“FORMACIÓN DE DOCENTES DEL MUNICIPIO DE SOACHA EN EL USO DE HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS CON EL PROGRAMA *CABRI GÉOMÈTRE* PARA LA CONSTRUCCIÓN DE FUNCIONES LOGARÍTMICA Y EXPONENCIAL”

SANDRA CAROLINA SÁNCHEZ SUESCA

2003140054

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Bogotá D.C., Noviembre

2007

“FORMACIÓN DE DOCENTES DEL MUNICIPIO DE SOACHA EN EL USO DE HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS CON EL PROGRAMA *CABRI GÉOMÈTRE* PARA LA CONSTRUCCIÓN DE FUNCIONES LOGARÍTMICA Y EXPONENCIAL”

SANDRA CAROLINA SÁNCHEZ SUESCA
2003140054

Tesis de grado para optar el título de
Licenciado en Matemáticas

Asesor
MAURICIO BAUTISTA BALLÉN

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Bogotá D.C., Noviembre
2007

Este trabajo está dedicado a Dios, mi guía, mi fortaleza y compañía.

A mis padres, mis hermanos y mi sobrina quienes me han apoyado en esta importante etapa de mi vida con su amor, paciencia y compañía.

AGRADECIMIENTOS

La autora de este trabajo expresa sus más sinceros agradecimientos a aquellas personas e instituciones que hicieron posible el desarrollo de este trabajo, especialmente a:

El profesor Mauricio Bautista Ballén por su dedicación, sus grandes aportes y múltiples enseñanzas académicas y personales que han contribuido a que crezca como persona y como profesional de la Educación Matemática.

A la profesora Claudia Salazar por su apoyo en el desarrollo de este trabajo de grado.

A la Institución Educativa General Santander, en especial a los docentes del área de Matemáticas e Informática por su disposición y colaboración.

Y a los docentes y compañeros de la Universidad Pedagógica Nacional por sus contribuciones académicas.

RESUMEN ANALÍTICO (RAE)

Tipo de documento: Trabajo de Grado

Acceso al documento: Universidad Pedagógica Nacional

Título del documento: "Formación de docentes del municipio de Soacha en el uso de Herramientas Tecnológicas con el programa *Cabri Géomètre* para la construcción de Funciones Logarítmicas y Exponenciales"

Autor: SÁNCHEZ - SUESCA, Sandra Carolina.

Unidad Patrocinante: Universidad Pedagógica Nacional

Palabras Claves: Función Logarítmica y Exponencial, comprensión, tecnología en el aula, Cabri Géomètre.

Descripción: En las últimas décadas, el impacto tecnológico en la educación ha transformado el proceso de enseñanza - aprendizaje, y la forma en que los docentes y los estudiantes acceden al conocimiento; por ello, uno de los grandes retos que se plantea a la educación es capacitar a los docentes en el uso de herramientas tecnológicas. La vinculación de las instituciones educativas a las facultades de educación, es una estrategia para capacitar a los docentes a través de proyectos de facultad. Teniendo en cuenta los nuevos retos para la educación, la Universidad Pedagógica Nacional generó el proyecto de Facultad "*Transformando comprensiones de los profesores de matemáticas mediante el uso de algunas tecnologías*".

Este trabajo muestra en el estudio de las funciones Logarítmica y Exponencial mediadas con Cabri Géomètre con la intención de transformar las compresiones de los docentes de la Institución Educativa General Santander del municipio de Soacha (Cundinamarca). Se presenta un módulo de actividades que se aplicaron a los docentes del área de matemáticas e informática de la Institución para analizar las transformaciones en las comprensiones de los docentes. Las actividades se sustentan bajo dos enfoques, un enfoque matemático y un enfoque didáctico; en el primer enfoque se estudia la teoría conceptual de las funciones Logarítmica y Exponencial y en el segundo se estudia la teoría del aprendizaje con comprensión propuesta por Carpenter y Lerher en 1999, las representaciones en matemáticas propuestas por Janvier en 1987 y el uso de herramientas tecnológicas en el aula de clase.

Fuentes: Para la realización del presente documento de utilizaron 24 referencias bibliográficas. Algunas de las más relevantes son:

APOSTOL, T. (1988) *Calculus.* Reverté v. 1. Ed. 2

CARPENTER, T & R. LEHRER (1999). *Teaching and learning mathematics with understanding.* En E. Fennema y T. Romberg (Eds). *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp.19 - 32)

JANVIER, C. (1987) *Problems of representation in the teachind and learning of mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

LEITHOLD, L. (1998) *El cálculo*. 7 ed. México. Oxford University Press.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. *Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia: Formación de Docentes sobre el Uso de Nuevas Tecnologías en el aula de Matemáticas.* Bogotá, D.C. Diciembre 2001 – Enero 2002.

SPIVAK, M. (1996) *Cálculo Infinitesimal*.2 ed. Editorial Reverté, México, D.F.

Contenidos: El documento está dividido en seis capítulos. En el capítulo uno se presenta la metodología del trabajo de grado, el capítulo dos corresponde a la revisión matemática de las funciones Logarítmica y Exponencial. El capítulo tres corresponde a la revisión teórica del aprendizaje con comprensión, las representaciones en matemáticas y el uso de la tecnología en el aula de clase. En el capítulo cuatro se presenta el proyecto de facultad, el contexto de la institución en la cual se desarrolló el trabajo y las prácticas educativas durante las cuales se desarrolló el proyecto. El capítulo cinco presenta el módulo de las actividades propuestas a los docentes, un análisis de su desarrollo y algunas de sus conclusiones. Finalmente, en el capítulo seis se evalúa la propuesta y se exponen las conclusiones obtenidas del trabajo.

Metodología: Este trabajo se realizó en el marco del proyecto de Facultad titulado "*Transformado comprensiones de los profesores de matemáticas mediante el uso de algunas tecnologías*.

En su ejecución se distinguieron cuatro etapas; la primera etapa fue la construcción del marco teórico que sustenta el módulo de actividades sobre las funciones logarítmica y exponencial, presenta las categorías de comprensión propuestas por Tomas Carpenter y Richard Lehrer (1992), las representaciones en matemáticas y el uso de herramientas tecnológicas en el aula. La segunda etapa fue la construcción de las actividades que requieren el uso del programa Cabri Géomètre, las cuales fueron evaluadas y aprobadas por los asesores de práctica y del trabajo de grado, para ser aplicadas a los docentes de la institución; la aplicación de las actividades se asocia con la tercera etapa. En la última etapa se analizaron las transformaciones en las comprensiones de los docentes relacionadas con las funciones Logarítmica y Exponencial al hacer uso del software Cabri Géomètre, con base en las categorías de comprensión propuestas por Carpenter y Lehrer: Construir relaciones, extender y aplicar conocimientos, reflexionar sobre las experiencias, articular lo que uno sabe y apropiarse del conocimiento matemático.

Conclusiones:

- Con la propuesta se logró que los docentes de la Institución Educativa General Santander contemplaran la posibilidad de incorporar la herramienta tecnológica Cabri Géométre como mediador en la enseñanza - aprendizaje de las matemáticas.

- El estudio de la función Logaritmo y de la función Exponencial desde su representación gráfica, mediado con el programa Cabri Géomètre permite abordar temáticas del currículo que por el tiempo académico no son posibles de estudiar, ya que disminuye el tiempo que usualmente se emplea para construir una función.

- La propuesta se puede extender para el estudio de derivadas e integrales de funciones Logarítmica y Exponencial mediado con una herramienta tecnológica, al igual que la composición de funciones.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN ANALÍTICO (RAE) 5

TABLA DE CONTENIDO 9

INTRODUCCIÓN 11

OBJETIVOS 13

OBJETIVO GENERAL 13

OBJETIVOS ESPECÍFICOS 13

1 METODOLOGÍA 14

2 MARCO MATEMÁTICO 15

2.2 FUNCIÓN LOGARITMO 15

2.2.1 Función Logaritmo natural 15

2.2.2 Logaritmos con base positiva 19

2.3 FUNCIÓN EXPONENCIAL 20

2.3.1 Función Exponencial expresada como potencia de e 22

2.3.2 Exponenciales de base a > 0 y x real 23

2.3.3 Subtangente de la función Exponencial 24

3 MARCO DIDÁCTICO 26

3.2 APRENDIZAJE CON COMPRENSIÓN 26

3.3 REPRESENTACIONES EN MATEMÁTICAS 31

3.4 USO DE LA TECNOLOGÍA EN EL AULA DE CLASE 34

4 PROPUESTA DE TRABAJO 39

4.2 DESCRIPCIÓN DEL PROYECTO DE FACULTAD 39

4.3 CONTEXTO INSTITUCIONAL 40

4.4 DESCRIPCIÓN DEL TRABAJO DE PRÁCTICA 41

4.4.1 Práctica en Contextos Amplios 41

4.4.2 Práctica Integral 42

5 DESARROLLO DE LA PROPUESTA 44

5.1 TALLER Nº 1 45

5.1.1 ANÁLISIS DE COMPRENSIÓN CONSTRUCCIÓN DEL CUADRADO 47

5.1.2 Conclusiones 58

5.2 TALLER Nº 2 59

5.2.1 ANÁLISIS DE COMPRENSIÓN SUMA DE DOS FUNCIONES EXPONENCIALES 63

5.2.2 Conclusiones 69

5.3 TALLER Nº 3 70

5.3.1 ANÁLISIS DE COMPRENSIÓN COMPORTAMIENTO DE LA GRÁFICA DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES 76

5.3.2 Conclusiones 89

5.4 TALLER Nº 4 90

5.4.1 ANÁLISIS DE COMPRENSIÓN 98

5.4.2 Conclusiones 109

6 EVALUACIÓN Y CONCLUSIONES 111

6.1 EVALUACIÓN DE LA PROPUESTA GENERADA Y DESARROLLADA CON LOS DOCENTES 111

6.2 CONCLUSIONES GENERALES SOBRE EL TRABAJO DESARROLLADO. 112

6.3 ALGUNAS IDEAS QUE SURGEN PARA FUTUROS TRABAJOS 113

7 BIBLIOGRAFÍA 114

ANEXOS 117

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, el impacto tecnológico en la educación ha transformado el proceso de enseñanza - aprendizaje, y la forma en que los docentes y los estudiantes acceden al conocimiento; por ello, uno de los grandes retos que se plantea a la educación es capacitar a los docentes en el uso de herramientas tecnológicas en el aula de clase. La vinculación de las instituciones educativas a las facultades de educación, es una estrategia para capacitar a los docentes a través de proyectos de facultad.

La Institución Educativa General Santander del municipio de Soacha solicitó a la Universidad Pedagógica Nacional establecer vínculos para formar sus docentes en el uso de herramientas tecnológicas que apoyaran el proceso de enseñanza - aprendizaje de las matemáticas, teniendo en cuenta que las transformaciones en las comprensiones del docente puede impactar los procesos de aprendizaje de los estudiantes, razón por la cual, la universidad generó el proyecto *"Transformando comprensiones de los profesores de matemáticas mediante el uso de algunas tecnologías"*, inscrito en la Facultad de Ciencia y Tecnología. Como resultado del proyecto de facultad surge este trabajo de grado que tiene como finalidad formar docentes del municipio de Soacha en el uso de herramientas tecnológicas para la construcción de funciones Logarítmica y Exponencial. La herramienta tecnológica usada, es el software de geometría dinámica Cabri Géomètre creado en Francia en la década de los 80s.

En este trabajo se presenta un módulo de actividades para el estudio y la construcción de funciones Logarítmica y Exponencial con el programa Cabri Géométre, las cuales fueron aplicadas a los docentes del área de matemáticas e informática de la Institución Educativa General Santander para analizar las transformaciones en las comprensiones de los docentes. Las actividades se sustentan bajo dos marcos, uno matemático y uno didáctico; en el primero se estudian los conceptos fundamentales de las funciones Logarítmica y

Exponencial y en el segundo se estudia la teoría del aprendizaje con comprensión propuesta por Carpenter y Lehrer en 1999, las representaciones en matemáticas propuestas por Janvier en 1987 y el uso de herramientas tecnológicas en el aula de clase.

El documento está dividido en seis capítulos. En el capítulo uno se presenta la metodología del trabajo de grado, el capítulo dos corresponde a la revisión matemática de las funciones Logarítmica y Exponencial. El capítulo tres corresponde a la revisión teórica del aprendizaje con comprensión, las representaciones en matemáticas y el uso de la tecnología en el aula de clase. En el capítulo cuatro se da a conocer el proyecto de facultad, el contexto de la institución en la cual se desarrolló el trabajo y las prácticas educativas dentro de las cuales se desarrolló el proyecto. El capítulo cinco presenta el módulo de las actividades propuestas a los docentes, un análisis de su desarrollo y algunas de sus conclusiones. Finalmente, en el capítulo seis se evalúa la propuesta y se exponen las conclusiones obtenidas del trabajo.

Con el desarrollo de este trabajo se logró que los docentes de la Institución Educativa General Santander contemplaran la posibilidad de incorporar la herramienta tecnológica Cabri Géométre como mediador en la enseñanza - aprendizaje de las matemáticas; además se observó que futuros trabajos se pueden ocupar en analizar las transformaciones de las comprensiones de estudiantes de bachillerato al estudiar el concepto de función con una herramienta tecnológica.

OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

- Plantear, desarrollar y evaluar una propuesta de actividades para el estudio de las funciones Logarítmica y Exponencial con el software Cabri Géomètre, que contribuya a la formación de algunos profesores del municipio de Soacha.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Diseñar y aplicar un módulo de actividades sobre funciones Logarítmica y Exponencial haciendo uso de Cabri Géométre, con el fin de que los docentes observen la utilidad de este programa en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares.

- Acompañar a los profesores durante la realización de las actividades planteadas en el módulo para orientar y ayudar en la superación las posibles dificultades conceptuales o de manejo del software que los docentes presenten.

- Construir el marco teórico que sustente el desarrollo de la propuesta.

- Realizar un análisis reflexivo y crítico acerca del desarrollo de la propuesta.

- Identificar las transformaciones de las concepciones teóricas de los docentes acerca de las funciones logarítmicas y exponenciales al hacer uso del software Cabri Géomètre.

1 METODOLOGÍA

Este trabajo de grado se realizó en el marco del proyecto de Facultad titulado "*Transformado comprensiones de los profesores de matemáticas mediante el uso de algunas tecnologías*"; durante el desarrollo de las prácticas educativas en contextos amplios e integral en la Institución Educativa General Santander del municipio de Soacha.

En su ejecución se distinguieron cuatro etapas; la primera etapa fue la construcción del marco teórico que sustenta el módulo de actividades sobre funciones Logarítmica y Exponencial, presenta las categorías de comprensión propuestas por Tomas Carpenter y Richard Lehrer (1992), las representaciones en matemáticas y el uso de herramientas tecnológicas en el aula. La segunda etapa fue la construcción de las actividades que requieren el uso del programa Cabri Géomètre, las cuales fueron evaluadas y aprobadas por los asesores de práctica y del trabajo de grado, para ser aplicadas a los docentes de la institución; la aplicación de las actividades se asocia con la tercera etapa. En la última etapa se analizó las transformaciones en las comprensiones de los docentes relacionadas con las funciones Logarítmica y Exponencial al hacer uso del software Cabri Géomètre, con base en las categorías propuestas por Carpenter y Lehrer.

2 MARCO MATEMÁTICO

2.2 *FUNCIÓN LOGARITMO*

2.2.1 Función Logaritmo natural

La función logaritmo natural $L(x)$ se define como:

Si x es un número real positivo, entonces $L(x)=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$

La representación gráfica de la función logaritmo natural se muestra a continuación

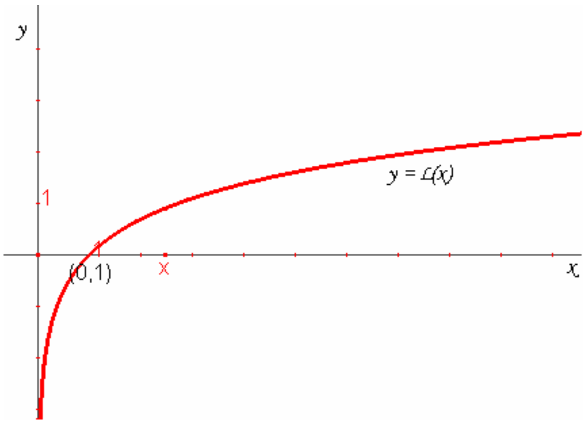


Figura 1

En la *figura 2* se muestra la representación gráfica de la función $f(t)=\frac{1}{t}$

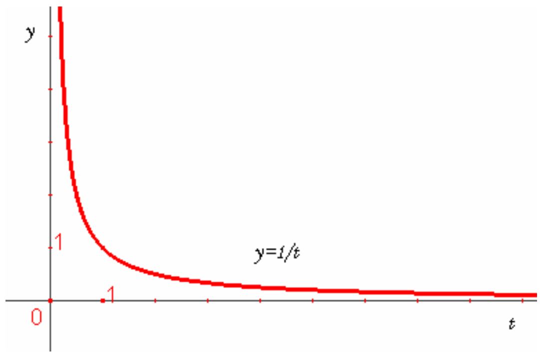


Figura 2

Cuando $x > 1$, $L(x)$ se puede interpretar geométricamente como el área de la región acotada por la curva $y = \frac{1}{t}$, el eje t, a la izquierda por la recta $t = 1$ y a la derecha por la recta $t = x$ (*figura 3*)

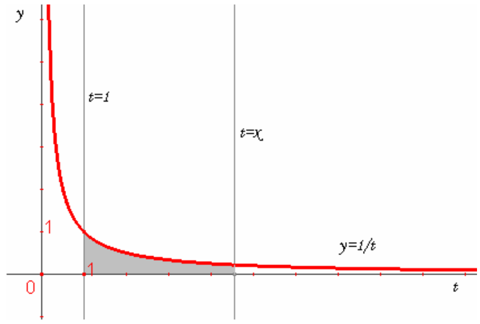


Figura 3

Si $0 < x < 1$, $L(x)$ representa la región acotada por la curva $y = \frac{1}{t}$, el eje t, a la izquierda por la recta $t = x$ y a la derecha por la recta $t = 1$ (*figura 4*).

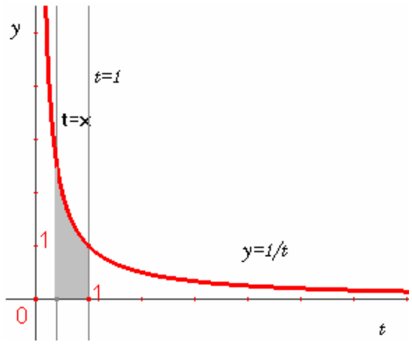


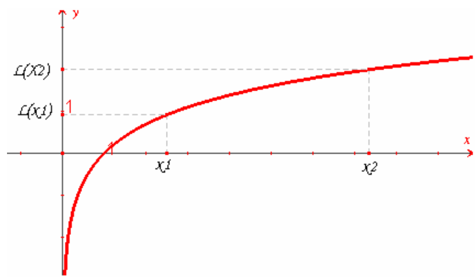
Figura 4

En este caso, se tiene que $\int_1^x \frac{1}{t}dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}dt$

ya que cuando $a > b$ y $\int_a^b f(x)\,dx$ existe, entonces $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Al considerar $L(x)$ cuando $x = 1$; la integral se transforma en $\int_1^1 \frac{1}{t}dt$, que es igual a cero; pues se sabe que si $f(a)$ existe, entonces $\int_a^a f(x)dx = 0$

Como $L(x)$ puede interpretarse en términos de la medida del área de una región, su valor depende de x y dicha función se define para los reales positivos diferentes de cero, entonces su dominio es el conjunto de los números reales positivos diferentes de cero y su recorrido es el conjunto de los números reales.



En la *figura 5*, se puede apreciar que la gráfica de $L(x)$ es creciente en todo intervalo, ya que $L(x_1) < L(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$, donde x_1 y x_2 son dos números cualesquiera. En la *figura 6* se observa que en todos valores de x, el punto $(x, L(x))$ de la gráfica está por debajo de la recta tangente a la curva; ya que todos los valores de la función son menores que los de la recta tangente, lo cual implica que esta función es cóncava hacia abajo.

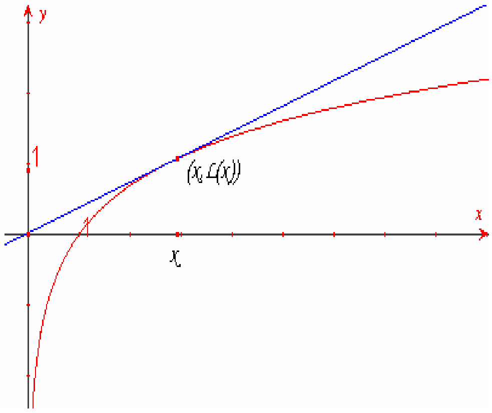


Figura 6

2.2.1.1 **Propiedades de la función logaritmo natural**[1]

Teorema 1 $L(1) = 0$

Teorema 2. Si $x > 0$, entonces $L'(x) = \dfrac{1}{x}$

La primera y segunda derivada de una función proporciona información importante acerca del comportamiento de la función. De la primera derivada se concluye que la función logaritmo natural es creciente, ya que al ser x mayor que cero, $\dfrac{1}{x}$ también lo es; por lo que $L'(x) > 0$; además cuando x toma valores grandes, la derivada de L se hace muy pequeña, y en consecuencia, L crece cada vez más despacio.

Para demostrar que la función logaritmo natural es cóncava hacia abajo, se analiza la segunda derivada de $L(x)$.

Por el teorema 2 se sabe que $L'(x) = \dfrac{1}{x}$, es decir que $L'(x) = x^{-1}$, luego $L''(x) = -x^{-1-1} = -x^{-2}$ y $L''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ como el cuadrado de todo número real es mayor

[1] Las demostraciones de los teoremas se pueden consultar en los anexos.

que cero, $L''(x) < 0$. Para todo x e y se concluye que la función logaritmo natural es cóncava hacia abajo.

Teorema 3. Si $a, b > 0$, entonces $L(ab) = L(a) + L(b)$

Sea $x > 0$ y f la función definida por $f(x) = L(ax)$ entonces $f'(x) = L'(ax) \cdot a$ es decir, $f'(x) = \frac{1}{ax} a$ así $f'(x) = \frac{1}{x}$.

A partir del teorema 2 se tiene $f'(x) = L'(x)$; esto significa que existe una constante c tal que $f(x) = L(x) + c$, es decir $L(ax) = L(x) + c$ para todo $x > 0$. El número c se puede calcular, para ello se considera $x = 1$, es decir $L(a) = L(1) + c$ por el teorema 1, se tiene que $L(a) = c$. Al sustituir $L(a)$ por c en (2), se tiene que $L(ax) = L(x) + L(a)$ para toda $x > 0$
Al considerar $x = b$, se obtiene $L(ab) = L(a) + L(b)$.
Lo cual se cumple para toda $b > 0$.

Del teorema anterior, se pueden deducir los siguientes dos teoremas

Teorema 4. Si $a, b > 0$, entonces $L\left(\frac{a}{b}\right) = L(a) - L(b)$

Teorema 5. Si r es cualquier número racional y $x > 0$, entonces $L(x^r) = rL(x)$.

Teorema 6. Para cada número real b existe exactamente un número real positivo x cuyo logaritmo $L(a)$, es igual a b.

Desde el punto de vista geométrico, se dice que la función logaritmo es uno a uno si y sólo si cada recta horizontal intersecta la gráfica de L a lo más en un punto (*figura 7*).

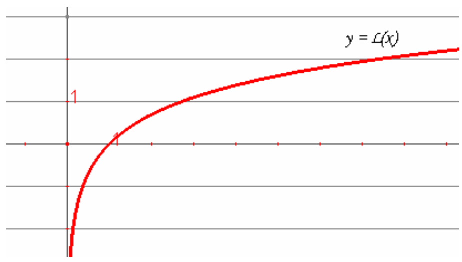


Figura 7

Definición. Se designa por e el número para el cual se cumple que $L(e) = 1$.

El número e es un número irracional, cuyo valor con ocho cifras decimales es 2.71828182, el símbolo de este número es decir la letra e, fue elegida por Leonhard Euler; los logaritmos cuya base es este número son conocidos como logaritmos naturales o logaritmos neperianos en honor a su inventor Juan Neper.

Euler definió el número e de la siguiente manera:

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

2.2.2 Logaritmos con base positiva $a \neq 1$

En el teorema 3 se observó que $f(x) = L(x) + c$ donde c es una constante. Para cada c, $f(x)$ se denomina el logaritmo de x asociado a c; el valor de este logaritmo, no necesariamente es 1. Cuando $c \neq 0$ existe un único real $a > 0$ tal que $f(a) = 1$, a está relacionada con c en la igualdad $\log_a = 1$, como $a \neq 1$, $c = 1/\log_a$ luego $f(x)$ es

$$f(x) = \frac{\log x}{\log a}$$

Para este caso, se dice que $f(x)$ es el logaritmo de x en base a y se escribe $\log_a x$

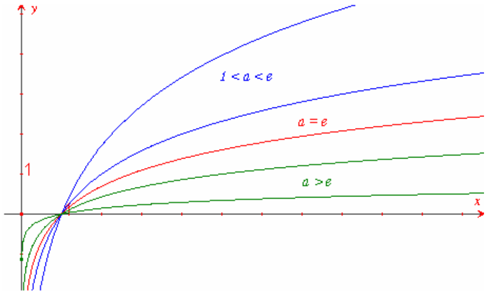
Definición

Si $a > 0$, $a \neq 1$, y si $x > 0$, el logaritmo de x en base a es el número $\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$

donde $\log x$ y $\log a$ son logaritmos naturales.

Se denomina logaritmo natural a aquellos logaritmos cuya base es igual a e, es decir $\log_e x = \log x$. De la definición se obtienen que $\log_a a = 1$.

Como los logaritmos en base a se obtienen multiplicando por la constante c igual a $1/\log_a$, la representación gráfica de éstos logaritmos se puede obtener de la representación gráfica de los logaritmos naturales; para ello se multiplican todas su ordenadas por un mismo valor. Si $a > 1$ ese valor es positivo (*figura 8*), y si $a < 1$ es negativo (*figura 9*).



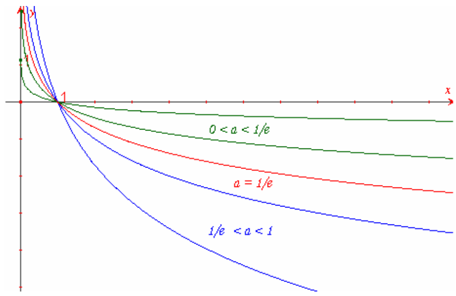


Figura 8 *Figura 9*

Cuando $a < 1$, $1/a > 1$ y $\log a = -\log(1/a)$, luego la gráfica de logaritmo de x en base a se puede obtener de la gráfica de logaritmo de x en base $1/a$ por simetría respecto al eje x. En la *figura 10* se observa la gráfica de $\log_{1/e} x$, la cual se obtuvo por simetría respecto al eje x de la gráfica de $\log x$.

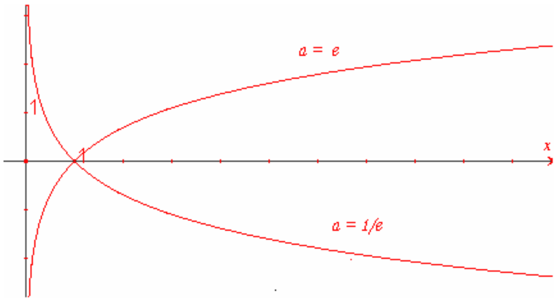


Figura 10

2.3 *FUNCIÓN EXPONENCIAL*

Mediante la función logaritmo para todo x real, existe uno y un solo valor de y tal que $L(y) = x$. Esto implica que existe su función inversa, denominada función exponencial representada por E.

Teorema Si L es una función uno a uno, entonces la relación L^{-1} es una función y también es uno a uno.

Sea $L^{-1} = E$. Si $(x, y) \in E$ y $(x, z) \in E$, entonces $(y, x) \in (E)^{-1} = (L^{-1})^{-1} = L$ y $(z, x) \in L$ es decir $L(y) = x = L(z)$ al ser L uno a uno se tiene $y = z$, demostrando así que E es función.

Ahora, si $E(a) = E(b) = y$, se tiene que $(a, y) \in E$ y $(b, y) \in E$ es decir $(y, a) \in L$ y $(y, b) \in L$ como L es un función, se tiene que $a = b$. Así E es una función uno a uno.

Definición. Para cualquier x real, se define $E(x)$ como el número y cuyo logaritmo es x, es decir $y = E(x)$ si y sólo si $L(y) = x$

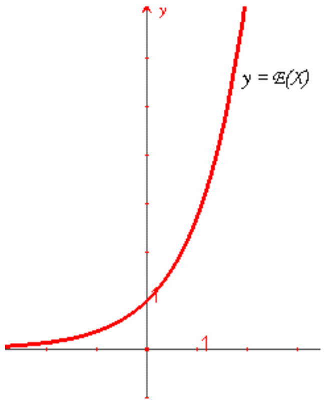


Figura 11

La función exponencial es la función inversa de la función logaritmo, el dominio de $E(x)$ es el recorrido de $L(y)$ y el recorrido de $E(x)$ es el dominio de $L(y)$. Es decir, que el dominio de E es todo el eje real; su recorrido es el conjunto de números reales positivos.

Dado que L es una función uno a uno y que E es su inversa, se tiene que E también es uno a uno y tiene a L como su inversa; además $E(L(x)) = x$ para toda x en el dominio de L y $L(E(x)) = x$ para toda x en el dominio de E.

Geométricamente, se dice que E es uno a uno si y sólo si cada recta horizontal corta a la gráfica de la función exponencial a lo más en un punto.

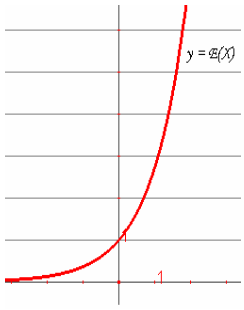
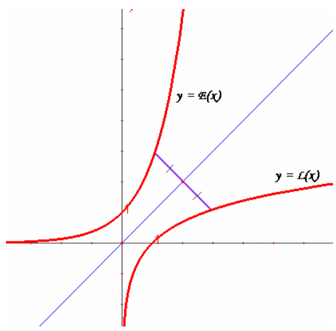


Figura 12

Como las funciones logaritmo y exponencial son inversas, las gráficas de éstas son reflexiones una de la otra con respecto a la recta $y = x$.



Otra consecuencia de ser $E(x)$ la función inversa de $L(y)$ es que al ser $L(y)$ una función continua y decreciente, E es continua y creciente, además la derivada de E con respecto a x es $E'(x) = \frac{1}{L'(y)}$; lo cual implica que $E' = \frac{1}{\frac{1}{y}}$, luego $E' = y$. Por definición de función exponencial se tiene que $y = E(x)$, así $E'(x) = E(x)$.

Las propiedades de la función logaritmo se pueden plantear para las funciones exponenciales

Teorema 7. $E(0) = 1$

Teorema 8. $E(a+b) = E(a)E(b)$ para todo a y todo b

Teorema 9. $E(a) \div E(b) = E(a-b)$ para todo a y todo b.

Teorema 10. $[E(a)]^b = E(a \cdot b)$ para todo a y todo b.

2.3.1 Función Exponencial expresada como potencia de *e*

Del mismo modo que la función logarítmica en base diferente a e se pueden expresar en términos de $\log$, así también una función exponencial de base diferente a e se pueden expresar en términos de e. Se puede utilizar el teorema 8 para demostrar que $E(r) = e^r$ donde r es un número racional.

Para ello se tomará $b = -a$ en la ecuación $E(a+b) = E(a)E(b)$; es decir $E(a)E(-a) = E(a-a)$ así $E(a-a) = E(0)$, por el teorema 7 esto es igual a 1; luego $E(-a) = 1/E(a)$ para todo a real.

Al tomar $b = a$, se obtiene $E(a)E(a) = E(2a)$ y $E(2a) = E(a)^2$ si $b = 2a$ $E(a)E(2a) = E(a+2a) = E(3a)$ como $E(2a) = E(a)^2$

$$E(a)E(a)^2 = E(a)^3 = E(3a)$$

Si $b = 3a$ $E(a)E(3a) = E(a+3a) = E(4a)$ como $E(3a) = E(a)^3$ $E(a)E(a)^3 = E(a)^4 = E(4a)$ en general $E(na) = E(a)^n$ para todo entero positivo n.

Cuando $a = 1/n$ se tiene $E(n \cdot 1/n) = E(1/n)^n$ es decir $E(1) = E(1/n)^n$ como $E(1/n) > 0$ implica que $E(1/n) = e^{1/n}$. Luego, si $a = 1/m$ en $E(na) = E(a)^n$, se tiene $E\left(\frac{n}{m}\right) = E\left(\frac{1}{m}\right)^n$ al aplicar esta expresión en $E(1/n) = e^{1/n}$, se tiene $E\left(\frac{n}{m}\right) = E\left(\frac{1}{m}\right)^n = e^{m/n}$ para m y n enteros positivos cualesquiera.

Así se demuestra que $E(r) = e^r$ para cada número r racional positivo. Como $E(-r) = 1/E(r) = e^{-r}$ también es válida para todo r racional negativo.

La igualdad $E(x) = e^x$ donde x es un número irracional, también se tiene. El teorema 8 justifica este hecho, ya que la igualdad $e^a e^b = e^{a+b}$ es válida para todos los números reales a y b.

Teorema 11. Si $f(x) = e^x$ entonces $f'(x) = e^x$

2.3.2 Exponenciales de base $a > 0$ y x real

Como $a = e^{\log a}$ entonces a^x siendo x un número racional es $a^x = \left(e^{\log a}\right)^x$ y por el teorema 10 se tiene $\left(e^{\log a}\right)^x = e^{x \log a}$ así $a^x = e^{x \log a}$ la expresión de la derecha está definida para todo x.

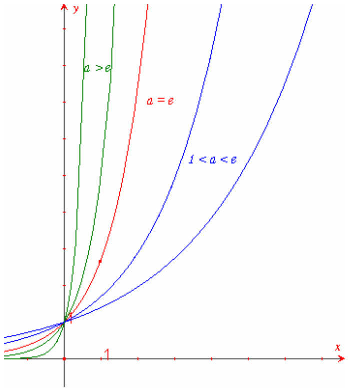
Definición

Si $a > 0$, entonces, para cualquier número real x, $a^x = e^{x \log a}$

cuando $a = e$ se tiene $a^x = e^{x \log e}$ como logaritmo de e en base e es igual a 1, entonces $a^x = e^x$.

Si $a \neq 1$, entonces $y = a^x$ si y sólo si $x = \log_a y$.

La *figura 14* muestra la gráfica de la función cuando $a > 1$, la *figura 15* cuando $0 < a < 1$ y cuando $a = 1$ se obtiene la recta horizontal $y = 1$.



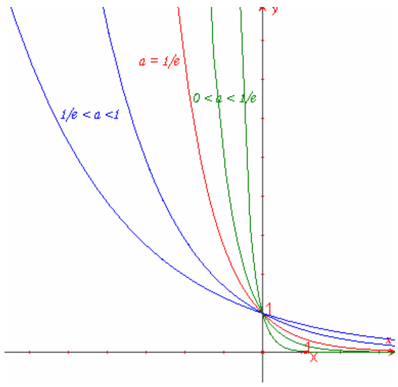


Figura 14 *Figura 15*

2.3.3 Subtangente de la función Exponencial

La subtangente asociada con una función diferenciable f es una función s definida por la ecuación $s(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ para cada punto x, donde $f'(x)$ y $f(x)$ son diferentes de cero. Cuando $f(x) > 0$, $s(x)$ representa la base de un triángulo rectángulo de altura $f(x)$ tal que la pendiente de su hipotenusa es $f'(x)$.

Geométricamente la subtangente es un segmento XS, el cual es la proyección sobre el eje de las abscisas del segmento tangente PS cuyos extremos son el punto de tangencia P y el punto de corte S de la tangente con el eje horizontal (ver *figura 16*).

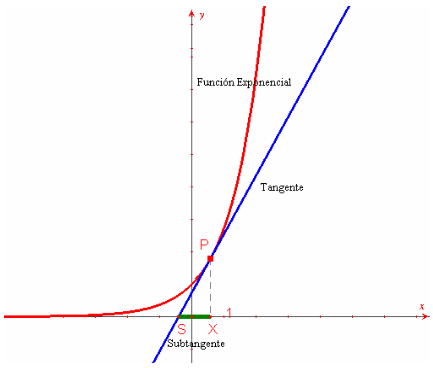


Figura 16

En el caso de la función exponencial de base e se tiene que $s(x)=1$, ya que al ser la derivada de la función exponencial de base e igual a e^x, se tiene que $s(x)=\dfrac{e^x}{e^x}$.

Cuando la base de la función exponencial es un número a mayor que cero, la subtangente es $s(x)=\dfrac{\ln a\cdot e^{x\ln a}}{e^{x\ln a}}$ luego la subtangente de $f(x)=a^x$ con $a>0$ es $s(x)=\ln a$.

3 MARCO DIDÁCTICO

3.2 APRENDIZAJE CON COMPRENSIÓN

La comprensión es una actividad mental del ser humano, un proceso de crecimiento interminable, dinámico, completo, estratificado pero no lineal, que emerge y se desarrolla; es decir, no es un proceso de todo o nada (Carpenter y Lehrer, 1999).

En torno a la comprensión matemática han surgido teorías como la teoría APOE de Dubinsky que relaciona la comprensión con el conocimiento, al ser "la comprensión un proceso interminable de construcción de esquemas interactivos, mediante la abstracción reflexiva; un proceso cognitivo en el que el estudiante reconstruye y reorganiza las acciones físicas o mentales en un plano más elevado de pensamiento y, por tanto las comprende" (Meel, 2003. p.226), Polya identificó la comprensión como un proceso mecánico, inductivo, racional e intuitivo, Lehman asoció la comprensión tres tipos de conocimiento: aplicaciones, significados y relaciones lógicas; mientras que Davis la relaciona con conceptos, generalizaciones, procedimientos o hechos numéricos. Kaput asoció el desarrollo de la comprensión como el cambio de operación en el mundo de las operaciones físicas para operar en el mundo de las operaciones mentales (p.231). Autores como Burton, Hiebert, Greeno, Janvier y Carpenter, entre otros, asocian la comprensión al desarrollo de conexiones entre ideas, hechos o procedimientos, para formar una red de conexiones, propiciando una estructura para situar una información mediante conocimiento de similitudes, diferencias, relaciones inclusivas y relaciones de transferencia entre modelos. De esta manera, el desarrollo de la comprensión resulta del proceso de conectar las representaciones a una red estructurada y cognitiva (p.227).

Janvier (1987, p.67) señala algunas características de comprensión, a saber:

1. La comprensión se puede determinar por la realización de actos mentales definidos e implica una serie de actividades complejas.

2. Presupone acciones automáticas supervisadas por procesos mentales de reflexión y planeamiento. Por lo tanto, la compresión no puede identificarse exclusivamente con actividades mentales reflejadas en los conceptos.

3. Comprender es un proceso continuo. La construcción de un sistema ramificado de conceptos en el cerebro es lo que da lugar a la comprensión. Los conceptos matemáticos no se construyen en el momento en el que son introducidos por el docente.

4. La comprensión es un proceso acumulativo basado en la capacidad de tratar con un "siempre - enriquecido" conjunto de representaciones.

La cuarta característica deja ver una relación existente entre la comprensión y las representaciones; otros autores afirman que las diferentes representaciones de los objetos matemáticos[2] son elementos fundamentales para su comprensión y por tanto para su enseñanza - aprendizaje.

El interés de diversos autores por analizar la relación entre las representaciones y el proceso de comprensión se ve reflejado en la siguiente afirmación de Font[3]:

> *"En el campo de la investigación en didáctica de las matemáticas se han realizado muchas investigaciones para precisar el término "representación" y para estudiar el papel que juegan las diferentes representaciones en el proceso de comprensión de los contenidos matemáticos (Brown 1996 y 1997; Kaput 1987, 1991 y 1992; Janvier 1987; Duval 1995; Romero y Rico 1999). La mayoría están de acuerdo en que la naturaleza de las representaciones matemáticas ostensivas[4] influye en el tipo de comprensión que genera el alumno, y, recíprocamente, el tipo de comprensión que tiene el alumno determina el tipo de representación ostensiva que puede generar o utilizar*".

El NCTM dentro de sus Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares del 2000, señala que:

---

[2] Chevallard define un objeto matemático como "*un emergente de un sistema de prácticas donde son manipulados objetos materiales que se desglosan en diferentes registros semióticos: registro de lo oral, registro de lo gestual, registro de lo escrito"*

[3] En http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/pome14/font.doc

[4] Font llama *representación ostensiva* a las representaciones que Janvier asocia al concepto de función.

“Los programas de instrucción matemática, deberían enfatizar las representaciones matemáticas para fomentar la comprensión de las matemáticas de forma que todos los estudiantes:

- *Creen y usen representaciones para organizar, memorizar y comunicar ideas matemáticas.*
- *Desarrollen un repertorio de representaciones matemáticas que puedan usarse de forma útil, flexible y apropiada.*
- *Usen representaciones para modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.”*

Dada la importancia de las representaciones en el proceso de comprensión, más adelante se realizará una breve descripción de las representaciones en Matemáticas.

El análisis de las transformaciones de las comprensiones de los docentes con respecto al software Cabri Géomètre y las funciones Logaritmo y Exponencial, se realizará desde la perspectiva de comprensión propuesta por Thomas Carpenter y Richard Lehrer, en la que se reconoce que la principal característica del aprendizaje con comprensión es ser generativo; con el cual las personas que aprenden pueden aplicar los conocimientos para aprender nuevos tópicos y resolver nuevos problemas no rutinarios. Esto es un aspecto importante, pues para que los conocimientos adquiridos por la persona sean útiles en diversos contextos, se requiere prepararlo de manera tal que esté en capacidad de aprender habilidades y conocimientos de manera continua y adaptar su conocimiento para resolver nuevos problemas; al ser complejo el desarrollar en él todas las habilidades que necesitará y anticipar todos los problemas que encontrará a lo largo de su vida.

Carpenter y Lehrer proponen cinco formas de actividad mental de la cual emerge la compresión:

CONSTRUIR RELACIONES

Para el ser humano las cosas toman sentido y significado cuando las relaciona con otras que para él son familiares; es así como una persona construye el significado de un nuevo concepto o procedimiento cuando lo asocia a ideas o procesos que ya comprende.

Se observa que en la mente del niño cuando ingresa al colegio, existen nociones que ha creado a partir de la exploración de su entorno, las cuales han de ser una base para la construcción de un conocimiento formal; pues de no ser así, él estaría desarrollando dos sistemas de conocimiento, uno para la escuela y otro fuera de ella; sin embargo, los conocimientos formales e informales, no son los únicos con los que se construyen relaciones, ya que éstas también se dan entre los conocimientos formales; sería difícil estudiar y comprender un tópico matemático sin tener un conocimiento que permita el acercamiento y el estudio de éste; por ejemplo, sería muy complicado comprender el significado de la multiplicación cuando el estudiante no ha realizado un estudio previo de la operación suma.

EXTENDER Y APLICAR CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

La compresión no sólo es el proceso de construir relaciones, ya que para dar lugar a conocimientos estructurados no es suficiente con adherir nuevos conocimientos a los conocimientos previos; sino que se deben crear ricas estructuras de conocimiento integrado, porque con éstas el nuevo conocimiento es menos susceptible de ser olvidado.

Para ello, se debe involucrar el desarrollo de relaciones que reflejen principios matemáticos importantes, es decir que estas relaciones surjan a partir de una estructura de conocimiento matemática altamente estructurada y consolidada. Otro aspecto importante, es que la persona sea capaz de discernir cuáles situaciones requieren de determinado conocimiento, y cómo éste deber ser usado y aplicado.

REFLEXIONAR SOBRE LAS EXPERIENCIAS

Una habilidad del ser humano es reflexionar sobre las acciones, ya sean propias o de su entorno, conllevándolo a un aprendizaje; por ello, es importante que la persona desarrolle esta habilidad para que aprenda con comprensión, porque cuando reflexiona sobre su propio aprendizaje realiza un examen consiente de lo que sabe y cómo lo sabe, permitiéndole así resolver problemas que no son rutinarios y analizar cómo es que el nuevo conocimiento se adhiere al conocimiento ya adquirido. De esta manera la persona reorganiza su pensamiento y adquiere una visión más amplia de sus conocimientos.

ARTICULAR LO QUE UNO SABE

Articular lo que uno sabe significa comunicar las ideas que se tienen y lo aprendido; ya sea verbalmente, gráficamente o por escrito. El proceso de comunicar las ideas, en un principio no es un proceso fácil para la persona que está aprendiendo, pero es una habilidad que se va adquiriendo a medida que se es capaz de reflexionar y reorganizar las ideas y pensamientos destacando críticamente la esencia de las cosas.

La articulación del pensamiento se puede concebir como una reflexión, porque a medida que la persona se esfuerza por comunicar de manera clara y sencilla un tópico que para él no es familiar éste debe examinar lo que sabe y reorganizar sus ideas, para así clarificar su conocimiento del tópico estudiado.

APROPIARSE DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

En el proceso de enseñanza – aprendizaje no basta con que la persona perciba lo que el docente le comunica para aprender; sino que se hace necesario que construya e interiorice su conocimiento; a través de la interacción e intercambio entre la persona que aprende y el docente y entre las otras personas. Es así como en el aprendizaje con comprensión, la comunicación y la negociación de significados son facetas importantes.

La siguiente tabla sintetiza las cinco actividades propuestas por Carpenter y Lehrer de las cuales emerge la comprensión

Categoría	Descripción
Construir relaciones	Se construye significado de una idea nueva o conocimiento cuando ésta se relaciona con ideas o procedimientos ya construidos.
Extender y aplicar conocimiento matemático	Crear ricas estructuras de conocimiento integrando los nuevos conocimientos y los antiguos.
Reflexionar sobre las experiencias	Reflexionar acerca de lo que se sabe y cómo se sabe permite identificar y describir elementos cruciales para reorganizar lo aprendido y resolver problemas.
Articular lo que uno sabe	Comunicar las ideas que se tienen y lo aprendido.
Apropiarse del conocimiento matemático	En la medida en que se es autor del propio aprendizaje, se hace necesario ser reflexivo por sí mismo, al mismo tiempo que se aprende o se resuelven problemas.

3.3 REPRESENTACIONES EN MATEMÁTICAS

Con representaciones matemáticas, se hace referencia a dos tipos de representaciones, las internas y las externas. Las primeras se asocian a las representaciones mentales (conjunto de imágenes, creencias, conceptos, nociones) que el individuo tiene sobre un objeto matemático y las segundas se asocian con las representaciones semióticas.

Los sistemas de representación son un aspecto central de la comprensión del sujeto acerca de los objetos matemáticos, sus relaciones y de las actividades matemáticas. Chevallard, Duval, Godino y Batanero, afirman que en matemáticas la adquisición conceptual de un objeto pasa necesariamente a través de la adquisición de una o más representaciones semióticas. Según Duval (1995)[5], las representaciones semióticas son un medio del individuo para exteriorizar sus representaciones mentales y desarrollar la propia actividad matemática; es decir, para expresar la red de significados personales de los sujetos que los

[5] Citado en *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (1): 117-150 (2006)

usan y estimular los sentidos en los procesos de construcción de nuevas estructuras mentales, posibilitando un tratamiento sobre los objetos matemáticos

Dufour - Janvier, Bernarz, Belanger[6] justifican el uso de las representaciones externas en la enseñanza de las matemáticas:

- Las representaciones son una parte inherente de las Matemáticas (refiriéndose a las representaciones convencionales de las matemáticas), porque éstas se asocian estrechamente a un concepto, el cuál es difícil concebirlo sin las representaciones. Un ejemplo son las funciones y las gráficas cartesianas.

- Las representaciones son múltiples concretizaciones de un concepto. Por ejemplo, varias representaciones pueden abarcar el mismo concepto o la misma estructura matemática. Al presentar éstas al estudiante se espera que él pueda "tomar" las características comunes de las representaciones y finalmente "extraer" la estructura designada.

- Las representaciones se utilizan para atenuar ciertas dificultades. Los libros de texto de matemáticas y los profesores de matemáticas hacen uso de las representaciones en múltiples ocasiones: (1) una vez se da la tarea al niño, varias representaciones son proporcionadas para que él pueda encontrar la representación que le permita alcanzar la tarea; (2) en el aprendizaje de un recurso esporádico de un concepto, se hacen representaciones en las que el niño pueda inclinarse para dar significado a lo que se está estudiando; (3) para atraer la atención momentáneamente a una dificultad, a un objeto o relación que se quiere priorizar.

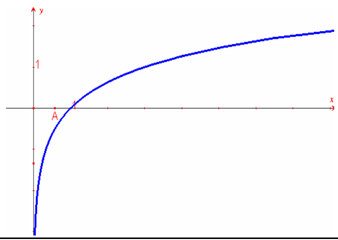
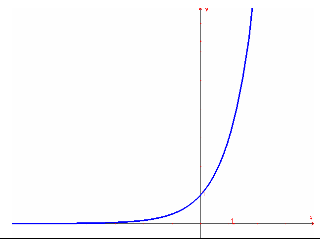
- Se piensa que las representaciones hacen las matemáticas más atractivas e interesantes. Las representaciones son usadas por los autores de textos para embellecer u ornamentar la presentación de las matemáticas para motivar al estudiante o presentar las analogías del mundo real.

[6] En Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.

Para Janvier (1987), la idea de representación ayuda a distinguir diversas facetas del concepto de función, ya que para él y Freudenthal, detrás de la idea general de función están presentes muchos objetos básicamente diferentes. Es por ello, que en el concepto de función se reconocen cuatro clases de representación: visual, algebraica, verbal y numérica, que evidencian unas propiedades o características de la función, que dan lugar a una aproximación al concepto de función. Básicamente la representación visual se refiere a una gráfica que está compuesta por objetos geométricos, sus características y sus relaciones; la representación algebraica es aquella donde se hacen explícitas la ecuaciones compuestas por variables, la representación verbal está relacionada con una descripción verbal de la función, y la representación numérica se asocia con la compilación de datos numéricos en una tabla.

La siguiente tabla presenta algunos ejemplos de representación de las funciones Logarítmica y Exponencial.

<table>
<tr><th>Función

Representación</th><th>Logarítmica</th><th>Exponencial</th></tr>
<tr><td>Visual</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Algebraica</td><td>$f(x) = \log_3 x$</td><td>$f(x) = 3^x$</td></tr>
<tr><td>Verbal</td><td>Logaritmo en base tres de uno es igual a cero</td><td>Tres elevado a la cero es igual a uno</td></tr>
<tr><td>Numérica[7]</td><td>
<table>
<tr><th>x</th><th>$\log_3 x$</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>1.5</td><td>0.37</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0.63</td></tr>
<tr><td>2.5</td><td>0.83</td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td></tr>
</table>
</td><td>
<table>
<tr><th>x</th><th>3^x</th></tr>
<tr><td>-1</td><td>0.33</td></tr>
<tr><td>-0.5</td><td>0.58</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0.5</td><td>1.73</td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

En el desarrollo del módulo de actividades se favorecen dos tipos de representaciones de la función, una es la representación visual y la otra es la representación algebraica.

3.4 USO DE LA TECNOLOGÍA EN EL AULA DE CLASE

La tecnología ha estado ligada al ser humano desde el comienzo de su evolución y forma parte de la vida diaria del hombre, ya que de manera no visible para la mayoría, modifica las actividades, rutinas, el modo de pensar, la manera cómo el ser humano ve el mundo e incluso la manera de enseñar y de aprender.

---

[7] Los valores numéricos de $\log_3 x$ y 3^x, son las aproximaciones que arroja la calculadora del programa Cabri Géomètre II Plus.

Se concibe la incorporación de tecnologías computacionales al currículo de matemáticas como una alternativa para generar una educación de calidad. Por eso cada vez el uso de programas como Cabri Géomètre, Derive, Regla y Compás, entre otros, toman mayor auge en el aula de clase. Como señala Balacheff & Kaput (1996), las herramientas computacionales han generado un nuevo realismo matemático y es que éstas están dejando a un lado la enseñanza tradicional con lápiz y papel, para dar paso a la manipulación de objetos matemáticos. Es así como también cambia la perspectiva de la enseñanza de las matemáticas, ya que al introducir las nuevas tecnologías al aula de clase se provocan reacciones alterando el Sistema Didáctico compuesto por estudiantes, profesor y saber, ya que existe un instrumento mediador que transforma las prácticas educativas (Chevallard, 1992). Lo que implica que el rol del docente cambia en la medida en que son diferentes las condiciones de trabajo, las formas de comunicación que el software ofrece, los modos de proceder que se propician en la resolución de tareas, y los tipos de actividades estándar que pueden proponerse. Así, el docente ya no es un transmisor conocimiento sino que es un guía en el proceso de aprendizaje del estudiante, quien al asumir el reto de incorporar la tecnología en el aula de matemáticas, se ve en la necesidad de profundizar en sus conocimientos y en cuestionar su práctica educativa.

Algunas de las actuaciones posibles del docente en el aula de clase al implementar un programa de geometría dinámica son: conducir hacia la abstracción y la generalización, invitar a la predicción de resultados, provocar la reflexión sobre el tipo o tipos de representación que entran en juego, ayudar a la interpretación de relaciones entre lo visual y lo riguroso, desarrollar rigurosamente nuevas ideas matemáticas que surjan del entorno visual, ayudar a explorar las intuiciones personales.

Al mismo tiempo que cambia el papel del docente, cambia el rol del estudiante, el cual deja de ser un receptor de conocimiento para ser quien construye su propio conocimiento a partir de acciones como: visualizar, explorar, razonar, solucionar y formular problemas y verificar teoremas y propiedades matemáticas y geométricas.

Cada herramienta computacional tiene sus propios principios, pero la mayoría se basa en los siguientes dos principios generales[8]:

- ***Dudar de lo que se ve*** significa no tomar por verdaderas relaciones percibidas en una imagen estática, sino tratar de confirmar su invariabilidad durante el arrastre.

- **V*er más de lo que se ve*** significa estudiar una figura para tratar de descubrir relaciones que no están presentes a simple vista. Esto es posible enriqueciendo la figura con construcciones auxiliares, marcas y mediciones, lo que constituye un verdadero trabajo de experimentación.

Por otra parte, las herramientas computacionales permiten[9]:

- La construcción, exploración, manipulación directa y dinámica de objetos en pantalla, que conducen en un nivel bajo, a la elaboración de conjeturas, en un nivel medio, a la argumentación y un nivel superior, a la realización de demostraciones.
- Las representaciones geométricas, tabulares, algebraicas y gráficas, en forma dinámica, al igual que las conversiones entre representaciones.
- La representación gráfica en dos y tres dimensiones, dando la posibilidad de realizar transformaciones y de asociar figuras con objetos físicos, para pasar a un nivel de conceptualización, más elevado.
- Problematizar lo visual, de tal forma que surja la necesidad de examinar, conjeturar, predecir y verificar, es decir, dar al estudiante la posibilidad de pensar y de preguntar sobre el porque de determinados hechos, llevándolo a la exploración de otras situaciones.
- La ampliación del rango de formulación y resolución de problemas.
- La simulación de microentornos de trabajo, en los que se puede diseñar actividades significativas contextualizando un problema.

[8] MEN (2004). Pensamiento Geométrico. P.23
[9] En Uso Pedagógico de los programas Derive 6.1 y Cabri Geometry II Plus, en las clases de Matemáticas.

- Explorar ideas dentro de ámbitos particulares, concretos y manipulables pero que contienen la semilla de lo general, lo abstracto, lo virtual.
- Producir diversos gráficos que en su mayoría serían difíciles de producir a mano.

EL PROGRAMA CABRI GÉOMÈTRE

Cabri Géomètre es un programa desarrollado en los años 80 por Ives Baulac, Franck Bellemain y Jean-Marie Laborde del laboratorio de estructuras discretas y de didáctica del IMAG (Instituto de Informática y Matemáticas Aplicadas de Grenoble, Francia) en colaboración con el Center National de la Recherche Scientifique (CNRS) y Texas Instruments.

Este es un programa con fines didácticos, ya que es una herramienta para el aprendizaje de la geometría basado en las teorías constructivistas del aprendizaje derivadas de los trabajos de Piaget y de una concepción de entorno informático derivada de los trabajos de la escuela de Palo Alto.

Balacheff y Kaput afirman que *"con Cabri Géomètre la geometría se transforma en el estudio de las propiedades invariantes de (unos) dibujos cuando se arrastran sus componentes en la pantalla: la afirmación de una propiedad geométrica se convierte en la descripción del fenómeno geométrico accesible a la observación en estos nuevos campos de experimentación"* [10] . El principio fundamental de Cabri Géomètre es el dinamismo, lo cual implica que las construcciones geométricas no son estáticas, sino que son dinámicas, es decir que las propiedades de los objetos geométricos que están en la pantalla permanecen invariantes en todas las posibles posiciones que el objeto tome en la pantalla. Otras características del programa son el uso de *lugar geométrico* y *traza* (huella que deja la figura geométrica cuando se le arrastra) las cuales permiten visualizar y descubrir hechos geométricos y la animación de figuras permite observar la construcción de un hecho geométrico.

Es importante ver que Cabri Géomètre permite ejecutar varias acciones a mayor velocidad que si se estuvieran haciendo con el lápiz y papel. De ahí, que con los estudiantes se pueda

[10] En http://ued.uniandes.edu.co/servidor/em/recinf/software/cabri.html

trabajar en la acción de conjeturar. Por ejemplo, si el objetivo de la clase es analizar el comportamiento de una función, Cabri permite construir la función y modificar sus variables de manera tal que se puedan analizar diversos casos para concluir cómo es el comportamiento de la función, aspecto que no se puede dar a un mismo tiempo al trabajar con la regla y el compás usual, ya que el proceso de graficar la función conlleva mayor tiempo y puede desviar el rumbo de la clase. Otro aspecto importante es que da la posibilidad de ver y trabajar con los objetos matemáticos en varias representaciones y observar de manera dinámica los cambios que aparecen (y las invariantes que permanecen) cuando se manipulan los objetos en la pantalla, aspecto esencial del proceso de comprensión de las matemáticas.

Cabri Géomètre aporta formas de abordar contenidos matemáticos y los hace más fáciles de comprender por los estudiantes, posibilita el tratamiento de coordenadas, permite realizar diseños interactivos de manera tal que los coeficientes de la expresión algebraica pueden ser modificados y que se pueda observar los cambios producidos en su gráfica para extraer conclusiones y conjeturar acerca de las ideas generales de las funciones. También favorece un acercamiento al estudio de las funciones y de familias de funciones, al tener la posibilidad de recorrer punto a punto la curva de una función y al establecer conexiones entre las ideas algebraicas y gráficas por medio de la geometría.

4 PROPUESTA DE TRABAJO

Este trabajo de grado se desarrolló en el marco del proyecto de facultad titulado *Transformando comprensiones de los profesores de matemáticas mediante el uso de algunas tecnologías* con código FCTMA206, bajo la coordinación de los docentes de la Universidad Pedagógica Nacional Mauricio Bautista Ballén y Claudia Salazar Amaya y la participación de seis estudiantes, quienes durante dos semestres realizaron la práctica en Contextos Educativos Amplios y la práctica Integral en la Institución Educativa General Santander ubicada en el municipio de Soacha. A continuación se describe el proyecto de facultad y las actividades desarrolladas en las prácticas.

4.2 Descripción del proyecto de facultad

Línea de Investigación: Currículo y evaluación en Matemáticas. Formación continuada de profesores de matemáticas.

Objetivo institucional: Apoyar la creación de redes locales, regionales y nacionales, de tal forma que las acciones de la facultad sirvan como apoyo, acompañamiento y transformación de las prácticas educativas y culturales.

Las facultades de educación además de la responsabilidad enorme de ocuparse de la formación de los profesores de las futuras generaciones, deben ocuparse de generar redes y comunidades académicas que propendan por el fortalecimiento de los modelos de enseñanza y de distintas vías de aprendizaje en los procesos de construcción del conocimiento matemático y desarrollo del pensamiento (referido a las características que conciernen a este saber). El Departamento de Matemáticas, en su propósito de contribuir con la formación continuada de profesores, tiene como una de sus metas conformar una red en el municipio de Soacha, que explore las posibilidades que ofrece la incorporación de algunos recursos tecnológicos en el desarrollo de la clase de matemáticas. Con este propósito, los integrantes de este proyecto promovieron la discusión sobre las comprensiones que se pueden favorecer acerca de los objetos matemáticos a partir de las representaciones que ofrece la incorporación de algunos elementos tecnológicos al aula de clase.

La pregunta que intenta responder este proyecto es:

¿Cómo pueden transformarse las comprensiones de los profesores sobre el objeto matemático función a través del análisis de los sistemas de representación que ofrece la incorporación de herramientas tecnológicas al aula, del tal modo que se pueda incidir en los procesos de enseñanza y aprendizaje que el profesor promueve?

Objetivos específicos:

- Transformar las comprensiones de los profesores de matemáticas sobre las funciones a partir de la incorporación de algunas herramientas tecnológicas.
- Construir propuestas de trabajo para el aula de clase, en las que se privilegie el uso de sistemas de representación ofrecidos por las herramientas tecnológicas que se incorporan al aula de clase.
- Contribuir en la creación de redes de maestros que propendan por la profundidad y complejidad del conocimiento profesional del profesor de matemáticas

Actividades específicas:

1. Generación de marco de referencia para la propuesta de trabajo con los profesores.
2. Construcción de actividades por módulos sobre distintas familias de funciones.
3. Construcción de un documento de trabajo para el grupo de profesores con los que se conformará la red.

4.3 Contexto Institucional

El manual de convivencia de la Institución Educativa General Santander contempla el derecho a la actualización e innovación permanente de las estrategias metodológicas, que contribuyan a una mejor calidad de la institución, razón por la cual la Institución ve la necesidad que de sus docentes estén en constante actualización.

Descripción de los docentes de la Institución

La Institución Educativa General Santander cuenta con un grupo amplio de docentes que trabajan por áreas, cada área tiene un coordinador. El área de matemáticas trabaja con el área de Informática y quién las coordina en la jornada mañana es la profesora Paola Balda.

4.4 DESCRIPCIÓN DEL TRABAJO DE PRÁCTICA

4.4.1 Práctica en Contextos Amplios

Objetivo general. Proponer y desarrollar un trabajo, que contribuya a la formación continuada de los profesores del área de matemáticas de la Institución Educativa General Santander acerca de las funciones logarítmicas y exponenciales con ayuda del software Cabri Géomètre.

Objetivos específicos:

- Diseñar actividades con Cabri Géomètre que despierten el interés en los docentes y que además les permitan ver la utilidad que éste tiene en el aprendizaje.
- Acompañar a los profesores durante la realización de las actividades planteadas para la superación de las dificultades conceptuales o en el manejo del software que ellos presenten.

Al comenzar esta práctica desarrollada en el segundo semestre del año 2006 se planeó realizar y desarrollar una serie de actividades y talleres en Cabri Géomètre relacionados con las funciones logarítmicas y exponenciales. No obstante, al observar que los docentes no manejaban el software se modificó el plan de trabajo y se incluyeron algunas actividades relacionadas con el concepto de cuadrado y triángulo[11].

En esta práctica se realizaron dos tipos de encuentros con los docentes, el primero conocido como taller grupal, en el que los talleres se desarrollaban en las reuniones de área con todos los docentes de matemáticas e informática y en el segundo encuentro llamado asesoría, se proponía un taller para trabajar con algunos docentes en una de sus horas libres. A

[11] Se aclara que en este trabajo de grado no se presentan los análisis de comprensión de las actividades relacionadas con el concepto de triángulo, ya que la temática de estos talleres no corresponde a la propuesta para este trabajo de grado.

continuación se nombran las actividades desarrolladas en la práctica en contextos educativos amplios.

Actividades desarrolladas:

- Construcción del cuadrado en Cabri Géométre.
- Construcción de triángulos equiláteros, isósceles, rectángulos y escalenos en Cabri Géomètre.
- Comprobación del enunciado del Teorema de Thales mediante una construcción geométrica en el programa Cabri Géomètre.
- Aplicación del Teorema de Thales para favorecer construcciones en Cabri Géomètre, como la división de un segmento en partes iguales, la construcción de triángulos semejantes, entre otros.
- Construcción de la suma de dos funciones exponenciales en Cabri Géomètre.

4.4.2 Práctica Integral

Objetivos generales

- Actualizar a los docentes de la Institución Educativa General Santander en cuanto a la utilización y aplicación del software educativo en el aula de clase.
- Proponer y desarrollar un trabajo, que contribuya a la formación continuada de los profesores del área de matemáticas de la Institución Educativa General Santander acerca de las funciones logarítmicas y exponenciales con ayuda del software Cabri Géomètre.
- Proponer y desarrollar un trabajo dirigido a estudiantes, para el estudio de algunos tópicos matemáticos del currículo escolar.

Objetivos específicos

- Diseñar actividades con Cabri Géomètre que despierten el interés en los maestros y que además les permitan ver la utilidad que éste tiene en el aprendizaje.

- Acompañar a los profesores durante la realización de las actividades planteadas para la superación de las dificultades conceptuales o en el manejo del software que ellos presenten.
- Proponer a los estudiantes actividades con Cabri Géomètre, para trabajar un tópico matemático del currículo.
- Acompañar a los estudiantes en el estudio del tópico matemático a trabajar, para superar diversas dificultades conceptuales o en el manejo del software que se les presenten.

En esta práctica realizada en el primer semestre de 2007, se continuó el trabajo de la Práctica en Contextos Amplios que se estaba desarrollando con los docentes de la Institución Educativa General Santander, por lo cual se efectuaron los talleres grupales y las asesorías, las cuales se llevaron acabo con tres docentes del área de matemáticas en horarios diferentes, ya que las asesorías se realizaban en una hora libre del docente. Además, a los grados que éstos tres docentes tenían a su cargo sexto, séptimo y once se les propuso unas actividades en Cabri Géomètre con la finalidad de estudiar tópicos matemáticos del currículo y dar a conocer al docente cómo se pueden incorporar las herramientas tecnológicas al aula de clase, específicamente el programa Cabri Géomètre.
Las actividades desarrolladas a los docentes en la Práctica Integral se mencionan a continuación.

Actividades desarrolladas

- Construcción de funciones exponenciales.
- Construcción de funciones logarítmicas.

Durante la ejecución de la practica en Contextos Amplios y de la práctica Integral, se observó compromiso y disposición por parte de la mayoría de los docentes para el desarrollo de los talleres propuestos.

5 DESARROLLO DE LA PROPUESTA

El módulo de actividades se compone de cuatro talleres, el primero se relaciona con la construcción de un cuadrado, el segundo con la suma de funciones exponenciales, el tercero con el comportamiento de las funciones exponenciales y el cuarto está relacionado con la construcción de funciones logarítmicas. Cada uno de estos talleres se ha planteado para ser desarrollado por docentes de matemáticas que poseen conocimientos relacionados con el concepto de cuadrado, las funciones exponenciales y las funciones logarítmicas. Además se han diseñado para trabajarlos con el software de geometría dinámica Cabri Géomètre (algunos de los talleres se desarrollaron con la versión Cabri Géomètre II y otros con la versión Cabri Géomètre II Plus. Éstos son presentados en el orden que se aplicaron y a continuación de cada taller se presenta el análisis realizado.

Con base en las categorías para la comprensión propuestas por Carpenter y Lehrer se propuso la siguiente tabla, la cual fue el marco de referencia para realizar el análisis. En ella, se han reorganizado las categorías de comprensión y se han determinado las actividades a observar.

En la columna izquierda, se presenta tres categorías de comprensión y en la columna de la derecha se muestran las actividades puntuales consideradas en cada una de las categorías. Para el análisis de los talleres, cada actividad se particularizó de acuerdo con el taller.

CATEGORÍAS	ACTIVIDADES
Construir relaciones y extender el conocimiento matemático y del programa Cabri Géomètre	• Relacionar el conocimiento matemático con el ya conocido. • Relacionar el conocimiento matemático con las representaciones en Cabri Géomètre. • Relacionar el nuevo conocimiento con la

	experiencia personal como educador.
Reflexionar sobre las experiencias y articular lo que uno sabe	• Reflexionar con respecto al conocimiento matemático. • Reflexionar en torno al papel como educador. Reflexionar con respecto al trabajo en el programa Cabri Géomètre.
Aplicar y apropiarse del conocimiento matemático y del programa Cabri Géomètre	• Resolución de problemas • Significados de expresiones • Nuevos usos del conocimiento

5.1 TALLER Nº 1

Título: Construcción del cuadrado con Cabri Géomètre.

Objetivos:

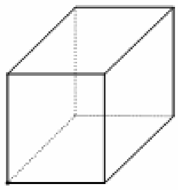
- Realizar una introducción al programa Cabri Géometre
- Familiarizar a los docentes con las herramientas que ofrece Cabri Géomètre.
- Reconocer las herramientas de Cabri Géomètre que se pueden utilizar para la construcción del cuadrado.

Teniendo en cuenta que los docentes de la institución no habían tenido un acercamiento al programa Cabri Géomètre, se propuso la construcción de un cuadrado para que ellos explorarán el programa, propusieran una construcción teniendo en cuenta sus conocimientos matemáticos y las herramientas identificadas del programa, y finalmente para que ellos observarán que en un programa de geometría dinámica como lo es Cabri Géomètre la construcción de un objeto geométrico depende de las propiedades y características de otros objetos para que se conserven sus invariantes.

El taller se realizó en una reunión de área con los docentes de matemáticas de la institución.

TALLER Nº 1: CONSTRUCCIÓN DEL CUADRADO CON CABRI GÉOMÈTRE

Cabri Geometry es un programa educativo que permite abordar el estudio de la geometría, el cual ayuda a que el estudiante pase de la etapa de visualización en la que las figuras geométricas están caracterizadas en el dibujo a una etapa en la que el estudiante empieza a identificar los elementos que configuran a los objetos y las relaciones entre ellos en las representaciones.



En Cabri podemos construir diversas figuras geométricas; una de ellas es el cubo, construcción que se basa en otros objetos como el cuadrado. Por esto, iniciemos realizando un cuadrado siguiendo las siguientes instrucciones

1. Describa la forma como construiría un cuadrado

2. Lleve a cabo la construcción
3. Para poner a prueba la construcción, en la barra de herramientas de Cabri, en el menú 1, seleccione la opción puntero, ahora seleccione un segmento o un punto del cuadrado y mueva la construcción, describa qué sucedió con ella. (Esta acción es conocida como "ley del arrastre")

4. Si su construcción se deforma, ¿qué propiedades o características fundamentales considera que perdió el objeto geométrico?

5. Revise la construcción que realizó e identifique las herramientas de Cabri que considere le pueden ayudar a mantener estas características del cuadrado. ¿Identificó algunas?, ¿cuáles?

6. Proponga una nueva construcción para el cuadrado y llévela a cabo.

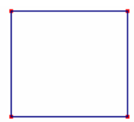
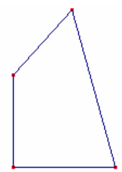
7. Ejecute la ley del arrastre sobre la figura geométrica que obtuvo y describa lo que sucedió con su construcción

8. Si la figura geométrica que obtuvo, aún no tiene las características del cuadrado, entonces realice nuevamente los numerales 5 y 6; de lo contrario, analice la construcción que realizó y compárela con la primera construcción. ¿Qué puede concluir?

9. Para profundizar y aplicar lo realizado, intente ahora construir el cubo.

5.1.1 ANÁLISIS DE COMPRENSIÓN CONSTRUCCIÓN DEL CUADRADO

CATEGORÍA	ACTIVIDAD	OBSERVACIÓN
Construir relaciones y extender el conocimiento matemático y del programa Cabri Géomètre	Relación entre imágenes mentales y el conocimiento matemático	Se observa que los docentes construyen el cuadrado a partir de la representación mental que tienen de éste, puesto que construyen cuatro vértices y cuatro segmentos, dos horizontales y dos verticales.
	Relación del programa Cabri Géomètre con otros progrmamas de computador.	Esta actividad es la primera experiencia que los docentes tienen con el programa Cabri Géomètre por lo cual intentan relacionarlo con otros programas de computador que permiten dibujar objetos, como el programa Paint, en los que los objetos que se dibujan o se representan son estáticos y dan la apariencia de conservar sus propiedades geométricas.
	Identificación de las herramientas del programa Cabri Géomètre que permiten construir el cuadrado.	Al relacionar el trabajo de Cabri Géomètre con Paint, los docentes asocian la construcción del cuadrado con la unión de cuatro segmentos, razón por la cual, en principio, la única herramienta que utilizan es la herramienta *segmento*. Sin embargo, después de la reflexión identifican otras herramientas del programa que permiten construir el cuadrado, como: *Recta perpendicular, Recta paralela, Segmento, Distancia o longitud, Medida de ángulo, circunferencia,* entre otras.
	Relación entre la	En esta actividad no se observó que los docentes relacionarán la construcción del

	construcción del cuadrado en Cabri Géomètre y la representación que se realiza del cuadrado cuando se enseña éste concepto.	cuadrado con la enseñanza de éste concepto, ya que el principal objetivo del taller era que los docentes se familiarizarán con el programa Cabri Géomètre.
Reflexionar sobre las experiencias y articular lo que se sabe	Reflexión en cuanto a las construcciones y el trabajo en Cabri Géomètre	Al aplicar la ley de arrastre a la primera construcción realizada por los docentes basada en cuatro vértices y cuatro segmentos dos de ellos horizontales y los otros verticales (*figura 17*); se observa que al seleccionar y arrastrar un punto o un segmento el cuadrilátero no conserva las características propias del cuadrado (*figura 18*)   *Figura 17* *Figura 18* A partir de esto se reflexiona acerca de la construcción de un objeto geométrico en un programa de geometría dinámica, particularmente Cabri Géomètre, la cual debe conservar las propiedades geométricas del objeto a pesar de la posición y del tamaño, por esto es importante que todos los objetos dependan de un mismo objeto geométrico. Cuando los docentes observaron que al aplicar la ley del arrastre al cuadrado construido

		éste no conservaba sus propiedades, encontraron que para construir el cuadrado es importante recurrir a otros objetos geométricos, como rectas perpendiculares y rectas paralelas.
Aplicar y apropiarse del conocimiento matemático y del programa Cabri Géomètre	Construcción de un cuadrado a partir de sus propiedades geométricas.	**Construcción 1** En primera instancia los docentes intentan construir un cuadrado con cuatro vértices y cuatro segmentos, dos horizontales y dos verticales, los cuales aparentemente son iguales (*figura 17*). Cuando se les pide arrastrar uno de los vértices del cuadrilátero, la figura que se obtiene no es un cuadrado, por lo cual observan que para construir el cuadrado no es suficiente con construir cuatro segmentos (*figura 18*). En estas condiciones recurren al concepto de cuadrado y a sus propiedades para realizar otra construcción. **Construcción 2** La nueva construcción realizada por los docentes fue similar a la anterior, porque se construyeron cuatro segmentos, la diferencia radicó en que para esta construcción los docentes observaron la necesidad de hallar la longitud de los segmentos y la amplitud de los ángulos internos del cuadrilátero para comprobar si era igual la longitud de los segmentos construidos y si la amplitud de los ángulos formados por los segmentos era 90 grados. En algunos casos sucedió que el cuadrilátero tenía las características de un cuadrado, mientras que en otros casos las longitudes de los segmentos no eran iguales o la medida

de los ángulos no era 90º (*figura 19*), por lo cual usaban la herramienta "*Apuntador*" para "arrastrar" un extremo de un segmento (*figura 20*) y modificar su longitud o para modificar la amplitud de algún ángulo (*figura 21*). Cuando no era suficiente arrastrar un vértice del cuadrilátero para que los lados del cuadrilátero tuvieran la misma longitud y sus ángulos internos tuvieran igual amplitud, arrastraban otro u otros vértices del cuadrilátero hasta tener un cuadrilátero con los segmentos de la misma longitud y los ángulos internos con medida igual a 90º (*figura 22*).

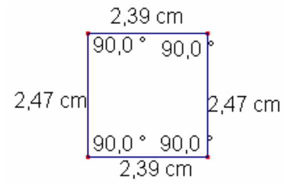


Figura 19

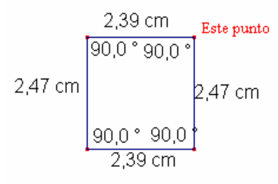


Figura 20

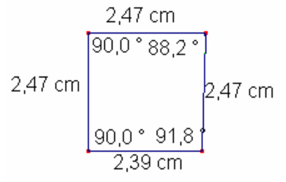


Figura 21

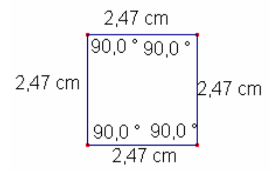


Figura 22

Cuando todos los ángulos internos del cuadrilátero tenían igual medida y los lados igual longitud, se aplicó la ley del arrastre al cuadrilátero construido para comprobar que sus propiedades se conservaban a pesar de las posibles modificaciones que se le pudieran realizar; pero por las condiciones de la construcción, el cuadrilátero no conservaba las propiedades del cuadrado (*figura 23*), por lo cual fue necesario realizar una nueva

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>

construcción.

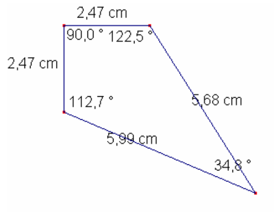


Figura 23

Construcción 3

La tercera construcción inició a partir de un segmento, al cual se le determinó la longitud. El docente observa que necesita una herramienta del programa que le permita construir otro segmento de igual longitud, para lo cual se le da a conocer que en el programa Cabri Géomètre existe la herramienta *Transferencia de medidas* que permite transferir una longitud definida por un número. De esta manera, se selecciona el número y uno de los extremos del segmento, pero la medida no es transferida pues se debe transferir sobre una semirrecta, un eje, un vector, un polígono o un círculo; para lo que se construye una semirrecta y se transfiere la longitud, apareciendo un punto sobre ésta (*figura 24*).

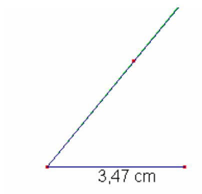


Figura 24

Luego, surge la necesidad de construir un ángulo de 90º y se espera que una de las herramientas del programa transfiera amplitudes de ángulos, como la herramienta no se

</td>
</tr>
</table>

ve explícitamente, se concluye que la construcción no se puede realizar de esta manera; por lo que se busca una herramienta para construir a partir del segmento inicial un ángulo de 90 grados. Esta herramienta es *Recta perpendicular*, cuando ellos la seleccionan, esperan ver una recta en la hoja de trabajo de Cabri pero esto no sucede, pues no es suficiente con seleccionar la herramienta, sino que se debe indicar por cual punto debe pasar y a cuál recta o segmento debe ser perpendicular. Luego de esto, aparece una recta *l* y como algunos docentes esperaban ver un segmento, se les da a conocer la opción *ocultar/mostrar*. Mediante el uso de esta herramienta ocultan la recta perpendicular *l*, pero solamente aparece el segmento que inicialmente se había construido (*figura 25 y 26*); al ver esto, algunos docentes piensan que la recta *l* ha sido eliminada y se muestra que en la misma opción ellos pueden mostrar lo que habían ocultado, y que para ver un segmento sobre la recta perpendicular, es necesario construirlo.

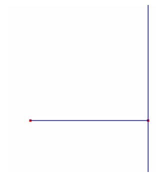
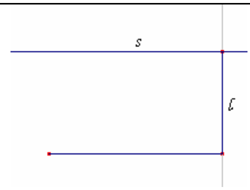
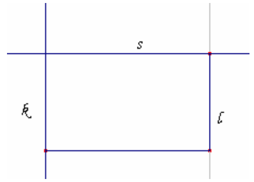


Figura 25

Figura 26

Algunos docentes construyeron el segmento pero sin guardar éste alguna relación con el segmento inicial; luego trazaron una recta perpendicular *s* a la recta perpendicular *l* por el punto de intersección entre el segmento construido anteriormente y la recta perpendicular *l* (*figura 27*); y trazó la recta perpendicular *k* al segmento inicial por el otro extremo del segmento *(figura* 28).

		 *Figura 27*  *Figura 28* La manera como se abordó la construcción, no permitía conservar las características del cuadrado ya que tener ángulos congruentes, es una condición necesaria pero no suficiente para generar el cuadrado. Por lo cual solo faltaba que los lados del cuadrilátero fueran de igual medida; para ésto, surgieron dos opciones: la primera, hallar la longitud del segmento y luego transferir la medida sobre la recta perpendicular y la segunda, usar la herramienta circunferencia o compás. En el primer caso, sucedió que al transferir la medida se le debe indicar al programa a partir de cual punto se quiere transferir esa longitud (en este caso, desde un extremo del segmento original); sin embargo no se le puede indicar al programa sobre qué objeto debe colocar el otro extremo del segmento, por lo que el programa muestra un punto P cuya distancia a uno de los extremos del segmento es igual a la longitud del segmento inicial pero que no necesariamente está sobre la recta perpendicular *l* (*figura29*) A algunos docentes se les mostró que al manipular el punto P con el puntero, éste describe una circunferencia (figura 30). Lo anterior se realizó para que observaran otras propiedades geométricas que pueden ser útiles al momento de realizar una construcción, como que los radios de una misma circunferencia son iguales.

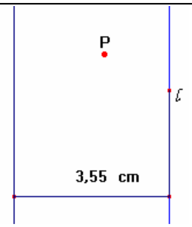


Figura 29

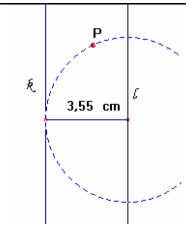


Figura 30

Realizado este trabajo, los profesores construyeron una circunferencia cuyo radio era el segmento inicial y el centro uno de los extremos de éste segmento; enseguida colocaron un punto donde aparentemente la circunferencia y la recta perpendicular *l* se cortaban, pero al momento de mover al punto, éste se movía sobre la circunferencia; por lo que se les dio a conocer la herramienta *Punto de intersección* la cual nos garantiza que el punto está sobre la perpendicular *l* y la longitud de este punto a uno de los extremos del segmento es igual a la longitud del segmento inicial (figura 31). Teniendo el punto de intersección, se trazó por éste una recta perpendicular *m* a la perpendicular *l* y el punto de intersección entre la recta *m* y la perpendicular *k* (figura 32).

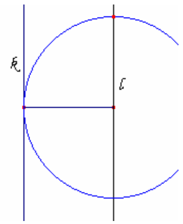


Figura 31

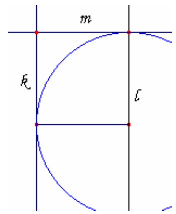
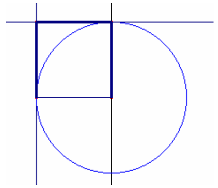
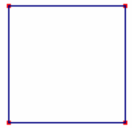
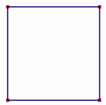
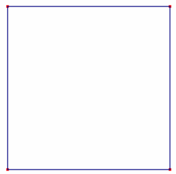
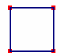


Figura 32

Aparentemente ya estaba la construcción del cuadrado, faltaba trazar los segmentos que lo conformaban (*figura 33*), para ocultar las rectas y la circunferencia y observar el

		cuadrado (*figura 34*).   *Figura 33* *Figura 34* En este momento se debía probar la construcción se intentó manipular un punto o un segmento diferentes a los del segmento inicial pero no se podía; ya que la construcción de éstos dependía del segmento inicial, pero al tomar un punto del segmento inicial, éste si se dejaba modificar y al mismo tiempo modificaba los otros segmentos, haciéndolos de mayor o de menor medida como se muestra en las figuras 35, 36 y 37.    *Figura 36* *Figura 35* *Figura 37* Para comprobar que los segmentos son congruentes y que los ángulos miden 90º, se determinó la longitud de los segmentos y la amplitud de los ángulos, y se fue modificando la longitud del segmento inicial. Se observó que la longitud de los otros segmentos se modificaba a medida que se modificaba la del segmento inicial pero se conservaba la igualdad; con respecto a la medida de los ángulos, ésta no varió, pues

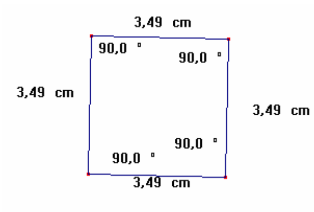
<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>siempre era de 90º (Figura 38, 39, 40).


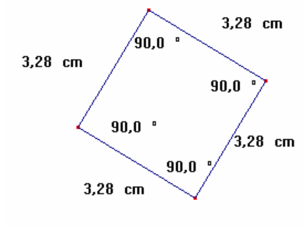
Figura 38


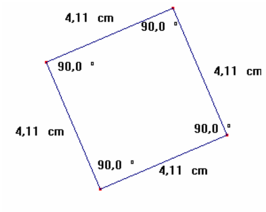
Figura 39


Figura 40</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Proposición de una nueva construcción</td>
<td>Se propuso una nueva construcción a partir del diámetro de una circunferencia. Para ello se construyó un segmento y luego se determinó su punto medio mediante la herramienta Punto medio (figura 41). Enseguida con la herramienta Circunferencia se construyó una circunferencia con centro en el punto medio del segmento y radio la distancia entre el punto medio y uno de los extremos del segmento (figura 42).
Luego se usó la herramienta Recta perpendicular para construir por el punto medio del segmento una recta perpendicular al segmento y se hallaron los puntos de intersección entre la circunferencia y la recta perpendicular (figura 43).

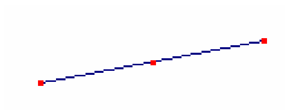



Figura 41

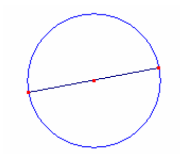



Figura 42

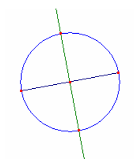
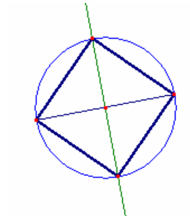
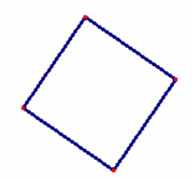



Figura 43
Finalmente se construyó el cuadrilátero cuyos vértices eran extremos del segmento y los puntos hallados anteriormente (figura 44) y se ocultó la circunferencia, el segmento y la</td>
</tr>
</table>

		recta perpendicular (*figura 45*).  *Figura 44*  *Figura 45* Para comprobar que el cuadrilátero conservaba las propiedades del cuadrado, se realizó un procedimiento similar al que se realizó a la primera construcción; es decir, se halló la longitud de los segmentos que conformaban el cuadrilátero y la medida de los ángulos internos del cuadrilátero.

5.1.2 Conclusiones

El proceso de la construcción del cuadrado fue difícil, teniendo en cuenta que esta actividad se constituyó en el primer acercamiento que los profesores tenían con el programa; sin embargo, se logró que algunos identificaran ciertas herramientas de Cabri Géomètre y adquirieran una primera idea de lo que implica construir un objeto geométrico en un programa de geometría dinámica.

Los docentes que no son licenciados en matemáticas presentaron mayor dificultad en la construcción del cuadrado, ya que asociarlo únicamente con su representación visual es un obstáculo para que el docente reflexione sobre las propiedades de un cuadrado y proponga una construcción; por tal motivo, en la primera construcción no se reconoce el cuadrado como polígono sino como puntos (vértices) y segmentos (lados). En la segunda construcción se reconoce el cuadrado como polígono que cumple ciertas propiedades y características (lados congruentes y ángulos congruentes).

Algunos docentes se resisten a que otros que no sean sus compañeros los ayuden y los guíen en el proceso de la construcción del cuadrado, por lo que en el momento que observan que la construcción realizada no conserva las propiedades y características del cuadrado, expresan su inconformidad frente a la metodología del taller; pues manifiestan que hubieran preferido encontrar las instrucciones para la construcción en forma explícita.

5.2 TALLER Nº 2

Título: Suma de dos funciones exponenciales

Objetivos:

- Construir en el programa Cabri Géomètre la representación gráfica de las funciones exponenciales $f(x)=3^x$, $g(x)=3^{-x}$ y $h(x)=3^{-x}+3^x$ para analizar $h(x)$ a partir de $f(x)$ y $g(x)$.
- Reconocer algunas propiedades de las funciones exponenciales.
- Proponer en Cabri Géomètre una nueva construcción de la función $h(x)$ a partir de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

Teniendo en cuenta que los docentes de la institución poseen mayor manejo del programa Cabri Géomètre, se les propone construir dos funciones exponenciales cuya base es la misma, pero el exponente de una es el inverso aditivo de la otra; esto con el fin de estudiar la suma de estas funciones y de recurrir a otras herramientas diferentes a la herramienta *Calculadora* para proponer una nueva construcción en el programa Cabri Géomètre de la representación gráfica de la suma de las funciones.

Este taller no se desarrolló como en principio se había planeado ya que el tiempo para su ejecución fue muy corto; razón por la cual los docentes solamente construyeron la representación gráfica de las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$. De acuerdo con esto, el análisis de comprensión de éste taller se presenta como diario de campo.

En el desarrollo del taller se usó la versión Cabri Géomètre II.

TALLER Nº 2: SUMA DE DOS FUNCIONES EXPONENCIALES

En esta actividad se construye la representación gráfica de las funciones $f(x)=3^x$, $g(x)=3^{-x}$ y $h(x)=3^{-x}+3^x$, para luego analizar algunos aspectos relacionados con éstas representaciones gráficas.

1) Muestre los ejes de coordenadas y determine un punto *A* sobre el eje *x*.

2) Halle las coordenadas de *A*

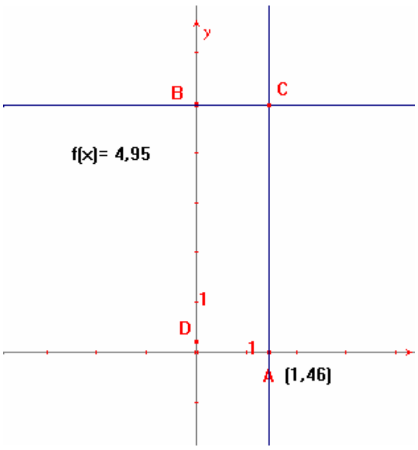
3) Edite el texto de las coordenadas de *A*, dejando solamente la coordenada de éste punto en el eje *x*.

4) De uso de la calculadora para determinar 3^a donde *a* es la coordenada del punto *A* sobre el eje *x*. A este resultado llámelo $f(x)=3^a$.

5) Transfiera al eje *y* el valor numérico que ha obtenido y etiquete con la letra B al punto que aparece.

6) Por *A* trace una recta perpendicular al eje *x* y por *B* trace una recta perpendicular al eje y.

7) Determine el punto de intersección entre las rectas que ha construido y llámelo *C*.

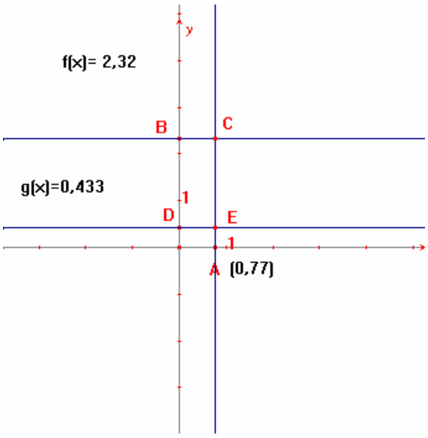


8) Use la calculadora para determinar 3^{-a}, siendo *a* la coordenada de *A* en el eje *x*. Este

resultado es $g(x) = 3^{-a}$.

9) Transfiera éste valor en el eje *y* y etiquete el punto que ha aparecido con la letra *D*.

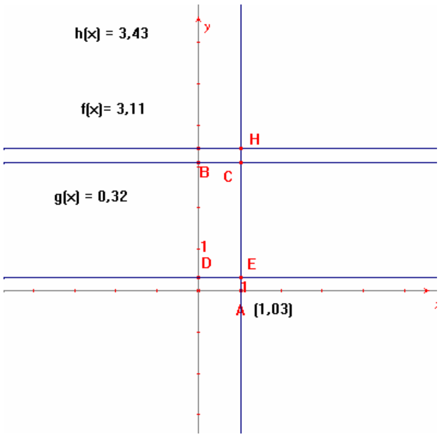
10) Trace por D una recta perpendicular al eje *y* y llame E al punto de intersección entre ésta recta y la recta perpendicular al eje *x* que contiene a *A*.



11) Desarrolle el procedimiento anterior para determinar $h(x) = 3^{-x} + 3^{x}$

12) Nombre *F* al punto que ha obtenido en el eje *y* luego de transferir el valor obtenido en este eje.

13) Trace la perpendicular a *y* por *F* y determine el punto *H* como la intersección entre la recta perpendicular a *x* que contiene al punto *A*



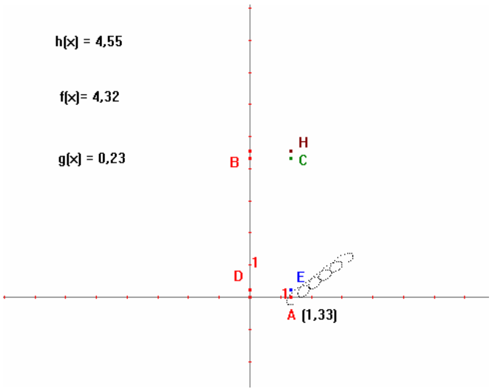
14) Oculte las rectas perpendiculares a las cuales ha recurrido para determinar los puntos *H*, *C* y *E*.

15) Recurra a la herramienta color para hacer que el punto *C* sea de color azul, el punto *H* de color verde y el punto *E* de color rosado.

15) Seleccione la herramienta traza activada / desactivada y señale los puntos *C*, *E* y *H* dando clic sobre ellos[12].

16) Escoja la herramienta puntero y mueva el punto *A*.

16) Seleccione la herramienta animación, ubique el cursor sobre el punto *A*; de clic izquierdo sostenido realizando un pequeño desplazamiento (aparece un resorte, suéltelo).



Preguntas:

Teniendo en cuenta que el punto *H* genera la gráfica de *h(x)*, *C* genera la gráfica de *f(x)* y *E* genera la representación gráfica de *g(x)* a medida que *A* se desplaza en el eje *x:*

a) Observe la grafica obtenida para la función $h(x) = 3^{-x} + 3^{x}$

1. Cuando *x*> 0, ¿a cuál de las funciones se aproxima *h(x)*?
2. ¿Cómo es *g(x)* a medida que *x* toma valores mayores?
3. Relacione las respuestas a las preguntas 1 y 2 para justificar el comportamiento de *h(x)* cuando *x* es mayor que cero.
4. Cuando *x*< 0, ¿a cuál de las funciones se aproxima *h(x)*?
5. ¿Cómo es *f(x)* a medida que *x* toma valores menores?
6. Relacione las respuestas a las preguntas 4 y 5 para justificar el comportamiento de *h(x)* cuando x es menor que cero.
7. Relacione *f(x)* y *g(x)* para justificar *h(0).*

b) ¿Qué justifica que las gráficas de *f(x)* y *g(x)* se corten en el punto (0,1)?

c) ¿Cómo construiría en el programa Cabri, sin usar la herramienta calculadora, la gráfica

[12] No todas las curvas que se obtienen al usar la herramienta *Traza* y la herramienta *Lugar* corresponden a la representación gráfica de una función.

de *h(x)* a partir de las gráficas de *f(x)* y *g(x)*?

5.2.1 ANÁLISIS DE COMPRENSIÓN SUMA DE DOS FUNCIONES EXPONENCIALES

Actividad: Construcción de la suma de dos funciones exponenciales.

Descripción:

Se propone a los docentes la construcción de la representación gráfica de las funciones $f(x)=3^x$, $g(x)=3^{-x}$ y $h(x)=3^x+3^{-x}$, para después analizar algunos aspectos relacionados con los comportamientos de éstas funciones.

Notas de campo de las sesiones:

Jueves 2 de Noviembre de 2006 - docentes área de matemáticas jornada mañana

Desarrollo:

La construcción de las funciones $f(x)=3^x$, $g(x)=3^{-x}$ y $h(x)=3^x+3^{-x}$ en el programa Cabri Géométre II se realizó teniendo en cuenta las instrucciones presentadas en el taller Nº 2.

En primer lugar se mostraron los ejes de coordenadas y se determinó un punto A sobre el eje x y se hallaron las coordenadas de A, dejando únicamente su coordenada en el eje x. Se usó la calculadora para determinar 3^a donde a es la coordenada del punto *A* sobre el eje *x* y al resultado que se obtuvo se llamó $f(x)=3^a$.

Obtenido el valor de $f(x)=3^a$ se transfirió sobre el eje y. En este momento algunos docentes pensaron que algo estaba mal en la construcción realizada, porque no se observaba el punto *B* de la transferencia en la pantalla, lo cual sucedía porque cuando a toma valores mayores que 2 (aproximadamente), el valor de $f(x)=3^a$ se incrementaba rápidamente; por lo que se hace necesario ubicar el punto A muy cerca al origen del eje de coordenadas.

Enseguida, por A se trazó una recta perpendicular al eje *x* y por *B* una recta perpendicular al eje *y*, determinando el punto de intersección entre estas rectas y llamándolo C (*figura 46*).

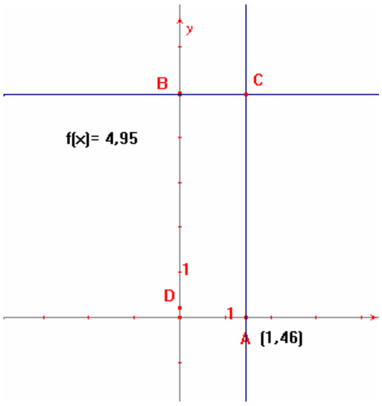


Figura 46

Ubicado el punto C que determina la curva de la función $f(x) = 3^x$, se realizó un procedimiento similar para construir los puntos E y H, puntos que determinan la representación gráfica de las funciones $g(x) = 3^{-x}$ y $h(x) = 3^x + 3^{-x}$ respectivamente (*figura 47*, *48*).

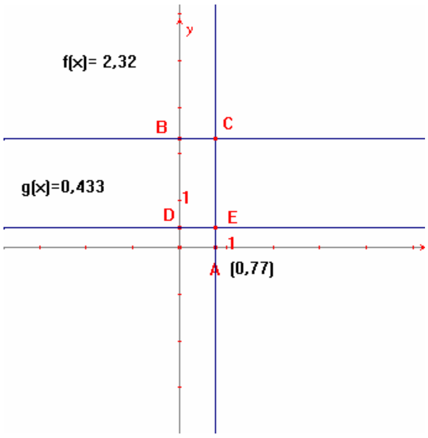


Figura 47

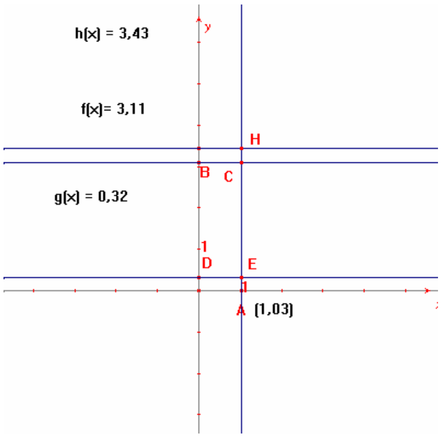


Figura 48

Luego se ocultaron las rectas perpendiculares que se construyeron para determinar los puntos *C*, *E* y *H*; y se recurrió a la herramienta *Color* para hacer que el punto *C* fuera de color azul, el punto *H* de color verde y el punto *E* de color rosado, con el fin de facilitar la visualización de la gráfica de cada una de éstas funciones y para que los docentes conocieran que el programa Cabri Géométre tiene una herramienta que permite cambiar el color de los objetos.

Después se seleccionó la herramienta *traza activada / desactivada* y se seleccionaron los puntos C, E y H haciendo clic sobre ellos; con la herramienta puntero se desplazó el punto *A* sobre el eje *x*. A medida que se desplazaba el punto *A*, los puntos *C*, *H* y *E* dejaban "huella" (*figura 49*). También se usó la herramienta animación, para observar la huella que dejaban los puntos *C, E* y *H* (*Figura 50*).

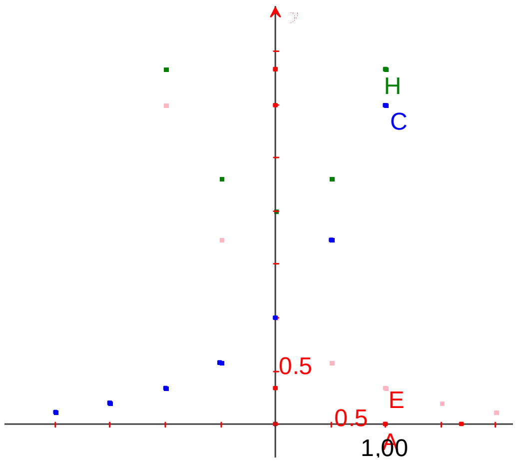


Figura 49

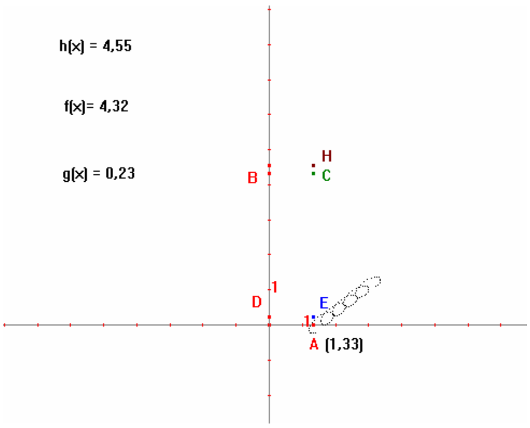


Figura 50

La razón por la que se usó la herramienta *traza activada/desactivada* y no la herramienta *lugar geométrico* es porque al construir el lugar geométrico de los puntos *C*, *H* y *E* con respecto al punto *A* en la versión Cabri Géomètre II, éste no toma todos los puntos cuyas coordenadas son $(x, f(x))$, $(x, g(x))$, $(x, h(x))$ respectivamente; situación que no se presenta al usar la herramienta *Traza*; además por que se quería mostrar a los docentes cómo se construye la curva punto a punto a medida que *A* se desplazaba sobre el eje *x.*

Finalmente, se obtuvo la representación gráfica de las funciones $f(x) = 3^x$, $g(x) = 3^{-x}$ y $h(x) = 3^x + 3^{-x}$ (*figura 51*)

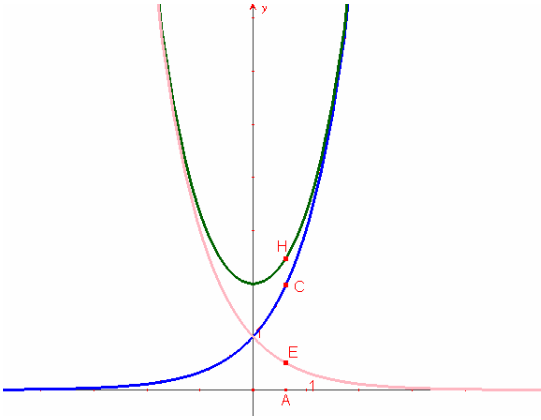


Figura 51

En el taller Nº 2 se propuso a los docentes unas preguntas, las cuales debían responder luego de realizar la construcción; las cuales no se respondieron por el poco tiempo dispuesto para el desarrollo de la actividad, lo cual impidió el análisis de la función $h(x)=3^x+3^{-x}$ con respecto a las funciones $f(x)=3^x$ y $g(x)=3^{-x}$. Sin embargo lo que se pudo observar es que un docente asocia la función $h(x)=3^x+3^{-x}$ con una función cuadrática, ya que él afirma que la curva de la función $h(x)$ es una parábola.

Para conocer si la función $h(x)$ es una función cuadrática $i(x)$, se analiza cuál sería la ecuación de la función $i(x)$. Conociendo que la ecuación de una función cuadrática es de la forma ax^2+bx+c se construye su representación gráfica en el programa Cabri Géomètre II, introduciendo los valores de a, b y c con la herramienta número para tener la posibilidad de modificarlos.

Se observa que la parábola debe cortar al eje y en el punto $(0,2)$, por lo que se modifican los valores de c y se observa que éste valor debe ser igual a 2 (*Figura 52).*

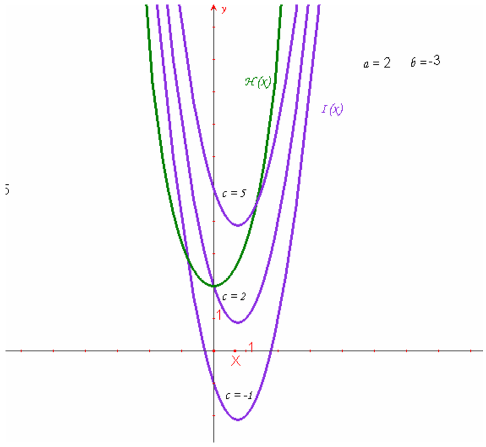


Figura 52: Representación gráfica de la función $2x^2+(-3)x+c$ *con* $c=5, c=2, c=-1$

Luego se determina el valor de b modificándolo con la herramienta número, concluyendo que para que el vértice de la parábola esté sobre el eje y, éste debe ser igual a 0. En la siguiente gráfica se representa gráficamente $i(x)$ con $a=2$, $c=2$ y $b=0,3,5$.

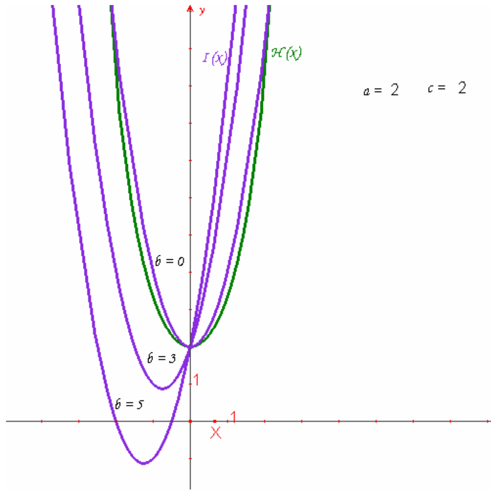


Figura 53

Finalmente se modifican los valores de a y se observa que el valor de a puede estar entre 1 y 2 (ver *figura* 54).

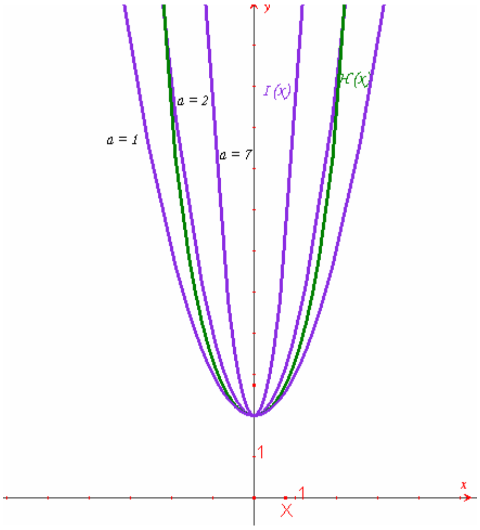
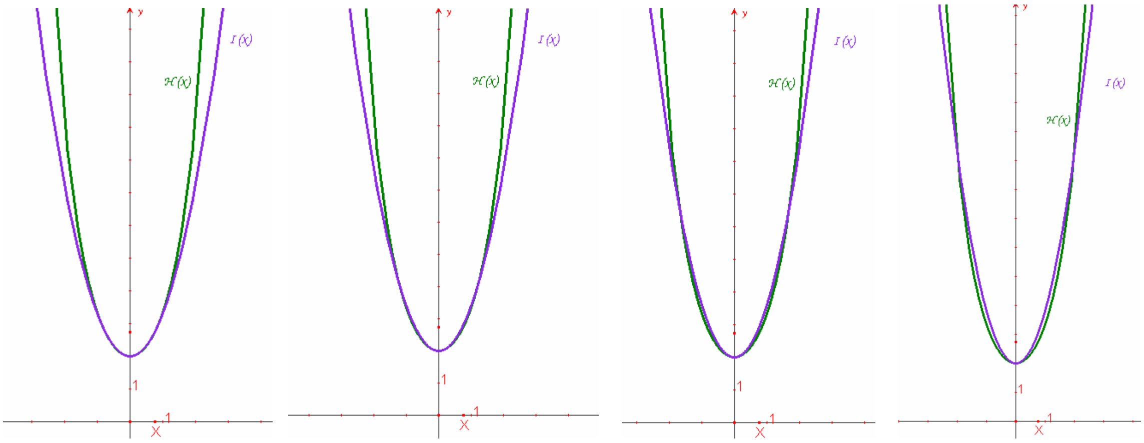


Figura 54

Por lo que se observa la gráfica de la función cuadrática, cuando *a* toma valores entre 1 y 2, $b = 0$, $c = 2$ (*figura 55*).



(a) $a = 1.3$ *(b)* $a = 1.4$ *(c)* $a = 1.6$ *(d)* $a = 1.8$

Figura 55

Concluyendo que la función $h(x) = 3^x + 3^{-x}$ no es una función cuadrática.

Algebraicamente se observa que *h(x)* no es una función cuadrática, ya que

$$
\begin{aligned}
h(x) &= 3^x + 3^{-x} \\
&= 3^x + \frac{1}{3^x} \\
&= \frac{(3^x)^2 + 1}{3^x} \\
&= \frac{9^{2x} + 1}{3^x}
\end{aligned}
$$

y la ecuación de una función cuadrática es $y = ax^2 + bx + c$.

5.2.2 Conclusiones

Algunos docentes no tuvieron en cuenta todas las indicaciones propuestas para realizar la construcción, lo cual generó dificultad y confusión para obtener la representación gráfica de las funciones.

Aunque el taller no se desarrolló como se había planeado, se analizó que la suma de dos funciones exponenciales cuya base es la misma y el exponente de una es el inverso aditivo de la otra, no es una función cuadrática.

Con base en este taller es posible proponer otro taller con el que se pueda analizar la suma de dos o más funciones exponenciales cuyas bases no necesariamente sean las mismas y que los exponentes no sean inversos aditivos. Es decir, se puede proponer un taller como generalización de éste.

5.3 TALLER Nº 3

Título: Comportamiento de la gráfica de las funciones exponenciales.

Objetivos

- Construir en el programa Cabri Géomètre la representación gráfica de funciones exponenciales usando la herramienta *Número* para modificar el valor de la base.
- Determinar las bases para las cuales la función exponencial está definida.
- Analizar la concavidad de la función exponencial y cuándo esta es creciente o decreciente.
- Construir una recta tangente en un punto de la curva de la función exponencial.

Conociendo el potencial de la herramienta *Número* del programa Cabri Géomètre en la construcción de representaciones gráficas, se propone un taller a los docentes en el que se construye la representación gráfica de una función exponencial, donde el número que representa la base de la función se puede modificar para determinar las bases para las cuales una función exponencial está definida. Además se propone la construcción geométrica de una recta tangente en un punto de la curva de la función exponencial para analizar la concavidad de la función a partir de un criterio geométrico. Se incluye el estudio de la concavidad de la función a partir de una recta tangente con la finalidad de presentar al docente una alternativa de abordar la concavidad de una función en el aula de clase.

El taller estaba propuesto para ser desarrollado en una reunión de área; sin embargo, las actividades de la institución dificultaron su desarrollo, por lo que se propuso en el espacio de asesoría a los tres docentes.

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
SANDRA CAROLINA SÁNCHEZ

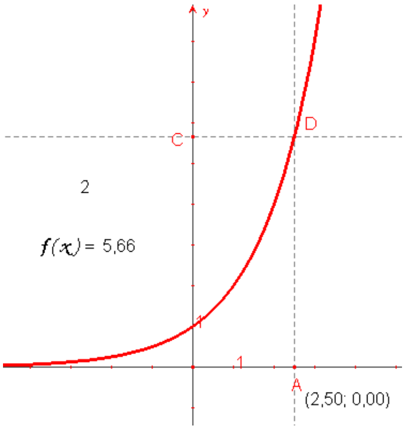
TALLER Nº 3: COMPORTAMIENTO DE LA GRÁFICA DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES

El propósito de esta actividad es analizar el comportamiento de la gráfica de las funciones exponenciales.

A continuación se presentarán los pasos para representar una función exponencial en el programa Cabri Geomètre II Plus. Para esta actividad construiremos la función 2^x:

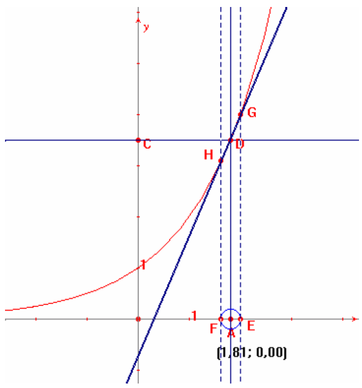
1. Muestre los ejes de coordenadas
2. Determine un punto A sobre el eje x
3. Halle las coordenadas de A.
4. Use la herramienta número para insertar el número 2; éste número a representa la base de la función exponencial.
5. Calcule a^b donde a es el número que insertó anteriormente y b es la coordenada del punto A en el eje x. A este resultado llámelo $f(x)$
6. Transfiera el resultado en el eje y y llame al punto obtenido C.
7. Por el punto A construya una recta perpendicular a eje x.
8. Construya por C la recta perpendicular al eje y.
9. Halle el punto de intersección de las rectas y etiquételo con la letra D
10. Determine el lugar geométrico del punto D con respecto al punto A.

La gráfica de la función exponencial que hemos construido es la siguiente:



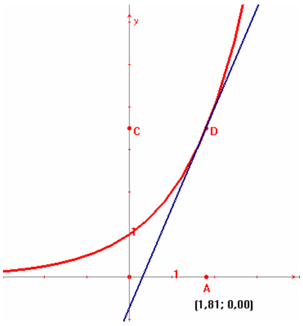
Luego de construir la función $f(x) = a^x$ donde $a = 2$, realizaremos una aproximación de la recta tangente a la curva por el punto D desde el punto de vista geométrico:

1. Con la herramienta *Número* asigne el valor[13] 0.3.
2. Use el *Compás* para construir una circunferencia con centro en A y radio el valor que asignó anteriormente.
3. Halle los puntos de intersección *E, F* entre la circunferencia y el eje *x*.
4. Trace rectas perpendiculares al eje *x* por los puntos *E* y *F*.
5. Halle los puntos de corte de las rectas perpendiculares y la curva de la función exponencial. Llámelos *G* y *H*
6. Determine la recta que pasa por los puntos *G* y *H*
7. Construya la recta paralela a la recta *GH* en el punto *D*. Ésta recta es una aproximación de la recta tangente a la curva por el punto *D*.



[13] Se asigna el valor 0.3 porque se pretende construir una circunferencia que se pueda visualizar y que el radio se aproxime a cero.

8. Oculte las construcciones auxiliares.



ANÁLISIS DE LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Se sabe que en las funciones exponenciales de base *a*, no están definidas para todos los valores de *a*. Con el fin de determinar las bases para las cuales está definida una función exponencial, se modificará *a* teniendo en cuenta los siguientes casos y realizando una descripción de la gráfica que resulta en cada uno de los casos:

- ***a* > *1***

____

____

- **0 < *a* < 1**

____

____

- ***a* = 1**

____

____

- ***a* < *0*   *o* *a* = *0***

____

____

De acuerdo con lo anterior, concluya para que valores de *a* la función exponencial está definida.

En qué punto la gráfica de la función exponencial corta al eje *y*. ¿Por qué la curva de la función exponencial corta al eje *y* en este punto?

Determine el dominio y el recorrido de la función exponencial, conociendo que el dominio de una función es el conjunto de todos los posibles valores de *x* y el recorrido, el conjunto de todos los valores resultantes de *y*.

Analice los siguientes casos:

Primer caso: *a > 1*

Se dice que la grafica de una función es **cóncava hacia arriba** si para todos los valores de *x*, el punto (*x , f(x)*) de la gráfica está arriba de la recta tangente a la gráfica; y es **cóncava hacia abajo** si el punto (*x , f(x)*) de la gráfica está debajo de la recta tangente a la gráfica.

Describa la concavidad de la gráfica de la función exponencial para este caso.

Ubique un punto x_1 *en el eje x*, de manera tal que su coordenada en el eje *x* sea menor que la coordenada el punto *D* en el eje *x*. Halle sus coordenadas.

Teniendo en cuenta que:

Una función es creciente si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$

Una función es decreciente si $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$

donde x_1 y x_2 son dos números cualesquiera.

Determine si para este caso la función exponencial es creciente o decreciente. Justifique su respuesta

____

____

Caso 2 : $\boldsymbol{0 < a < 1}$

¿Hacia donde se da la concavidad de la gráfica de la función exponencial? Justifique

____

____

Determine si la si la función es creciente o decreciente. Explique su respuesta.

____

____

EVALUACIÓN DE LA ACTIVIDAD

¿Considera que es importante estudiar el comportamiento de una función? ¿Por qué?

____

____

____

____

¿Qué otros elementos considera que se deben tener en cuenta al momento de estudiar la función exponencial? Justifique

____

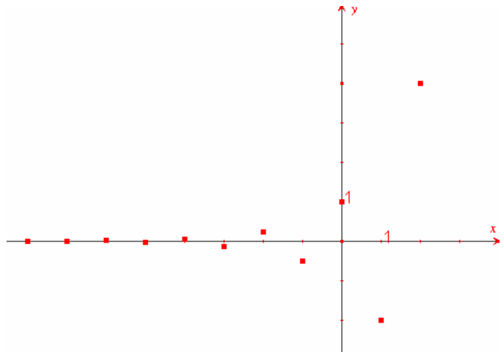
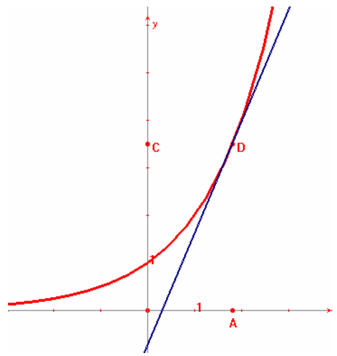
____

____

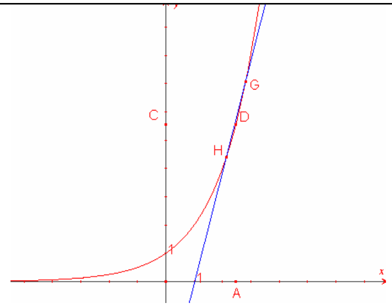
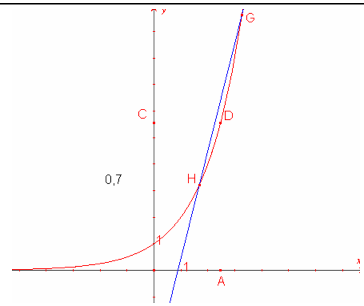
____

5.3.1 ANÁLISIS DE COMPRENSIÓN COMPORTAMIENTO DE LA GRÁFICA DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES

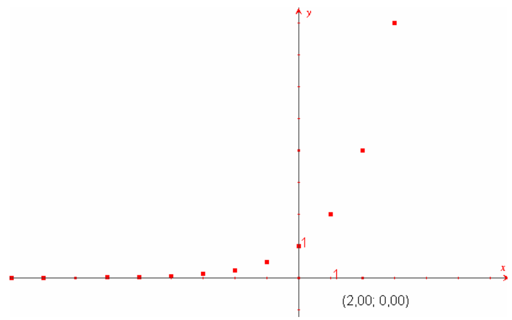
CATEGORÍA	ACTIVIDAD	OBSERVACIÓN
Construir relaciones y extender el conocimiento matemático y del programa Cabri Géomètre	Análisis de las bases para las cuales la función exponencial no está definida.	Después del desarrollo del taller, un docente expresa su preocupación frente al cómo justificar a los estudiantes que el número que representa la base de la función exponencial no puede ser un número menor que cero. Frente a esta preocupación se realiza un análisis de lo que sucede cuando $a < 0$, donde a es la base de la función exponencial; para ello se observaron las siguientes dos definiciones para la función exponencial. **Definición 1:** Si x es cualquier número real, entonces $a^x = e^{x \log a}$. **Definición 2:** $a^y = x$ si y solamente si $\log_a x = y$. De las dos definiciones se concluye que al no poderse definir un número $\log_a$ para $a \leq 0$, entonces todos los $a < 0$ no pueden ser base de una función exponencial; así mismo se deduce que cero tampoco es base de una función exponencial. También se observó que aunque hay valores para los cuales la expresión a^x con $a < 0$ tiene sentido, por ejemplo $(-1)^{1/3}$ porque $(-1)^{1/3} = \sqrt[3]{-1} = -1$, hay valores para los cuales la expresión no tendría sentido; como $(-1)^{1/2}$. Se analizó cuál sería la representación gráfica si la base fuera menor que cero y se

		observó que se tendría la *figura 56*, la cual se ve que no es continua.  *Figura 56*
	Construcción de la recta tangente en un punto a la gráfica de la función exponencial	En los talleres realizados por los docentes no se había realizado en el programa Cabri Géomètre una aproximación de la recta tangente a una curva, por lo que se construyó la recta tangente a la curva de la función 2^x por el punto D (*ver taller Nº 3*).  *Figura 57* En esta construcción se usa la herramienta *Número* y se escribe 0.3; la cual el docente

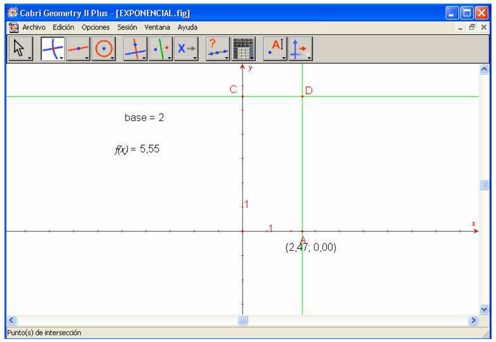
		usa como se le indica en la instrucción, sin observar su utilidad; así, en el momento en que se pide que construya una circunferencia de radio 0.3 el docente recurre a la herramienta *Círculo* y construye una circunferencia con centro A y radio cualquiera. Se sugiere que para construir una circunferencia con un radio específico se usa la herramienta *Compás* y se selecciona el número 0.3 y el punto A. Cuando se pide al docente que determine los puntos de intersección entre la circunferencia construida y el eje x, el docente recurre a la herramienta *Punto[s] de intersección* y al acercarse a las intersecciones el programa no las reconoce inmediatamente, lo que conlleva a que el docente seleccione la circunferencia y el eje x. Luego de tener en cuenta las instrucciones para la construcción de la aproximación a la recta tangente (*ver taller Nº 3*), se muestra al docente que la recta HG no "pasa" o no contienen al punto D (*figura 58*) a lo cual agrega que "*parece que pasara por ese punto*"; para verificar que HG no contiene a D se modifica el valor del radio de la circunferencia que se construyó para hacer la aproximación de la recta tangente, es decir 0.3, para ello se toman valores mayores a 0.3 (*figura 59*). Se dice al docente que para tener una buena aproximación de la recta tangente, el valor del radio de la circunferencia construido debe ser muy pequeño para que G se aproxime bastante a D desde la derecha y H se aproxime tanto a D desde la izquierda

		 *Figura 58*  *Figura 59* Cuando se construye la recta paralela a la recta HG por el punto D se comenta al docente que esta recta es la aproximación de la recta tangente a la curva por el punto D.
Reflexionar sobre las experiencias y articular lo que uno sabe	Reflexión en cuanto a las concepciones que se tienen de la función exponencial.	Las concepciones que los docentes tenían a cerca de la función exponencial, asociaba ésta como una función creciente expresada por $y = e^{x}$. Al usar la herramienta *Número* del programa Cabri Géomètre II Plus para estudiar las funciones exponenciales, los docentes observan que la base de una función exponencial es un número mayor que cero, el cual dependiendo la definición que se use de función exponencial puede ser igual o diferente a 1, y que la función es creciente o de decreciente dependiendo el valor de su base.
	Reconocer la importancia de estudiar en el aula	Uno de los docentes afirma que sí es importante estudiar el comportamiento de una función con los estudiantes de la educación media (décimo - once) y justifica la afirmación a partir de su propia experiencia: "*yo me acuerdo que en el colegio lo que yo*

	de clase las funciones exponenciales y el comportamiento de una función.	*vi fue… nada y meterse a estudiar matemáticas y ver cosas que en la vida uno no ha visto, es un choque tremendo…” “… de pronto no analizarlo tan de fondo, pero si es bueno que los chicos sepan de todo un poquito; además que con Cabri es más fácil”*. Se observa que Cabri Géomètre facilita el estudio de una función, ya que agiliza procesos que pueden conllevar mucho tiempo realizarlos con lápiz y papel, como es el caso de graficar una función; ya que habitualmente para graficar una función $y = f(x)$ se asignan ciertos valores para x, generalmente $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ y graficar; lo cual, por tiempo, impide el estudio del comportamiento de una función. Sin embargo, el docente C reconoce que al estudiar las funciones exponenciales en el aula de clase es indispensable que el estudiante conozca y realice traducciones de la representación numérica a la representación visual de la función. *“El tabular a veces se hace tedioso pero si es indispensable que lo hagan porque el problema radica en que ellos muchas veces no saben asignar a una letra un valor específico y los valores que se asignan generalmente son enteros”*

	Reflexionar con respecto a la construcción de la gráfica de la función exponencial en Cabri Géométre	Cuando se inicia la construcción de la función exponencial en el programa Cabri Géomètre se pide al docente que muestre los ejes de coordenadas y ubique un punto *A* en el eje *x*, en ese momento se observa que si el punto *A* se ubica de tal manera que quede sobre una de las graduaciones[14] del eje x, la representación visual que se obtendría de la función exponencial es la *Figura 60*, porque al desplazarse A en el eje x el programa no evalúa la función en todos los posibles valores que A puede tomar en el eje x, sino que toma los valores de las gradaciones, es decir si la unidad de medida del sistema de coordenadas es 1, los valores de *A* en el eje *x* es el conjunto de los números enteros.  *Figura 60* De acuerdo con esto, es posible pensar que el dominio de una función exponencial es el conjunto de números enteros.

[14] Cuando se habla de las graduaciones, se hace referencia a los puntos que se observan sobre los ejes de coordenadas, cuya distancia entre los puntos más cercanos es la unidad de medida.

Aplicar y apropiarse del conocimiento matemático y del programa Cabri Géomètre	Construcción de la función exponencial en el programa Cabri Géomètre.	Algunas de las herramientas que se usaron en la construcción de la función exponencial fueron *Coord. o Ecuación*, *Número*, *Transferencia de medidas*, las cuales el docente A no identifica aunque en otras ocasiones las ha usado; por lo que se le muestra la ubicación de éstas, y al mismo tiempo que se utilizan se describe la función de cada una. Cuando se usó la herramienta *Transferencia de medidas* para transferir en el eje y el resultado de a^x con $a = 2$, el cual fue $5{,}55$ para $x = 2{,}47$ el docente dice "*no salió*", ya que el tamaño de la hoja de trabajo no permitía ver el punto de la transferencia, debido a que en el eje y se observaban tres graduaciones. Por esta razón se "bajó" la pantalla para observar el punto. Ubicado el punto, el docente utiliza la herramienta *Recta perpendicular*, ya que reconoce que para construir la representación gráfica de la función a^x con $a = 2$ en el programa Cabri Géomètre es importante determinar el punto $D = (x, f(x))$ como la intersección entre la recta perpendicular al eje x que pasa por el punto A y la recta perpendicular al eje y que pasa por el punto C (*figura 61*).  *Figura 61*

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>Cuando se ha obtenido el punto se dice al docente que se ha obtenido un punto de la gráfica de la función, pero éste no es el único, por lo que se usa la herramienta Lugar para determinar los puntos de la gráfica de la función. El docente reconoce que para construir el lugar se necesitan dos objetos, el punto D y el punto A, ya que D depende de A. Así se obtuvo la representación gráfica de la función a^x con $a = 2$ (figura 62).

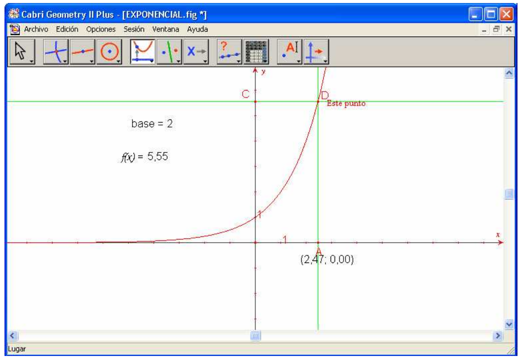


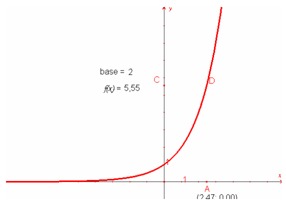
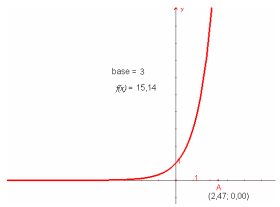
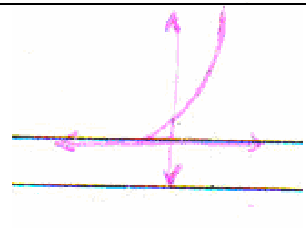
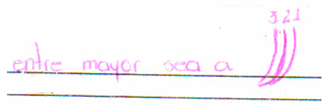
Figura 62</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Determinación de las bases para las cuales está definida una función exponencial</td>
<td>La construcción realizada fue la gráfica de la función exponencial a^x con $a = 2$; pero como se usó la herramienta número para escribir la base de la función exponencial, fue posible modificar el valor de la base considerando los siguientes casos:

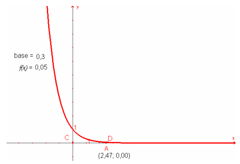
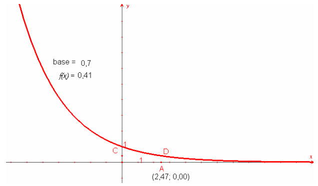
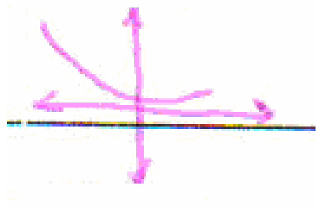
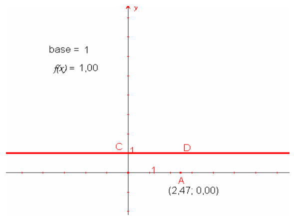
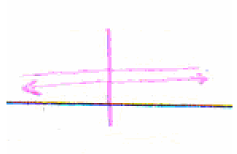
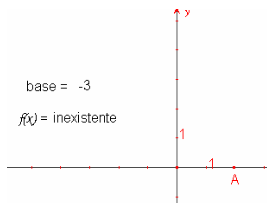
- $a > 1$
- $0 < a < 1$
- $a = 1$
- $a < 0$ o $a = 0$

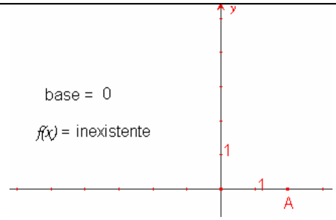
Cuando se pide realizar una descripción de la representación gráfica de la función</td>
</tr>
</table>

exponencial para los valores de a considerados en los casos anteriores, el docente B realiza un dibujo o escribe algo relacionado a la información que el programa Cabri Géomètre suministra (ver tabla 1)

Tabla 1

Base de la función	Representación en Cabri Géomètre	Respuesta del docente
$a > 1$	 $a = 2$  $a = 3$	 

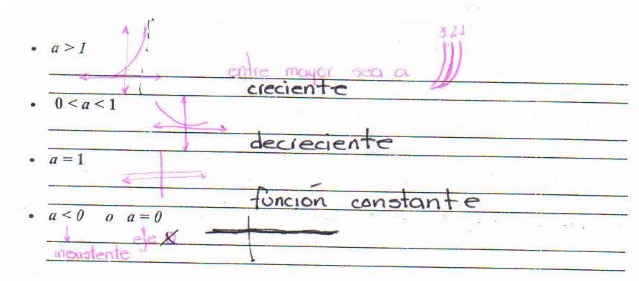
		$0 < a < 1$	 $a = 0.3$  $a = 0.7$	
		$a = 1$		
		a < 0 o *a = 0*		

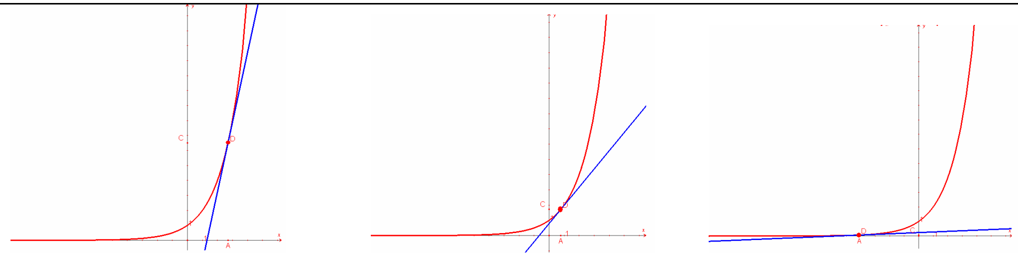
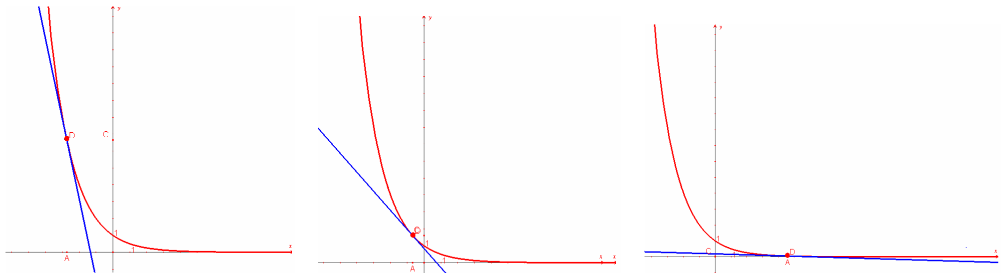


En la tabla 2 se presenta la descripción que el docente B realizó de las gráficas de las funciones exponenciales *(ver figura 63)* luego de socializar sus primeras respuestas; así mismo, se presenta la descripción realizada por el docente C de la gráfica de las funciones exponenciales según los casos indicados, con el fin de determinar para qué bases se definen las funciones exponenciales (ver taller Nº3)

Caso	Respuesta docente B	Respuesta docente C
$a > 1$	La función es creciente	Se aproxima al eje y
$0 < a < 1$	La función es decreciente	Cambia de cuadrante
$a = 1$	La función es constante	Hay recta tangente
$a < 0$	Inexistente	Se desaparece, no hay gráfica
$a = 0$	Es el eje x	No hay recta tangente

El docente B expresó que con $a < 0$ la gráfica de la función no existe; esto se debe a que

		al modificar los valores de a de tal manera que sean menores que cero, el programa Cabri Géomètre establece que a^x es inexistente y cuando $a = 0$ el docente dice que es el eje x, sin observar que en la pantalla de Cabri Géomètre dice “*inexistente*”; la respuesta del docente se debe que al evaluar 0^x con $x > 0$ su resultado es 0.  *Figura 63*
	Análisis de la concavidad de la función exponencial	Se usa la recta tangente como argumento geométrico para determinar si las funciones exponenciales son cóncavas hacia arriba o cóncavas hacia abajo; para ello se construyó la recta tangente a la curva por un punto D, la cual depende de un punto A en el eje x (ver taller Nº3) y se arrastró el punto A para observar qué sucedía con los puntos de la gráfica a medida que el punto D se “desplazaba” por la curva (ver *figura 64*).

		 *(a)Con base mayor que uno*  *(b) Con base entre cero y uno* *Figura 64* Como se observa en las figura *(a)* y *(b)*, todos los puntos de la curva de una función exponencial “quedan por encima” de la recta tangente; por lo que se concluye que las funciones exponenciales son cóncavas hacia arriba. Sin embargo, se aclara al docente que es importante estudiar las funciones por intervalos, ya que no todas las funciones son cóncavas hacia arriba o cóncavas hacia abajo en todos los posibles intervalos.

5.3.2 Conclusiones

Los docentes licenciados en Matemáticas mostraron una actitud crítica y reflexiva relacionada con su quehacer docente, el manejo del programa Cabri Géomètre y aspectos conceptuales de las funciones exponenciales, expresando la importancia que tiene que el estudiante realice conversiones entre las diferentes representaciones de una función.

El manejo que se dio al programa Cabri Géomètre facilitó el estudio de las funciones exponenciales y permitió observar que no todas las funciones exponenciales son crecientes, y que no sólo el número *e* es base de una función exponencial.

5.4 TALLER Nº 4

Título: Representación gráfica de las funciones logarítmicas en el programa Cabri Géomètre

Objetivos:

- Construir la representación gráfica de las funciones logaritmo natural y logaritmo en base 10.
- Construir la representación gráfica de funciones logaritmos en bases diferentes a *e* y a 10.
- Construir la representación gráfica de la función logaritmo como la función inversa de la función exponencial.
- Analizar el comportamiento de las funciones logarítmicas.
- Analizar el uso de Cabri Géomètre como mediador en la enseñanza de las funciones.

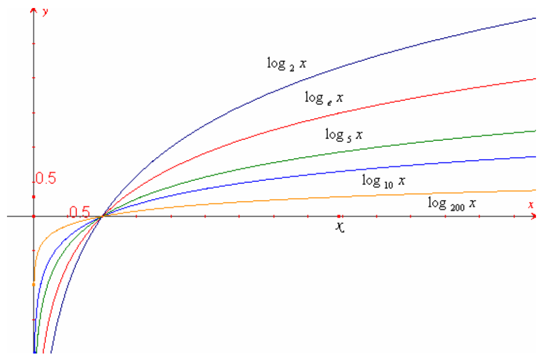
Teniendo en cuenta que la calculadora del programa Cabri Géomètre solamente permite construir la funciones logaritmo natural y logaritmo en base 10, se recurre a la definición de las funciones logarítmicas en bases diferentes a *e* y a 10 para construir funciones logarítmicas en otras bases. También se recurre a la definición de la función logaritmo como la inversa de la función exponencial; por lo cual, su construcción se plantea como una simetría de la curva de la función exponencial con respecto a la recta $y = x$.

Este taller se desarrolló con la versión del programa Cabri Géomètre II en una reunión del área de matemáticas.

TALLER Nº 4:

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS FUNCIONES LOGARITMICAS EN EL PROGRAMA CABRI GÉOMETRÉ

El objetivo de esta actividad la cual se desarrolla en tres partes es construir la gráfica de las funciones logaritmo usando las herramientas ***Simetría axial*** y ***Calculadora*** que ofrece el programa Cabri Géomètre.



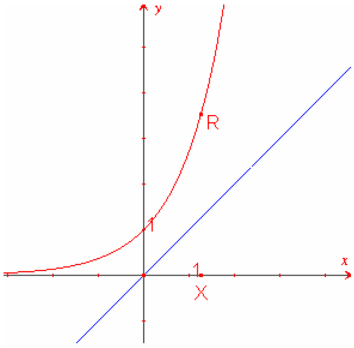
Representación gráfica de fuciones logaritmicas en diferentes bases

En la primera parte de la actividad se construye la gráfica de la función logaritmo a partir de la gráfica de la función exponencial, en la segunda parte se construye las curvas de logaritmo natural y logaritmo en base 10; finalmente se construye la representación gráfica de funciones logarítmicas en bases diferentes a e y a 10.

Primera parte:

Construcción de la gráfica de la función logaritmo a partir de la función exponencial

Se utilizará la herramienta ***Simetría axial*** para construir la curva de una función logaritmo a partir de la curva de una función exponencial; para ello, se usará la representación gráfica de la función exponencial y la recta $y = x$ como se observa a continuación y en la hoja de trabajo de Cabri Géomètre.

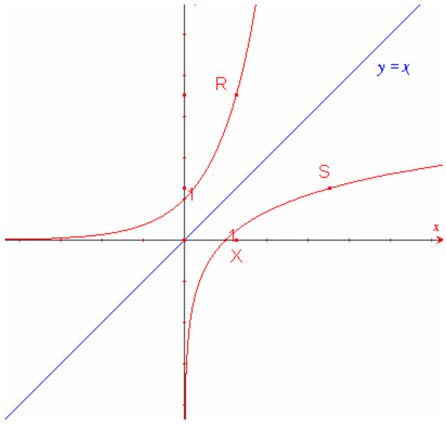


Representación gráfica de la función exponencial y la recta y=x

Para obtener la representación gráfica de la función logaritmo se tiene en cuenta el siguiente procedimiento:

1. Use la herramienta ***Simetría axial*** y seleccione el punto *R* y la recta.
2. Nombre con la letra *S* al punto que se obtiene.
3. Halle el lugar geométrico del punto *S* con respecto al punto *X*.

El lugar que se obtiene es la curva de la función logaritmo



ANALICEMOS

¿Qué relación existe entre el segmento *RS* y la recta $y = x$?

___

___

¿Qué relación encuentra entre las coordenadas del punto *R* y las del punto *S*?

___

___

De acuerdo con la construcción realizada, describa la función logaritmo a partir de la función exponencial

___

___

¿En qué punto la gráfica de la función exponencial se interseca con el eje y y en qué punto se interseca la gráfica de la función logaritmo con el eje x?

¿En qué punto la gráfica de la función exponencial se interseca con el eje x y en qué punto se interseca la gráfica de la función logaritmo con el eje y?

Segunda parte:

Construcción de la representación gráfica de logaritmo natural y logaritmo en base 10

Para construir la representación gráfica de la función logaritmo usando la herramienta ***Calculadora*** es importante observarla para conocer los logaritmos que ésta nos permite obtener.

La herramienta ***Calculadora*** permite hallar logaritmos naturales **ln** y logaritmos en base 10 **log**.

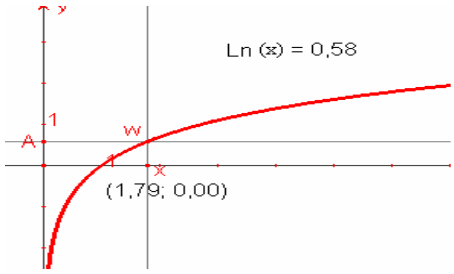
La construcción de la representación gráfica de logaritmo natural en el programa Cabri Géometrè, teniendo los ejes de coordenadas, un punto X sobre el eje x y las coordenadas de éste, se presenta a continuación:

1. Use la herramienta ***Calculadora*** para hallar el logaritmo natural de x, de clic sobre el icono **ln,** enseguida seleccione la coordenada de X en el eje x y cierre el paréntesis.

2. Al valor obtenido llámelo **Ln**.
3. Transfiera **Ln** en el eje y y etiquete éste punto con la letra A.

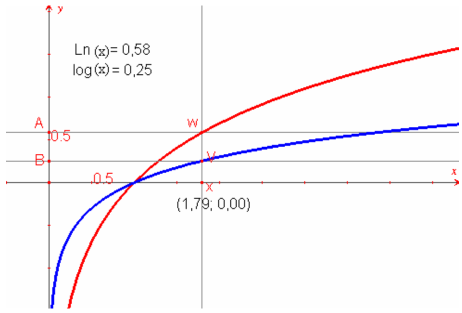
4. Por A construya una recta perpendicular al eje y y por X una recta perpendicular al eje x.
5. Halle el punto de intersección de las rectas perpendiculares y llámelo W; donde las coordenadas de W son $W = (x, \ln(x))$
6. Determine el lugar geométrico de W con respecto a x.

La gráfica que se obtiene es la siguiente



Representación gráfica de $\ln x$

Después de construir la representación gráfica de $\ln x$, construya en la misma hoja de trabajo de Cabri Géometrè la gráfica de la función logaritmo en base diez. Para construir la gráfica de $\log_{10} x$ se realiza un procedimiento similar al de la construcción de $\ln x$; la diferencia radica en que al usar la herramienta ***Calculadora*** no se selecciona el icono **ln**, sino que se selecciona el icono **log**. Lo que se observa en la hoja de trabajo se muestra a continuación



Representación gráfica de $\ln x$ *y* $\log_{10} x$

Tercera parte:

Construcción de la representación gráfica de logaritmos en bases diferentes a *e* y a 10.

La calculadora del programa Cabri Géomètre sólo permite hallar $\ln x$ y $\log_{10} x$, pero se sabe que éstas no son las únicas funciones logarítmicas que existen, por lo que surge la pregunta ¿cómo representar en Cabri Géomètre funciones logarítmicas cuya base sea diferente a e y a 10?

Para responder esta pregunta debemos recurrir a la definición de función logaritmo con base positiva $a \neq 1$.

Definición

Si $a > 0$, $a \neq 1$, y si $x > 0$, el logaritmo de x en base a es el número $\log_a x = \dfrac{\log_k x}{\log_k a}$

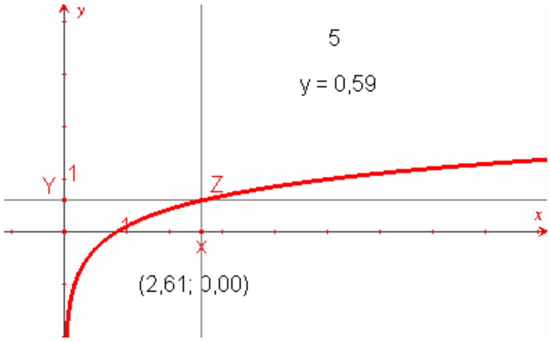
Con esta definición, se puede construir diversas funciones logarítmicas a partir del logaritmo natural de x o del logaritmo en base 10 de x. Con el fin de describir cómo se construye la representación gráfica de éstas funciones, a continuación se realizará la gráfica de logaritmo de x en base 5 es decir $\log_5 x$, partiendo del eje de coordenadas, un punto *X* sobre el eje x y las coordenadas de este punto.

1. Use la herramienta ***Número*** e inserte el número 5. Este número representa la base de la función logaritmo.
2. En la calculadora ingrese la siguiente expresión

ln(a)/ln(b)

donde **a** es la coordenada del punto *X* en el eje x y **b** es el número que insertó en la primera instrucción.

3. El resultado que obtuvo llámelo y. Observe que $y = \log_a x$
4. Transfiera el valor de y en el eje y y nombre con la letra Y al punto resultante.
5. Teniendo la coordenada del punto *X* en el eje x y la coordenada de Y en el eje y halle el punto $Z = (x, y)$.
6. Determine el lugar geométrico del punto Z con respecto al punto *X*.



Representación gráfica de $\log_5 x$

ANALICEMOS

Modifique el valor de la base de la función logaritmo (en el ejemplo era igual a cinco) y describa:

En $[1,\infty]$ ¿Para cuales valores de a con $a>1$, la curva de la función logaritmo está "por encima" de la curva de la función logaritmo natural?

____

____

En $[1,\infty]$ ¿Para cuales valores de a con $a>1$, la curva de la función logaritmo está "por debajo" de la curva de la función logaritmo natural?

____

____

¿Cuál es el dominio de la función logaritmo?

____

¿Cuál es el recorrido de la función logaritmo?

____

Describa el comportamiento de la función logaritmo

____

____

PARA REFLEXIONAR

¿Qué aspectos de la actividad considera fundamentales en la enseñanza de las funciones logarítmicas y exponenciales?

____

____

¿Considera conveniente abordar con los estudiantes el estudio de la función logaritmo y exponencial, desde un punto de vista geométrico? ¿Por qué?

____

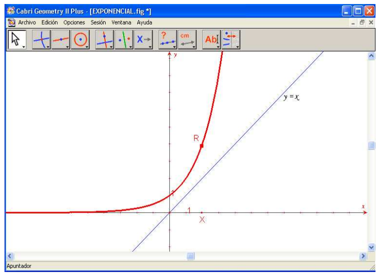
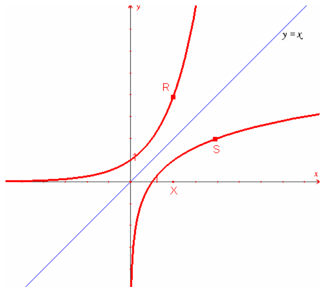
____

¿Considera apropiado el uso de Cabri Géomètre en el aula de clase para el estudio de las funciones? Justifique

____

____

5.4.1 ANÁLISIS DE COMPRENSIÓN

CATEGORÍA	ACTIVIDAD	OBSERVACIÓN
Construir Relaciones y Extender conocimiento matemático y del programa Cabri Géomètre	Relación de la función logaritmo como la función inversa de la función exponencial.	En la hoja de trabajo del programa Cabri Géomètre se presenta la curva de una función exponencial y la recta $y = x$ como se muestra en la figura 65. Luego se construye la curva determinada por el punto S, el cual es simétrico del punto R con respecto a la recta $y = x$ (*ver taller Nº4 y figura 66*), para observar la relación existente entre la recta $y = x$ y el segmento RS.  *Figura 65*  *Figura 66* Algunos docentes afirman que el segmento RS es perpendicular a la recta $y = x$ y los docentes B y C observan que la recta $y = x$ es la mediatriz del segmento RS. Para comprobar si la recta $y = x$ es perpendicular al segmento RS se elige la herramienta *¿perpendicular?* que ofrece el programa Cabri Géomètre y enseguida se selecciona la recta

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>
y el segmento (figura 67); el programa muestra el texto “Los objetos son perpendiculares” (figura 68)

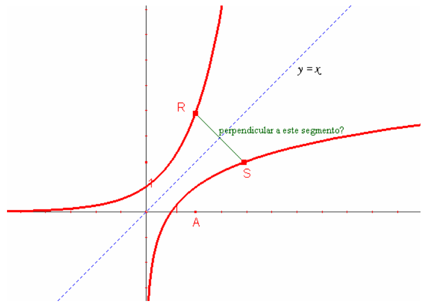


Figura 67

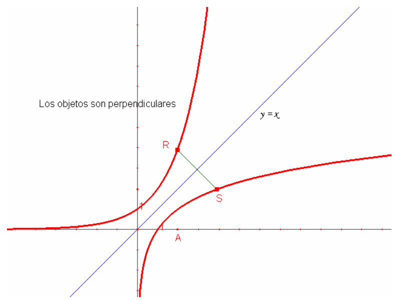
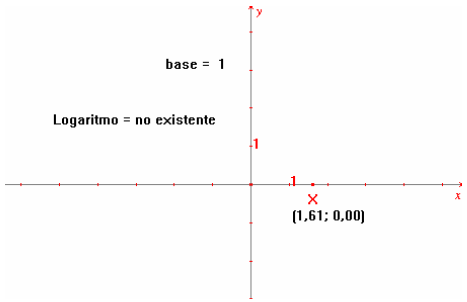


Figura 68

Luego de comprobar que los objetos son perpendiculares se pregunta a los docentes ¿Qué relación encuentra entre las coordenadas del punto R y las coordenadas del punto S?, a lo que los docentes A, D y E dicen: $R=(x,y)$ y $S=(y,x)$; los docente B y C dicen: “la componente de x en una es la componente de y en otra y la componente de y es la componente de x en otra”. Finalmente se le pide a los docentes que describan la función logaritmo a partir de la función exponencial, y ellos afirman que la función logaritmo es la inversa de la función exponencial.
</td>
</tr>
</table>

	Relación del logaritmo natural y del logaritmo en base 10 con la función logaritmo de base diferente a e y a 10, para construir su representación gráfica en el programa Cabri Géomètre.	Para construir en Cabri Géomètre la curva de una función logaritmo en base diferente a e y a 10 se recurre a la siguiente definición Si $a > 0$, $a \neq 1$, y si $x > 0$, el logaritmo de x en base a es el número $\log_a x = \frac{\log_k x}{\log_k a}$ La cual implica que la construcción de $\log_a x$ se realiza a partir del cociente de dos funciones logarítmicas de igual base. Cuando los docentes realizan en Cabri Géomètre la construcción de una función logaritmo en base diferente a e y a 10, empiezan a modificar el valor de la base, es decir el valor de a y cuando llegan a $a = 1$ observan que no existe la curva de la función logaritmo (*figura 69*); debido a que $Log_k 1 = 0$, lo cual implica la indeterminación $\log_a x = \frac{\log_k x}{0}$.  *Figura 69*

Reflexionar sobre las experiencias y articular lo que uno sabe	Identificación de de los puntos de corte entre la curva de la función exponencial y logarítmica con los ejes de coordenadas	Con los docentes se observa que la curva de la función exponencial se corta en un único punto con el eje y el punto $(0,1)$ y la curva de la función logaritmo se corta con el eje x en el punto $(1,0)$. Para justificar que la función Logaritmo corta en el punto $(1,0)$ al eje x, se recurre a la definición de función Logaritmo $L(x)=\int_1^x \frac{1}{t}dt$ donde $L(x)=0$ si y sólo si $x=1$, ya que $\int_1^1 \frac{1}{t}dt = 0.$ Como la función Logaritmo es la función inversa de la función exponencial se tiene que $y = Ln(x)$ si y solo si $x = E(y)$ Lo cual implica que $E(0)=1$, así la función exponencial corta al eje de coordenadas en el punto $(0,1)$.
	Reflexión de la conveniencia o no de abordar el estudio de las funciones Logarítmicas y	Los docentes afirman que el estudio de las funciones logaritmo y exponencial desde su representación gráfica puede favorecer que los estudiantes visualicen de manera clara el dominio y el rango de cada una de las funciones; además el uso de herramientas tecnológicas, específicamente Cabri Géomètre en la construcción de la representación gráfica de una función contribuye en el estudio del comportamiento de la función, ya que permite observar si la curva de la función es cóncava hacia arriba o hacia abajo, es posible

	Exponenciales desde su representación gráfica	variar tanto la base de la función logaritmo como la base de la función exponencial y permite que el estudiante observe y analice características y propiedades de cada una de éstas funciones. Así como los docentes consideran importante el estudio de las funciones Logaritmo y Exponencial desde un punto de vista geométrico, ellos analizan que antes de este estudio el estudiante debe poseer unos preconceptos asociados a las funciones, especialmente a las funciones Logaritmo y Exponencial; pues por dar un ejemplo, cómo se le va a decir al estudiante que modifique el valor de la base de la función exponencial cuando él en su estructura conceptual no reconoce el significado de la base.
	Reflexión con respecto a la representación gráfica de la función Logaritmo Natural en el programa Cabri Géomètre II y CabriGéomètre II Plus.	De acuerdo con la construcción dada en el taller Nº4, se observa que la representación gráfica de la función Logaritmo Natural es la curva determinada por el lugar geométrico de los puntos W tales que $W = \left(x, Ln(x)\right)$. Se observa que en la construcción realizada en Cabri Géomètre II usando la herramienta *Lugar geométrico* (*figura 70*) la curva no está determinada por todos los puntos *W (ver figura 71, 72).*

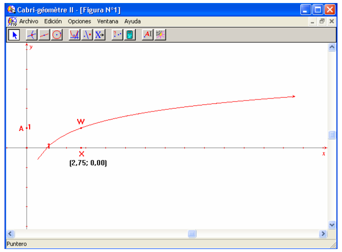


Figura 70

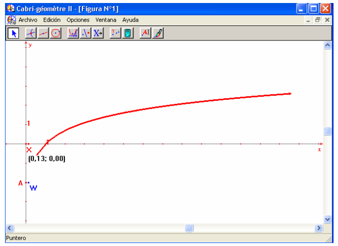


Figura 71

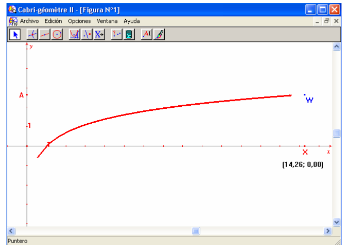


Figura 72

Lo cual puede hacer pensar que el dominio de la función Logaritmo Natural es aproximadamente el intervalo $(0.50, 13.63)$ (*figura 73, 74).*

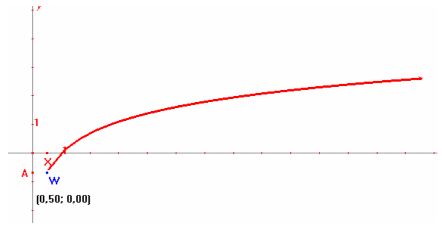


Figura 73

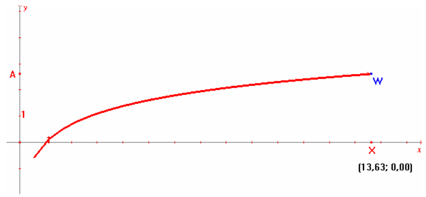
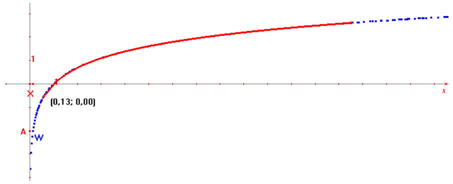
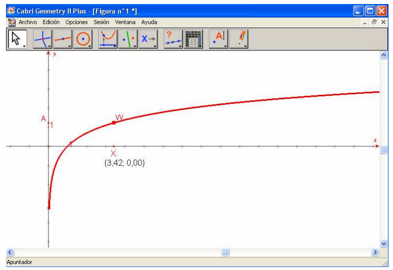


Figura 74

Al usar la herramienta *Traza activada / desactivada* el punto *W* deja “la huella” a medida que el punto *X* se desplaza sobre el eje x, lo cual permite observar como se va construyendo la representación gráfica de la función Logaritmo Natural y al mismo tiempo considera más puntos *W* (*figura 75*)

		 *Figura 75* Al usar la versión Cabri Géomètre II Plus para construir la función Logaritmo Natural se obtiene la siguiente figura:  *Figura 76* En comparación con la representación gráfica obtenida en la versión Cabri Géométre II se observa que en el lugar geométrico de W con respecto a X existe un número mayor de puntos W; sin embargo en este lugar no está representado el conjunto de puntos $(x, \ln(x))$ tales que $0 < x < 0.04$ (ver *figura 77* donde se ha realizado un acercamiento a la figura de tal manera que la unidad de longitud es 0.5)

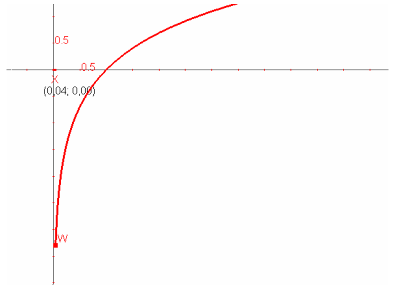
<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>


Figura 77
</td>
</tr>
<tr>
<td>Aplicar y apropiarse del conocimiento matemático y del programa Cabri Géomètre</td>
<td>Construcción de la representación gráfica de logaritmos en bases diferentes a e y a 10.</td>
<td>
Luego de construir con los docentes la representación gráfica de Logaritmo Natural y de logaritmo en base 10, se propone a los docentes construir la representación gráfica de logaritmos en bases diferentes a e y a 10 (ver taller Nº4).

En la primera instrucción de la tercera parte del taller Nº 4, se propone al docente usar la herramienta Número e insertar el número 5. El docente D inmediatamente busca ésta herramienta pero al no encontrarla concluye que la herramienta que necesita es la herramienta Edición Numérica. Aspecto que permite ver que el docente aplicó sus conocimientos del programa Cabri Géomètre II para abordar una tarea que está propuesta para desarrollar en la versión Cabri Géomètre II Plus.

Cuando se pide ingresar en la calculadora del programa la expresión $\ln(a)/\ln(b)$ donde a es la coordenada del punto X en el eje x y b el número que se insertó con la herramienta Número o Edición numérica, el docente D dice que el punto que se obtiene es el mismo
</td>
</tr>
</table>

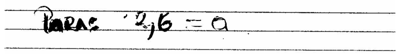
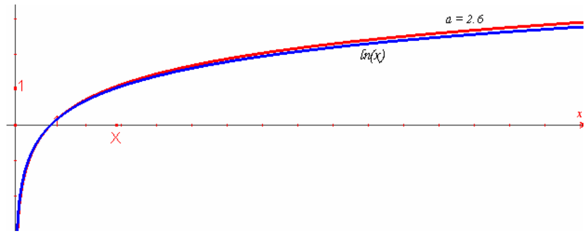
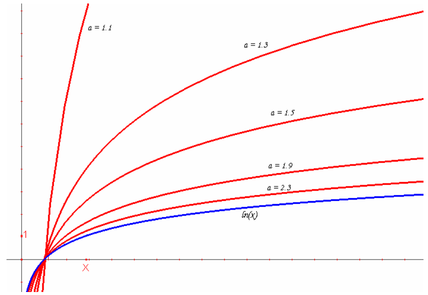
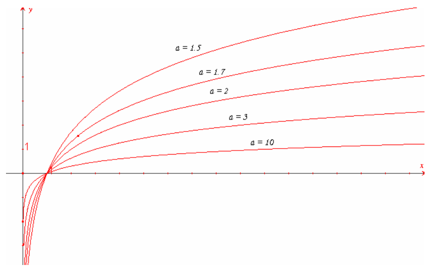
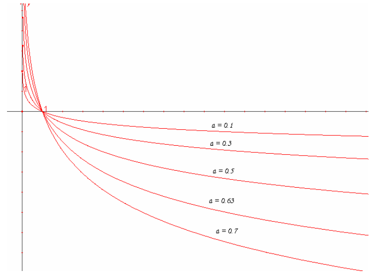
<table>
<tr><td></td><td></td><td>punto A, el cual es la coordenada de $\ln(x)$ en el eje y, lo cual implica que la gráfica que se obtiene es la misma de la función logaritmo natural; la afirmación del docente se debe a su rápida lectura de la definición dada para los logaritmos diferentes a e y a 10, por lo que después se le aclara que b es el número que representa la base de la función logaritmo y es el número que se insertó con Edición numérica.</td></tr>
<tr><td></td><td>Análisis de la función $\log_a x$ con respecto a la función $\ln(x)$</td><td>Luego de construir la curva de $\ln(x)$ y $\log_5 x$ se sugiere al docente modificar la base de la función logaritmo, es decir el número 5 y describir para cuáles valores de a con $a > 1$, la curva de la función logaritmo en el intervalo $(1, \infty)$ está “por encima” de la curva de la función logaritmo natural. Los docentes A, D y E afirmaron para $a = 2,6$ (ver figura 80) y los docentes B y C concluyeron que para todo $a < e$ (figura 81)


Figura 78


Figura 79
En la respuesta de los docentes A, D y E se observa que ellos después de modificar los valores de la base, toman un valor de a para el cual la curva de la función logaritmo está por encima de la función y que es muy próximo a e (figura 80). Mientras que los docentes B y C observan que no existe una única curva de la función logaritmo de base a que “esté por encima” de la función logaritmo natural por lo que generalizan para todo $a < e$. Teniendo en cuenta que se pregunta por los valores de a mayores que 1, se infiere que los docentes quieren expresar que la curva de la función logaritmo está por encima de la</td></tr>
</table>

		función logaritmo natural para todos los $a > 1$ tales que $a < e$, es decir para los $a \in (1, e)$ (*figura 81).*  *Figura 80*  *Figura 81* En la pregunta ¿Para cuáles valores de a con $a > 1$, la curva de la función logaritmo está "por debajo" de la curva de la función logaritmo natural?, los docentes A, E y F responden para $a = 3$ y los docentes B y C responden $\forall a > e$.
	Análisis del comportamiento del la función Logaritmo	Cuando se pide a los docentes describir el comportamiento de la función logaritmo, unos afirman que la función logaritmo es creciente y cóncava hacia abajo. Otros docentes preguntan: *"¿a qué se esta haciendo referencia cuando se habla del comportamiento de la función?"* y se les dice que para este taller lo que se espera, es que ellos analicen la concavidad de la función, su crecimiento o decrecimiento. De acuerdo a esto, un docente dice: *"yo puedo observar que pasa con y a medida que x aumenta"*, otro docente afirma que la función logaritmo es cóncava hacia arriba y el docente A dice que la función logaritmo no es cóncava hacia arriba sino que es cóncava hacia abajo. Con respecto a si la

		función es creciente o decreciente, el docente afirma que “*cuando los valores de* y *son positivos, la función es creciente porque a medida que el valor de* x *aumenta, aumenta el valor de* y*; pero cuando los valores de* y *son negativos la función decrece porque a medida que los valores de* x *aumentan* y *disminuye*”. De acuerdo al planteamiento de uno de los docentes, un docente le da a conocer que *“cuando se habla de una función creciente es cuando se le dan valores y la función sube o baja porque hay valores de la función disminuyen a medida que* x *aumenta, en ese caso la función sería decreciente; pero para este caso* (la función Logaritmo) *la función es creciente”*. A los docentes se les da a conocer que una función es creciente si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ y una función es decreciente si $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ donde x_1 y x_2 son dos números cualesquiera. Sin embargo, se realiza la aclaración de que para el caso de la función logaritmo se dice que la función es creciente, pero existen funciones que se deben evaluar por intervalos ya que no en todos los intervalos son crecientes o decrecientes. De lo anterior, se observa que los docentes solamente analizaron la función Logaritmo en bases mayores que 1, que son los casos para los cuales la función logaritmo es creciente y cóncava hacia abajo (*figura 82*). Sin embargo, no analizaron el comportamiento de la logaritmo donde el valor de la base está entre 0 y 1, es decir $0 < a < 1$; donde la función es decreciente y cóncava hacia abajo (*figura 83)*

		 *Figura 82*  *Figura 83*

5.4.2 Conclusiones

Los docentes presentaron una mayor habilidad en el manejo del programa Cabri Géomètre y una apropiación conceptual relacionada con el estudio del comportamiento de una función; además se observó que al usar el programa los análisis y reflexiones que realizan no solamente abarcan casos específicos, sino que pretenden realizar generalizaciones.

Cuando se construye en el programa Cabri Géomètre II la función Logaritmo Natural como la función inversa de la función Exponencial de base e, se obtienen la siguiente gráfica, la cual aparentemente muestra que el recorrido de la función exponencial e^x no es el conjunto de todos los números reales positivos, sino que es el conjunto de reales entre 0 y 8.44; de manera similar muestra que el dominio de la función no es el conjunto de todos los reales positivos, sino que es la unión de los intervalos $(0, 0.53)$ y $(2, 8.45)$ aproximadamente.

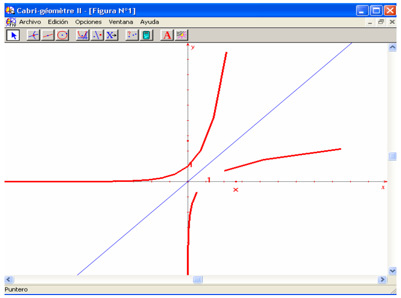


Figura 84

Al realizar la construcción de la función Logaritmo Natural como la inversa de la función exponencial en el programa Cabri Géomètre II Plus, se obtiene una excelente representación gráfica de las funciones Logaritmo Natural y Exponencial de base e, ya que en esta el dominio de la función exponencial y el recorrido de la función logaritmo es el conjunto de todos los números reales; y el dominio de la función logaritmo y recorrido de la función exponencial es el conjunto de los números reales positivos.

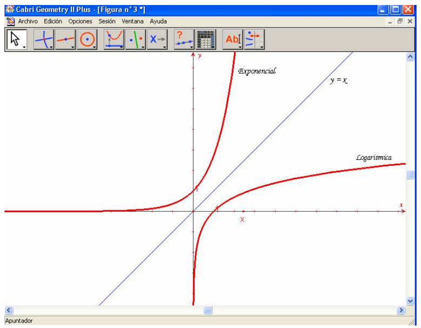


Figura 85

6 EVALUACIÓN Y CONCLUSIONES

6.1 EVALUACIÓN DE LA PROPUESTA GENERADA Y DESARROLLADA CON LOS DOCENTES

En el desarrollado de las actividades propuestas a los docentes de la Institución Educativa General Santander se observaron las siguientes fortalezas y debilidades.

Fortalezas

- La propuesta contribuyó en que los docentes adquirieran una actitud reflexiva frente a la incorporación de la herramienta tecnológica Cabri Géomètre al aula de clase; observando sus posibles ventajas, desventajas y errores que se puedan presentar.
- Los docentes involucrados en el proyecto adquirieron conocimientos y habilidades relacionadas con el uso y el manejo del software Cabri Géomètre.
- La construcción de las actividades promovió la exploración, apropiación y aprendizaje de otras funcionalidades y herramientas del programa.
- Las actividades propuestas por los compañeros de práctica que participaron del proyecto de facultad contribuyeron a que los docentes desarrollaran habilidades relacionadas con el manejo del programa Cabri Géomètre.
- La presentación de los talleres facilitó el desarrollo de los talleres por parte de los docentes.
- El trabajo de las asesorías permitió profundizar en aspectos conceptuales y del manejo del programa Cabri Géométre.

Limitaciones

- En el desarrollo de las actividades, algunas de las versiones usadas del programa Cabri Géomètre (Cabri II ó Cabri II Plus) dificultaron el estudio y construcción de las Funciones Logarítmica y exponencial.

- Algunos docentes no desarrollaron todas las actividades, por lo que el proceso no fue continuo.
- Las actividades programadas por la institución dificultó que algunos talleres grupales se desarrollaran como en principio se habían planeado.
- En el desarrollo de los talleres pocos docentes realizaron un registro escrito de sus análisis y respuestas a las preguntas propuestas, lo cuál dificultó realizar un análisis con mayor profundidad.

6.2 *CONCLUSIONES GENERALES SOBRE EL TRABAJO DESARROLLADO*

- Con la propuesta se logró que los docentes de la Institución Educativa General Santander contemplaran la posibilidad de incorporar la herramienta tecnológica Cabri Géométre como mediador en la enseñanza - aprendizaje de las matemáticas.
- Se observa la importancia de que los docentes de matemáticas estén en constante actualización y al mismo tiempo, que sean docentes innovadores e impulsadores de proyectos en las instituciones educativas.
- Los docentes que tuvieron un proceso de formación continuo presentaron mayor capacidad para analizar aspectos globales de las funciones Logarítmica y Exponencial como el comportamiento, dominio, recorrido, concavidad, entre otros.
- El estudio de la función Logaritmo y de la función Exponencial desde su representación gráfica, mediado con el programa Cabri Géomètre disminuye el tiempo que usualmente se emplea para construir una función.
- Con el desarrollo de las cuatro actividades aplicadas se dificulta evidenciar las transformaciones en las comprensiones de los docentes, durante el proceso.
- Para reconocer el potencial de una herramienta tecnológica es necesario explorarla; así mismo, para reconocer su impacto en el aula, es necesario implementarla.

6.3 ALGUNAS IDEAS QUE SURGEN PARA FUTUROS TRABAJOS

A partir de la experiencia de este trabajo se considera que futuros trabajos se pueden ocupar en:

- Estudiar y proponer un módulo de actividades mediado por una herramienta tecnológica, cuya temática esté relacionada con la composición de funciones logarítmicas, exponenciales y otras.
- Extender la propuesta para el estudio de derivadas e integrales de las funciones Logarítmica y Exponencial mediado con Geogebra, Derive y/o Win plot.
- Proponer y desarrollar un módulo de actividades en Cabri Géomètre para analizar las transformaciones de las comprensiones en estudiantes de bachillerato al estudiar el concepto de función.

7 BIBLIOGRAFÍA

APOSTOL, T. (1988) *Calculus*. Reverté v. 1. Ed. 2

APOSTOL, T & M. MNATSAKANIAN. (2002) *Tangents and Subtangents Used to Calculate Areas*. En *The American Mathematical Monthly*, vol. 109, No. 10.

CARPENTER, T & R. LEHRER (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. En E. Fennema y T. Romberg (Eds). Mathematis classrooms that promote understanding (pp.19 - 32)

FANDOS, M. (2003) *Formación basada en las Tecnologías de la Información y Comunicación: Análisis didáctico del proceso de enseñanza-aprendizaje*. Tarragona.

HIEBERT, J [et al.] (1997) *Making sense: teaching and learning mathematics with understanding*. University of Wisconsin Foundation.

JANVIER, C. (1987) *Problems of representation in the teachind and learning of mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

KASTBERG, S. (2002) *Understanding mathematical concepts: the case of the logarithmic function*. Georgia.

MEEL, D. (2003) *Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Piere y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría de Apoe*. En Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol 6.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. *Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia: Formación de Docentes sobre el Uso de Nuevas Tecnologías en el aula de Matemáticas.* Bogotá, D.C. Diciembre 2001 – Enero 2002.

________ . ________: Pensamiento Geométrico *y Tecnologías Computacionales*. Bogotá, D.C. 2004

________ . ________: *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales*. Bogotá, D.C. 2004

LEITHOLD, L. (1998) *El cálculo*. 7 ed. México. Oxford University Press.

MUÑOZ, J. (2002) *Introducción a la teoría de conjuntos*. 4 ed. Universidad Nacional de Colombia.

OROZCO, J. *Uso pedagógico de los programas Derive 6.1 y Cabri Geometry II Plus, en las clases de Matemáticas*. Bogotá: Colegio Champagnat.

RAHN, J. & B. Berndes. (1994) *Using Logarithms to Explore Power and Exponential Funtions.*

SPIVAK, M. (1996) *Cálculo Infinitesimal*.2 ed. Editorial Reverté, México, D.F.

STEWART, J; REDLIN, L & S, WATSON. (2001) *Precálculo Matemáticas para el cálculo.* 3 ed. Internacional Thomson Editores

STONE WISKE, M (compiladora). (1999*) La enseñanza para la comprensión*. Vinculación entre la investigación y la práctica. Editorial Paidós.

TALL, D. (1990) *Intuition and rigour: The role of visualization in the calculus. In Visulaization in Teaching and Learning Mathematics.* USA. Zimmermann W. & Cunnungham Editors. MAA Series, p. 105 – 119

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL (2004). *La Práctica Educativa en el Proyecto Curricular de Licenciatura en Matemáticas.*

UNIVERSIDA PEDAGÓCICA NACIONAL (2006). *Transformando comprensiones de los profesores de matemáticas mediante el uso de algunas tecnologías.* FCTMA206.

WEBER, K. (2002) *Understanding of Exponential and Logaritmic Funtions*. U.S.A

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9 (1): 117-150 (2006)

http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/archivos1/doctorado/Homenaje/19Gonzalez-LopezM.PDF

http://ued.uniandes.edu.co/servidor/em/recinf/software/cabri.html

http://docentes.uacj.mx/sterraza/matematicas_en_movimiento/tangente/tan_calc.html

http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/pome14/font.doc

ANEXOS

Teorema 1 $L(1)=0$

Demostración. Si $x=1$ en la definición de función logaritmo natural, entonces

$L(1)=\int_1^1 \frac{1}{t}dt$ si $f(a)$ existe, se cumple que $\int_a^a f(x)dx=0$. Como $f(t)=\frac{1}{t}$ existe cuando

$t=1$, se tiene que $\int_1^1 \frac{1}{t}dt=0$

Luego, $L(1)=0$.

Teorema 2. Si $x>0$, entonces $L'(x)=\frac{1}{x}$

Demostración. Al ser $L(x)=\int_1^x \frac{1}{t}dt$ una función diferenciable, se tiene que

$D_X\left(L(x)\right)=D_X\left(\int_1^x \frac{1}{t}dt\right)$; por el primer teorema fundamental del cálculo, luego

$L'(x)=\frac{1}{x}$.

Teorema 3. Si $a,b>0$, entonces $L(ab)=L(a)+L(b)$

Demostración. Sea $x>0$ y f la función definida por $f(x)=L(ax)$ entonces

$f'(x)=L'(ax)\cdot a$ es decir, $f'(x)=\frac{1}{ax}a$ así $f'(x)=\frac{1}{x}$.

A partir del teorema 2 se tiene $f'(x)=L'(x)$; esto significa que existe una constante c tal que $f(x)=L(x)+c$, es decir $L(ax)=L(x)+c$ para todo $x>0$. El número c se puede calcular, para ello se considera $x=1$, es decir $L(a)=L(1)+c$ por el teorema 1, se tiene que $L(a)=c$. Al sustituir $L(a)$ por c en (2), se tiene que $L(ax)=L(x)+L(a)$ para toda $x>0$

Al considerar $x=b$, se obtiene $L(ab)=L(a)+L(b)$.

Lo cual se cumple para toda $b>0$.

Teorema 4. Si $a,b>0$, entonces $L\left(\frac{a}{b}\right)=L(a)-L(b)$

Demostración. Teniendo en cuenta que $a=\frac{a}{b}\cdot b$, entonces $L(a)=L\left(\frac{a}{b}\cdot b\right)$. Al aplicar el teorema 3 a la anterior ecuación, se tiene que $L\left(\frac{a}{b}\cdot b\right)=L\left(\frac{a}{b}\right)+L(b)$ de donde se concluye que $L\left(\frac{a}{b}\right)=L\left(\frac{a}{b}\cdot b\right)-L(b)$ es decir $L\left(\frac{a}{b}\right)=L(a)-L(b)$.

Teorema 5. Si r es cualquier número racional y $x>0$, entonces $L(x^r)=rL(x)$.

Demostración. Por la definición de función logaritmo natural, se tiene $L(x^r)=\int_1^x \frac{1}{t^r}dt$.

Por ser $x>0$ y r es cualquier número racional, y al dar uso del teorema 2 y la regla de la cadena; se obtiene que $L'(x^r)=\frac{1}{x^r}\cdot rx^{r-1}$ Al aplicar la ley de los exponentes $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ en el miembro derecho de esta ecuación, $L'(x^r)=\frac{r}{x}$ como $rL'(x)=r\cdot\frac{1}{x}=\frac{r}{x}$.

Se puede concluir que las derivadas de $L(x^r)$ y $rL(x)$ son iguales. Esto implica que existe una constante c tal que $L(x^r)=rL(x)+c$ para toda $x>0$

A fin de determinar c, en la anterior ecuación se sustituye 1 por x de tal modo que $L(1^r)=rL(1)+c$. Por ser $L(1)=0$, $c=0$; luego $L(x^r)=rL(x)$ para toda $x>0$.

Como L crece a medida que x tiende a infinito, se sospecha que la función logaritmo no tiene cota superior; es decir que para todo número positivo M, existen valores de x tales que $L(x)>M$, por el teorema 5 $L(a^n)=nL(a)$ para todo entero $n\geq 1$. Si $a=2$, se obtiene $L(2^n)=nL(2)$; por tanto se tiene $L(2^n)>M$ cuando $n>\frac{M}{L(2)}$ Lo cual indica que L no tiene cota superior.

Para los valores de la función logaritmo, tampoco existe cota inferior, ya que al tomar $b = \dfrac{1}{a}$ en el teorema que establece la igualdad $L(ab) = L(a) + L(b)$, se tiene que $L\left(\dfrac{1}{a}\right) = -L(a)$. Cuando $a = 2^n$ con n entero tal que $n \geq 1$, se tiene $L\left(\dfrac{1}{2^n}\right) = -L(2^n) < -M$

Lo que indica que tampoco existe cota inferior para los valores de la función.

Teorema 6. Para cada número real b existe exactamente un número real positivo x cuyo logaritmo $L(a)$, es igual a b.

A continuación se presenta la demostración para $b > 0$

Si $b > 0$ se elige un número n tal que $n > \dfrac{b}{L(2)}$, así $nL(2) > b$ y por el teorema 5 $b < L(2^n)$. Examinando la función en el intervalo cerrado $\left[1\,,\,2^n\right]$, su valor en el extremo izquierdo es $L(1) = 0$ por el teorema 1 y su valor en el extremo derecho es $L(2^n)$. Como la función logaritmo es continua en el intervalo cerrado $\left[1\,,\,2^n\right]$ y $L(1) \neq L(2^n)$, entonces para cada valor b entre $L(1)$ y $L(2)$ existe un número a entre 1 y 2^n tal que $L(a) = b$.

Si existe un $a' \neq a$ tal que $L(a') = b$, implica que $L(a) = L(a')$, lo cual contradice la propiedad de crecimiento de logaritmo.

Observemos ahora para $b < 0$. Elegimos un número n tal que $L\left(\dfrac{1}{2^n}\right) < -b$ luego $-L(2^n) < -b$, así $-L(2^n) < -b < L \quad (1)$ lo cual implica que $L(1) < -b < L(1)$, teniendo el caso anterior.

Teorema Si L es una función uno a uno, entonces la relación L^{-1} es una función y también es uno a uno.

Demostración. Sea $L^{-1} = E$. Si $(x, y) \in E$ y $(x, z) \in E$, entonces $(y, x) \in (E)^{-1} = \left(L^{-1}\right)^{-1} = L$ y $(z, x) \in L$ es decir $L(y) = x = L(z)$ al ser L uno a uno se tiene $y = z$, demostrando así que E es función.

Ahora, si $E(a) = E(b) = y$, se tiene que $(a, y) \in E$ y $(b, y) \in E$ es decir $(y, a) \in L$ y $(y, b) \in L$ como L es un función, se tiene que $a = b$. Así E es una función uno a uno.

Teorema 7. $E(0) = 1$

Demostración. Por el teorema 1 se sabe que $L(1) = 0$; luego $E(0) = E(L(1))$ así $E(0) = 1$; de manera semejante se demuestra que $E(1) = e$, puesto que $L(e) = 1$.

Teorema 8. $E(a+b) = E(a)E(b)$ para todo a y todo b

Demostración. Sea $x = E(a)$, $y = E(b)$. Entonces por la definición de $E(x)$, $L(x) = L(E(a))$ y $L(y) = L(E(b))$ luego $L(x) = a$ y $L(y) = b$ se sabe que $L(xy) = L(x) + L(y)$, luego $L(xy) = a + b$; así $E(L(xy)) = E(a+b)$ .Como $E(L(x)) = x$; en la ecuación anterior se tiene que $xy = E(a+b)$. Anteriormente se dijo que $x = E(a)$, $y = E(b)$, luego $E(a) \cdot E(b) = E(a+b)$

Teorema 9 . $E(a) \div E(b) = E(a-b)$ para todo a y todo b.

Demostración. Sean $x = E(a)$, $y = E(b)$, entonces $L(x) = a$ y $L(y) = b$; se sabe que $L\left(\frac{x}{y}\right) = L(x) - L(y)$, así $L\left(\frac{x}{y}\right) = a - b$ luego por ser E la función inversa de L $\frac{x}{y} = E(a-b)$ es decir $\frac{E(a)}{E(b)} = E(a-b)$

Teorema 10. $[E(a)]^b = E(a \cdot b)$ para todo a y todo b.

Demostración. Como $a = E(L(a))$ entonces $[E(a)]^b = E\left[L(E(a))^b\right]$ por el teorema 5 se tiene $E\left[L(E(a))^b\right] = E[b \cdot L(E(a))]$; al reemplazar $L(E(a)) = a$ en la expresión de la derecha, se tiene $E[b \cdot L(E(a))] = E[b \cdot a]$ luego $[E(a)]^b = E[a \cdot b]$

Teorema 11. Si $f(x) = e^x$ entonces $f'(x) = e^x$

Demostración. Como $y = e^x$ si y sólo si $x = \ln(y)$, se tiene que $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ conociendo que $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$, la expresión $\frac{dy}{dx}$ es igual a y luego $\frac{dy}{dx} = e^x$.