¿Y QUÉ DEL CÁLCULO MENTAL?

TRABAJO DE GRADO PRESENTADÁ POR ANDERSON GERLEY PARDO ABONDANO

DIRIGIDÁ POR LYDA MORA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D.C, COLOMBIA

2016

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN – RAE

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	¿Y qué del Cálculo mental?
Autor(es)	Pardo Abondano, Anderson
Director	Mora Mendieta, Lyda Constanza
Publicación	Bogotá, D.C. Universidad Pedagógica Nacional, 2016. # p. 70.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Cálculo mental, Documentos curriculares, Educación, Matemáticas, Tecnología, Técnicas, Estrategias y Números naturales.

2. Descripción

En este documento se encuentran recopilados algunos de los aportes encontrados por algunos autores con referencia al tema cálculo mental. Lo que se buscaba principalmente era profundizar en el estudio del cálculo mental, sus características, la importancia de su enseñanza, estrategias asociadas y su historicidad en el currículo (propuesto) de Matemáticas en Colombia en los últimos años. Se hizo un estudio alrededor de este tema debido a que actualmente la tecnología tiene un papel muy importante en la educación en general; entre otros asuntos, le ha proporcionado a esta muchas herramientas (como las calculadoras, los computadores y los teléfonos celulares) que pueden beneficiar al profesor y a los estudiantes; sin embargo, la llegada de la tecnología ha hecho que algunos procesos usualmente asociados con la educación en Matemáticas pierdan su importancia, este es el caso del cálculo mental. De esta manera en la primera parte del documento se encuentran algunas definiciones, características y diferencias para cálculo mental, cálculo estimado y cálculo aproximado. Luego se muestran todos los beneficios que tienen para los estudiantes la enseñanza y práctica de cálculo mental. Se continúa mostrando la relación del cálculo mental y la educación en Matemáticas para finalizar se ahonda en el currículo escolar colombiano en los últimos años y se muestra cómo en Colombia, al igual que en otros países, el

cálculo mental hace parte del currículo escolar de Matemáticas además se hace una recopilación de técnicas y estrategias de cálculo mental para el conjunto de los números naturales

3. Fuentes

Se hizo una revisión de 36 fuentes para la elaboración del documento; entre estas fuentes se encuentra libros de texto, artículos de investigación, páginas web y trabajos de grado. A continuación se muestran diez (10) de esos documentos, los cuales son considerados los más importantes en la elaboración del presente trabajo.

Alsina, C. (1996). *Enseñar matemáticas.* Barcelona: Graó.

Coto, A. (2006). *Entrenamiento Mental.* Madrid, España: EDAF, S.L.

Fernández, J. (2004). *Del cálculo mental.* Madrid: ONCE.

Fernández, L. (2014). *Cálculo mental.* España: Universidad de la Rioja .

Fernández, M. (2008). *Cálculo mental.* Buenos Aires: Direción General de Cultura y Eduación.

Gómez, B. (2005). La enseñanza del cálculo mental. *UNIÓN*, p. 17-29.

Ibañez, J. (2012). *Estrategias del cálculo mental.* IES Alhama de Corella, España.

Parra, C., & Saiz, I. (1994). *Didáctica de matemáticas.* Buenos aires: Paidós Educador.

Segovia, I., & Castro, E. (2009). *La estimación en el cálculo y en la medida: fundamentación curricular e investigaciones desarrolladas en el Departamento de Didáctica de la matemática de la Universidad de Granada*. Electronic Journal of Research in Educational Psychology, p. 499-536.

Segovia, I., Castro, E., Castro, E., & Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida.* Madrid: Síntesis.

4. Contenidos

Este documento se encuentra dividido en cinco capítulos: en el capítulo 1 se presentan algunas definiciones para cálculo mental, cálculo estimado y cálculo aproximado y se diferencia entre estos tipos de cálculo. En el capítulo 2 se muestran todos los beneficios que tienen para los estudiantes la enseñanza y práctica de cálculo mental. La relación del cálculo mental y la educación en Matemáticas, así como una recopilación de los métodos de enseñanza de cálculo mental que han estado a lo largo de la historia en España se hallan en el capítulo 3. Lo correspondiente a la presencia del cálculo mental en Colombia se ahonda en el capítulo 4. En el capítulo 5 se hace una recopilación de algunas técnicas y estrategias de cálculo mental para el conjunto de los números naturales.

Se finaliza el documento con las conclusiones que se encontraron después de haber consultado y analizado varios documentos que tienen aportes hacia el cálculo mental y unas cuestiones abiertas que quedaron después de elaborar este documento.

5. Metodología

En la metodología se hizo uso de la revisión de documentos a través del internet, haciendo uso de repositorios, bibliotecas web y otras páginas que sirven en la búsqueda de documentos electrónicos. Además se tuvo en cuenta la bibliografía de esos documentos para así encontrar otros documentos relevantes en este trabajo de grado.

También se hizo una búsqueda de los autores más reconocidos en el ámbito de la práctica y la educación del CM de ahí se obtuvo gran cantidad de documentos; los cuales formaron la base de este trabajo de grado.

6. Conclusiones

A continuación se encuentran las conclusiones más importantes a las que se llegó teniendo en cuenta el estudio realizado alrededor del cálculo mental.

La poca presencia del cálculo mental en las aulas de clase, se tiende a confundir el cálculo mental, el cálculo estimado y el cálculo aproximado; con ayuda de algunos de los documentos consultados y analizados fue posible evidenciar que la principal característica por la cual se considera que el cálculo mental debe ser enseñado en las aulas de clase es la cantidad de beneficios que tiene para los estudiantes debido a que desarrolla funciones ejecutivas, memoria de trabajo, pensamiento numérico y sentido numérico. Con respecto a diferenciar al cálculo mental de otro tipo de cálculos es fundamental distinguirlos debido a que algunas veces se entiende cálculo mental, cálculo estimado y cálculo aproximado como sinónimos y su diferencia radica en la procedencia de los datos y de las respuesta. El uso conjunto de estos es importante debido a que el cálculo mental permite dar una respuesta y el cálculo estimado permite verificar de manera rápida si la respuesta es razonable o no.

Además de las características antes indicadas se evidenció que en algunos países latinoamericanos el cálculo mental también forma parte del currículo de Matemáticas, se plantea como hipótesis que a pesar del esfuerzo de incluir el cálculo mental como parte del currículo escolar, este no es usado en las aulas de clase debido muy posiblemente a la falta de formación en este campo, lo que hace que los profesores eviten enseñar algo que ellos mismos no saben, por lo que se considera que parte de la solución es incluir de manera visible este tema en la formación de los licenciados en Matemáticas. Por eso, a pesar de que el cálculo mental ha estado presente en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas MEN (1998) y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas en Colombia MEN (2006), no se da su enseñanza en clase, al menos desde la experiencia personal del autor de este trabajo de grado.

Aunque los Lineamientos Curriculares de Matemáticas MEN (1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas MEN (2006), incluyan de manera explícita el cálculo mental, en particular para el desarrollo del pensamiento numérico, se observa una brecha entre esta postura y la de los Derechos Básicos de Aprendizaje MEN (2015), donde ni siquiera aparece el término.

En relación con las técnicas del cálculo mental: Quedó claro que todas están basadas en las propiedades de las operaciones, lo cual invita a que esta temática (propiedades de las operaciones) sea conectada directamente con el cálculo mental y no sea tratada únicamente desde el punto de vista teórico: esto tal vez posibilitaría que no solo los estudiantes vieran una posible aplicación de las Matemáticas, sino que potenciaría que los niños y jóvenes crearan sus propias técnicas.

Al hacer la recopilación de estas técnicas o estrategias de cálculo mental fue posible evidenciar que no es apropiado clasificarlas por niveles de dificultad, pues esto resulta muy personal. De hecho, existen algunas técnicas que parecen ser más complejas que realizar la misma operación con lápiz y papel, pero esto depende netamente del sujeto que la quiera utilizar.

Elaborado por:	Anderson Pardo
Revisado por:	Lyda Mora

Fecha de elaboración del Resumen:	22	07	2016

Contenido

Tabla de contenido de ilustraciones

Tabla de contenido de tablas.

INTRODUCCIÓN

En este documento se encuentran recopilados algunos de los aportes encontrados por algunos autores con referencia al tema cálculo mental. En la primera parte del documento se localizan algunas definiciones para cálculo mental, cálculo estimado y cálculo aproximado, además teniendo en cuenta lo reportado en algunas publicaciones, en especial por Gómez (2005), se diferencia entre estos tres tipos de cálculo y algunas características que los hacen distintos.

En el capítulo 2 se muestran todos los beneficios que tienen para los estudiantes la enseñanza y práctica de cálculo mental; entre los principales beneficios se encuentran que desarrolla el pensamiento numérico, uno de los cinco pensamientos básicos que propone el Ministerio de Educación en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas publicados en MEN (1998). También se muestra como beneficio al desarrollo de las funciones ejecutivas y de la memorización.

Para el capítulo 3 se expone la relación del cálculo mental y la educación en Matemáticas; allí se hace una recopilación de los métodos de enseñanza de cálculo mental que han estado a lo largo de la historia en España y se hace mención a la importancia de realizar un estudio que compare esos métodos de enseñanza en Colombia. El capítulo se termina mostrando como en muchos países de Latinoamérica han implementado el cálculo mental cómo parte de sus currículos de Matemáticas debido a la importancia que este tiene para los estudiantes.

En el capítulo 4 se ahonda en el currículo escolar colombiano en los últimos años y se muestra cómo en Colombia, al igual que en otros países, el cálculo mental hace parte de del currículo escolar de Matemáticas, en especial se miran tres documentos que son los Lineamientos Curriculares de Matemáticas MEN (1998), Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas MEN (2006) y los Derechos Básicos de Aprendizaje MEN (2015).

En el capítulo 5 se hace una recopilación de técnicas y estrategias de cálculo mental para el conjunto de los números naturales. Se finaliza el documento con las conclusiones a las que se llegaron después de haber consultado y analizado varios documentos que tienen aportes hacia el cálculo mental; y unas cuestiones abiertas que quedaron en la culminación de este documento.

JUSTIFICACIÓN

Actualmente la tecnología tiene un papel muy importante en la educación en general; entre otros asuntos, le ha proporcionado a esta muchas herramientas (como las calculadoras, los computadores y los teléfonos celulares) que pueden beneficiar al profesor y a los estudiantes; sin embargo, la llegada de la tecnología ha hecho que algunos procesos usualmente asociados con la educación en Matemáticas pierdan su importancia, este es el caso del cálculo mental (CM).

En los Lineamientos curriculares (MEN, 1998) se menciona la importancia que tiene el CM y la estimación en el desarrollo de algunos aspectos del pensamiento numérico en los estudiantes, como son la comprensión de los números y las operaciones, el cálculo con números y su aplicación. Además algunos autores como Lethielleux (2005) y Alsina y Sáiz (2003) resaltan que el CM favorece a los estudiantes ya que estos desarrollan la atención, la concentración, la memoria de trabajo, el uso de propiedades fundamentales de las operaciones y algunas otras.

Pero, ¿por qué preocuparnos por esto? A través de algunas experiencias que se han dado en las prácticas de inmersión[1] se han percibido las dificultades que tienen los estudiantes para realizar cálculos sencillos como por ejemplo 12×2 o $15 + 9$ en la mayoría de los casos los estudiantes tuvieron que recurrir a sus celulares o calculadoras, lo que hace pensar que los estudiantes en la escuela poco desarrollan el CM posibles causas de este fenómeno pueden ser la poca formación que tienen los profesores de Matemáticas alrededor de este tema, el desconocimiento que tienen sobre sus aportes a la educación en Matemáticas y el poco énfasis que se hace hoy en día en la escuela en este aspecto, tal vez porque se considera innecesario, precisamente por la proliferación de ciertos dispositivos tecnológicos.

En los espacios académicos[2] ofrecidos por la Licenciatura en Matemáticas se evidencia que el CM no es un tema que sea considerado para su estudio o tratamiento, tanto en los espacios académicos de Matemáticas como en los de Didáctica. Parece un poco extraño que el CM no tenga un papel primordial en la formación de un futuro profesor de matemáticas debido a su importancia. (Como se cita en Jiménez, 2014, p. 21).

> (…) el cálculo mental es un pilar muy importante en la educación matemática de los niños y (…) su puesta en práctica en las aulas, además de favorecer los aprendizajes aritméticos, posibilita una enseñanza más fluida de los contenidos curriculares en matemáticas, ya que la ejecución automática de cálculos sencillos permite que los alumnos puedan pensar en los conceptos que se presentan con mayor autonomía y rigor.

---

[1] Las prácticas de inmersión lo constituyen algunos espacios académicos que brinda la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, en los cuales los maestros en formación empiezan su ingreso al mundo de la educación con estudiantes.

[2] Los espacios académicos son todas las materias que forman parte del pensum de la Licenciatura en Matemáticas.

Además, hay bastante literatura especializada que gira alrededor de la importancia que tiene el CM en la educación en Matemáticas (Bernardo Gómez, Ángel Alsina y Dolores Saiz, Lethielleux y otros) y en otros ambientes como el entrenamiento mental (Alberto Coto, Jaime García, Yusnier Viera y otros) y la neuropsicología (Etchepareborda y Abad-Mas, Mónica Roselli, María Beatriz, Esmeralda Matute y otros). Lo que hace pensar que el CM es un componente muy importante a tener en cuenta.

Con base en los aspectos mencionados se considera importante profundizar en el CM, sus características, su importancia en el desarrollo de otras habilidades importantes en los estudiantes y construir conocimiento para la vida profesional. En consideración personal se ha practicado el cálculo mental junto con la memorización, esto como parte de los intereses personales que giran alrededor de este tema. Durante los años que se ha dedicado a practicar el cálculo mental es posible observar el aumento en algunas de las capacidades ya mencionadas y además una manera distinta de ver las operaciones matemáticas.

OBJETIVOS

General

Profundizar en el estudio del cálculo mental, sus características, la importancia de su enseñanza, estrategias asociadas y su historicidad en el currículo (propuesto) de Matemáticas en Colombia en los últimos años.

Específicos

- Reconocer las diferencias entre cálculo mental y cálculo estimado.
- Determinar la importancia en el desarrollo de la memoria de trabajo y las funciones ejecutivas en los estudiantes.
- Identificar la presencia del cálculo mental en el currículo (propuesto) escolar Colombiano.
- Compilar algunas estrategias asociadas al cálculo mental en la estructura de los números naturales utilizando el sistema de numeración decimal.

CAPÍTULO 1

1. Cálculo mental y cálculo estimado

En este primer capítulo se pretende mostrar los distintos significados de *cálculo mental* [CM], *cálculo estimado* [CE] y *cálculo aproximado* [CA], términos que se tienden a confundir porque se piensa que tienen las mismas características. Por lo tanto, lo que se intenta hacer en esta primera parte del documento es distinguirlos. Finalmente y dado el interés de este trabajo, se propone una definición para CM, sobre la cual versará todo el escrito.

1.1. ¿Qué es el cálculo mental?

Desde hace unos años el interés por el desarrollo de capacidades fuera de lo común ha llamado la atención, este es el caso del CM sobresaliente en algunas personas, quizá esto se deba a que hay pocos calculistas prodigios entre nosotros. A lo largo de la historia son muchos los físicos y matemáticos que han demostrado una gran capacidad para el cálculo mental:

Jedediah Buxton (1707–1772), un gran fanático de la memoria y del cálculo, aprendió a calcular a la edad de 12 años su fama lo llevó a Londres donde fue invitado a ver una obra de Ricardo III, al finalizar la obra se le preguntó si había sido de su agrado a lo que respondió que el actor había dicho 14445 palabras y dado 5202 pasos. Su gran capacidad para memorizar le permitía realizar multiplicaciones mentales de números de grandes cifras. (Ciencia Popular, 2007).

Carl Friedrich Gauss (1777-1855), quien a temprana edad ya demostraba habilidades para desarrollar cálculos aritméticos mentales cuando tenía tres años descubrió un error cometido por su padre al calcular el pago de unos sueldos. Además a los diez años, su maestro solicitó a la clase encontrar la suma de los números del uno al cien, esto con el fin de mantener ocupado a sus alumnos quedó asombrado cuando en poco tiempo, Gauss levantó la mano y dio la respuesta correcta. (Aznar, 2007).

Jakow Trachtenberg (1888-1953), desarrolló un método de cálculo mental conocido como *método Trachtenberg*, esto lo hizo mientras era prisionero en un campo de concentración nazi con el fin de mantenerse ocupado. Este sistema consiste de algunos patrones memorizables que facilitan realizar cálculos aritméticos sin ayuda de lápiz y papel. (Wikipedia, 2015).

Alexander Aitken (1895-1967), fue un matemático con una excelente capacidad para la memorización y el cálculo mental. Entre sus hazañas se dice que sabía 2000 decimales del número π y que incluso era capaz de decir el decimal que ocupaba el lugar *n*. Además era capaz de hacer sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, potencias y raíces de grandes números se dice que podía multiplicar en 30 segundos dos números de 9 dígitos cada uno. (Matemolivares, 2011)

En la actualidad, los calculistas de habla hispana más reconocidos son:

Jaime García Serrano (1956-actual), un calculista matemático colombiano quien dice ostentar seis "*records guinness*" mundiales. Se le acredita el cálculo más rápido de $\sqrt{13}$ con cien cifras decimales, la memorización de un número de 200 dígitos, cálculo de calendarios de cien mil años, cálculo de funciones trigonométricas y otras más. (García, 2012)

Alberto Coto (1970-actual), español, es la persona más rápida actualmente haciendo cálculos mentales posee varios "*records guinness*" mundiales. Por hacer la suma de 100 cifras escogidas al azar en 19,23 segundos y multiplicar dos números de 8 cifras cada uno en 56,5 segundos. Además posee siete títulos mundiales de cálculo mental obtenidos entre los años 2004 y 2010. (Coto, A, 2014)

El hecho de que las personas desarrollen habilidades sorprendentes o tan solo normales para el CM se debe en gran parte al factor contextual o al medio en el cual se hallan inmersas. En nuestro diario vivir es fácil ver que los niños aprenden a hablar porque en su entorno todos hablan en el caso del CM son pocas las personas que viven en un ambiente que propicie el CM.

Si en nuestra sociedad, por ejemplo en la escuela, el CM jugara un papel más importante como el de otros procesos (hacer algoritmos, argumentar, comunicar, etc.) o áreas del saber, las personas, muy posiblemente, calcularían mucho mejor.

Actualmente la tecnología tiene un papel muy importante en la educación en general, le ha proporcionado a esta muchas herramientas (como las calculadoras, los computadores y los teléfonos celulares) que pueden beneficiar al profesor y a los estudiantes; sin embargo, la llegada de la tecnología ha hecho que algunos procesos usualmente asociados con la educación en Matemáticas pierdan su importancia, por eso Alexander Aitken en 1954 decía ante la sociedad de ingenieros “Es posible que, lo mismo que los tasmanos o los moriori, los calculadores mentales estemos condenados a la extinción.” (Coto, 2006, p. 190)

A continuación haremos un recorrido por las distintas definiciones e interpretaciones que han dado algunos autores para el CM la intención de este es mostrar cómo desde hace años algunos autores se han interesado por este tema, lo cual muestra la importancia que ha tenido el CM.

A pesar de que el CM ha sido usado desde hace mucho tiempo y hay autores que han estudiado el tema, son pocas las definiciones que se encuentran reportadas haciendo una búsqueda exhaustiva del término, la primera definición hallada (y de hecho, más usada como referencia) la estableció Parra y Saiz quien concibe al CM como “Conjunto de procedimientos que, analizando los datos por tratar, se articulan sin recurrir a un algoritmo preestablecido, para obtener resultados exactos o aproximados” (1994, p. 222). Además Parra y Saiz, (1994) mencionan que el CM no excluye la utilización de lápiz y papel, debido a que durante el proceso mental se necesita registrar los cálculos intermedios. Por otro lado, establece que si bien existen el cálculo mecánico o automático (utilización de un algoritmo o un material) y el cálculo pensado o reflexionado que es el que ella considera como CM.

En 1998, Mariana Fernández, a diferencia de Parra y Saiz no admite el uso de instrumentos como lápiz y papel en el CM, precisamente, afirma que el CM “Consiste en realizar cálculos matemáticos utilizando sólo el cerebro, sin ayuda de otros instrumentos como calculadoras e incluso lápiz y papel” (Fernández M. , 2008, p. 17). Fernández (2008) distingue el CM en dos tipos, el primero es el estímulo-respuesta en la cual se enseña a calcular de una manera, pero no es la mejor manera de hacerlo, y el segundo en decisiones y elección de estrategias el cual busca que el estudiante haga una reflexión personal, para de esta manera tomar una buena decisión a la solución de una situación.

En 2005 María Ortiz Vallejo y Tomás Ortega reafirman la idea de CM de Fernández para ellos el CM es “una forma de calcular sin ayuda externa, siendo solo la mente la que trabaja” (Ortiz Vallejo & Ortega, 2005, p. 2). Ellos distinguen el CM en dos modalidades el cálculo que emplea una técnica automática (Cálculo mecánico o estímulo-respuesta) y el cálculo en el cual se usan estrategias originales o nuevas para resolver una situación (cálculo reflexivo o pensado).

Ibañez (2012) y Ortiz y Ortega (2009) coinciden en su definición de CM en el cual mencionan que es un cálculo de cabeza o memoria, en el cual no se usan ayudas externas. Ortiz y Ortega (2009) además distinguen dos tipos el cálculo en el primero se usa una técnica que puede llegar a olvidarse por lo que en este prima la memorización (cálculo mecánico o estímulo-respuesta) y en el segundo se piensan distintas estrategias para resolver un problema y se escoge la más adecuada (cálculo reflexivo o pensado).

De la recopilación de definiciones de CM, se puede observar que Fernández (2008), Ortiz, M. y Ortega (2005) y Ortiz, J. (2012) a diferencia de Ibañez, (2012), trataron de tipificar el CM en dos tipos. Estos dos tipos tienen características similares, y recopilan en la siguiente Tabla 1.

	Fernández, M. (1998)	Ortiz, M. y Ortega, T. (2005)	Ortiz, J. (2012)
TIPOS	**Estímulo-respuesta:** En este tipo de cálculo se hace uso de ciertas reglas, estrategias y caminos muy limitados.	**Cálculo mecánico o estímulo-respuesta:** Este cálculo emplea el uso de técnicas automáticas, las cuales pueden ser olvidadas.	**Cálculo mecánico o estímulo-respuesta:** Este cálculo tiene una técnica automática que puede ser olvidada. Como la memorización de tablas.
	Decisiones y elección de estrategias: Este tipo de cálculo hace uso de la concentración, la atención, el hábito y el interés para explorar, inspeccionar posibilidades y tomar una decisión apropiada. Convirtiéndolo en un cálculo pensado.	**Cálculo reflexivo o pensado:** Este cálculo usa determinadas estrategias que pueden ser originales e implica la reflexión que conlleva a la toma de decisiones y elección de la estrategia más adecuada.	**Cálculo mecánico o estímulo-respuesta:** En este cálculo se utilizan diferentes procedimientos y se relacionan los cálculos, los números y las operaciones con el fin de encontrar la solución más adecuada.

Tabla 1. Características de los tipos de CM.

En estos dos tipos de CM definidos por estos autores, se puede observar que resaltan el cálculo pensado que implica que la persona que lo utiliza, desarrolle ciertas habilidades. Debido a que permite que desarrolle la capacidad de tomar decisiones de manera rápida, ya que debe hacer uso de la estrategia más efectiva. Mientras que en el otro cálculo prima el desarrollo de la memorización como un eje fundamental, por eso la memorización de tablas se incluye en este tipo.

Además de las definiciones anteriores podemos identificar que la mayoría de los autores consultados, en su definición toman en cuenta que no se debe hacer uso de ayudas externas como lápiz y papel, pero Parra difiere de todos ellos y menciona que durante este proceso mental se deben registrar los cálculos intermedios. Por lo que no le da mucha importancia al desarrollo de la memorización, descartando así el tipo de CM estímulo-respuesta, como ya se ha indicado. En muchas situaciones en la que es aplicado el CM es necesario obtener un resultado de manera inmediata, por eso, en este documento no se está de acuerdo con la idea propuesta por Parra (1994) por lo cual se asumirán las consideraciones de los demás autores, esto es, que el CM no incluye el uso de instrumentos externos al individuo, por eso la definición de CM que fundamenta este escrito es la siguiente:

El CM es un proceso mental o cognitivo, mediante el cual se realizan operaciones aritméticas, con el fin de dar respuesta a una situación matemática y obtener un resultado exacto a partir de datos exactos. No se puede hacer uso de elementos o ayudas externas

1.2. ¿Qué es el cálculo estimado y aproximado?

El CE y CA son dos tipos de cálculo muy particulares que están ligados al CM hay ocasiones en que no se dispone del tiempo, ni de los elementos para hacer un determinado cálculo (como por ejemplo hacer la cuenta de las compras en el supermercado), es en estas ocasiones cuando se involucra el CE o CA. Por eso Alsina (1996, p.114) dice que “La fama de las matemáticas como ciencia exacta no justifica prescindir de aquello que es útil en la vida diaria y que, además, hace reflexionar sobre las propiedades de los números”. Estos tipos de cálculo facilitan las operaciones y por lo tanto hacen más fácil hacer CM es de aclarar que la principal característica del CE y CA es que se trabaja con datos que no son exactos.

Verificando el diccionario virtual de la RAE, edición del tricentenario, se define aproximación como, “Resultado inexacto, pero próximo al exacto, que se obtiene en una medición o en un cálculo cuando no se puede precisar absolutamente”. Además define estimar como “Calcular o determinar el valor de algo”. Podemos observar una fuerte relación de estos conceptos con lo mencionado por Ortiz (2009) sobre el CA, quien manifiesta que este “Es una modalidad del cálculo mental que debemos tener presente puesto que, en ciertas situaciones de la vida diaria, no se dispone de lápiz y papel, ni de tiempo, y es suficiente con obtener una respuesta aproximada, no exacta”.

Verificando algunos sitios web y documentos, podemos encontrar algunas definiciones para CA y CE:

- En la página Portal Educativo se menciona que el CA “Consiste en buscar un intervalo en el cual se encuentra el resultado del ejercicio que se nos plantea o un solo valor, aproximado”.
- Castro, E. y otros (1989) definen el cálculo estimado como “el juicio de valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de circunstancias individuales del que lo emite”.
- Alsina hace una definición de estimar y además da algunas características propias de la estimación.

> Estimar, en matemáticas, significa valorar una operación o una medida en función de las circunstancias de quien emite el juicio. Lo que caracteriza la estimación es que quien hace la valoración ha de tener alguna información sobre la situación, el resultado no es necesario que sea exacto y el cálculo se hace mentalmente (con lo que esto implica, es decir, números sencillos y cálculo rápido). (Alsina, 1996, P. 105).

- Fernández, J (2004) menciona cómo el CM tiene más aplicaciones que simplemente una respuesta exacta y que es conveniente no olvidar su versión "imperfecta". Con esto se refiere a la estimación.
- Segovia y Castro (2009, p. 501) tienen en cuenta dos tipos de estimación, en cálculo y en medida. Sobre la estimación en cálculo dicen que está "referido a las operaciones aritméticas y a los juicios que pueden establecerse sobre los resultados" y estimación en medida dicen que es "referido a los juicios que pueden establecer sobre el valor de una determinada cantidad o bien que puede hacerse sobre el resultado de una medida".

De esta recopilación de definiciones sobre CE y CA, se puede identificar que son dos tipos de cálculo muy parecidos, por lo tanto se tiende a confundirlos o pensar que son el mismo tipo de cálculo. En uno de los artículos publicados por Gómez (2005) se menciona la facilidad con que se tiende a confundir estos dos tipos de cálculo. Dice que la diferencia del CE y CA es la procedencia de los datos, en la Tabla 2 se muestra lo mencionado por Gómez (2005).

Tipo de cálculo	Datos	Características	Ejemplo
Cálculo estimado	Que proceden de juicio o valoración	Este cálculo aprovecha las ventajas del sistema de numeración decimal. Por eso se trabaja con números redondos.	Si un objeto tiene un precio de 9.990 y se adquieren ocho de ellos. Podemos estimar que se necesitara 80.000. Lo que se hace es redondear 9.990 y efectuar la operación.
Cálculo aproximado	Que proceden de la medición	Este cálculo trabaja con números decimales, ya que está condicionado por la inexactitud de los instrumentos de medida.	Este se obtiene al medir con una regla, metro, balanza, báscula, etc. Siempre hay un margen de error que puede ser calculado.

Tabla 2. Tipos de cálculo, el CE y el CA.

Podemos evidenciar que para Gómez (2005) y Segovia y Castro (2009) la estimación y la aproximación tienen características que los hacen muy diferentes. Segovia y Castro (2009) hacen una tipificación del CE el primer tipo es la estimación en cálculo que corresponde con lo que llamamos CE. El segundo tipo es la estimación en medida que corresponde al CA. En el desarrollo de este trabajo se tendrá en cuenta únicamente el CE debido a que el CA aproximado no es de interés.

1.3. Diferencia entre cálculo mental y cálculo estimado

Las diferencias entre el CM y el CE descansan no solo en la procedencia de los datos o respuestas, sino en las características. Por eso para Quaranta & Ponce (2006) el CM se caracteriza por la gran variedad de estrategias que se adaptan a los números en juego y a los conocimientos del sujeto que las despliega. Que tiene relación con lo que indica Gómez (1988) quien establece que el CM se apoya en un conjunto muy limitado de hechos numéricos y requiere de algunas estrategias (conteos, recolocaciones, compensaciones,descomposiciones, resdistribuciones), además se resalta que los datos se pueden alterar para trabajar con unos que sean mas cómodos. Bressan, Marino, & Calamandrei (2005) entre las propiedades del cálculo mental también aluden que se pueden sustituir o alterar los datos iniciales por unos que permita hacer cálculos mas fácil de lo mencionado por Gómez (1988) y Bressan, Marino, & Calamandrei (2005) podemos determinar que para ellos[3], el CE es CM.

Revisando algunos de los documentos del MEN, encontramos en los Lineamientos curriculares de Matemáticas (LCM) MEN (1998) algunos aportes hacia la importancia del CM y en especial de la estimación en el desarrollo del pensamiento numérico en este documento se menciona la estimación como una actividad matemática muy poderosa para procesos como la resolución de problemas y el razonamiento. Chelle, García, Robalo, Sancha, Wall, & Novembre. (s.f.) muestran la estimación o el CE como un recurso que permite al sujeto que lo ejecuta anticipar y controlar resultados de cálculos. Que tiene gran relación con lo que menciona MEN (1998, p.52): *"La estimación (…) Incluye tomar decisiones sobre si la respuesta del cálculo es razonable o no (…)".* Además Fernández, J. (2004) recopila información sobre el CE y el CA y dice que la esencia principal de la estimación son las representaciones interiores y su valor contributivo al desarrollo del juicio lógico-deductivo, pues este es conveniente en ocasiones en las que se usan cantidades grandes. También Fernández, J. (2004) promueve el CE como instrumento para el control del cálculo exacto; sea este mental o escrito, "Ya que anticipa márgenes de validez para el resultado obtenido por dicha vía" (p. 81).

[3] Es de aclarar que, al parecer, para Gómez en 1998, el CE hacía parte del CM; pero para él mismo, en 2005, CM y CE son distintos.

Pero en contraposición a las ideas de que el CE es CM , Reys (1984 citado por Segovia y Castro 2009), menciona que en el CM se producen respuestas exactas pero no lo relaciona con el CE, dice él que cuando se hace uso del CM en estimación, se hace una selección previa de los números a operar; en esta selección se da lugar a respuestas aproximadas; así, para Reys (1984), el CE es distinto al CM.

Se han mostrado algunas de las definiciones e interpretaciones que ha tenido el CM y el CE; en esta recopilación fue posible evidenciar algunas características que hacen especiales a cada uno de estos cálculos y con características muy distintas. La primera distinción importante que se hace sobre el CM y el CE la hace Gómez (2005) quien menciona que el CM trabaja con datos exactos, mientras que el CE estimado no. Otros autores (Reys (1984), Castro (2009), Fernández, J (2004), Quaranta & Ponce (2006)) mencionan algunas características propias de cada uno de estos cálculos.

Tomando en consideración las ideas mencionadas anteriormente sobre el CM y el CE, se establece que el CM y el CE tienen su principal diferencia en el trabajo de los datos y de las respuestas; mientras que en el CE se hace uso de algunas estrategias (conteos, recolocaciones, compensaciones, descomposiciones, resdistribuciones) para hacer que los cálculos sean más fáciles; en el CM se trabaja con los datos iniciales y no se hacen alteraciones a ellos. Además, las respuestas que obtenemos al realizar CE no son exactas y en el CM sí. Por eso estamos de acuerdo con las ideas de Reys (1984).

CAPÍTULO 2

2. Importancia del cálculo mental

Aunque el CM no es muy usado actualmente en las aulas de clase, Alonso & Fuentes (2001) mencionan cómo el CM esta relacionado con el desarrollo y ejecución de partes cerebrales como el lóbulo parietal inferior izquierdo gracias a esto son muchas las capacidades y habilidades que se pueden desarrollar poniéndolo en práctica. La importancia del CM tiene su origen en la variedad de capacidades y habilidades que desarrolla en las personas, por eso en este capítulo mencionaremos algunas de las capacidades y habilidades más interesantes que el CM aporta el desarrollo del ser humano.

2.1. La memoria de trabajo y el cálculo mental

En un estudio longitudinal realizado por López (2014) a 90 estudiantes de una escuela en Argentina se establece la relación del CM con la *memoria de trabajo* [MT] en este se establece cómo los estudiantes con mayor habilidad para el CM tienen mejor MT. Como primera medida se considera necesario hacer una mirada, hacia la definición de memoria, y algunas características de esta, se hace con el fin de ampliar la mirada hacia la relación entre el CM y la memorización.

Etchepareborda y Abad-Mas (2005) dicen que "la memoria es la capacidad de retener y de evocar eventos del pasado" (p. 79), esta habilidad se hace mediante procesos neurobiológicos, que son básicos en al aprendizaje y el pensamiento. El desarrollo de la memoria está ligado a la edad; en la primera etapa la memoria guarda sensaciones o emociones, entonces el carácter es meramente sensitivo. Ya a mediana edad se ensayan y repiten movimientos, que se graban siendo esta la memoria de conducta y finalmente se desarrolla la memoria de conocimiento en la cual el sujeto adquiere información o conocimientos, que pueden ser evocados en momentos adecuados. La memorización tiene tres procesos básicos: codificación de la información, almacenamiento de la información y evocación o recuperación de la información.

2.1.1.Codificación de la información

Codificar la información se puede hacer de distintas maneras ya sea con un sonido, una imagen, una experiencia, una idea, etc. En este proceso se prepara la información para ser almacenada de manera parcial o permanente; para llevar esto acabo se debe tener en cuenta el contexto en que se encuentra el sujeto de esto depende que el proceso de memorización sea un éxito o un fracaso. Hay otros procesos iniciales como la atención, la concentración y el estado de ánimo del sujeto, que juegan un papel importante en esta primera fase.

2.1.2.Almacenamiento de la información

En esta segunda etapa se ordena, categoriza o se clasifica la información este proceso requiere tanto de una metodología como de estrategias inteligentes, de esta manera el almacenamiento de la información es más eficaz, y de acuerdo a ello el proceso llega a niveles distintos. El almacenamiento es un sistema complejo y dinámico que cambia con las experiencias en las que el sujeto está inmerso.

2.1.3.Evocación o recuperación de la información

En este último proceso mediante el cual se hace una recuperación de la información que se almacenó en los procesos anteriores. Si la información pasó por un proceso en el cual se almacenó y clasificó de manera adecuada, se localizará de manera rápida y se utilizará en el momento que se solicite.

Estos tres procesos mencionados anteriormente, son importante en el momento de realizar la memorización. Pero se resalta la importancia del método que se usa para almacenar la información, ya que debido a este la información se puede clasificar en niveles de memoria y dependen del momento en que se recuperé la información.

2.2. Niveles de memoria

Como se mencionó, los niveles de memoria aparecen dependiendo del momento en que se haga la recuperación de la información. De esta manera se pueden identificar tres niveles de memoria:

2.2.1.Memoria diferida

Para Schacter (1996) la memoria diferida o memoria a largo plazo se puede dividir en dos tipos, declarativa y de procedimiento. La memoria declarativa se basa en los procesos de memorización, pero la idea es realizar estos procesos de manera consciente y generalmente a través del lenguaje. La memoria de procedimiento es la que el sujeto lleva a cabo de manera automática y no consciente. Por otro lado, Tulving (1972) menciona que este tipo de memoria almacena la información en forma visual y verbal; además esta corresponde a todo lo que hemos almacenado o aprendido. Calfeé, 1977 dice que este nivel de memoria depende en gran medida de la frecuencia y contigüidad del sujeto.

2.2.2.Memoria inmediata

Este nivel de memoria está relacionado con lo que se llama registro sensorial o memoria sensorial; en esta la información no es procesada ya que viene de los sentidos. Entonces la información entra, pero se pierde rápidamente debido a que el tiempo en que permanece es corto.

2.2.3.Memoria mediata

La memoria mediata, memoria a corto plazo o MT, es "la que guarda y procesa durante breve tiempo la información que viene de los registros sensoriales (…)" (Etchepareborda & Abad-Mas, 2005, p. 80). Baddeley (1983) menciona que la MT permite retener algunos datos de información en la mente; se usa como un mecanismo de manera temporal y de esta manera la información puede compararse, contrastarse o relacionarse entre sí. La MT tiene como función el almacenamiento a corto plazo, además maneja la información necesaria para los procesos de alta complejidad los procesos en los que participa la MT son el control ejecutivo (procesamiento de la información) y sostenimiento activo (almacenamiento temporal).

La MT está fuertemente relacionada con la memoria a largo plazo, y permite que el sujeto tenga acceso a conocimientos, eventos y experiencias pasados que se mantienen online en la MT. La MT es necesaria para mantener los objetos y subobjetivos en la resolución de problemas, permite procesar la información de manera rápida. Además aporta en gran medida al lenguaje haciendo que el sujeto comprenda mejor las frases, almacena información sobre un texto y la codifica, para producir un significado coherente. Por lo tanto, la MT contribuye de manera significativa en la resolución de problemas ya que le permite al estudiante operar con mayor precisión.

Ahora teniendo en cuenta lo mencionado en el último párrafo; profundizaremos un poco en la relación CM y MT, por ser de interés para este trabajo.

Para López (2014, p. 68) la MT “representa [a] la capacidad de mantener y manipular información online[4] para alcanzar un objetivo”. Baddeley y Hitch (1974, citados por López, 2014) formularon un modelo multicomponente de MT integrada por tres componentes (el ejecutivo central, bucle fonológico y la agenda viso-espacial). En los resultados de esta investigación se concluye la importancia que tiene la MT y en particular el componente ejecutivo central para la resolución de problemas aritméticos que en este caso son mentales. El componente ejecutivo central tiene la capacidad de coordinar el desempeño entre dos tareas separadas, el cambio entre tareas, la capacidad para atender selectivamente a un estímulo e inhibir el efecto de información irrelevante y activar temporalmente representaciones de la memoria a largo plazo[5].

Para Colom y Flores (2001) la MT tiene tres funciones:

a) el almacenamiento, procesamiento mental y transformación de los contenidos a través de las operaciones mentales, en la cual se mantienen activos los contenidos mentales.

b) tutelar y controlar las acciones mentales, y

c) las de coordinación, que abarcan tres aspectos: coordinar la información de distintas fuentes, coordinar operaciones mentales y coordinar los elementos en estructura.

Entonces teniendo en cuenta los resultados encontrados por López (2014), y estudios realizados por Baddeley y Hitch (1974), se evidencia la importancia de la MT y en particular, el ejecutivo central para la resolución de problemas aritméticos mentales (CM).

2.3. Funciones ejecutivas y el cálculo mental

Otros procesos relacionados con el CM son las *funciones ejecutivas* [FE], que tienen una fuerte relación con el desarrollo de la MT. Por lo tanto el CM está involucrado en el desarrollo de las funciones ejecutivas y de algunas zonas del cerebro.

[4] Entendemos esta palabra desde su utilización frecuente, para indicar conexión.

[5] Por su parte, el bucle fonológico es el encargado de almacenar y mantener información verbal; mientras que la agenda viso espacial se encarga de lo correspondiente a lo visual-espacial, como su nombre lo indica. No se profundiza en ello por no considerarse fundamental para este escrito.

2.3.1. Funciones ejecutivas

Papazian, Alfonso & Luzondo (2006) establecen que las FE son procesos mentales que permiten resolver problemas internos y externos. Los problemas internos hacen referencia a todas aquellas actividades creativas y conflictos de interacción social, afectivos, comunicativos y motivacionales que se obtienen como el resultado de representaciones mentales. Los problemas externos se dan de la relación entre el sujeto y su entorno. La principal función de las FE es solucionar estos problemas de manera eficaz y satisfactoria para la persona y la sociedad en que está involucrada. Arán (2011, p. 99) hace referencia a las FE como "un constructo multidimensional que engloba una serie de procesos cognitivos necesarios para realizar tareas complejas dirigidas hacia un objetivo". Además Lezak, 1982 menciona que las FE incluyen capacidades para plantear objetivos y planear cómo ejecutarlos y alcanzarlos de manera eficaz, que tiene un poco de relación con lo mencionado por Arán (2011).

2.3.2. Funciones ejecutivas y memoria de trabajo

Para entender la relación entre las FE y la MT hacemos mención al cerebro humano. El cerebro es un órgano humano, con la capacidad de recibir información, analizarla, integrarla, transmitir órdenes. Está a cargo de la conducta, el pensamiento, los sentimientos, el lenguaje; para concluir, el cerebro está presente en todas las acciones que realizamos en nuestro diario vivir. La parte del cerebro que es esencial en el desempeño de las FE es la corteza prefrontal, que posibilita llevar a cabo una serie de operaciones mentales que permiten al sujeto resolver problemas, Papazian, et al. (2006) dicen que la corteza prefrontal además permite:

- La inhibición de la respuesta prepotente, de las respuestas o patrones de respuestas en marcha y de la interferencia de otros estímulos no relevantes.
- La activación de la memoria de trabajo verbal y no verbal.
- La autorregulación del estado de alerta, emocional y motivacional.
- El planteamiento, planeamiento, ordenamiento y evaluación de los resultados.

Papazian, et al. (2006) mencionan cómo la MT es un proceso mental que se desarrolla a través de las FE, y ven la MT como un proceso mental que va ligado a la edad y que permite que el sujeto tenga la capacidad para almacenar, monitorear y manejar información pero de manera limitada. Se dice además cómo es importante en el aprendizaje de las matemáticas y el lenguaje.

Podemos ver cómo las FE, son responsables de muchos de los procesos mentales que se dan en el cerebro, por lo tanto un buen desarrollo de las FE dan lugar al desarrollo de capacidades que contribuyen al mejoramiento del CM como son la MT y el resolver problemas de manera eficaz, por tanto a modo de conclusión las FE y la MT contribuyen al desarrollo del CM, por lo que fomentar actividades que desarrollen las FE y la MT son importantes a la hora de promover el CM en el aula.

2.4. Pensamiento numérico, sentido numérico y cálculo mental

El pensamiento numérico y sistemas numéricos es uno de los cinco conocimientos básicos que propone el MEN (1998); está relacionado con el sentido numérico y el sentido operacional, habilidades, destrezas numéricas, las comparaciones, las estimaciones, etc. En los Estándares curriculares y de evaluación para la Educación Matemática (NCTM, 1989, citado por MEN, 1998, p. 43) el sentido numérico, según el MEN, es "una intuición sobre los números que surge de todos los diversos significados del número"; por otro lado el pensamiento numérico "(…) se refiere a la comprensión en general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias (…)" (Mcintosh, 1992, citado por MEN, 1998, p. 43).

Para el MEN (1998, p.43) el pensamiento numérico "se adquiere gradualmente y va evolucionando en la medida en que los alumnos tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en contextos significativos". En los LCM se proponen tres aspectos fundamentales los cuales ayudan a desarrollar el pensamiento numérico:

- Comprensión de los números y de la numeración.
- Comprensión del concepto de las operaciones.
- Cálculos con números y aplicaciones de los números y operaciones.

Se hace mención al CM por primera vez en los LCM en el aspecto *Comprensión del concepto de las operaciones*, en el cual se menciona cómo desde hace un tiempo atrás las propiedades de estas se han enseñado como un conjunto de reglas formales, y para que los estudiantes aprecien las propiedades es necesario que vean los números como elementos que se pueden manipular en cualquier contexto; la importancia de las propiedades de las operaciones radica en el hecho de que los estudiantes sean capaces de solucionar problemas de la vida real, y en especial, efectuar operaciones con destreza y eficacia, para esto se hace uso del CM (MEN, 1998). Los NCTM (1989, citado por MEN, 1998) mencionan que los cálculos con números y aplicaciones de los números y operaciones, tienen como finalidad la resolución de problemas:

> Por lo tanto, aunque el cálculo sea importante para las matemáticas y para la vida diaria, la era de la tecnología en que vivimos nos obliga a replantear la forma en que se utiliza el cálculo hoy en día. Hoy casi todos los cálculos complejos los hacen las calculadoras y los computadores. En muchas situaciones de la vida

> diaria, las respuestas se calculan mentalmente o basta con una estimación, y los algoritmos con lápiz y papel son útiles cuando el cálculo es razonablemente simple. (p. 51*)*.

En los LCM (MEN, 1998) se menciona la importancia del CM en el desarrollo de pensamiento numérico debido a que tradicionalmente el trabajo que se hace en las escuelas se limita a que los estudiantes adquieran destrezas en el cálculo a través de los algoritmos formales, y no se aplican en situaciones prácticas; en muchos de los casos los estudiantes no comprenden ni los conceptos que los fundamentan ni el significado que tienen las operaciones. Por eso el CM y el CE dan paso a que las operaciones sean más dinámicas y los estudiantes desarrollen ideas sobre relaciones numéricas. Además los LCM (MEN, 1998) dicen que el CM, CE y CA tienen una alta utilidad en la vida cotidiana, y permiten que el estudiante desarrolle técnicas de CM las cuales les permitan anticipar el resultado y de esta manera evitar posibles errores.

No obstante lo presentado, al indagar sobre las relaciones entre Pensamiento Numérico [PN], Sentido Numérico [SN] y CM, se halla que, el término PN aparece en la normatividad colombiana y además en algunos documentos hechos por Castro, E (2008), Dantzing (1954), Dehaene (1997), entre otros. Sin embargo es de aclarar que lo adoptado por los LCM (MEN, 1998) como PN, no se corresponde con lo mencionado con los otros autores y, de hecho, el mismo Mcintosh (1992) citado por el MEN no hace alusión a PN sino a SN, para él:

> Number sense refers to a person's general understanding of number and operations along with the ability and inclination to use this understanding in flexible ways to make mathematical judgements and to develop useful strategies for handling numbers and operations.(P. 3)

Macintosh (1992) menciona que el SN se hace presente en cómo el alumno se involucra con el pensamiento matemático, es importante el modo en que el alumno elige, desarrolla y utiliza métodos escritos, cálculo mental, calculadoras y estimación. El SN juega un papel en el uso de cada uno de estos métodos en diferentes grados. Los National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) afirman que los alumnos deberían ser capaces de explicar el método por el cual resolvieron la situación, independientemente del método usado; la importancia de esto es ver la utilidad de los métodos usados y de esta manera identificar que sean eficaces, seguros y generales. También el NCTM (2000) dice que los estudiantes "También necesitan ser capaces de estimar y juzgar lo razonable de los resultados. La fluidez en cálculo debería desarrollarse conjuntamente con la comprensión del papel y el significado de las operaciones aritméticas en los sistemas numéricos." (p. 34)

Heirdsfield, Cooper & Irons (1999) resaltan también la importancia del CM en el desarrollo del sentido numérico por lo cual dicen lo siguiente "Interest in mental computation as an important computational method is not new. However, its significance is now seen in terms of its contribution to number sense as a whole." (p. 1). Heirdsfield, et. al (1999) mencionan cómo la enseñanza del CM, debería tener una atención más importante "because of its value in developing number sense and higher order thinking." (p. 10). Verschafel & De corte, (1996 citados por Heirdsfield, et. al, 1999) dicen que el CM mental necesita ser visto como "inventing and applying strategies that are idiosyncratic but appropriate for a particular problem, based on one's understanding of the basic features of the number system and of the arithmetic operation"

Para Castro (2008) el SN conlleva a una comprensión sobre la naturaleza de los números y las operaciones, que es no algorítmica. Una persona con alto SN muestra poseer ciertas habilidades para los números, sus múltiples relaciones y da varios usos dando diferentes interpretaciones de todo ello. Es de aclarar que el SN lo poseen todas las personas, pero en un grado de desarrollo distinto. Castro, E (2008, p. 4) menciona que las acciones propias de un SN desarrollado son:

- Entender cómo y cuándo usar los números.
- Hacer inferencias sobre valores numéricos apreciando los distintos niveles de exactitud donde aparecen.
- Componer y descomponer números cuando la situación lo requiere.
- Utilizar los números en distintas representaciones de manera flexible, reconocer cuando una representación es más útil que otra y utilizarla.
- Reconocer la magnitud de los números y hacer juicios cuantitativos ajustados.
- Conocer los efectos relativos de las operaciones sobre los números y percibir la razonabilidad de los resultados y el orden de la magnitud de los mismos.
- Detectar errores aritméticos cometidos.
- Utilizar referentes como hechos numéricos que modificados y adaptados proporcionan el resultado deseado.
- **Realizar CM con gran facilidad utilizando en cada caso la estrategia adecuada.**
- Reconocer cuando una estimación es apropiada para dar respuesta a una situación planteada.
- Operar con números de forma diferente a la repetición mecánica de los procesos que se tienen memorizados.

Como se aprecia, el SN es complejo, y se refiere a una diversidad de capacidades importantes, entre ellas el CM. Pero, por encima de todo, el SN se caracteriza por un deseo de aportar raciocinio a las distintas situaciones numéricas. No se puede dar sentido a los números sin dotarlos de significado y relacionarlos significativamente. Este significado puede ser desarrollado como consecuencia del trabajo y uso de los números en una diversidad de situaciones y representaciones.

CAPÍTULO 3

3. El cálculo mental y la educación en matemáticas en algunos países de habla hispana

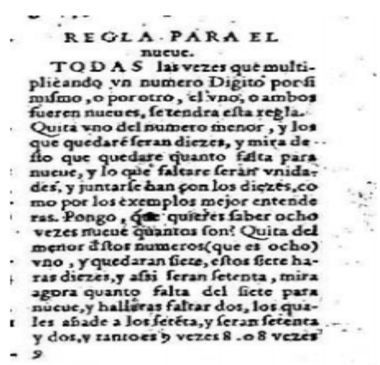
El CM perdió su importancia debido a las herramientas tecnológicas con las que compartimos el diario vivir (computadores, celulares, calculadoras); sin embargo, Gálvez, Cosmelli, Leger, Mena, Tanter y otros (2011) mencionan cómo en las últimas decádas el CM ha resurgido y cobra importancia como una actividad cognitiva en la enseñanza-aprendizaje temprano, de las matemáticas. A continuación hacemos una revisión de la presencia del CM en la enseñanza de la educación en Matemáticas propuestas en algunos países de habla hispana. Se hace esta recopilación para mostrar si existe interés por este tema en diversos países.

3.1. El CM en España

En los últimos años los trabajos más importantes realizados alrededor del CM han surgido en España, encabezados por Bernardo Gómez quien ha hecho diversos estudios en los que menciona la importancia del CM en la enseñanza de las Matemáticas. Por eso propone el cálculo flexible este ya se había mencionado anteriormente, y un tipo de cálculo el cual busca ser un método de integración de los métodos de cálculo mental Gómez (2005) menciona cómo este método tiene la ventaja que permite en el aula de clase fomentar la discusión, y mediante esta discusión se le dé significado a lo que se realiza en clase. El CM en el currículo español de 1970 (MEC, 1970) se ubica dentro de los objetivos específicos del área de matemáticas, allí se menciona el desarrollo de la agilidad mental más no el CM. En la renovación hecha en 1981, sí se menciona de manera explícita el CM, relacionado con la resolución de situaciones de la vida real y las propiedades de las operaciones. Ya en el último modelo educativo español (LOGSE), el CM tiene un mayor protagonismo, concretamente se menciona el CM aditivo, en el cual se tiene en cuenta la conmutación, la descomposición, redondeo, conteo y duplicado; se hace mención también al CM multiplicativo donde intervienen la distribución y la factorización. Gómez (1995 b) dice que en este enfoque actual, lo innovador es que está orientado hacia el cálculo flexible, con el cual se defiende la autonomía, la exploración y la reflexión de los procedimientos, además expresa que el CM tiene un papel importante en la adquisición de los conceptos relacionados con las operaciones. Gómez (1995) a través de la revisión de libros de texto españoles a lo largo de la historia propone cuatro modelos de enseñanza de los métodos de CM[6]. A continuación describiremos los cuatro modelos:

3.1.1. El método de las reglas breves

Gómez (1995) hace mención a cómo en el siglo XIX la enseñanza del cálculo aritmético tenía niveles de exigencia muy superiores a los actuales tanto que en este tiempo se considerarían excesivos. En ese siglo se buscaba formar expertos calculistas que fueran capaces de resolver una situación de distintas maneras pero utilizando la más eficaz. Este método de enseñanza entonces consistía en presentar a los estudiantes bajo las reglas breves, gran cantidad de métodos sobre una operación, pero estos no tienen relación con las propiedades y principios que dan fundamento y explicación a las operaciones. En la ilustración 1 tomada de Gómez (2005) se muestra un ejemplo.



REGLA PARA EL nueue.

TODAS las vezes que multiplicando vn numero Digito por si mismo, o por otro, el vno, o ambos fueren nueues, se tendra esta regla. Quita vno del numero menor, y los que quedarê seran diezes, y mira de esto que quedare quanto falta para nueue, y lo que faltare serán vnidades, y juntarse han con los diezes, como por los exemplos mejor entenderas. Pongo, que quieres saber ocho vezes nueue quantos son? Quita del menor destos numeros (que es ocho) vno, y quedaran siete, estos siete haras diezes, y assi seran setenta, mira agora quanto falta del siete para nueue, y hallaras faltar dos, los quales añade a los setêta, y seran setenta y dos, y tanto es 9 vezes 8 . o 8 vezes 9

Regla para el nueve

Todas las veces que multiplicando un número Digito por si mismo, o por otro, el uno o ambos fueren nueves, se tendrá esta regla. Quita uno del número menor, y los que quedare serán dieces, y mira de esto que quedare cuanto falta para nueve, y lo que faltare serán unidades, y juntarse han con los dieces, como por los ejemplos mejor entenderás. Pongo, que quieres saber ocho veces nueve cuántos son. Quita del menor e estos números (que es ocho) uno, y quedarán siete, estos siete harás dieces, y así serán setenta, mira ahora cuanto falta del siete para nueve, y hallarás dos, los cuales añade a los setenta, y serán setenta y dos, y tanto es 9 veces 8 o 8 veces 9.

Pérez de Moya, Tratado de Matemáticas. 1563, p. 117

Ilustración 1. Ejemplo método de las reglas breves, regla para el 9.

Este método de las reglas breves se considera como un método de CM debido a que se contaba con gran cantidad de estrategias de cálculo aritmético las cuales eran enseñadas y memorizadas; en esa época el cálculo por lo general se hacía ábacos, tableros cubiertos con polvo, sabanas con harina, etc. Por lo que los cálculos intermedios no podían ser fácilmente retenidos, lo que les permitió desarrollar la memorización y el CM para hacer rápidamente las operaciones intermedias que se les presentaban y de esta manera solo registrar los datos importantes.

---

[6] Aunque Gómez indica que el CM no aparecía en los libros de texto tal como hoy lo concebimos; no obstante, sí hay vestigios de ello.

3.1.2. Los métodos de abreviación

Gómez (1995) menciona como a comienzos del siglo XX en los libros de Aritmética se recuperaron algunas estrategias de cálculo aritmético con las cuatro operaciones básicas, de esta manera los estudiantes podrían abreviar o atajar los tediosos y rutinarios cálculos en aquellas situaciones que lo requirieran, pero no formaron parte de la enseñanza obligatoria, más bien aparecían en los capítulos complementarios o avanzados de los libros para aquellos estudiantes que deseaban mayor profundización o adiestramiento. En la ilustración 2 tomada de Gómez (2005) se muestra ejemplo encontrado en un libro de Dalmau.

732. *Multiplicar un número cualquiera por 5, 50, 500, 5000, etc.*

Basta añadir a la derecha del multiplicando uno, dos, tres, cuatro, etc., ceros, y sacar la mitad del número que resulte; esta mitad es el producto.

Multipliquemos 256 por 5, 50, 500 y 5000.

256 × 5 — 1/2 2560 — Producto 1280
256 × 50 — 1/2 25600 — Producto 12800
256 × 500 — 1/2 256000 — Producto 128000
256 × 5000 — 1/2 2560000 — Producto 1280000

733. *Multiplicar un número cualquiera por 4 o por 6.*

Basta añadir un cero a la derecha del multiplicando, sacar la mitad y restar en el primer caso, o sumar en el segundo.

EJEMPLOS: 256 × 4 = ... 256 — Mitad de 2560 1280 — Resta, que es el producto.... 1024
256 × 6 = ... 256 — Mitad de 2560.............. 1280 — Suma, que es el producto.. 1536

734. *Multiplicar un número cualquiera por 25.*

Se le añaden dos ceros a su derecha y se saca 1/4.

EJEMPLOS: 423 × 25 = ... 42300 — 4.ª parte, que es el producto.. 10575
1754 × 25 = ... 175400 — 4.ª parte, que es el producto. 43850

735. *Multiplicar un número cualquiera por 125.*

Se le añaden tres ceros a su derecha y se saca 1/8.

EJEMPLOS: 126 × 125 = . 126000 — 8.ª parte, que es el producto. 15750
2653 × 125 = ... 2653000 — 8.ª parte, que es el producto. 331625

732. Multiplicar un número cualquiera por 5, 50, 500, 5000, etc.

733. Multiplicar un número cualquiera por 4 o por 6. Basta añadir un cero a la derecha del multiplicando, sacar la mitad y restar en el primer caso, o sumar en el segundo.

734. Multiplicar un número cualquiera por 25.

735 Multiplicar un número cualquiera por 125.

Dalmau. 1944, p. 341

Ilustración 2. Ejemplo métodos de abreviación, método combinado.

3.1.3. La aritmética mental

Gómez (1995) dice que en el siglo XX se vuelve a considerar que la mente está constituida por facultades y por esta razón se puede ejercitar y fortalecer a través del entrenamiento. Esto llevó a considerar a la "disciplina mental" como un objetivo educativo, de esta manera se propusieron materias con el fin de desarrollar el entrenamiento de la mente. La aritmética mental fue una de las materias propuestas que se destacó; se produjeron libros destinados a operaciones y problemas para ser resueltos de cabeza. Es de aclarar que, como lo mencionan Faura y Pacheco (2009) “el contexto en que se describe el desarrollo historico de la enseñanza del cálculo mental es el estado Español, pero muchas situaciones y reflexiones son aplicables a nuestro pais”. (p. 3) En la ilustración 3 tomada de Gómez (2005) se muestra un ejemplo de los textos en los cuales la aritmética mental es el eje central.

265. Pedro y Antonio poseen juntos 15'75 ptas. Dígase cuánto tiene Pedro si Antonio posee 7'50 ptas.

Pedro tiene 15'75 — 7'50 = **8'25 ptas.**

266. Una factura suma 1.847'50 ptas. ¿ Cuánto deberá entregar el comprador si le descuentan 56'95 ptas. ?

Deberá entregar 1.847'50 — 56'95 = **1.790'55 ptas.**

267. Recibí 2.485 ptas. con encargo de pagar 1.458 pesetas. ¿ Cuánto me quedará ?

Me quedarán 2.485 — 1.458 = **1.027 ptas.**

268. La suma de dos números es 246'53; uno de ellos es 153'89. ¿ Cuál es el otro ?

El otro es 246'53 — 153'89 = **92'64.**

* * *

Resta de centenas, decenas o unidades. — Resta de decenas y unidades.

* 269.	* 270.	* 271.
400—200 = **200.**	783—753 = **30.**	727—715 = **12.**
500—100 = **400.**	475—425 = **50.**	445—432 = **13.**
680—640 = **40.**	539—529 = **10.**	634—618 = **16.**
790— 90 = **700.**	668—648 = **20.**	825—815 = **10.**
845—345 = **500.**	899—819 = **80.**	133—118 = **15.**

Resta de centenas, decenas y unidades.

EJEMPLO : *753 — 528.* 753 menos 500, 253 ; 253 — 30, 223 ; 223 más 2, **225.**

* 272.	* 273.	* 274.
600—515 = **85.**	450—445 = **5.**	442—331 = **111.**
500—475 = **25.**	720—605 = **115.**	618—308 = **310.**
300—234 = **66.**	890—735 = **155.**	783—452 = **331.**
700—623 = **77.**	670—454 = **216.**	965—833 = **132.**
900—832 = **68.**	950—815 = **135.**	878—345 = **533.**

Números de cuatro cifras.

* 275.		* 276.	
	6.000—1.000 = **5.000.**		4.200—4.000 = **200.**
	7.000—3.000 = **4.000.**		5.700—5.000 = **700.**
	5.000—1.000 = **4.000.**		8.240— 240 = **8.000.**
	8.000—4.000 = **4.000.**		7.228— 218 = **7.010.**
	9.000—2.000 = **7.000.**		9.145—9.128 = **17.**

Ilustración 3. Ejemplo de La aritmética mental.

3.1.4. El cálculo mental

Gómez (1995) dice que a medida que fue pasando el tiempo se abandonó la idea de que la mente está constituida por facultades de esta manera se dio inicio a otra en la cual el utilitarismo y a las aplicaciones de la vida real eran fundamentales. Gómez (2005) manifiesta que “Bajo esta idea se introduce el término “cálculo mental” para referirse a un tipo de cálculo que pretende desarrollar la “agilidad mental y el ´cálculo rápido´”.(p. 23). En la ilustración 4 tomada de Gómez (2005) se muestra un ejemplo.

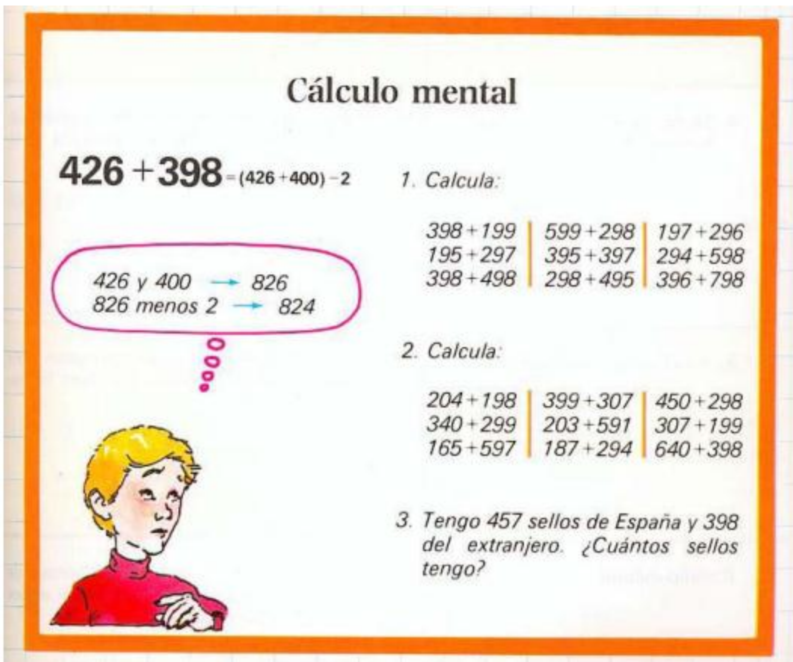


Ilustración 4. Ejemplo de cálculo mental.

Los modelos de enseñanza mencionados anteriormente se destacan porque en todos se considera la importancia del CM en el ámbito escolar. Gómez (2005) propone para la enseñanza del CM algo innovador y de esta manera enmarcar el CM en un programa orientado a un “cálculo flexible”, que se proponga disminuir el énfasis tradicional sobre el cálculo escrito rígido, en favor de una combinación de cálculo variado: mental, estimado, con calculadora o con algoritmos estándar, según convenga al momento, a la situación y, al tamaño y características de los números involucrados.

Gómez (2008) menciona que en un problema ordinario intervienen distintos tipos de cálculo (CM, CE, CA, escrito o con calculadora). De esta manera propone como modelo de enseñanza el **cálculo flexible**, enfocado a la toma de decisiones teniendo en cuenta las diferentes opciones y métodos alternativos de cálculo.

3.2. El CM en Colombia

Los documentos que consultados para identificar la presencia del CM en el currículo escolar de Colombia fueron LCM (MEN, 1998), (EBCM) (MEN, 2006) y Derechos Básicos de Aprendizaje [DBA] (MEN, 2015). Se hizo la consulta de cada uno de ellos y algunos de los aportes encontrados son los siguientes:

LCM

En los LCM (MEN, 1998) se menciona la importancia del CM en el desarrollo de PN debido a que tradicionalmente el trabajo que se hace en las escuelas se limita a que los estudiantes adquieran destrezas en el cálculo a través de los algoritmos formales, y no se aplican en situaciones prácticas; en muchos de los casos los estudiantes no comprenden ni los conceptos que los fundamentan ni el significado que tienen las operaciones. Por eso el CM y el CE dan paso a que las operaciones sean más dinámicas y los estudiantes desarrollen ideas sobre relaciones numéricas. Además los LCM (MEN, 1998) dicen que el CM, CE y CA tienen una alta utilidad en la vida cotidiana, y permiten que el estudiante desarrolle técnicas de CM, las cuales les permitan anticipar el resultado y de esta manera evitar posibles errores. Todo esto tiene lugar dentro de uno de los cinco conocimientos básicos que propone el MEN (1998) que es el PN y sistemas numéricos este pensamiento está relacionado con el SN y el sentido operacional, habilidades, destrezas numéricas, las comparaciones, las estimaciones, etc.

EBCM

Estos EBCM fueron publicados por el MEN en el año 2006, en ellos se ven reflejados los parámetros de lo que todo estudiante colombiano debe saber y saber hacer para lograr el nivel esperado en su paso por el sistema educativo y además en las pruebas externas e internas. El principal objetivo que se busca es que un estudiante sea matemáticamente competente, para llevar a cabo esto el estudiante requiere ser diestro, eficaz y eficiente en el desarrollo de cada uno de los procesos generales (la formulación, tratamiento y resolución de problemas; La modelación; la comunicación; el razonamiento y, la formulación, comparación y ejercitación de procedimientos). Además para que un alumno sea competente en Matemáticas debe desarrollar el pensamiento lógico y el pensamiento matemático, el cual se subdivide en los cinco tipos de pensamiento propuestos por el MEN (1998) en los LCM: PN y sistemas numéricos, pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento métrico y los sistemas métricos o de medidas, pensamiento aleatorio y los sistemas de datos y pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos.

De estos cinco pensamientos mencionados el CM se encuentra ubicado dentro del pensamiento numérico y sistemas numéricos, en este se incluye la importancia del desarrollo de diferentes técnicas de cálculo y estimación. En la tabla 3 se muestran los Estándares Básicos de Competencias los cuales tienen relación con el CM.

Pensamiento numérico y sistemas numéricos	Grados
Uso diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.	Primero a tercero
Uso diversas estrategias de cálculo y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.	Cuarto a quinto
Identifico, en el contexto de una situación, la necesidad de un cálculo exacto o aproximado y lo razonable de los resultado obtenidos.	
Justifico la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable o no de las respuestas obtenidas.	Sexto a séptimo

Tabla 3. Estándares básicos de Competencia en Matemáticas relacionados con el CM.

Se puede observar que el CM en los primeros años escolares se considera como uno de los saberes principales para el PN.

DBA

Los DBA son actualmente el último documento publicado por el MEN (2015) con referencia al tratamiento curricular en matemáticas y en lenguaje; en ellos se presentan un conjunto de saberes y habilidades fundamentales que los estudiantes han de aprender en cada uno de los grados de primero a once de la educación escolar. MEN (2015) menciona que los DBA se estructuran guardando coherencia con los LCM y los EBCM la importancia de los DBA radica según el MEN (2016) “en que plantean elementos para construir rutas de aprendizaje año a año para que, como resultado de un proceso, los estudiantes alcancen los EBC propuestos para cada grupo de grados.” (p. 2). Además se menciona que los DBA por sí solos no son una propuesta curricular y por lo tanto cada institución educativa debe articularlos en el marco de los Proyectos Educativos Institucionales.

Como se mencionó, los DBA están diseñados para cada uno de los grados desde 1° a 11°. Haciendo una revisión se encontraron los siguientes DBA relacionados con la enseñanza del CM, resumidos en la Tabla 4.

Derechos Básicos de Aprendizaje	Grado
Resuelve distintos tipos de problemas sencillos que involucren sumas y restas con números de 0 a 99.	1°
Resuelve distintos tipos de problemas que involucren sumas, restas, multiplicaciones, y divisiones.	3°
Puede estimar el resultado de un cálculo sin necesidad de calcularlo con exactitud.	5°
Usa números decimales de hasta tres cifras después de la coma (Multiplica y divide por 10, 100, 1000, etc. por escrito y mentalmente).	

Comprende en qué situaciones necesita un cálculo exacto y en qué situaciones se puede estimar.	6°

Tabla 4. Derechos Básicos de Aprendizaje.

En la anterior tabla se muestran algunos de los DBA encontrados los cuales tienen alguna relación con el CM es claro ver que en este nuevo documento publicado por el MEN no se le da la importancia al CM y al desarrollo del PN como se le daba en los anteriores documentos. A pesar de que se menciona en un principio que los DBA buscan que los estudiantes alcancen los EBC, son muchos los que se quedan por fuera que tienen gran importancia como es el caso del CM y en más en general el desarrollo del PN.

Se puede observar cómo en los últimos años en Colombia, se han generado documentos por parte del MEN con el fin de establecer unos elementos para el currículo de Matemáticas con el fin de mejorar la educación. En los documentos publicados en el 1998 y 2006 se encuentra una mayor presencia del CM en el currículo de matemáticas y se puede evidenciar que es constante en los primeros años escolares y muestra la gran importancia que tiene enseñarlo para la vida diaria; sin embargo, en el último documento publicado por el MEN se les resta importancia al CM. Se considera que en los primeros documentos hay unas bases más sólidas que permiten reconocer cómo el CM hace aportes en el desarrollo del PN en los estudiantes, bases que no se evidencian en los DBA por lo que se toman en cuenta los aportes hechos de primera mano por el MEN en los LCM y EBCM.

3.3.El CM en Argentina y Chile

En Argentina podemos ver el CM en el diseño curricular del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires [G.C.B.A.] (2004), donde se le da prioridad en el área de Matemáticas dentro lo que se debe enseñar en el primer ciclo, siendo esto el "cálculo exacto y cálculo aproximado". Se dice que se debe disponer de varios procedimientos y técnicas de cálculo, con el fin de buscar el más pertinente para resolver un problema. Se menciona que la enseñanza del cálculo debe tener un enfoque diversificado, en el cual se incluye cálculo exacto, CM, y CA, G.C.B.A (2004, p. 312) dice que este enfoque diversificado "crea un ambiente de resolución de problemas que lleva a los alumnos a discutir, analizar, preguntar, elaborar estrategias, justificar y validar sus respuestas.". En G.C.B.A (2004) se plantea que históricamente se ha dado prioridad a la enseñanza de los algoritmos de las cuatro operaciones, con lo cual se ha dejado de lado otras modalidades de cálculo. Por eso se invita a permitir y favorecer la aparición de otras estrategias de cálculo.

En la enseñanza básica chilena el Ministerio de Educación (MINEDUC), definió en el 2002 el CM como un área de interés destacado en la educación general básica de los programas de primero a cuarto año. MINEDUC promueve explícitamente el desarrollo en las aulas de clase de estrategias de CM. Gálvez et al. (2011) mencionan que a pesar de los esfuerzos hechos por el MINEDUC para promover la enseñanza del CM, en las aulas todavía se enseñan los procedimientos únicos de cálculo escrito que son utilizados y memorizados por los estudiantes.

De esta manera se ve que lo propuesto en Chile para la enseñanza no se han acogido,; Gálvez et al. (2011) dicen que producto de la poca acogida de estos programas, son los malos resultados obtenidos en pruebas estandarizadas (SIMCE, TIMMS, PISA), debido a que un buen desempeño en CM da una aventaja para contestar de manera rápida y correcta muchas de las preguntas que aparecen en estas pruebas.

Podemos evidenciar que en muchos países de habla hispana, el CM aparece de manera explícita y como un tema de interés, debido a la importancia que tiene en la enseñanza de las Matemáticas. Por eso aparece en los currículos de países como Argentina, Chile, Colombia y España, pero es claro que a pesar de los esfuerzos hechos por estos países por promover el desarrollo del CM, son pocos los avances que se han hecho para que esto sea una realidad. Se plantea como hipótesis que una de las causas de que en estos países el CM no haya tenido una mayor utilización en el aula, se debe a la poca preparación que tienen los profesores alrededor de este tema y al desconocimiento sobre sus aportes a la educación en Matemáticas; de hecho, desde la perspectiva local de la UPN, en los espacios académicos ofrecidos por la Licenciatura en Matemáticas el CM no es un tema que sea considerado para su estudio o tratamiento, tanto en los espacios académicos de Matemáticas como en los de Didáctica, si acaso se menciona, se hace someramente. Parece un poco extraño que a pesar de su importancia el CM no tenga un papel primordial en la formación de un futuro profesor de Matemáticas.

CAPÍTULO 4

4. Algunas estrategias en el cálculo mental

Como se había mencionado en anteriores capítulos, el CM es un proceso mental o cognitivo, mediante el cual se realizan operaciones aritméticas con el fin de dar respuesta a una situación matemática y obtener un resultado exacto a partir de datos, también exactos. No se puede hacer uso de elementos o ayudas externas. Por eso a continuación se hace una recopilación de algunas técnicas[7] y estrategias[8] que son útiles a la hora de desarrollar el CM. Esta recopilación recoge técnicas y estrategias para cada una de las operaciones básicas en el conjunto de los Números naturales.

4.1.El método de Trachtenberg

Antes de iniciar con esta recopilación se considera importante resaltar un método de CM inventado por **Jakow Trachtenberg** (1888-1953) debido a su antigüedad y a lo interesante que resulta ser, denominado precisamente como su autor: *el método Trachtenberg*. Este método tuvo origen en un campo de concentración nazi del cual era prisionero Trachtenberg este hombre con el fin de mantenerse ocupado ideó el método. Consiste de algunos patrones memorizables que facilitan realizar cálculos aritméticos sin ayuda de lápiz y papel.

Los métodos inventados por Trachtenberg, permiten hacer multiplicaciones de manera fácil y rápida, privilegian el conteo y evitan que la persona que los usa conozca de antemano las tablas de multiplicar del 3 en adelante. A continuación se describen algunos de estos métodos[9].

---

[7] Con respecto al concepto de técnica se tiene en cuenta a Nassif (1958) citado por Delgado Y Palacios (s.f) quien en su obra Pedagogía General analiza tres conceptos de técnica del cual se considera que el mas completo es "Conjunto de procedimientos de que se vale la ciencia o el arte para lograr un determinado resultado. En general un recurso que el hombre utiliza como medio para alcanzar un objetivo".

[8] Para consideración de este trabajo se va a tener en cuenta la definición de estrategia de García (2011) en la cuál se dice que una estrategia es "Toda representación, organización y transformación de la información realizada por el resolutor, que describe de manera general su proceder en la búsqueda de la solución y que es apenas una de las formas de llegar a la misma".

[9] La explicación de algunos de estos métodos se encuentra en el Apéndice de ese documento no se colocaron en el dentro del cuerpo por no ser el tema de interés de este.

4.1.1. Multiplicación por 3

El producto se obtiene, siguiendo este procedimiento (los números se leen de derecha a izquierda) el cual se ilustra con un ejemplo al lado derecho en la Tabla 5.

Procedimiento	Ejemplo
1. Se agrega un cero al principio y al final del multiplicando[10].	Supongamos que el producto a hallar es **6453** × 3; así que el primer paso es: **064530**
2. Se halla la diferencia entre 10 y el primer dígito del multiplicando, el resultado obtenido se duplica. Si el dígito es impar se suma cinco a este producto. La cifra de las unidades del número obtenido se ubica debajo del primer dígito del multiplicando, y las decenas se ubican sobre el segundo dígito del número original para acarrearlo posteriormente.	$10 - 3 = 7$ $7 \times 2 = 14$ $14 + 5 = 19$ **1** **0 6 4 5 3 0** 9
3. Se toman los demás dígitos del multiplicando y se halla para cada uno la diferencia entre 9 y estos. Tales diferencias se duplican y se suman con la mitad del dígito del multiplicando ubicado a la derecha del dígito que se está considerando (en caso de que este número sea impar se acerca al número par menor para hallar la mitad). Además, si el dígito del multiplicando en cuestión es impar se suma cinco al resultado anterior. Debajo de cada dígito del multiplicando se ubica el resultado obtenido de los cálculos realizados, acarreando los números correspondientes y ubicando los acarreos necesarios.	$9 - \mathbf{6} = 3$ $3 \times 2 = 6$ $6 + \frac{4}{2} = 8$ $\boxed{8 + 1 = 9}$ $9 - \mathbf{4} = 5$ $5 \times 2 = 10$ $10 + \frac{5-1}{2} = 12$ $\boxed{12 + 1 = 13}$ $9 - \mathbf{5} = 4$ $4 \times 2 = 8$ $8 + \frac{3-1}{2} = 9$ $9 + 5 = 14$ $\boxed{14 + 1 = 15}$ **1 1 1** **0 6 4 5 3 0** 9 3 5 9

[10] Son muchas las discusiones que giran alrededor de diferenciar el multiplicando y el multiplicador, cuando se realiza una multiplicación de manera horizontal. Pero para este trabajo consideramos el multiplicando como el número que se encuentra a la izquierda del signo ×.

4. Al llegar al cero ubicado al inicio del número original, se le suma la mitad del dígito del multiplicando ubicado a su derecha (en caso de que este número sea impar se acerca al número par menor y se halla su mitad). Y se resta dos. El factor buscado queda debajo del multiplicando.	$0 + \frac{6}{2} = 3 \quad 3 - 2 = 1$ **1 1 1** **0 6 4 5 3 0** **1 9 3 5 9** 6 4 5 3 × 3 = 1 9 3 5 9

Tabla 5. Multiplicación por 3.

4.1.2. Multiplicación por 4

El producto se obtiene, siguiendo este procedimiento (los números se leen de derecha a izquierda) el cual se ilustra con un ejemplo al lado derecho de la Tabla 6.

Procedimiento	Ejemplo
1. Se agrega un cero al principio y al final del multiplicando.	Supongamos que el producto a hallar es **85672** × 4; así que el primer paso es: **0856720**
2. Se halla la diferencia entre 10 y el primer dígito del multiplicando. Si el dígito es impar se suma cinco a este producto. La cifra de las unidades del número obtenido se ubica debajo del primer dígito del multiplicando, y las decenas se ubican sobre el segundo dígito del número original para acarrearlo posteriormente.	$10 - 2 = 8$ **0 8 5 6 7 2 0** **8**

3. Se toman los demás dígitos del multiplicando y se halla para cada uno la diferencia entre 9 y estos. Tales diferencias se suman con la mitad del dígito del multiplicando ubicado a la derecha del dígito que se está considerando (en caso de que este número sea impar se acerca al número par menor para hallar la mitad). Además, si el dígito del multiplicando en cuestión es impar se suma cinco al resultado anterior. Debajo de cada dígito del multiplicando se ubica el resultado obtenido de los cálculos realizados acarreando los números correspondientes y ubicando los acarreos necesarios.	9 −**8** = 1 9 − **5** = 4 9 − **6** = 3 9 − **7** = 2 $1+\frac{5-1}{2}=\mathbf{3}$ $4+\frac{6}{2}=\mathbf{7}$ $3+\frac{7-1}{2}=\mathbf{6}$ $2+\frac{2}{2}=3$ 3 + **1** = **4** 7 + 5 = **12** 3 + 5 = **8** **1** **0 8 5 6 7 2 0** **4 2 6 8 8**
4. Al llegar al cero ubicado al inicio del número original, se le suma la mitad del dígito del multiplicando ubicado a su derecha (en caso de que este número sea impar se acerca al número par menor y se halla su mitad). Y se resta uno. El factor buscado queda debajo del multiplicando.	$0+\frac{8}{2}=4$ 4 – 1 = **3** **1** **0 8 5 6 7 2 0** **3 4 2 6 8 8** 85672 × 3 = 342688

Tabla 6. Multiplicación por 4.

4.1.3. Multiplicación por 5

El producto se obtiene, siguiendo este procedimiento (los números se leen de derecha a izquierda) el cual se ilustra con un ejemplo al lado derecho de la Tabla 7.

Procedimiento	Ejemplo
1. Se agrega un cero al principio y al final del multiplicando.	Supongamos que el producto a hallar es **78935** × 5; así que el primer paso es: **0789350**

2. Se coloca debajo de cada dígito la mitad del número que se encuentra a su derecha. En caso de que este número sea impar se acerca al número par menor y se halla la mitad. Si el dígito debajo del cual se está ubicando la división es impar se suma además cinco. El factor buscado queda debajo del multiplicando.	$\frac{7-1}{3} = 3$ → **3** $\frac{8}{2} = 4$, $4 + 5 = 9$ $\frac{9-1}{2} = 4$ → **4** $\frac{3-1}{2} = 1$, $1 + 5 = 6$ $\frac{5-1}{2} = 2$, $2 + 5 = 7$ $\frac{0}{2} = 0$, $0 + 5 = 5$ **0 7 8 9 3 5 0** **3 9 4 6 7 5** $78935 \times 5 = 394675$

Tabla 7. Multiplicación por 5.

4.1.4. Multiplicación por 6

El producto se obtiene, siguiendo este procedimiento (los números se leen de derecha a izquierda) el cual se ilustra con un ejemplo al lado derecho de la Tabla 8.

Procedimiento	Ejemplo
1. Se agrega un cero al principio y al final del multiplicando.	Supongamos que el producto a hallar es **245699** × 6; así que el primer paso es: **02456990**
2. Se toma cada dígito y se le suma la mitad del número a su derecha (en caso de que este número sea impar se acerca al número par menor para hallar la mitad). Además, si el dígito del multiplicando en cuestión es impar se suma cinco al resultado anterior. La cifra de las unidades del número obtenido se ubica debajo del primer dígito del multiplicando, y las decenas se ubican sobre el segundo dígito del número original para acarrearlo posteriormente. El factor buscado queda debajo del multiplicando.	$\frac{2}{2} = 1$, $0 + 1 = 1$ $\frac{4}{2} = 2$, $2 + 2 = 4$ $\frac{5-1}{2} = 2$, $4 + 2 = 6$ $\frac{6}{2} = 3$, $5 + 3 = 8$ $\frac{9-1}{2} = 4$, $6 + 4 = 10$ $\frac{9-1}{2} = 4$, $9 + 4 = 13$ $\frac{0}{2} = 0$, $9 + 0 = 9$ $8 + 5 = 13$ $13 + 5 = 18$ $9 + 5 = 14$ $6 + 1 = 7$ $13 + 1 = 14$ $10 + 1 = 11$ $18 + 1 = 19$ **1 1 1 1** **0 2 4 5 6 9 9 0** **1 4 7 4 1 9 4** **245699** × 6 = 1474194

Tabla 8. Multiplicación por 6.

4.1.5. Multiplicación por 7

El producto se obtiene, siguiendo este procedimiento (los números se leen de derecha a izquierda) el cual se ilustra con un ejemplo al lado derecho de la Tabla 9.

Procedimiento	Ejemplo
1. Se agrega un cero al principio y al final del multiplicando.	Supongamos que el producto a hallar es **852468** × 7; así que el primer paso es: **08524680**
2. Se toma cada digito se duplica y se le suma la mitad del número a su derecha (en caso de que este número sea impar se acerca al número par menor para hallar la mitad). Además, si el dígito del multiplicando en cuestión es impar se suma cinco al resultado anterior. La cifra de las unidades del número obtenido se ubica debajo del primer dígito del multiplicando, y las decenas se ubican sobre el segundo dígito del número original para acarrearlo posteriormente. El factor buscado queda debajo del multiplicando.	$\frac{8}{2}=4$ $\frac{5-1}{2}=2$ $\frac{2}{2}=1$ $\frac{4}{2}=2$ $\frac{6}{2}=3$ $\frac{8}{2}=4$ $\frac{0}{2}=0$ 0+0+4 =4 8+8+2= **18** 5+5+1 = 7 2+2+2 = 6 4+4+3 = 11 6+6+4= 16 8+8+0=16 4+1 = **5** 18+**1**= 19 7+5= **1**2 6+**1** = 7 14 + **1** = **12** 16 + 1 = **1**7 16 **1 1 1 1 1** **0 8 5 2 4 6 8 0** **5 9 2 7 2 7 6** $852468 \times 7 = 5967276$

Tabla 9. Multiplicación por 7.

4.1.6. Multiplicación por 8

El producto se obtiene, siguiendo este procedimiento (los números se leen de derecha a izquierda) el cual se ilustra con un ejemplo al lado derecho de la Tabla 10.

Procedimiento	Ejemplo
1. Se agrega un cero al principio y al final del multiplicando.	Supongamos que el producto a hallar es **48234** × 8; así que el primer paso es: **0482340**
2. Se halla la diferencia entre 10 y el primer dígito del multiplicando. El resultado obtenido se duplica. La cifra de las unidades del número obtenido se ubica debajo del primer dígito del	10 − 4 = 6 6 × 2 = **12** **1** **0 4 8 2 3 4 0**

Procedimiento	Ejemplo
multiplicando, y las decenas se ubican sobre el segundo dígito del número original para acarrearlo posteriormente.	2
3. Se toman los demás dígitos del multiplicando y se halla para cada uno la diferencia entre 9 y estos. Tales diferencias se duplican y se suman con el dígito del multiplicando ubicado a la derecha del dígito que se está considerando. Debajo de cada dígito del multiplicando se ubica el resultado obtenido de los cálculos realizados acarreando los números correspondientes y ubicando los acarreos necesarios.	9 − **4** = 5 9 − **8** = 1 9 − **2** = 7 9 − 3 = 6 5× 2=10 1 × 2 = 2 7× 2=14 6 × 2=12 10+8=18 2 + 2 = 4 14+3=17 12+4=16 18 4 + **1** = 5 17+1=18 16+**1** =17 **1 1 1 1** **0 4 8 2 3 4 0** **8 5 8 7 2**
4. Al llegar al cero ubicado al inicio del número original, se le suma el dígito del multiplicando ubicado a su derecha. Y se resta dos. El factor buscado queda debajo del multiplicando.	0 + 4 = 4 4 + 1 = 5 5 − 2 = 3 **1 1 1 1** **0 4 8 2 3 4 0** **3 8 5 8 7 2** 48234 × 8 = 385872

Tabla 10. Multiplicación por 8.

4.1.7. Multiplicación por 9

El producto se obtiene, siguiendo este procedimiento (los números se leen de derecha a izquierda) el cual se ilustra con un ejemplo al lado derecho de la Tabla 11.

Procedimiento	Ejemplo
1. Se agrega un cero al principio y al final del multiplicando.	Supongamos que el producto a hallar es **7342** × 9; así que el primer paso es: **073420**
2. Se halla la diferencia entre 10 y el primer dígito del multiplicando. La cifra de las unidades del número obtenido se ubica debajo del primer dígito del multiplicando, y las decenas se ubican sobre el segundo dígito del número original para	10 − 2 = **8** **0 7 3 4 2 0** **8**

acarrearlo posteriormente.	
3. Se toman los demás dígitos del multiplicando y se halla para cada uno la diferencia entre 9 y estos. Tales diferencias se suman con el dígito del multiplicando ubicado a la derecha del dígito que se está considerando. Debajo de cada dígito del multiplicando se ubica el resultado obtenido de los cálculos realizados acarreando los números correspondientes y ubicando los acarreos necesarios.	9 – **7** = 2 9 – **3** = 6 9 – **4** = 5 2 + 3 = 5 6 + 4 = 10 5 + 2 = 7 5 + 1 = 6 10 7 **1** **0 7 3 4 2 0** **6 0 7 8**
4. Al llegar al cero ubicado al inicio del número original, se le suma el dígito del multiplicando ubicado a su derecha. Y se resta uno. El factor buscado queda debajo del multiplicando.	0 + 7 = 7 7 – 1 = 6 **1** **0 7 3 4 2 0** **6 6 0 7 8** 7342 × 9 = 66078

Tabla 11. Multiplicación por 9.

4.1.8. Multiplicación por 12

El producto se obtiene, siguiendo este procedimiento (los números se leen de derecha a izquierda) el cual se ilustra con un ejemplo al lado derecho de la Tabla 12.

Procedimiento	Ejemplo
1. Se agrega un cero al principio y al final del multiplicando.	Supongamos que el producto a hallar es **79856** × 12; así que el primer paso es: **0798560**

2. Se toma cada digito del multiplicando se duplica y se le suma el número a su derecha. La cifra de las unidades del número obtenido se ubica debajo del primer dígito del multiplicando, y las decenas se ubican sobre el segundo dígito del número original para acarrearlo posteriormente. El factor buscado queda debajo del multiplicando.	0 × 2 = 0 7 × 2 = 14 9 × 2 = 18 8 × 2 = 16 5 × 2 = 10 6 × 2 = 12 0 + 7 = 7 14 + 9 = 23 18 + 8 = 26 16 + 5 = 21 10 + 6 = 16 12 + 0 = 12 7+2=9 23+2=25 26+2=28 21+1=22 16+1=17 12 **2 2 2 1 1** **0 7 9 8 5 6 0** **9 5 8 2 7 2** **79856 × 12 = 958272**

Tabla 12. Multiplicación por 12.

Como se puede observar estos métodos o estrategias de multiplicación, son muy eficaces y rápidas debido a que se basan en unas reglas simples de memorización, además se basan en operaciones sencillas, lo que implica que no es necesario saber las tablas de multiplicar para saber multiplicar números grandes. Con ayuda del método **Trachtenberg** podemos hacer multiplicaciones de gran tamaño, como por ejemplo:

$$37654 \times 498$$

0376540 × 498	
3 0 1 2 3 2	multiplicación por 8
3 3 8 8 8 6	multiplicación por 9
1 5 0 6 1 6	multiplicación por 4
1 8 7 5 1 6 9 2	

A continuación se presentan algunas técnicas o estrategias de CM para las cuatro operaciones básicas es de aclarar que las que se presentan en este documento no son las únicas técnicas o estrategias de CM, sino que son las comúnmente conocidas, reportadas por distintos autores Fernández M (2008), Ibañez (2012), García (2012), Fernández L (2014), entre otros. Estos autores tienen estrategias de CM para la multiplicación por 2, 5 y 10, además de algunas estrategias para la adición haciendo uso de las propiedades conmutativa y asociativa; no obstante, cabe destacar lo enunciado por Ibañez (2012, p. 1): “Una operación aritmética efectuada mentalmente no tiene una única vía de cálculo, y sorprende la cantidad de enfoques posibles (…)”. A pesar de que el resultado de resolver una operación es el mismo sin importar el camino elegido, es importante la estrategia que se usa debido a que cada persona tiene una manera distinta de proceder ante una operación y puede que la estrategia que use lo beneficie unicamente a él. Por eso, reconocer los distintos caminos y mirar el más correcto es lo apropiado y más cuando se desea desarrollar el CM con grupos de personas que piensan de manera muy distinta. Coto (2006, p. 113) menciona que " Cierto es que tampoco hay caminos reales para el cálculo, pero sí que hay técnicas que nos pueden ayudar, y con motivación y práctica consigueramos mejorar nuestro nivel". Por eso con el fin de ayudar al aumento del nivel en el CM se muestran las siguientes estrategias o técnicas. Es importante enfatizar en que todas estas estrategias se sitúan en el contexto de los Números naturales escritos en base diez (aunque los métodos podrían trasponerse a otras bases), debido a que este sistema numérico es el primero con el que los niños tienen contacto y se considera que desde temprana edad debería darse la enseñanza del CM; además, dado el alcance de este trabajo, era necesario limitar los métodos a presentar porque son muchos los métodos hallados.

4.1.9. Justificaciones del método de Trachtenberg

Acá se muestra una justificación de los métodos inventados por Trachtenberg para hacer multiplicaciones.

Multiplicación por 5

Se tiene que $5 = \frac{10}{2}$. Sea N un número natural escrito en base diez, de cuatro dígitos, *a*, *b*, *c* y *d*, esto es:

$$N = 1000a + 100b + 10c + d$$

En donde a, b, c y d son dígitos pares.

Por tanto,

$$5N = [10/2]N$$

Remplazando N, agrupando y teniendo en cuenta lo ceros agregados obtenemos:

$$5N = \frac{10000a}{2} + \frac{1000b}{2} + \frac{100c}{2} + \frac{10d}{2}$$

$$5N = \left(\frac{a}{2}\right)10000 + \left(\frac{b}{2}\right)1000 + \left(\frac{c}{2}\right)100 + \left(\frac{d}{2}\right)10 \quad (*)$$

Lo anterior demuestra la regla.

Consideremos ahora cuando alguno de los dígitos de N es impar, por ejemplo b, esto es:

$$b = 2n + 1$$

Remplazando en (*) obtenemos:

$$5N = \left(\frac{a}{2}\right)10000 + \left(\frac{2n+1}{2}\right)1000 + \left(\frac{c}{2}\right)100 + \left(\frac{d}{2}\right)10$$

$$5N = \left(\frac{a}{2}\right)10000 + \left(\frac{2n}{2} + \frac{1}{2}\right)1000 + \left(\frac{c}{2}\right)100 + \left(\frac{d}{2}\right)10$$

$$5N = \left(\frac{a}{2}\right)10000 + \left(n + \frac{1}{2}\right)1000 + \left(\frac{c}{2}\right)100 + \left(\frac{d}{2}\right)10$$

$$5N = \left(\frac{a}{2}\right)10000 + n1000 + 500 + \left(\frac{c}{2}\right)100 + \left(\frac{d}{2}\right)10$$

$$5N = \left(\frac{a}{2}\right)10000 + n1000 + \left(\frac{c}{2} + 5\right)100 + \left(\frac{d}{2}\right)10$$

En donde N es la mitad entera de b, lo cual justifica la regla en el caso de dígitos impares.

Multiplicación por 6

Se tiene que $6 = \frac{1}{2}(10) + 1$. Sea N = Sea N un número natural escrito en base diez, de cuatro dígitos, *a*, *b*, *c* y *d*, esto es:

N = 1000a + 100b + 10c + d

En donde a, b, c y d son dígitos pares.

Por tanto,

6N = [1/2 (10) + 1]N

Remplazando N, agrupando y teniendo en cuenta lo ceros agregados obtenemos:

$$6N = \left(0 + \tfrac{1}{2}a\right)10000 + \left(a + \tfrac{1}{2}b\right)1000 + \left(b + \tfrac{1}{2}c\right)100 + \left(c + \tfrac{1}{2}d\right)10 + \left(d + \tfrac{1}{2}0\right)1$$

(*)

Lo anterior demuestra la regla.

Consideremos ahora cuando alguno de los dígitos de N es impar, por ejemplo b, entonces:

b = 2n + 1

Remplazando en (*) obtenemos:

$$6N = \left(0 + \frac{1}{2}a\right)10000 + \left(a + \frac{1}{2}(2n+1)\right)1000 + \left(b + \frac{1}{2}c\right)100 + \left(c + \frac{1}{2}d\right)10 + \left(d + \frac{1}{2}0\right)1$$

$$6N = \left(0 + \frac{1}{2}a\right)10000 + \left(a + n + \frac{1}{2}\right)1000 + \left(b + \frac{1}{2}c\right)100 + \left(c + \frac{1}{2}d\right)10 + \left(d + \frac{1}{2}0\right)1$$

$$6N = \left(0 + \frac{1}{2}a\right)10000 + (a+n)1000 + 500 + \left(b + \frac{1}{2}c\right)100 + \left(c + \frac{1}{2}d\right)10 + \left(d + \frac{1}{2}0\right)1$$

$$6N = \left(0 + \frac{1}{2}a\right)10000 + (a+n)1000 + \left(b + \frac{1}{2}c + 5\right)100 + \left(c + \frac{1}{2}d\right)10 + \left(d + \frac{1}{2}0\right)1$$

En donde N es la mitad entera de b, lo cual justifica la regla para el caso de dígitos impares.

Multiplicación por 7

Se tiene que $7 = \frac{1}{2}(10) + 2$. Sea N un número natural escrito en base diez, de cuatro dígitos, *a*, *b*, *c* y *d*, esto es:

$$N = 1000a + 100b + 10c + d$$

En donde a, b, c y d son dígitos pares.

Por tanto,

$$7N = [1/2\ (10) + 2]N$$

Remplazando N, agrupando y teniendo en cuenta lo ceros agregados obtenemos:

$$7N = \left(2 \times 0 + \tfrac{1}{2}a\right)10000 + \left(2a + \tfrac{1}{2}b\right)1000 + \left(2b + \tfrac{1}{2}c\right)100 + \left(2c + \tfrac{1}{2}d\right)10 + \left(2d + \tfrac{1}{2}0\right)1 \qquad (*)$$

Lo anterior demuestra la regla.

Consideremos ahora cuando alguno de los dígitos de N es impar, por ejemplo b, entonces:

$$b = 2n + 1$$

Remplazando en (*) obtenemos:

$$7N = \left(2 \times 0 + \frac{1}{2}a\right)10000 + \left(2a + \frac{1}{2}(2n + 1)\right)1000 + \left(2b + \frac{1}{2}c\right)100 + \left(2c + \frac{1}{2}d\right)10 + \left(2d + \frac{1}{2}0\right)1$$

$$7N = \left(0 + \frac{1}{2}a\right)10000 + \left(2a + n + \frac{1}{2}\right)1000 + \left(b + \frac{1}{2}c\right)100 + \left(c + \frac{1}{2}d\right)10 + \left(d + \frac{1}{2}0\right)1$$

$$7N = \left(0 + \frac{1}{2}a\right)10000 + (2a + n)1000 + 500 + \left(b + \frac{1}{2}c\right)100 + \left(c + \frac{1}{2}d\right)10 + \left(d + \frac{1}{2}0\right)1$$

$$7N = \left(0 + \frac{1}{2}a\right)10000 + (2a + n)1000 + \left(b + \frac{1}{2}c + 5\right)100 + \left(c + \frac{1}{2}d\right)10 + \left(d + \frac{1}{2}0\right)1$$

En donde N es la mitad entera de b, lo cual justifica la regla para el caso de dígitos impares.

Multiplicación por 8

Se tiene que $8 = 10 - 2$. Sea N un número natural escrito en base diez, de cuatro dígitos, a, b, c y d, esto es:

$$N = 1000a + 100b + 10c + d$$

Por tanto,

$$8N = (10 - 2)N$$

Remplazando N, obtenemos:

$$8N = 10000a - 2000a + 1000b - 200b + 100c - 20c + 10d - 2d$$

$$8N = 10000a - 18000 + 18000 - 2000a + 1000b - 1800 + 1800 - 200b + 100c - 180 + 180 - 20c + 10d - 18 + 18 - 2d$$

$$8N = 10000a + (18 - 2a + b)1000 + (18 - 2b + c)100 + (18 - 2c + d)10 + (18 - 2d)1 - (18000 + 1800 + 180 + 18)$$

$$8N = 10000a + (2(9 - a) + b)1000 + (2(9 - b) + c)100 + (2(9 - c) + d)10 + (2(9 - d))1 - 20000 + 2$$

$$8N = (a-2)10000 + (2(9-a)+b)1000 + (2(9-b)+c)100 + (2(9-c)+d)10 + 2(10-d)1$$

Lo anterior demuestra la regla.

Multiplicación por 9

Se tiene que $9 = 10 - 1$. Sea N = abcd entonces,

N = 1000a + 100b + 10c + d

Por tanto,

9N = (10 − 1)N

Remplazando N, obtenemos:

$$9N = 10000a - 1000a + 1000b - 100b + 100c - 10c + 10d - d$$

$$9N = 10000a - 9000 + 9000 - 1000a + 1000b - 900 + 900 - 100b + 100c - 90 + 90 - 10c + 10d - 9 + 9 - d$$

$$9N = 10000a + (9-a+b)1000 + (9-b+c)100 + (9-c+d)10 + (9-d)1 - (9000 + 900 + 90 + 9)$$

$$9N = 10000a + (9-a+b)1000 + (9-b+c)100 + (9-c+d)10 + (9-d)1 - 10000 + 1$$

$$9N = (a-1)10000 + (9-a+b)1000 + (9-b+c)100 + (9-c+d)10 + (10-d)1$$

Lo anterior demuestra la regla.

Multiplicación por 12

Se tiene que $12 = 10 + 2$. Sea N un número natural escrito en base diez, de cuatro dígitos, *a*, *b*, *c* y *d*, esto es:

N = 1000a + 100b + 10c + d

En donde a, b, c y d son dígitos pares.

Por tanto,

12N = (10 + 2)N

Remplazando N, agrupando y teniendo en cuenta lo ceros agregados obtenemos:

$$12N = (0 + a)10000 + (2a + b)1000 + (2b + c)100 + (2c + d)10 + (2d + 0) \qquad (*)$$

Lo anterior demuestra la regla.

4.2. Técnicas o estrategias para la suma

La adición es una de las cuatro operaciones fundamentales el origen de las técnicas o estrategias de CM que se presentan, recaen en sus propiedades (conmutativa, asociativa, elemento neutro). Antes de iniciar con las técnicas o estrategias de CM para la suma se considera importante mostrar un principio que será importante a la hora de usar las estrategias.

El complemento de los números

El complemento de un número es el que se suma a este para que el resultado sea diez (10). Se considera importante saber los complementos de los primeros nueve números debido que facilita el uso de las técnicas o estrategias de CM. En la Tabla 13 se ilustran los complementos de los primeros nueve números.

Número	Complemento
1	9
2	8
3	7
4	6
5	5
6	4
7	3
8	2
9	1

Tabla 13. Complemento de un número.

4.2.3. Busca el complemento

Esta estrategia o técnica, como su nombre lo indica, busca que de los números que se dan para sumar, se encuentren aquellos que son complemento y de esta manera obtener diez (10), al hacer la adición, la suma se encontrará más rápido. Por ejemplo, si queremos realizar la siguiente adición:

$$5 + 3 + 2 + 8 + 7$$

La idea de esta estrategia es buscar los números que son complementos en este caso hay dos:

$$5 + 3 + 2 + 8 + 7$$

Como son dos complementos, la suma es dos veces 10, o sea 20 y quedan 5; el resultado final es 25. Esta misma estrategia se puede usar para más cantidad de números, ahorra mucho tiempo y evita los cálculos a lápiz y papel, debido a que las sumas de 10 en 10 son mucho más fáciles de realizar y de retener en la memoria.

4.2.4. Descomposición

En esta estrategia lo que se busca es descomponer uno de los números en términos de otros de tal manera que se pueda usar **busca el complemento**, para obtener el resultado de la adición. Galeano & Ortiz (2008) dicen que la composición y la descomposición "tienen que ver con aquellas relaciones entre la parte y el todo" (p. 24), en particular definen la descomposición como "el proceso mediante el cual se conoce el todo y una de las partes, siendo necesario hallar la otra parte. De esta manera, la estrategia o el procedimiento utilizado (…) determinan el nivel de abstracción que se ha alcanzado". Se toma como ejemplo la siguiente suma:

$$5 + 11 + 7 + 8$$

Lo primero que se hace es mirar qué número se descompone de tal manera que haya la mayor cantidad de complementos se puede proceder de la siguiente manera:

$$5 + (5 + 3 + 2 + 1) + 7 +8$$

Se puede observar que con la descomposición hecha, se obtienen 3 complementos y sobra 1:

$$5 + (5 + 3 + 2 + 1) + 7 + 8$$

Como son tres complementos, son 30 y uno que sobra el resultado de la suma es 31. Lo importante de esta estrategia es usar conjuntamente la descomposición de un número en términos de otro para poder buscar la mayor cantidad de complementos y así obtener la suma rápido.

4.2.5. De izquierda a derecha

En la escuela siempre se enseña a sumar de derecha a izquierda; esta estrategia hace todo lo contrario, para Coto (2006) hay dos ventajas en hacer las sumas de esta manera “por un lado, no tenemos que llevar en cuenta el resultado de las unidades. Y por otra parte, aunque no digamos el resultado correcto, siempre será mucho más fácil dar una aproximación si lo hacemos de izquierda a derecha” (p. 115). A continuación se da una explicación de esta estrategia de CM para la suma:

Supongamos que vamos a sumar 29 + 18, por lo tanto la manera de proceder es sumar los primeros dígitos que hay de izquierda a derecha, pero en su valor absoluto, de la siguiente manera:

$$20 + 10 = 30$$

Ahora se suman las unidades:

$$9 + 8 = 17$$

Y por último se suman los resultados obtenidos $30 + 17 = 47$

4.2.6. Redondeo

Esta estrategia de CM consiste en colocar uno de los números que se suman en términos de una resta de tal manera que la suma se facilite. En otras palabras se puede decir que se aproxima uno de los sumandos a un múltiplo de 10 para que al realizar la suma de izquierda a derecha quede más fácil. Por ejemplo si queremos hacer la suma de 57 + 39, podemos aproximar uno de los dos sumandos al múltiplo de 10 más cercano, por lo general se hace con el número que le falta menos para completar un múltiplo de 10 y así facilitar la resta posteriormente, en este caso se aproxima el 39; de esta manera:

$$39 + 1 = 40$$

$$39 = 40 - 1$$

Se hace a continuación la suma del número múltiplo de 10 elegido y del sumado que quedó:

$$57 + 40 = 97$$

Ahora se procede a restar el 1 y de esta manera la adición quedará hecha:

$$97 - 1 = 96$$

$$57 + 39 = 96$$

4.3. Técnicas o estrategias para la sustracción

Las técnicas o estrategias de cálculo mental para la sustracción son en esencia similares a las de la adición.

4.3.3. Pensar en sumar

Una de las estrategias o técnicas que más se usa es la de pensar en sumar. Para los estudiantes es más fácil sumar que restar, por lo que esta técnica es muy útil en un principio. A continuación se ilustra un ejemplo:

$$9 - 3$$

Entonces la idea es buscar un número que sumado con 3 dé 9:

$$3 + \square = 9$$

De ahí da que 3 + 6 = 9, por lo tanto el resultado es:

$$9 - 3 = 6$$

4.3.4. Redondeo

Esta estrategia de CM consiste en colocar uno de los números que se restan en términos de una resta de tal manera que la resta se facilite. En otras palabras se puede decir que se aproxima uno a un múltiplo de 10 para que al realizar la resta de izquierda a derecha quede más fácil. Por ejemplo si se quiere hacer la resta de 57 – 39, se procede a aproximar uno de los dos términos al múltiplo de 10 más cercano, por lo general se hace con el número que le falta menos para completar un múltiplo de 10 y así facilitar la resta posteriormente, en este caso se aproxima el 39; de esta manera:

$$39 + 1 = 40$$

$$39 = 40 – 1$$

Se hace a continuación la resta del número múltiplo de 10 elegido y del número que quedó:

$$57 – 40 = 17$$

Ahora se procede a sumar el 1 y de esta manera:

$$17 + 1 = 18$$

$$57 – 39 = 18$$

4.3.5. Descomposición

Aplicando la misma idea de descomponer un número que en las adiciones podemos aplicar estas técnicas a la hora de restar. Tomamos como ejemplo la siguiente resta:

$$96 – 42$$

Lo primero que se hace es descomponer el sustraendo de tal manera que se obtenga el mayor número múltiplo de 10, de la siguiente manera:

$$96 – (40 + 2)$$

Ahora haciendo uso de la técnica de izquierda a derecha se ha la resta:

$$96 – 40 = 56$$

$$56 – 2 = 54$$

De esta manera se ha realizado la resta.

$$96 – 42 = 54$$

4.4. Técnicas o estrategias para la multiplicación

Anteriormente se mencionaron los métodos para multiplicar inventados por Jakow Trachtenberg, que permiten hacer ciertas multiplicaciones. A continuación se muestran otras estrategias para multiplicar, recolectadas de algunos documentos consultados:

4.4.3. Método cruzado

Este método es mencionado en el libro "Entrenamiento Menta"l de Alberto Coto. En él Coto (2006) menciona como con la ayuda de esta estrategia de CM pudo romper el Récord Guinness en velocidad multiplicando. A continuación se ilustra con un ejemplo:

Multiplicar 78 × 25

$$\begin{array}{r} 78 \\ \times\ 25 \\ \hline 1950 \end{array}$$

Los pasos a seguir para realizar la multiplicación son los siguientes:

1. 5 × 8 = 40, se coloca el 0 y se lleva 4.
2. 7 × 5 = 35 y 8 × 2 = 16, sumamos estos resultados 35 + 16 = 51.
3. Como llevamos 4, se le suman al resultado anterior 51 + 4 = 55. Se coloca 5 y llevamos 5.
4. 2 × 7 = 14, sumamos los 5 que llevamos y se coloca el resultado. 14 + 5 = 19.

Con esto se ha terminado la multiplicación. Este proceso se puede extender para números de tres cifras de la siguiente manera:

Multipliquemos 315 × 517

$$\begin{array}{r} \mathbf{315} \\ \times\ \mathbf{517} \\ \hline \mathbf{162855} \end{array}$$

Los pasos a seguir para realizar la multiplicación son los siguientes:

1. **7** × **5** = **35**, se coloca el **5** y se lleva **3**.
2. **7** × **1** = 7 y **5** × **1** = 5, sumamos estos resultados 7 + 5 = 12.
3. Como llevamos **3**, se le suman al resultado anterior 12 + **3** = **15**. Se coloca **5** y llevamos **1**.
4. **3** × **7** = 21, **5** × **5** = 25 y **1** × **1** = 1, sumamos estos resultados 21 + 25 + **1** = 47
5. Sumamos **1** que llevamos 47 + **1** = **48**, se coloca **8** y llevamos **4**.
6. **3** × **1** = 3 y **1** × **5** = 5, sumamos estos resultados 3 + 5 = 8.
7. Sumamos al resultado anterior **4** que llevamos 8 + **4** = **12**, se coloca **2** y se lleva **1**.
8. **5** × **3** = 15, sumamos **1** que llevamos y se coloca el resultado. 15 + **1** = **16**.

Con esto hemos terminado la multiplicación.

4.4.4. Números de dos dígitos con el mismo dígito en la decena y suma de unidades igual a diez

A continuación se muestran algunos ejemplos con los cuales se pueden multiplicar números de dos cifras, tales que tengan el mismo dígito en la decena y cuyas unidades sumen diez. Lo importante de estos métodos es saber identificar en qué momento utilizarlos y así se ahorra tiempo a la hora de cálculos.

Por ejemplo, si se desea hacer la multiplicación.

23 × **27**

Se siguen estos pasos:

1. Multiplicar el primer dígito del primer número (de izquierda a derecha) por la suma de uno con el primer dígito del segundo número:

   2 × (**2** + 1) = **6**

2. Multiplicar los dos dígitos de las unidades de los números que se están multiplicando:

   3 × **7** = **21**

3. Colocar el resultado del paso 2 a continuación del resultado del paso 1.

   6_21

Así 23 × 27 = 621

En seguida se ilustra otro ejemplo aplicando este mismo método:

$$61 \times 69$$

$$6 \times \ (6 + 1) \_\_\_\_1 \times 9$$

$$42\_09$$

4.4.5. Números de dos dígitos terminados en uno

A continuación se describen los pasos para realizar multiplicaciones para números de dos cifras con dígitos terminados en 1.

41 × **31** = 1271

Pasos:

1. Multiplicar el primer dígito del primer número por el primer dígito del segundo número:

   4 × **3** = **12**

2. Sumar el primer dígito del primer número con el primer dígito del segundo número:

   4 + **3** = **7**

3. Colocar el resultado del paso 2 a continuación del resultado del paso 1.

   12_**7**

4. Colocar el resultado anterior y a continuación 1.

   12_**7**_1

4.4.6. De izquierda a derecha

Este método es explicado por Alberto Coto en su libro “Entrenamiento Mental”. Coto (2006) dice que este método se basa en que “siempre hay que descomponer la multiplicación en operaciones más sencillas” (p. 122). Acontinuación se ilustra un ejemplo.

Suponga que tenemos que multiplicar 83 × 7. Para este método se procede como se muestra en la tabla 14 .

Procedimiento	Ejemplo
Se descompone el multiplicando de tal manera que uno de los números sea un múltiplo de 10.	83 = (80 + 3)
Se hace la respectiva sustitución.	(80 + 3) × 7
Se hacen las operaciones respectivas.	80 × 7 = 560 3 × 7 = 21 560 + 21 = 581
De esta manera queda culminada la multiplicación.	83 × 7 = 581

Tabla 14. Método de izquierda a derecha para la multiplicación.

4.4.7. Multiplicación por 25

El siguiente método se encuentra explicado en el libro “Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos Contar e inducir”, (Luque, Mora, & Páez, 2013). En seguida se muestra un ejemplo:

Para multiplicar 56 ×25, se procede de la siguiente manera:

$$56 \div 2 = 28$$

$$28 \div 2 = 14$$

El resultado de dividir dos veces entre dos, se le agregan dos ceros.

Por lo tanto, 56 ×25 = 1400

Ahora consideremos el caso en el que el multiplicando es impar; por ejemplo 33 × 25:

$$33 - 1 = 32$$

$$32 \div 2 = 16$$

$$16 \div 2 = 8$$

El resultado de dividir dos veces entre dos, se le agregan dos ceros y se suma 25.

Así, 33 × 25 = 800 + 25 = 825.

4.4.8. Multiplicación de números de entre 90 y 100.

Esta estrategia es aplicable para números de dos cifras en general, pero el CM tiene mayor rapidez si se multiplican números entre 90 y 100. A continuación se muestra un ejemplo:

Multiplicar 98 × 92:

Factores: 98 y 92

Complementos: 2 y 8

98 – 8 = 92 ─ 2 = 90

2 × 8 =16

Ahora, 98 × 92 = 9016

Multiplicar 97 × 95:

Factores: 97 y 95

Complementos: 3 y 5

97 – 5 = 95 ─ 3 = 92

3 × 5 =15

Ahora, 97 × 95 = 9215

4.5. Técnicas o estrategias para la división

Las estrategias de CM para la división son muy usadas en el diario vivir, hay ocasiones en las que se sale con amigos y luego de hacer una serie de gastos, es bueno saber cuánto corresponde a cada uno. En este momento es cuando una buena estrategia de CM ayudaría a resolver una situación como esta. A continuación se muestran algunas estrategias o técnicas de CM para la división, las cuales ahorran tiempo.

4.5.3. Dividir por 10 o potencias de 10

Esta estrategia de CM para dividir por 10 es tomada de Ibañez (2012). A continuación se muestra cómo se debe proceder.

Por cada potencia de 10 quitaremos un cero al dividendo o desplazaremos la coma hacia la izquierda si no hay ceros.

Ejemplos: 4520 ÷ 10 = 452

452 ÷ 10 = 45, 2

En caso de que el dividendo y divisor acaban en cero eliminar el máximo de ellos.

Ejemplos: 60 ÷ 20 = 6 ÷ 2 = 3

55000 ÷ 500 = 550 ÷ 5 = 110

4.5.4. Dividir por 5

Esta estrategia está basada en las distintas representaciones que se le puede dar a un número en el caso de la división por 5, podemos observar que $\mathbf{5 = \frac{10}{2}}$ con este simple hecho ya se sintetiza la división debido a que multiplicar por 2 y dividir por 10 es en esencia más rápido. A continuación se ilustran algunos ejemplos.

Suponga que se quiere dividir 1235 entre 5, los pasos a seguir son los siguientes:

Pasos

1. Como se sabe que $\mathbf{5 = \frac{10}{2}}$, entonces lo primero es dividir **1235 / 10**.

$$\frac{\mathbf{1235}}{\mathbf{10}} = \mathbf{123,5}$$

2. Ahora el resultado del paso 1 se multiplica por 2.

$$\mathbf{123,5 \times 2 = 247}$$

De esta manera el resultado de la división queda así $\frac{\mathbf{1235}}{\mathbf{5}} = \mathbf{247}$.

4.5.5. Descomposición

Esta estrategia se trata de descomponer el dividendo de tal manera que haya varias operaciones pequeñas las cuales sean más simples de hacer. Suponga que se quiere dividir 384 entre 6; se procede de la siguiente manera:

Se descompone el dividendo 384, se puede hacer de la siguiente manera:

$$384 = 300 + 60 + 24$$

Ahora se hace la sustitución y se hacen las operaciones respectivas.

$$\frac{300}{6} = 50$$

$$\frac{60}{6} = 10$$

$$\frac{24}{6} = 4$$

Se suman los resultados 50 + 10 + 4 = 64. El resultado de la división queda $\frac{384}{6} = 64$.

4.5.6. Método ABN para la división

Este método ABN (Algoritmo Basado en Números) es mencionado por Pinos (s.f) quien dice que es “una forma de contar y operar cuya naturalidad propicia la comprensión global de la matemática y facilita la racionalidad en las aplicaciones a problemas prácticos” (p. 9). Realizar divisiones en ABN exige un gran dominio de la adición, sustracción y multiplicación. Además lo primero que se debe tener en cuenta es que siempre se debe buscar hacer una multiplicación de tal manera que el resultado se acerque al valor del dividendo. En la tabla 15 se ilustra un ejemplo.

Efectuar $\frac{8794}{8}$

Tengo	Reparto	Le doy a cada uno
8794	8000	1000
794	400	50
394	240	30
154	80	10
74	72	9
2	8792	1099

Tabla 15. Ejemplo de método ABN para la división.

Residuo

Cociente

De esta manera se puede realizar las divisiones, pero es de gran importancia tener en cuenta, que las operaciones de suma, resta y multiplicación son fundamentales tenerlas claras y de esta manera este método sea rápido y fácil de manejar.

4.5.7. Dividir un número entre potencias de 2

Esta estrategia de CM para dividir es tomada de Ibañez (2012). A continuación se muestra como se debe proceder.

Dividiremos entre 2 de forma sucesiva n veces.

$$440 \div 8$$

Como $8 = 2^3$, entonces se divide 440 tres veces por 2.

$$440 \div 2 = 220$$

$$220 \div 2 = 110$$

$$110 \div 2 = 55$$

Otro ejemplo es $1024 \div 16$, entonces tenemos:

$16 = 2^4$, se divide 1024 cuatro veces por 2.

$$1024 \div 2 = 512$$

$$512 \div 2 = 256$$

$$256 \div 2 = 128$$

$$128 \div 2 = 64$$

Conclusiones

A continuación se encuentran las conclusiones a las que se llegó teniendo en cuenta el estudio realizado alrededor del CM, además se encuentran algunas cuestiones abiertas que se consideran pertinentes e interesantes considerar en un próximo trabajo.

Gracias a la elaboración de este trabajo de grado se alcanzó un conocimiento más profundo acerca de algunos temas que han aportado al aprendizaje del autor de este documento, en algunos ámbitos en Matemáticas que se consideran importantes para la educación en Matemáticas en Colombia, como es el CM. Como se indicó en un principio, la llegada de la tecnología en los últimos años a las aulas de clase, hizo que el CM perdiera la importancia que tiene para la formación de niños y jóvenes.

Además de la poca presencia del CM en las aulas de clase, se tiende a confundir el CM, el CE y el CA; con ayuda de algunos de los documentos consultados y analizados fue posible evidenciar que la principal característica por la cual se considera que el CM debe ser enseñado en las aulas de clase es la cantidad de beneficios que tiene para los estudiantes debido a que desarrolla FE, MT, PN y SN; es de resaltar que el PN es uno de los cinco conocimientos básicos que propone el MEN (1998) que están como obligatorios en la enseñanza en los colegios.

Con respecto a diferenciar al CM de otro tipo de cálculos es fundamental distinguirlos debido a que algunas veces se entiende CM, CE y CA como sinónimos y su diferencia radica en la procedencia de los datos y de las respuestas; el uso conjunto de estos es importante debido a que el CM permite dar una respuesta y el CE permite verificar de manera rápida si la respuesta es razonable o no.

Además de las características antes indicadas se evidenció que en algunos países latinoamericanos el CM también forma parte del currículo de Matemáticas; se plantea como hipótesis que a pesar del esfuerzo de incluir el CM como parte del currículo escolar, este no es usado en las aulas de clase debido muy posiblemente a la falta de formación en este campo, lo que hace que los profesores eviten enseñar algo que ellos mismos no saben, por lo que se considera que parte de la solución es incluir de manera visible este tema en la formación de los licenciados en Matemáticas. Por eso a pesar de que el CM ha estado presente en los LCM y EBCM en Colombia, no se da su enseñanza en clase, al menos desde la experiencia personal del autor de este trabajo de grado.

Aunque los LCM y los EBCM incluyan de manera explícita el CM, en particular para el desarrollo del PN, se observa una brecha entre esta postura y la de los DBA, donde ni siquiera aparece el término.

En relación con las técnicas del CM:

- Quedó claro que todas están basadas en las propiedades de las operaciones, lo cual invita a que esta temática (propiedades de las operaciones) sea conectada directamente con el CM y no sea tratada únicamente desde el punto de vista teórico; esto tal vez posibilitaría que no solo los estudiantes vieran una posible aplicación de las Matemáticas, sino que potenciaría que los niños y jóvenes crearan sus propias técnicas.
- Solo se incluyó aquí una muestra de algunas técnicas, se hizo una corta selección, pues es vasta la cantidad de estrategias de CM que se encuentran reportadas. Como se indicó en un principio se consideró solo el conjunto de los números naturales debido a que son el primer conjunto numérico con que trabajan los estudiantes. Además se tomó muy en cuenta los documentos consultados, pues gran cantidad de estos métodos aparecían allí, en particular los aportes realizados por Coto (2006) debido a que es una persona que ha dedicado gran parte de su vida al CM, por lo tanto tiene mayor conocimientos sobre las técnicas o métodos apropiados para desarrollar el CM de manera efectiva y rápida.
- Al hacer la recopilación de estas técnicas o estrategias de CM fue posible evidenciar que no es apropiado clasificarlas por niveles de dificultad, pues esto resulta muy personal. De hecho, existen algunas técnicas que parecen ser más complejas que realizar la misma operación con lápiz y papel, pero esto depende netamente del sujeto que la quiera utilizar.
- Todas las técnicas o estrategias que se presentaron, tuvieron en consideración el sistema de numeración decimal debido a que es el primero con que los estudiantes tienen contacto. Pero eso no quiere decir que estas estrategias no se puedan extenderá otras bases, además sería interesante ver qué tipo de técnicas se le ocurren a los estudiantes trabajando en un sistema distinto al decimal.

Como conclusión a manera personal es grato ver el aprendizaje que se obtuvo al realizar este documento; fueron muchos los documentos consultados y los cuales hicieron aportes importantes que se consideran fundamentales para un futuro profesor de Matemáticas. Ya que todo lo aprendido se puede llevar al aula de clase e iniciar a fomentar el desarrollo del CM en los estudiantes y beneficiarlos con la cantidad de habilidades que pueden desarrollar y que como lo mencionan los LCM (1998) son importantes para la vida diaria. Además es interesante ver la cantidad de temas que faltan por ahondar en educación en Matemáticas y los grandes aportes que tienen para la comunidad de docentes en Matemáticas como por ejemplo temas relacionados con la MT, PN, SN y FE.

Cuestiones abiertas

- En el capítulo 3 se consultó información acerca del CM y la educación en Matemáticas; se describieron cuatro modelos de enseñanza para el CM mencionados por Gómez (1995) a través de la revisión de textos en España. Una de las cuestiones que sería interesante abordar en un próximo trabajo asociado a este tema, es la determinación de si los modelos de enseñanza para el CM propuestos por Gómez equivalen con el desarrollo de la enseñanza de las matemáticas en Colombia.
- Al hacer la consulta acerca de la importancia del CM en el desarrollo del PN en el capítulo 2, fue posible evidenciar que términos como SN y PN, hace parte del lenguaje del profesor de Matemáticas pero muy posiblemente poca claridad se tiene sobre su significado. En la elaboración de este trabajo de grado se hizo explícita la necesidad de profundizar en el estudio de estos constructos, pero por no ser de interés directo para este trabajo no se ahondó en ello; no obstante, valdría la pena hacer un estudio más detallado sobre el tema (por ejemplo estudiando autores como Castro, Macintosh, Dantzig, Dehaene, entre otros).
- Sería interesante indagar acerca de los saberes que tienen los futuros maestros de Matemáticas y los maestros en ejercicio acerca del CM, qué técnicas o estrategias conocen, cuáles enseñan y cómo. Y si no reconocen importancia en el tema, sería deseable identificar las razones.
- Se considera también interesante indagar más acerca de las técnicas o estrategias de CM para el conjunto de los números irracionales, puesto que de los documentos que se encuentran en la bibliografía de este documento no se encontraron estrategias o técnicas para hacer CM con rapidez en este conjunto.

Bibliografía

Alonso, D., & Fuentes, L. (2001). Mecanismos cerebrales el pensamiento matemático. *Revista de Neurología*, p. 568-576.

Alsina, C. (1996). *Enseñar matemáticas.* Barcelona: Graó.

Arán , V. (2011). Funciones ejecutivas en niños escolarizados: efectos de la edad y del estrato socioeconómico. *Avances en psicología latinoamericana*, p. 98-113.

Aznar, E. (2007). *Universidad de Granada*. Recuperado el 8 de febrero de 2016, de Universidad de Granda: http://www.ugr.es/~eaznar/gauss.htm

Baddeley, A. (1983). Working memory. *Philos Trans R Soc London*, 311-324.

Bressan, A., Marino, M. R., & Calamandrei, M. M. (2005). *Matemática. Una buena pareja: juego y cálculo mental.* Neuquén: Consejo provincial de educación.

Calfeé, R. (1977). *Assesmen of independent reading skills: basic research and practical applications.* Hillsdale: Toward a psychology of reading.

Chelle, T., García, P., Robalo, G., Sancha, I., Wall, M., & Novembre, A. (s.f.). *Cálculo mental y algorítmico.* Buenos Aires, Argentina: Dirección general de cultura y educación.

CIENCIA POPULAR.com. (22 de Febrero de 2007). Recuperado el 27 de Febrero de 2016, de CIENCIA POPULAR.com: http://www.cienciapopular.com/ciencia/mentes-prodigiosas%20jedediah%20buxon%2027-02-2016%206:44

Colom, R., & Flores, C. (2001). Inteligencia y memoria de trabajo: La relación entre el factor G, complejidad cognitiva y capacidad de procesamiento. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, p. 37-47.

Coto, A. (2014). Recuperado el 27 de Febrero de 2016, de Coto, A: http://www.albertocoto.com/site/descript.php

Coto, A. (2006). *Entrenamiento Mental.* Madrid, España: EDAF, S.L.

Delgado, C., & Palacios, P. (s.f). *TÉNICAS EDUCATIVAS.* UNIVERDIDAD DEL AZUAY .

Educativo, P. (16 de Febrero de 2016). *2016*. Recuperado el 16 de Febrero de 2016, de Cálculo mental: http://www.portaleducativo.net/segundo-basico/45/Calculo-mental

Etchepareborda, M., & Abad-Mas, L. (2005). Memoria de trabajo en los procesos básicos de aprendizaje. *Revista Neurol*, p. 79-83.

Faura, J., & Pacheco, J. (2009). Una propuesta para la enseñanza y el aprendizaje del cálculo mental en grado sexto de educación básica secundaria. *Memorias VIII Encuentro Nacional de Educación Matemática y Estadística* (págs. 1-8). Duitama: Escuela de Matemáticas y Estadística UPTC.

Fernández, J. (2004). *del cáculo mental.* Madrid: ONCE.

Fernández, L. (2014). *Cálculo Mental.* España: Universidad de la Rioja .

Fernández, M. (2008). *Cálculo Mental.* Buenos Aires: Direción General de Cultura y Eduación.

Galeano, M., & Ortiz, D. (2008). *El cálculo mental como estrategia para desarrollar el pensamiento numérico.* Medellín: Universidad de Antioquia.

Gálvez, G., Cosmelli, D., Cubillos, L., Leger, P., Mena, A., Tanter, E., y otros. (2011). Estrategias cognitivas para el cálculo mental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, p. 9-40.

García Benavides, S. S. (2011). *Rutas de acceso a la generalización como estrategia de resolución de problemas utilizada por estudiantes de 13 años.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

García, J. (2012). *J41ME G4RC14*. Recuperado el 27 de Febrero de 2016, de J41ME G4RC14: http://www.jaimegarciaserrano.com/

Gómez, B. (1988). *Numeración y Cálculo.* Madrid: Síntesis.

Gómez, B. (2005). La enseñanza del cálculo mental. *UNIÓN*, 17-29.

Ibañez, J. (2012). *Estrategias del cálculo mental.* IES alhama de corella, España.

Lezak, M. (1982). The problem of assessing executive functions. *International Journal of Psychology, 17*, 281-297.

López, M. (2014). Desarrollo de la memoria de trabajo y desempeño en cálculo aritmético: un estudio longitudinal en niños. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 171-190.

Luque, C., Mora, L., & Páez, E. (2013). *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos contar e inducir.* Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Matemolivares. (3 de Noviembre de 2011). Recuperado el 8 de Febrero de 2016, de Matemolivares: http://matemolivares.blogia.com/2011/110302-alexander-aitken-una-memoria-prodigiosa..php

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas.* Bogotá D.C.

MEN. (2015). *Derechos Básicos de Aprendizaje.* Bogotá D.C.

Ortiz Vallejo, M., & Ortega, T. (2005). *Cálculo mental.* España: Universidad de Valladolid.

Ortiz, J., & Ortega del rincón, T. (2009). *Cálculo mental. Primer ciclo de educación primaria.* Badajoz, España: @becedario.

Papazian, O., Alfonso, I., & Luzondo, L. (2006). transtornos de las funciones ejecutivas. *revista de neurología*, 45-50.

Parra, C., & Saiz, I. (1994). *Didáctica de matemáticas.* Buenos aires: Paidós Educador.

Pinos, L. (s.f.). *Introdución al método ABN.* Algeciras.

Quaranta, M., & Ponce, H. (2006). *Cálculo mental con números naturales.* Buenos Aires: Secretaría de Educación.

Schacter, L. (1996). Implicit Memory: A Nueva Frontier for Cognitive Neuroscience. *The cognitive Neuroscience*, 815-824.

Segovia, I., & Castro, E. (2009). La estimación en el cálculo y en la medida: fundamentación curriculr e investigaciones desarrolladas en el Departamento de Didáctica de la matemática de la Universidad de Granada. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, p. 499-536.

Segovia, I., Castro, E., Castro, E., & Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida.* Madrid: Síntesis.

Tulving, E. (1972). *Episodic and Semantic Memory.* United States of America: Academic Press, INC.

Wikipedia. (11 de Febrero de 2015). Recuperado el 8 de Febrero de 2016, de Wikipedia: https://es.wikipedia.org/wiki/Jakow_Trachtenberg