno.

- En la ilustración 74, se muestra un ejemplo de letra como número generalizado. En el ejercicio se pide a los estudiantes ubicar en el recuadro un número que cumpla la desigualdad. Existen varios números que satisfacen estas condiciones. Y aunque no se muestra una letra como tal, el recuadro hace su función, es un símbolo que la está representando.

a. $457\ 600 < \square < 458\ 000$

b. $30\ 480\ 200 > \square > 30\ 480\ 100$

c. $25\ 367\ 670 < \square < 25\ 368\ 670$

Ilustración 74. Letra como número generalizado. Libro Espira. Pág. 19.

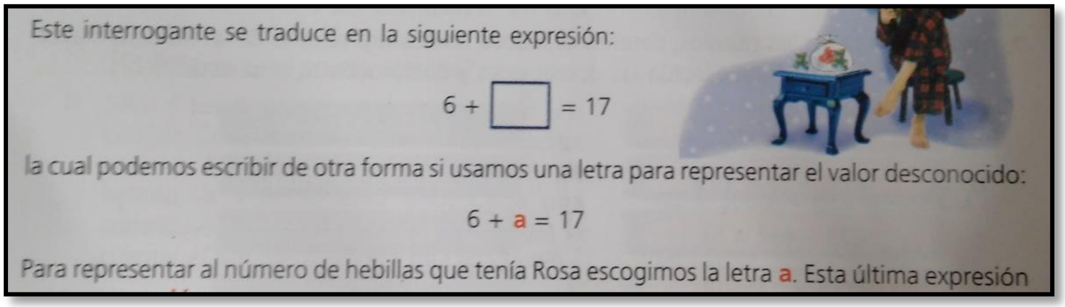
- En la ilustración 75, Se pueden representar 3 tipos de usos. *Área del rombo* es un ejemplo de letra como objeto en lenguaje retórico, mientras que *diagonal mayor*, *diagonal menor* (lenguaje retórico), D y *d* (lenguaje simbólico) representan letras como números generalizados, Sin embargo, como estas mismas representan una relación, entonces se pueden tratar también con el uso de letras como variables.

$$\text{Área del rombo} = \frac{\text{Área del rectángulo}}{2} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

Como la base y la altura del rectángulo corresponden a las diagonales del rombo, entonces:

$$\text{Área del rombo} = \frac{\text{diagonal mayor} \times \text{diagonal menor}}{2} = \frac{D \times d}{2}$$

Ilustración 75. Letra como número generalizado, letra como variable y como objeto. Libro Espiral. Pág. 200.



Este interrogante se traduce en la siguiente expresión:

$6 + \square = 17$

la cual podemos escribir de otra forma si usamos una letra para representar el valor desconocido:

$6 + a = 17$

Para representar al número de hebillas que tenía Rosa escogimos la letra a. Esta última expresión

Ilustración 76. Letra como incógnita. Libro Espiral 4. Pág. 46

Si A y B son dos conjuntos, la unión A ∪ B es el conjunto formado por todos los elementos de A y todos los de B.

Ilustración 77. Letra como objeto. Libro Espiral 4. Pág. 73.

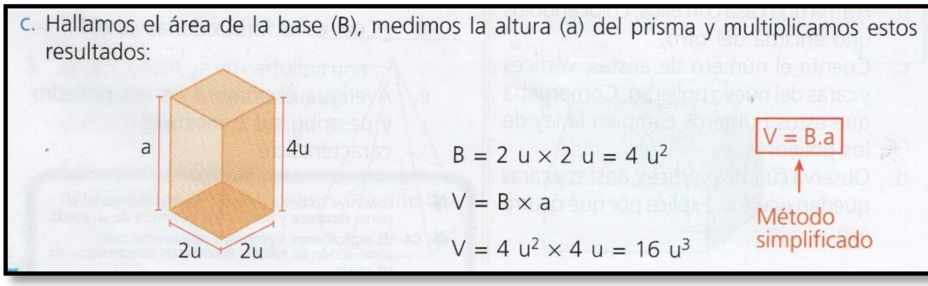
5. ***Grado Quinto (Espiral 5)***

- Se encuentran los siguientes usos (ilustraciones 78 a 81 de cada uno respectivamente):
    - Letra como incógnita
    - Letra como objeto
    - Letra como número generalizado
    - Letra como variable

Ecuación	¿Qué se busca?	Solución	Comprobación
$v - 20 = 9$	Un número que al **sustraerle** 20 dé 9.	$v = 9 + 20 = 29$	**29** − 20 = 9
$35 - y = 8$	Un número que al **sustraerlo de** 35 dé 8.	$y = 35 - 8 = 27$	35 − **27** = 8
$12 + m = 23$	Un número que al **adicionarlo con** 12 dé 23.	$m = 23 - 12 = 11$	12 + **11** = 23

Ilustración 78. Letra como incógnita. Libro Espiral 5. Pág. 47.

- En la ilustración 79, *V*, *B* y *a* representan letra como números generalizados, pero ya que también representan una relación entonces también se les puede atribuir uso como variable. Y la letra *u*, es letra como objeto.


c. Hallamos el área de la base (B), medimos la altura (a) del prisma y multiplicamos estos resultados:

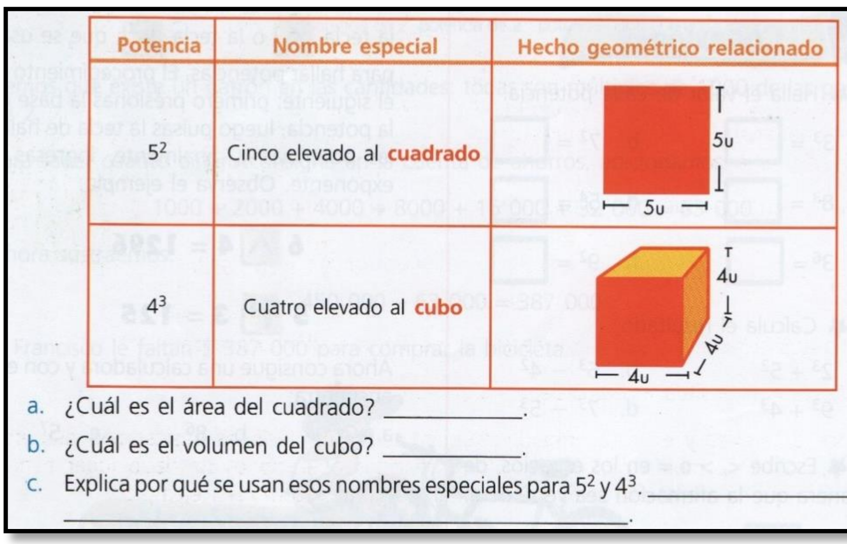
$B = 2\ u \times 2\ u = 4\ u^2$

$V = B \times a$

$V = 4\ u^2 \times 4\ u = 16\ u^3$

Ilustración 79. Letra como objeto y como número generalizado y letras como variables. Libro Espiral 5. Pág. 186.

En la ilustración 80, la letra u está representando un objeto, unidades.



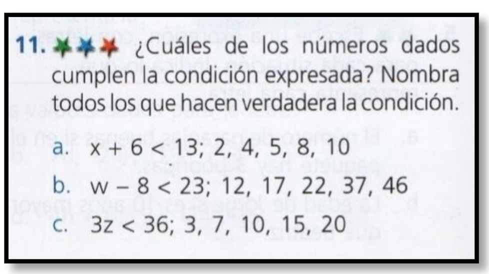
Potencia	Nombre especial	Hecho geométrico relacionado
5^2	Cinco elevado al **cuadrado**	5u, 5u
4^3	Cuatro elevado al **cubo**	4u, 4u, 4u

a. ¿Cuál es el área del cuadrado? ____________.

b. ¿Cuál es el volumen del cubo? __________.

c. Explica por qué se usan esos nombres especiales para 5^2 y 4^3. ____________________.

Ilustración 80. Letra como objeto. Libro Espiral 5. Pág. 58.


11. ¿Cuáles de los números dados cumplen la condición expresada? Nombra todos los que hacen verdadera la condición.

a. $x + 6 < 13$; 2, 4, 5, 8, 10

b. $w - 8 < 23$; 12, 17, 22, 37, 46

c. $3z < 36$; 3, 7, 10, 15, 20

Ilustración 81. Letra como número generalizado. Libro Espiral 5. Pág. 54.

6. ***Grado Sexto (Espiral 6)***

En el libro correspondiente al primer grado de básica secundaría se encuentran 4 de los usos seleccionados para la letra:

- Letras como objetos
- Letra como incógnita
- Letras número generalizado
- Letras como variables

A continuación, se muestra un ejemplo para cada una, en el orden respectivo

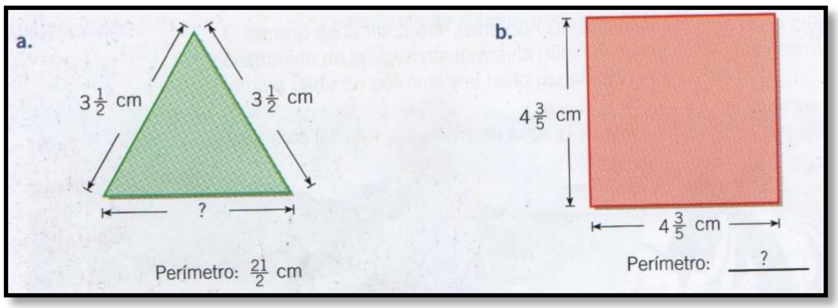


Ilustración 82. Letra como objeto, lenguaje retórico. Libro Espiral 6. Pág. 174

a. $r + 720 = 1045$
b. $t - 348 = 6794$
c. $63\,340 - m = 42\,591$
d. $g + 5891 = 12\,548$
e. $y - 6985 = 4391$
f. $125\,000 - z = 92\,896$

Ilustración 83. Letra como incógnita. Libro Espiral 6. Pág. 35.

15. ¿Cuáles números puedes escribir en el espacio en blanco, para que exista un número natural que sea solución de la ecuación? Explica tu respuesta.

a. $2391 - q = \boxed{}$

b. $s + 643 = \boxed{}$

Ilustración 84. Letra como número generalizado. Libro Espiral. Pág. 25

En la ilustración 84, el recuadro y las letras *q* y *s*, representan números generalizados; aunque, después de ubicar algún número en los recuadros, las letras *q* y *s* pasan a ser incógnitas específicas.

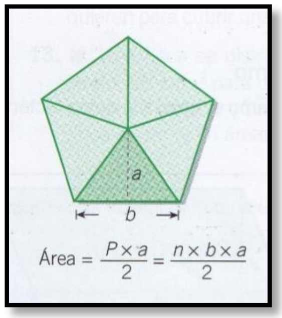
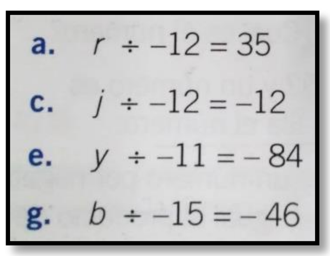


Ilustración 85. Letra como objeto, letra como número generalizado y letra como variable. Libro Espiral. Pág., 254.

7. Grado Séptimo (Espiral 7)

- Se encontraron los siguientes usos con sus respectivos ejemplos (Ilustraciones 86 a 90).
  - Letra como incógnita
  - Letra como variable
  - Letra como objeto
  - Letra como número generalizado
  - Es el primero libro en el que aparece la **letra evaluada**



a. $r \div -12 = 35$

c. $j \div -12 = -12$

e. $y \div -11 = -84$

g. $b \div -15 = -46$

Ilustración 86. Letra como incógnita. Libro Espiral 7. Pág. 57.

Para cada expresión variable, escribe 3 ejemplos y determina si es válida.

a. El cociente de dos potencias de la misma base es igual a la potencia de la misma base con exponente igual a la diferencia de los exponentes de las potencias originales.

b. $-(a-b)=-a+b$

c. $\dfrac{(6b-c)}{3}=2b-c$

Ilustración 87. Letra como variable. Libro Espiral 7. Pág. 331.

Enunciado

Hallemos el área del triángulo de la figura 6.42.

Solución

Según lo anterior, para hallar el área del triángulo nos falta conocer su **altura**, es decir, la longitud del segmento *CE* que notamos como *m* en la figura.

a. Hallemos el valor de la altura.
En el triángulo rectángulo *CEB*, los segmentos *CE* y *EB* son los catetos y *CB* es la hipotenusa.
Usando el teorema de Pitágoras y con los datos que tenemos, escribimos la igualdad:

$$6^2 = m^2 + 3^2$$

$$36 = m^2 + 9$$

Si restamos 9 de 36 obtenemos el valor de m^2:

$$m^2 = 36 - 9 = 25$$

Entonces m es la raíz cuadrada de 25; $m = 5$.

Ilustración 88. Letra como objeto. Libro Espiral 7. Pág. 260.

Física

$W = mg$

El peso W es igual al producto de la masa por la gravedad.

Química

$\mathrm{pH} = -\log\ [\mathrm{H}^{1+}]$

El pH (grado de acidez) de una solución es el opuesto del logaritmo concentración del ion hidrógeno.

Biología

$s < v$

Cuando el área de superficie s es menor que el volumen v de una célula, ésta se divide.

Ilustración 89. Letra como número generalizado, como objeto y como variable. Libro Espiral 7. Pág. 31

14. Si $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$, $z = \frac{1}{4}$. Calcula las siguientes expresiones:

a. $x + y$

b. $y - x$

c. $x + y + z$

d. $x - y + z$

e. $x + y - z$

f. $y + y + y$

Ilustración 90. Letra evaluada. Libro Espiral 7. Pág. 97.

8. Grado Octavo (Espiral 8)

Se encuentran 4 de los usos seleccionados para la letra:

- Letras como objetos
- Letra como incógnita
- Letras número generalizado
- Letras como variables

En la ilustración 90 y 91 se muestran ejemplos de la letra como número generalizado.

$2k$, donde $k \in \mathbf{Z}$.

Ilustración 91. Letra como número generalizado. Libro Espiral 8. Pág. 19.

$$\left(\frac{9}{32}\right)\left(\frac{1}{x^{10}}\right)(y^{9})\left(\frac{1}{u^{10}}\right)\left(\frac{1}{v^{16}}\right) = \frac{9y^{9}}{32x^{10}u^{10}v^{16}}$$

Ilustración 92. Letra como número generalizado. Libro Espiral 8. Pág. 54

En la ilustración 93 la letra π, representa un objeto. Y área del circulo y la letra r representan números generalizados y variables a la vez porque indican una relación

$$\pi = \frac{\text{área del círculo}}{r^2}$$

Ilustración 93. Letra como número generalizado. Libro Espiral 8. Pág. 21.

El tiempo que tarda un avión que parte del polo norte hacia el polo sur y viaja siempre por el mismo meridiano, con una rapidez constante de 1200 km/h (recuerda que: distancia = rapidez × tiempo).

Ilustración 94. Letra como variable. Lenguaje retórico. Libro Espiral 8. Pág. 9

9. Grado Noveno (Espiral 9)

Se encontraron todos los usos seleccionados para la letra. A continuación, se muestran los ejemplos para cada uno.

Enunciado

Para la ecuación $|3x + 1| = 7$, escribamos la pregunta que representa, analicemos gráficamente y encontremos las soluciones.

Ilustración 95. Letra como número generalizado. Libro Espiral 9. Pág. 11.

$$3x + 1 = -7$$

$$3x + 1 + (-1) = -7 + (-1)$$

$$3x = -8$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)3x = \frac{1}{3}(-8)$$

$$1x = -\frac{8}{3}$$

$$x = -\frac{8}{3}$$

Ilustración 96. Letra como incógnita. Libro Espiral. Pág. 11.

En dos cuentas de ahorro se depositan, en total, $ 1 000 000. En las cuentas pagan el 7% y el 6% de interés anual. Al finalizar el año, el interés generado por las dos cuentas es $ 62 500. ¿Cuánto se invirtió en cada cuenta?

Ilustración 97. Letra como incógnita. Lenguaje retórico. Libro Espiral 9. Pág. 89.

$$y(t) = -4{,}9t^2 + 19{,}2t + 24.$$

Ilustración 98. Letra como variable. Libro Espiral 9. Pág. 137.

Ejemplo 2

Enunciado

Hallemos los cinco primeros términos de la sucesión $\{n^2 - 3\}$.

Solución

Si $n = 1$, $a_1 = 1^2 - 3 = 1 - 3 = -2$

Si $n = 2$, $a_2 = 2^2 - 3 = 4 - 3 = 1$

Si $n = 3$, $a_3 = 3^2 - 3 = 9 - 3 = 6$

Si $n = 4$, $a_4 = 4^2 - 3 = 16 - 3 = 13$

Si $n = 5$, $a_5 = 5^2 - 3 = 25 - 3 = 22$

Así tenemos que los cinco primeros términos de esta sucesión son: $-2, 1, 6, 13, 22$. ■

Ilustración 99. Letra evaluada. Libro Espiral 9. Pág. 151.

$$V(\text{pirámide rectangular}) = \frac{B \times h}{3}.$$

Ilustración 100. Letra como objeto, como variable, y como número generalizado. Libro Espiral 9. Pág. 236.

10. Grado Décimo (Espiral 10)

Se encontraron 4 de los 5 usos seleccionados. El único que no aparece es letra evaluada. En las ilustraciones 101 – 104 se muestran los ejemplos asociados a cada uso.

a. $3x + 8 = -5$

b. $-9y - 12 = 26$

Ilustración 101. Letra como incógnita. Libro Espiral 10.

a. $f(x) = x + 2$

b. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

c. $f(x) = 2^x$

d. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

.

Ilustración 102. Letra como variable. Libro Espiral 10. Pág. 46.

$$\sqrt{x-1} = y \text{ si } x \geq 1$$

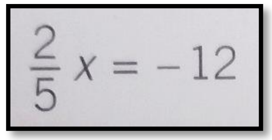
Ilustración 103. Letra como número generalizado. Libro Espiral 10. Pág. 65.

$$\vec{v} = \left\langle \frac{5}{\sqrt{26}}, \frac{1}{\sqrt{26}} \right\rangle$$

Ilustración 104. Letra como objeto. Libro Espiral 10. Pág. 173.

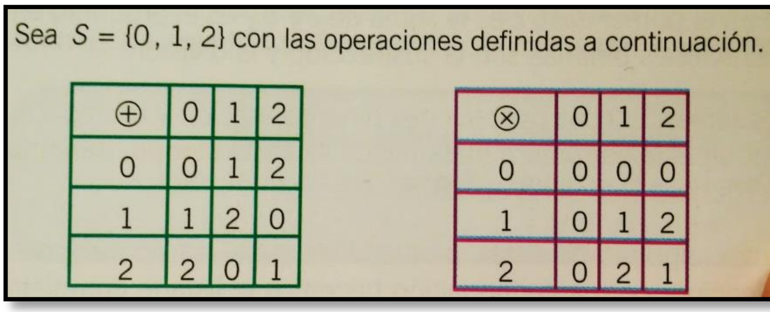
11. Grado Once (Espiral 11)

Se encontraron también 4 de los 5 usos seleccionados. Nuevamente el único que no aparece es letra evaluada.



$$\frac{2}{5}x = -12$$

Ilustración 105. Letra como incógnita. Libro Espiral 11. Pág. 11.

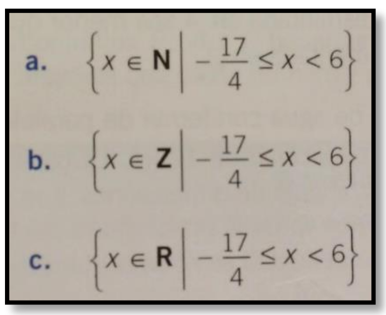


Sea $S = \{0, 1, 2\}$ con las operaciones definidas a continuación.

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\otimes$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Ilustración 106. Letra como objeto. Libro Espiral 11. Pág. 12.

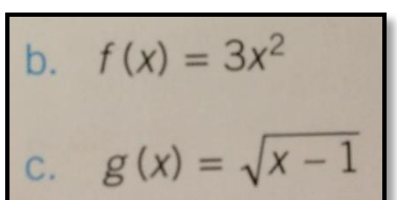


a. $\left\{x \in \mathbf{N} \middle| -\frac{17}{4} \leq x < 6\right\}$

b. $\left\{x \in \mathbf{Z} \middle| -\frac{17}{4} \leq x < 6\right\}$

c. $\left\{x \in \mathbf{R} \middle| -\frac{17}{4} \leq x < 6\right\}$

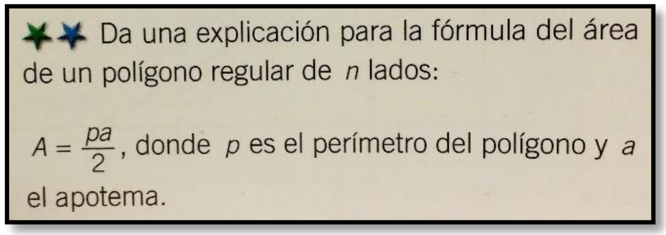
Ilustración 107. Letra como número generalizado. Libro Espiral 11. Pág. 21.



b. $f(x) = 3x^2$

c. $g(x) = \sqrt{x-1}$

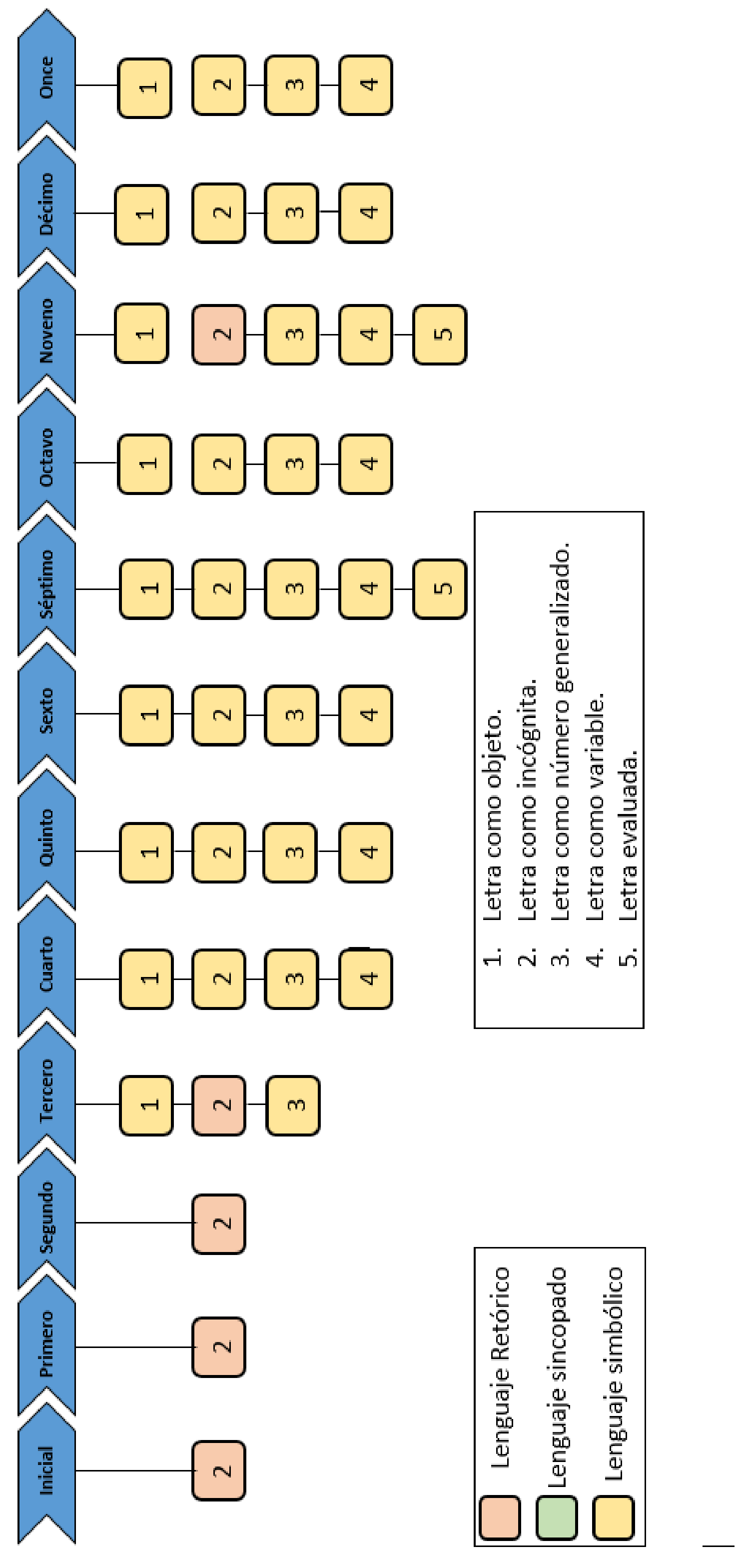
Ilustración 108. Letra como variable. Libro Espiral 11. Pág. 44.


Da una explicación para la fórmula del área de un polígono regular de n lados:

$A = \frac{pa}{2}$, donde p es el perímetro del polígono y a el apotema.

Ilustración 109. Letra como objeto, como número generalizado y como variable. Libro Espiral 11. Pág. 276.

A continuación, se muestra el esquema 3 que contiene usos y signos de la letra en los libros de texto Espiral.



Esquema 3. Tipo de lenguaje para representar la igualdad y usos atribuidos a la letra en serie Espiral.

5. Análisis de resultados

5.1. Para la igualdad

	En la historia	En los libros de texto	Semejanzas / Diferencias
Tipo de Lenguaje	Hasta los siglos XII y XIII los signos asociados a la igualdad fueron en su mayoría asociados al lenguaje retórico, aunque Diofanto un destacado matemático de esa época también usó lenguaje sincopado para la igualdad. Sin contar a Diofanto, entre los siglos XV y XVI empieza a aparecer el lenguaje sincopado y simbólico, siendo más predominante este último. Autores como Pacioli y Vietá también hicieron uso de dos lenguajes sincopado	En cuanto al lenguaje retórico en la serie Espiral solo se encontró en dos libros. En el *inicial* y en el libro para grado cuarto, aunque para este último solo aparece en una página para enunciar dos propiedades de los números naturales. Mientras que el libro inicial, sí hay ejercicios con lenguaje retórico y luego estos mismos usando lenguaje simbólico, aunque estos se refieren a la aritmética.	**<u>Semejanzas</u>** Tanto en libros de texto como en la Historia de las Matemáticas el primer lenguaje utilizado es lenguaje retórico. **<u>Diferencias</u>** • En la Historia de las Matemáticas se observa la secuencia: lenguaje retórico, lenguaje sincopado y lenguaje simbólico mientras que en los libros de texto no hay evidencia de lenguaje sincopado. Se pasa de lenguaje retórico al simbólico.

	simbólico y retórico – sincopado para representar el signo igual, respectivamente. Había también, algunos autores que continuaban usando lenguaje retórico, como Cardan y Bombelli. Cabe resaltar que durante este periodo apareció por primera vez el signo actual (=) introducido por Recorde. Del siglo XVII solo se encontró evidencia de lenguaje simbólico con autores destacados como Descartes, Bernoulli y Leibniz.	En ninguno de los libros de la serie Espiral aparece uso de lenguaje sincopado. El lenguaje simbólico se encuentra a lo largo de toda la serie.	• El lenguaje retórico fue utilizado durante mucho tiempo en la historia, cuestión que no se evidencia en la serie Espiral, en donde solo aparece en el primer libro (inicial) y solo en el terreno aritmético.

Signos empleados	Para denotar la igualdad se usaron desde palabras hasta gran variedad de símbolos. Algunos autores incluso omitieron cualquier tipo de representación, por ejemplo, dejaban uno o varios espacios en blanco antes de escribir la respuesta o solución de una operación, ecuación, etc.	Únicamente en el primer libro de la serie (inicial), aparecen palabras para representar la igualdad. Algunas de las palabras empleadas son: *da, el resultado es, se obtiene, igual.* En todos los libros de la serie Espiral se hace uso del signo "=". Este es el único signo perteneciente al lenguaje simbólico que se emplea.	**Semejanzas** • Tanto en la Historia de las Matemáticas como en la serie de libros estudiada, la primera representación es por medio de palabras. Además, en ambos contextos se usaron palabras diferentes que significaban lo mismo, por ejemplo, *da*, *igual*, *es*, *resultado*… • En algunas culturas se utilizó la línea horizontal debajo de los números que se iban a operar, esta línea se considera una representación para la igualdad. Esta representación sigue siendo empleada en los libros de texto. • También en varios autores se encontró el uso de tablas en las que, por ejemplo, se escribía en una columna la operación y en otra el resultado sin emplear ninguna representación para

			la igualdad. Esto también se encontró en varios libros de la serie.
			<u>**Diferencias**</u> • Mientras que en la historia aparecen gran cantidad de signos en los libros evidentemente solo se usa el signo “=”.

Usos del signo igual	El uso más marcado a lo largo de la historia es como expresión de equivalencia condicional, es decir, relacionado con las ecuaciones. Estuvo presente desde antes de Cristo hasta el siglo XVIII aproximadamente. El segundo uso más representado en la historia es como operador y el tercero, el uso como equivalencia numérica. En los últimos siglos aparecen la mayoría de los usos. A medida que nos encontramos en un siglo más reciente aparecen nuevos contenidos matemáticos, por ejemplo, con en el	Solo hay un uso que se trabaja en todos los libros de la serie, este es el uso como operador. El segundo uso más presentado en los libros es como indicador de cierta conexión o correspondencia. Aparece en 11 de los 12 libros. A medida que aumenta el nivel escolar, también aumentan los usos trabajados en cada libro de la serie espiral. Los usos como expresión de una equivalencia condicional (ecuación),	**Semejanzas** • En la HM y en la serie Espiral, es casi nula la aparición del igual como identidad estricta. Mientras que en la historia no se encontró este uso en ninguno de los autores estudiados, en los libros solo aparece una vez en el libro para segundo grado. • Tanto en la historia como en los libros el uso como operador es muy destacado, por ejemplo, se encuentra en todos los libros de la serie. • En los últimos siglos de la historia aparecen la mayoría de usos asociados a la igualdad, de esta misma forma sucede en la serie, en los últimos grados de escolaridad aparecen la mayoría de los usos.

	tratamiento de la matemática teórica aparece el uso del igual para definir objetos.	equivalencia simbólica y como indicador de cierta conexión o correspondencia aparecen aproximadamente en la mitad de los libros escolares, tomando los últimos grados.	**<u>Diferencias</u>** • Mientras que desde los primeros siglos en la Historia, aparece el uso del igual como expresión de equivalencia condicional (ecuación) en los libros aparece desde el grado quinto en adelante. • Usos como propuesta de actividad de cálculo y separador no aparecen en la HM debido a que los usos revisados en la HM están asociados al álgebra.

5.1.1. Consideraciones para la igualdad

- Aunque en la serie Espiral aparece el lenguaje retórico, en el libro para transición (inicial), es posible que los estudiantes no tengan la oportunidad de utilizar y trabajar este lenguaje ya que no es común el uso de libros de texto (en jardines) para esta etapa escolar, y dado que en los otros grados no aparece su uso, podría decirse que es prácticamente nulo.

- Sería recomendable no adentrar a los estudiantes en el uso del lenguaje simbólico a tan temprana edad (preescolar), por lo cual el lenguaje retórico podría aparecer al menos hasta el primer grado. Como se mostró en este trabajo, en el análisis de los textos de la serie Espiral, el uso del lenguaje simbólico aparece en el primer libro (inicial) y como también se evidenció, a lo largo de la historia, el uso de la simbolización fue un proceso que se dio en varios años y se dio además por una razón específica, la necesidad de simplificar la escritura, razón que los estudiantes podrían no comprender si no han pasado por dicha necesidad.

- En relación con el análisis histórico realizado, es posible que el leguaje sincopado esté ausente en los textos escolares porque:

    - En la Historia de las Matemáticas tampoco aparece de manera predominante el lenguaje sincopado para el signo "=".
    - El uso del lenguaje sincopado se dio por simplificar la escritura, cuestión que actualmente no es necesaria.

- Es interesante saber que el signo igual fue propuesto por Recorde, aludiendo a que usaba este signo "porque no existían dos cosas más iguales que dos rectas paralelas". Y que en la realidad el uso como identidad estricta ($a = a, 2 = 2$) es uno de los que menos se usa, o por lo menos en los libros de texto solo apareció una vez en uno de los grados.

5.2. Para la letra

	En la historia	**En los libros**	**Semejanzas / Diferencias**
Tipo de lenguaje	De la misma manera que sucedió en el igual, el lenguaje retórico en los primeros siglos es el gran protagonista, con una excepción y es que antes	El libro inicial (transición) comienza con el uso predominante de lenguaje retórico, aunque no permanece a lo largo de la serie. Solo se usa desde el libro inicial hasta	<u>**Semejanzas**</u> • Tanto en la historia como en los libros se inicia con el lenguaje retórico.

	de Cristo había evidencia de lenguaje sincopado. El lenguaje sincopado aparece brevemente, y lo usan pocos exponentes. El lenguaje simbólico, al igual que el retórico adquiere protagonismo, pero principalmente en los últimos siglos analizados.	el libro para grado tercero. No hay evidencia e lenguaje sincopado en ninguno de los libros de la serie. El lenguaje simbólico se desarrolla en todos los libros de la serie.	• De los autores estudiados más del 50% hicieron uso del lenguaje simbólico. En los libros este lenguaje también es predominante. • Así como en la historia, por ejemplo, Ghaligai usó dos tipos de lenguaje (retórico y simbólico), en los libros inicial y primero también aparecen los dos lenguajes en cada libro.
			<u>Diferencias</u> • En los libros de texto no aparece el lenguaje sincopado, como sí apareció en la historia de las Matemáticas. • En la historia el lenguaje simbólico aparece después del siglo XV,

			mientras que en los libros de texto este lenguaje está presente desde el primer año escolar.
Signos empleados	Inicialmente se emplearon palabras como montón y lado. Luego se emplearon abreviaciones de estas mismas palabras. Algunos autores eligieron representar la letra con signos diferentes a las letras de alfabetos. Durante los últimos siglos la tendencia fue escoger letras del alfabeto, específicamente se usaban letras del alfabeto correspondiente al país de origen del autor.	Para el contenido referente a la resolución de problemas, evidentemente se da un uso de la letra como incógnita. Por esta razón en los textos se encuentran varias palabras que cumple este papel. La serie de libros se emplea el alfabeto castellano. Con mayor influencia en los grados superiores 10 y 11 se usan las letras *x*, *y* e *z* para el uso como variable. También se emplean las iniciales de palabras (l, lado) en el uso de la letra como objeto y en el uso	**Semejanzas** • De la misma forma que sucede en la actualidad (y como se evidenció en libros de texto estudiados), en la Historia se muestra preferencia por usar letras del alfabeto para denotar la incógnita. • Algunas de las palabras empleadas para representar la letra en usos como de incógnita, son las mismas que se emplearon en la historia (lado, montón – conjunto, número). **Diferencias**

		de la letra como incógnita específica (p, perímetro).	• En los libros de texto solo aparece un signo distinto a la letra para denotar la incógnita, los recuadros, mientras que en la historia si se evidenciaron diferentes signos.
Usos de la letra	En el estudio hecho de los autores se encontraron dos usos predominantes, el primero como incógnita, el cual inició en las primeras culturas (mesopotámica y egipcia) y llegó incluso hasta el siglo XV. El segundo uso fue como variable, esto sobre todo se expandió tras el estudio de las ecuaciones y el desarrollo de una matemática más formal.	En la serie se encontró el uso de la letra como incógnita en los 12 libros. En lenguaje retórico por medio de situaciones problema y en lenguaje simbólico con los recuadros. Los usos: como variable, como objeto y como número generalizado se encontraron a partir del grado tercero.	**<u>Semejanzas</u>** • Tanto en la Historia como en los libros se inicia con el estudio de las ecuaciones, en ambos contextos se hace el primer trabajo por medio de la resolución de problemas. • En ambos contextos (HM y libros de texto) el uso como variable aparece al final.

	Otro de los usos altamente desarrollados a lo largo de la historia es la letra como objeto especialmente en el ámbito de la geometría. El uso como letra evaluada no se encontró en las traducciones hechas de los autores estudiados.	El uso como letra evaluada solo se encontró en dos grados séptimo y noveno.	**<u>Diferencias</u>** • El uso como letra evaluada no aparece en la historia, es posible que esto suceda porque es un uso más asociado al proceso de enseñanza de las Matemáticas.

5.2.1. Consideraciones para la letra

- En el estudio hecho de los autores en la Historia de las Matemáticas se evidenció que el paso del lenguaje retórico al simbólico fue lento e incluso pasó por el lenguaje sincopado, sin embargo, esto no es lo mismo que se observó en los textos escolares. Aunque hasta el grado tercero y luego en noveno hay evidencia del uso de este lenguaje, solo se hace para el planteamiento y resolución de problemas. Mientras que el lenguaje simbólico para la letra aparece desde el primer libro (inicial), con esto es imposible que el estudiante entienda la necesidad de usar un lenguaje simbólico.

- En la historia no hubo evidencia del uso de la letra evaluada, esto puede estar relacionado con que este es un uso atribuido a la escuela, aunque en los libros de texto tampoco se evidencio mucho uso, ya que solo aparecen dos ejemplos uno en grado séptimo y otro en grado noveno.

- Tras la revisión hecha en los libros de texto se observó que en algunos ejercicios las letras podían tener más de un uso al mismo tiempo, por ejemplo, en la relación de área, la letra o palabra que representa el área tiene un uso como objeto, mientras que las letras b (base) y h (altura) tienen dos usos como número generalizado y como variables, surge la inquietud de hasta qué punto el estudiante es consciente de estos usos múltiples para una sola letra, y en una misma expresión.

6. Conclusiones

6.1. En relación con los objetivos

- En los libros de texto, al menos en los de preescolar a quinto de primaria, debería estar más presente el uso del lenguaje retórico sin acudir de manera temprana al uso del lenguaje simbólico, muchas veces carente de significado para los estudiantes. Esto no quiere decir que en los libros de texto de los demás grados de la escolaridad no deba estar presente el lenguaje retórico, solo que en la secundaria tiene mayor sentido la prevalencia del lenguaje simbólico (los estudiantes de este nivel de educación ya están en el periodo de las operaciones formales). Esto fundamentalmente para que el estudiante comprenda la necesidad de usar el lenguaje algebraico y además pueda participar en la construcción de dicho lenguaje.

- El uso inicial de un lenguaje retórico para la letra podría permitir al estudiante entender el significado de lo que se está representando o puede representar.

- A través de la revisión bibliográfica sobre la historia de la simbolización de la igualdad y la letra, y los usos o significados asociados a cada uno de ellos, podemos destacar los siguientes aspectos:

  - ✓ Tanto en la igualdad como en la letra la simbolización se dio a través de los tres estadios del lenguaje: retórico, sincopado y simbólico, y aunque, en términos generales, se pude evidenciar que siguieron este mismo orden, también se pudo corroborar que incluso en algunos momentos los tres tipos de lenguaje subsistieron.

  - ✓ Para el uso del lenguaje sincopado, aunque estuvo presente en la historia, su tiempo de vigencia fue considerablemente más corto que el uso del leguaje retórico y el lenguaje simbólico. De este tipo de lenguaje también se encontró que su uso fue significativamente menor con respecto al uso que se le dio al lenguaje retórico y sincopado.

- ✓ Un aspecto interesante que se observó en algunos autores de la historia, es que en una misma expresión utilizaban dos lenguajes al mismo tiempo, por ejemplo, Diofanto usaba lenguaje retórico o sincopado para expresar la igualdad, mientras que para la letra usó lenguaje simbólico.

- ✓ Fue interesante identificar que la simbolización también se vio marcada por el reconocimiento del autor que lo proponía. En el caso específico de la igualdad, aun cuando el signo que usamos en la actualidad fue propuesto en 1557, no se instauró en esa época, pasaron aproximadamente 70 años hasta que algunos matemáticos de nombre lo emplearon y finalmente se popularizó.

- ✓ De los 11 usos estudiados, asociados a la igualdad se observó que en la historia predominaron especialmente 3 de ellos, expresión de una equivalencia condicional, indicador de cierta conexión o correspondencia y como operador.

- ✓ De los 5 usos que se seleccionaron para la letra, en la historia se vio principalmente el uso como variable. Y con menor incidencia el uso de la letra como objeto.

- El estudio de las ecuaciones fue un contenido significativo en la Historia, esto también se evidenció en la serie de libros Espiral. La letra como incógnita se introduce a los estudiantes desde los primeros años escolares en la resolución de problemas de la vida cotidiana, lo cual es análogo al surgimiento de las ecuaciones en las antiguas civilizaciones.

- Ciertamente la evolución de la simbología tanto para el igual como para la letra en la historia fue un proceso bastante complejo y prolongado, muy diferente a lo que se constató en los libros de texto analizados en los que, por ejemplo, para el igual solo en el libro de preescolar se usa lenguaje retórico y en ese mismo se introduce el signo actual. Respecto a la letra hay un poco más de tratamiento con el lenguaje retórico, pero únicamente para tratar la letra como incógnita.

- En todos los libros de texto analizados de la serie Espiral se pudieron encontrar todos los usos seleccionados de la letra y del signo igual, situación que no se dio en el estudio histórico realizado.

- El uso del lenguaje retórico para el igual se encontró solo en el libro de preescolar mientras que para la letra, este lenguaje se pudo hallar en los libros de los grados transición a tercero y noveno.

- En todos los ejemplos seleccionados de los libros de texto considerados, referentes al uso del igual como separador se encontró que este uso incluye el uso del igual como operador, cuestión que se corresponde con el marco de referencia. Esto quiere decir que estos dos usos son equivalentes.

6.2. Personales

- En el desarrollo de este trabajo se encontró algunas veces que la letra *p* se utiliza para simbolizar *perímetro*. Sin embargo, surgió la idea que este tipo de simbolización no atañe a un lenguaje simbólico sino sincopado, ya que, esta letra es la inicial de la palabra que se va a simbolizar, cosa que no sucede por ejemplo con las letras *x*, *y* e *z* que se usan también para representar la letra en álgebra.

- Si bien el lenguaje sincopado no aparece en los libros de texto, muy seguramente sí es utilizado por los niños y jóvenes en el desarrollo de algunos contenidos matemáticos, por ejemplo, en las hojas que se entregan a los estudiantes para realizar operaciones correspondientes a una prueba o examen es usual que se use lenguaje sincopado.

- Es posible que en los libros de texto no halla evidencia del uso de lenguaje sincopado, ya que finalmente en estos se presentan los contenidos y acuerdos oficiales.

- Considero que es importante en mi formación como docente estudiar Historia de las Matemáticas, en primera instancia, porque permite ver el proceso y los supuestos que llevaron a que se diera un objeto matemático, por ejemplo, el surgimiento del estudio de las funciones y el porqué de su notación actual, y también las dificultades que se presentaron en la antigüedad; En segunda instancia, porque al conocer sobre las razones por las que surgió el objeto, sus dificultades y como fueron solucionadas este conocimiento se podría extrapolar a las aulas de clase, quizás, por ejemplo, identificando si surgen errores similares.

- Durante mi formación como docente en la universidad una de las ideas que más causó impacto era entender que la educación y el proceso de enseñanza debe consolidarse bajo contextos, de la ciudad o pueblo, de la población, familiar, entre otros. Esto pude constatarlo en el estudio de la simbología asociada a la igualdad y a la letra, pues se hizo evidente que el estudio de algunos objetos matemáticos estaba influenciado por la nacionalidad del autor, por sus "amigos" matemáticos con los que establecía correspondencia, incluso por eventos sociales. En el proceso de simbolización vimos que el signo "=" se consolidó 100 años después de que fue propuesto, y esto sucedió porque otros matemáticos más destacados y respetados preferían otros signos.

- Este trabajo contribuyó a tener más conciencia sobre el uso de la letra y el igual a través de los diferentes ejemplos seleccionados de los libros de texto, asunto que es muy importante en el momento de ejercer como docente de matemáticas ya que a partir de estas interpretaciones se puede aportar a la comprensión del lenguaje por parte de los estudiantes.

6.3. Cuestiones abiertas

Podría ser interesante realizar investigaciones sobre:

- El lenguaje retórico y sincopado no formal que utilizan los estudiantes dentro del aula.

- Hasta qué punto el uso de un lenguaje retórico y la una transición lenta hasta el lenguaje simbólico podría significar una solución para algunos errores y dificultades que se presentan con el tratamiento y la interpretación de la letra por parte de los estudiantes.

- ¿Tendría alguna incidencia introducir el signo para la igualdad desde los diferentes usos y significados que este posee?, ya que en este momento el signo solo se muestra para realizar diferentes actividades, sin hacer énfasis en su uso.

- Es posible que algunos errores y dificultades asociados a la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas puedan responderse desde la Historia, por ejemplo, las dificultades asociadas a la comprensión de la letra como variable, asunto que podría constituir otro trabajo de grado.

7. Bibliografía

Ake, L. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación* (tesis doctoral). Universidad de Granada. España.

Asquith, P., Stephens, A., Knuth, E., y Alibali, M. W. (2007). Middle school mathematics teachers' knowledge of students' understanding of core algebraic concepts: equal sign and variable. *Mathematical Thinking and Learning*, 9(3), 249-272.

Bednarz, N., Kieran, C., Lee, L. (Eds.) (1996*). Approaches to Algebra.* Perspectives for Research and Teaching. Dordrecht: Kluwer.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática.* Madrid, España: Alianza Editorial.

Brown, T. (2001). *Mathematics, Education and Language: Interpreting hermeneutics and post- structuralism.* (Rev. 2 ed.). Dordrecht: Kluwer.

Cajori, F. (1928). *A history of mathematical notations.* Volume I. Chicago, United States of America: The Open Court Publishing Company.

Cajori, F. (1952). *A history of mathematical notations.* Volume II. Chicago, United States of America: The Open Court Publishing Company.

Castro, E., Castro, E. y Molina, M. (2007). *Historia del signo igual*. En M. Guzmán, Humanidades y Ciencias. Aspectos Disciplinares y Didácticos. Homenaje a la Profesora Ana Vilches Benavides (pp. 249-261). Granada: Editorial Atrio.

Colebrooke, H. (1817). *Algebra, Arithmetic and Mensuration,* from the Sanskrit of Brahmagupta and Bhaskara. John Murray, London.

Duval, R. (1995). *Sémiois et pensée humaine. Registres sémiiotiques et apprentissages intellectuels*. Berna, Suíza: Peter Lang.

Duval, R. (2006). *A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics*, Educational Studies in Mathematics, 61(1-2), p.p 103-131.

Esquinas, A. (2008). *Dificultades de Aprendizaje del Lenguaje Algebraico: del Símbolo a la Formalización Algebraica: Aplicación a la Práctica Docente* (tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid, España.

Fernández, F. (1997). *Aspectos históricos del paso de la aritmética al álgebra*. *Implicaciones para la enseñanza del lenguaje simbólico algebraico*. Revista de didáctica de las matemáticas, p.p 14,75-91.

Filloy, E., Rojano, T., Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach.* New York: Springer.

Freudenthal, H. (1994). *Fenomenológica Didáctica de las Estructuras Matemáticas*. (Textos Seleccionados). Traducción, notas e introducción de L. Puig. México D.F: Cinvestav del IPN.

Godino, J., Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros.* Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. España: La Medina.

González, A. y González F. (2012). *Exploración del Pensamiento Algebraico de Profesores de Matemática en Formación*. La Prueba EVAPAL". Scientiae. (Revista en línea). Disponible en: http://www.ulbra.br/actascientiae/edicoesanteriores/acta_scientiae_v.13_%20n1_2011.pdf., (Consulta, 2017, enero).

González, A. y González F. (2014). *Historia Social de la Educación Matemática en Iberoamérica: Consideraciones Históricas y Didácticas Relacionadas con el Símbolo Algebraico de Igualdad*. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Número 37. 181 – 198.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707–762). Charlotte, NC: Information Age.

Küchemann, D. *The understanding of generalised arithmetic (algebra) by secondary school children*. 1980. 232h. Tesis (Doctoral en Filosofía) sin publicar, University of London, London, 1980.

Manrique, J., Triana, J. (2013). *El papel de la historia del álgebra en un curso de didáctica para la formación inicial de profesores de matemáticas* (tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria.* (tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

Molina, M., Castro, E. y Castro, E. (2007). *Historia del signo igual*. Humanidades y Ciencias. Aspectos Disciplinares y Didácticos. Homenaje a la Profesora Ana Vilches Benavides. Granada: Editorial Atrio.

Peirce, C. (1987). *Obra Lógico-Semiótica*. Edición de Armando Sercovich. Madrid: Taurus.

Pimm, D. (1987). *Speaking Mathematically*. *Communication in Mathematics Classrooms*. New York: Routledge & Kegan Paul.

Pimm, D. (1999). *El Lenguaje Matemático en el Aula*. Madrid, España: Morata.

Radford, L. (2003). *On the epistemological limits of language: Mathematical knowledge and social practice in the Renaissance*. Educational Studies in Mathematics, (52), p.p. 123-150.

Radford, L. (2006). The anthropology of meaning. *Educational Studies in Mathematics*, 61 (1/2), 39-65.

Socas, M., Camacho, M., Palarea, M., Hernandez, J. (1989). *Iniciación al Algebra.* Madrid, España: Editorial Síntesis, S.A**.**

Usiskin, Z. (1998). *Conceptions of School Algebra and uses of variables*. In: A.F. COXFORD. The ideas of Algebra, K-12. p.p 8-19.