# SOBRE RAÍCES Y RADICALES.
# EFECTOS DE DOS CULTURAS DE ENSEÑANZA (ESPAÑA-RUMANIA)

Carmen Buhlea y Bernardo Gómez

Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia

**Resumen.** *Se documenta una dificultad de aprendizaje debida al cambio de significado del signo radical al pasar de la aritmética al álgebra.*

*La hipótesis de partida es que esta dificultad puede ser un producto de la enseñanza. Para contrastar esta hipótesis se ha desarrollado un estudio comparativo entre dos propuestas de enseñanza diferentes (española y rumana), mediante una revisión de textos escolares y un estudio de caso.*

*Entre los resultados de la investigación se concluye que en la propuesta de enseñanza en la cual se introducen dentro del álgebra las nociones de raíz y radical no se reproduce la dificultad identificada, lo que sí que ocurre en la propuesta en la que se introducen las nociones de raíz y radical en la aritmética.*

**Abstract.** *It documents a learning difficulty owed to the change of the meaning of the radical sign passing arithmetic to the algebra.*

*The starting hypothesis is that this difficulty can be a teaching's product. To contrast this hypothesis it developed a comparative study between two different proposals of teaching (Spanish and Rumanian), by means of a revision of schoolbooks texts and a study of case.*

*Among the research results it is concluded that in the teaching proposal in which they introduce within the algebra the notions of root and radical, there is not reproduction of the identified difficulty, that indeed occurs in the proposal in which they introduce the notions of roots and radical in the arithmetic.*

## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La transición de la aritmética al álgebra es uno de los temas fundamentales que emergieron durante los 30 años de historia de investigación en álgebra de PME, desde 1977 hasta 2006 (Kieran, 2006).

La aritmética y el álgebra comparten muchos de los mismos signos y símbolos, como el signo igual, los signos de sumar y restar, incluso el uso de las letras. Estos signos y símbolos cambian de significado al pasar de la aritmética al álgebra. En el álgebra son interpretados diferentemente de la aritmética, lo que crea discontinuidades para los estudiantes que empiezan el estudio del álgebra (Kieran, 2006).

> Pero, los símbolos no hablan por sí mismos. Lo que uno realmente ve en ellos depende de los requisitos del problema para cuál son aplicados. No menos importante, depende de lo que uno es capaz de percibir y está preparado a reconocer. (Sfard y Linchevsky, 1994, Pág. 191)

Es decir, que ante un símbolo, los estudiantes van a mostrar percepciones diferentes, en función de la situación o contexto aritmético o algebraico en el que estén involucrados los signos, y en función de lo que ellos hayan aprendido sobre este símbolo.

En este trabajo, el objeto de estudio tiene que ver con lo que perciben los estudiantes ante el signo radical y las dificultades que ésta percepción les genera.

La indagación realizada parte de la constatación de que unas de las propuestas usuales de enseñanza (de España y de Colombia, por ejemplo) no presta suficiente atención a la diferencia de significado entre raíz y radical, ni tampoco a la dualidad de las expresiones del tipo $\sqrt{\boldsymbol{a}}$ .

Esta problemática se puede observar en las respuestas que sugieren las siguientes preguntas:

1. ¿Qué ves cuando miras $\sqrt{\boldsymbol{4}}$ , un número, dos números o una operación indicada?

2. ¿Qué ves cuando miras $\sqrt{\boldsymbol{a}}$ , $a \succ 0$ , raíz cuadrada de a o radical cuadrado de a?

**FUNDAMENTOS TEÓRICOS**

En relación con las percepciones asociadas al signo $\sqrt{\ }$ , se ha tomado en cuenta que las expresiones $\sqrt{\boldsymbol{4}}$ y $\sqrt{\boldsymbol{a}}$ reflejan una dualidad al ser percibidas la primera como una operación indicada (extraer o hallar la raíz cuadrada de 4) y la segunda como un resultado (una de las soluciones de la ecuación $x^2$-a=0 $\rightarrow \boldsymbol{x} = \pm\sqrt{\boldsymbol{a}}$ ).

Esto cambio de significado arranca en la aritmética, cuando se introduce el signo $\sqrt{\ }$ para indicar de modo abreviado una operación, la quinta operación elemental que consiste en, dado un número, hallar otro número que multiplicado por sí mismo de el primero. En aritmética este número se puede hallar y es único. Así, por ejemplo, la raíz cuadrada de 4 es 2, lo que se escribe $\sqrt{\boldsymbol{4}} = \boldsymbol{2}$ .

En álgebra las cosas cambian, ya que la raíz cuadrada de *a* no se puede calcular, por lo que para indicar su valor se introduce la expresión $\sqrt{\boldsymbol{a}}$ , la cual ya no indica una operación indicada sino un resultado.

Ahora bien, a diferencia de la aritmética, en álgebra están involucrados los números negativos, de modo que -2 también es respuesta a $x^2$=4 $\rightarrow x = \pm\sqrt{4} \rightarrow x = \pm 2$ .

El problema surge, cuando en la aritmética se escribe $\sqrt{\boldsymbol{4}} = \pm\boldsymbol{2}$ , ya que aquí el signo radical se está asociando a un conjunto de dos valores, lo cual es incorrecto y genera dificultades conceptuales y de operatoria como se verá más adelante.

En referencia a esta asociación del signo $\sqrt{\ }$ Martinón y otros (1990) hablan de un uso poco cuidadoso de los radicales, llamando la atención del profesorado acerca de la enseñanza de los mismos e insisten en la necesidad de diferenciar las nociones de raíz y radical, pensando que la mayor parte de las dificultades surgen por no distinguir entre estas dos nociones. Por eso ellos recuerdan la definición de raíz n-ésima ( $n \in N^*$ ) real de un número real:

"El número real b es raíz n-ésima del número real a si $b^n$=a." (Pág.27)

Además, definen el radical n-ésimo de un número real positivo de la siguiente manera:

"Se llama radical n-ésimo del número real $a \geq 0$ a su raíz real n-ésima no negativa y se escribe $\sqrt[n]{a}$ ." (Pág.29)

Es importante resaltar que el significado que se le atribuye al símbolo $\sqrt[n]{a}$, leído *radical* n-ésimo de *a*, es él de *una* de las raíces n-ésimas de *a*.

## EL PROBLEMA A INVESTIGAR

Antecedente de este trabajo es la investigación realizada por Pardo y Gómez (2007) y Gómez (2006), en la que se identificaron algunas de las dificultades e inconsistencias conceptuales y algorítmicas que han enfrentado a los matemáticos a lo largo de la historia.

Este antecedente sustentó un trabajo preliminar (Buhlea y Gómez, 2007) en el cual se identificaron y analizaron tres de esas dificultades.

Las tres dificultades han sido las siguientes:

1. La ambigüedad del signo de la raíz cuadrada y su paradoja (Euler, 1770).
2. La susceptibilidad de la raíz cuadrada de un número negativo a los signos + y - (Peacock, 1830).
3. La perplejidad de Vallejo (Puig, 2006) en relación con la operación de los binomios complejos.

El problema que se estudia aquí se reduce a la primera de las dificultades señaladas: *La ambigüedad del signo de la raíz cuadrada y su paradoja (Euler).*

1. Autores antiguos, de la segunda mitad del siglo XVIII y la primera mitad del siglo XIX, consideraban que:

> (…) la raíz cuadrada de cualquier número tiene siempre dos valores, uno positivo y el otro negativo; esto es que $\sqrt{4}$, por ejemplo, es igualmente 2 y -2, y en general, se puede adoptar tanto $-\sqrt{a}$ como $+\sqrt{a}$ para la raíz cuadrada de a. (Euler,1770, pág. 44)

En este texto el símbolo $\sqrt{\ }$ se utiliza de modo ambiguo. En $\sqrt{4}$ representa a la raíz cuadrada de 4, como un conjunto de dos valores y en $\sqrt{a}$ representa un solo número, el valor absoluto de la raíz cuadrada de a.

### El correo de Patricia

El punto de partida de la investigación es un correo de una profesora de matemáticas en ejercicio, estudiante de doctorado (El correo de Patricia), que ha permitido confirmar que Patricia tiene la dificultad mencionada y no sólo eso, sino que además Patricia tiene otra dificultad, generada como consecuencia de la primera.

Patricia envió a su profesor de Historia y Educación Matemática el correo que se reproduce a continuación:

Hola,

Soy Patricia alumna de "Historia y Educación Matemática". Le escribo para avisar de que el próximo miércoles (24-10) tengo sesión de Evaluación Cero en el instituto y no podré asistir a la clase. Esta semana tenía especial interés en asistir porque en clase me plantearon una cuestión sobre radicales que no supe responder. Aprovecho la ocasión para comentársela, a ver si me puede resolver la duda:

En el libro de texto viene definido el concepto de radicales equivalentes de la siguiente manera: "Dos radicales son equivalentes si tienen las mismas raíces" (y así lo tenía yo aprendido). Por otra parte, al simplificar un radical dividiendo el índice del radical y el exponente del radicando por el mismo número, se obtiene (en teoría) un radical equivalente al primero. Sin embargo, en un caso como raíz sexta de tres al cuadrado, se obtiene raíz cúbica de tres. Como el índice del primer radicando es par, existen dos soluciones (una la opuesta de la otra) pero en el segundo caso, el índice es impar y por tanto existe una única raíz. Por tanto, no se puede decir que esos dos radicales tengan estrictamente las mismas raíces. Entonces, ¿son equivalentes?

Un saludo,

Patricia

Patricia dice, siguiendo su libro de texto (3º Secundaria, Edit. Oxford University Press, 2007, pág.34):

(1) "Dos radicales son equivalentes si tienen las mismas raíces."

Además Patricia hace referencia a la siguiente propiedad de los radicales:

(2) $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}\ , k, n \in N, n \geq 2, a \geq 0$

El ejemplo que ella menciona en el correo le genera un conflicto cognitivo.

Aplicando la propiedad (2), Patricia obtiene "en teoría" la igualdad de dos radicales:

$$\sqrt[6]{3^2} = \sqrt[3]{3}$$

A continuación, cuestiona la afirmación (1), con el argumento de que la expresión de la izquierda, $\sqrt[6]{3^2}$, tiene dos raíces opuestas, "dos soluciones", porque tiene el índice par y la de la derecha, $\sqrt[3]{3}$, una sola raíz porque tiene el índice impar, lo que significa que ambas expresiones no tienen el mismo número de raíces y entonces no son equivalentes.

Una explicación plausible es que Patricia, en $\sqrt[6]{3^2}$, ve el conjunto de las raíces sextas de tres al cuadrado, es decir, ve la raíz como conjunto de valores, asociando el signo $\sqrt{\ }$ a la operación de hallar las raíces, y no ve en $\sqrt[6]{3^2}$ un resultado, no asocia el signo al radical, es decir a una de las raíces sextas, la de valor positivo.

Si así fuera, se confirmaría que en Patricia sigue vigente la dificultad de Euler, debida a la ambigüedad del signo y a la "imperceptibilidad" de la diferencia entre raíz y radical.

Otra dificultad derivada de esta "imperceptibilidad", tiene que ver con la regla para simplificar radicales, ya que induce al no reconocimiento de la restricción del dominio de aplicación de la regla (2). Esta regla es correcta en el caso $a > 0$, pero en el caso $a < 0$ tiene que reformularse con la ayuda del módulo:

$$\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}\ , k, n \in N, n \geq 2, a \geq 0$$

$$\sqrt[nk]{a^k} = \begin{cases} \sqrt[n]{|a|}, k, n \in N, k - par, n \geq 2, a < 0 \\ \sqrt[n]{a}, k, n \in N, k - impar, n \geq 2, n - impar, a < 0. \end{cases}$$

## HIPÓTESIS

El correo de Patricia, permite formular las siguientes hipótesis.

1) La "imperceptibilidad" de la diferencia entre raíz y radical está en el origen de la dificultad que manifiesta Patricia.
2) Esta "imperceptibilidad" no está suficientemente tratada en la propuesta tradicional de enseñanza del currículo español.
3) Una consecuencia de esta "imperceptibilidad" es que estudiantes y profesores no suelen reconocer el dominio restringido de aplicación de la regla 2 y que ésta tiene que reformularse cuando $a < 0$.

## METODOLOGÍA

Para contrastar las hipótesis se ha planteado como objetivo hacer un estudio comparativo entre dos propuestas curriculares diferentes. Una es la española, donde las nociones de raíz y radical se introducen dentro de la aritmética y la otra es la rumana, donde estas nociones se introducen dentro del álgebra.

La metodología es cualitativa de tipo interpretativo basada en una revisión de textos escolares y un análisis de tareas.

La revisión de textos escolares consiste en la comparación de textos escolares corrientes y representativos de cada una de las dos propuestas de enseñanza.

El análisis de tareas se ha realizado mediante un cuestionario sometido a Patricia (de España) y Iulian (de Rumania) y una entrevista a cada uno de ellos.

Patricia es un caso prototipito (español) que representa a un colectivo de profesores de matemáticas en ejercicio que refleja la misma problemática que ella, como hemos observado en variados pilotajes realizados.

Patricia es profesora de matemáticas (de la enseñanza secundaria pública española) en ejercicio, licenciada en Matemáticas y Ciencias Técnicas Estadísticas por la Universidad de Valencia y actualmente estudiante de doctorado. Tiene dos años de experiencia y ha impartido clases de matemáticas en 1º, 2º, 3º y 4º Opción A de la ESO.

El caso de Patricia se intenta contrastar con el caso de Iulian.

Iulian es profesor de matemáticas (de la enseñanza secundaria pública rumana) en ejercicio, licenciado en Matemáticas por la Universidad "Dunărea de Jos" de Galați, Rumania y tiene diez años de experiencia. Ha impartido clases en 7º clase (equivalente a 1º de la ESO), en 8º clase (equivalente a 2º de la ESO), en 9º clase (equivalente a 3º de la ESO), en 10º clase (equivalente a 4º de la ESO), en 11º clase (equivalente a 1º de Bachillerato), en 12º clase (equivalente a 2º de Bachillerato).

### La revisión de textos escolares

Los propósitos de la revisión de textos escolares han sido las siguientes:

1. Identificar rasgos característicos en la enseñanza de raíces y radicales en las dos propuestas de enseñanza, española y rumana, reflejadas en los textos escolares.
2. Identificar y analizar comentarios que favorecen las dificultades mencionadas y el planteamiento de Patricia.

### El cuestionario

Al diseñar el cuestionario, se ha querido hacer emerger la dificultad de Euler y su consecuencia en la regla para simplificar radicales, por medio de dos fichas de trabajo (Ficha1.1, Ficha 2.1), una para cada dificultad.

**Cuestionario**: ***Radicales***

**Fecha:**

**Nombre:**

| |
|---|
| En una clase de tercero de E. S. O., después de introducir el tema de los raíces y radicales, se pidió a los alumnos que calcularan la raíz cuadrada de cuatro.<br><br>Un alumno escribió $\sqrt{4} = \pm 2$ , justificando:<br>"Como el radicando es positivo y el índice de la raíz es par, entonces la solución es doble, positiva y negativa." |
| ¿Es correcto? ….. |

Ficha 1.1

**Cuestionario**: ***Radicales***

**Fecha:**

**Nombre:**

| |
|---|
| En una clase de primero de bachillerato, después de repasar el tema de los radicales, se pidió a los alumnos que simplificaran $\sqrt[6]{(-8)^2}$ .<br><br>Un alumno escribió: $\sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[2\cdot 3]{(-8)^2} = \sqrt[3]{(-8)} = -2$<br>y dijo:<br>"He aplicado la siguiente regla: $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$ |
| ¿Es correcto? |

Ficha 2.1

En las fichas de trabajo se presentan dos situaciones hipotéticas de clase que describen respuestas erróneas producidas por los alumnos ante tareas planteadas. Cada situación hipotética tiene la siguiente estructura:

- la respuesta hipotética de un alumno a una tarea;
- una cuestión que se plantea al profesor (con dos opciones de respuesta: "Sí" o "No").

## La entrevista

La entrevista tenía como objetivos:

- comprobar si en los casos de Patricia y Iulian se reproduce la primera dificultad identificada: *La ambigüedad del signo de la raíz y su paradoja* (Euler)
- comprobar si Patricia y Iulian perciben la restricción de la propiedad de los radicales,
$$\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a} \ , k, n \in \mathrm{N}, n \geq 2, a \geq 0$$
en el caso en cual k es un número par y $a < 0$.

Se diseñó la entrevista (en castellano y rumano) teniendo en cuenta las respuestas posibles producidas por Patricia y Iulian a cada ficha del cuestionario. Si la respuesta a una ficha era "No", entonces se le pedía al entrevistado justificar por qué (Ficha 1.2 y

Ficha 2.2) y si era "Sí", entonces se le ponían otras fichas, con el propósito de "aproximarlo" a un conflicto cognitivo (Ficha 1.2-N: Contexto de cálculo; Ficha 1.2-S: Contexto de cálculo con respuesta inducida; Ficha 2.3).

**Cuestionario**: ***Radicales***

**Fecha:**

**Nombre:**

Si

$$\sqrt{4} = \pm 2$$

entonces completa

$$\sqrt{4} + \sqrt{4} = (\pm 2) + (\pm 2) = ...$$

$$\sqrt{4} - \sqrt{4} = (\pm 2) - (\pm 2) = ...$$

Explica la respuesta.

……

Ficha 1.2-S: Contexto de cálculo con respuesta inducida

**Cuestionario**: ***Radicales***

**Fecha:**

**Nombre:**

Si

$$\sqrt{4} = \pm 2$$

entonces calcula el valor numérico de:

$$\sqrt{4} + \sqrt{4} \quad \text{y} \quad \sqrt{4} - \sqrt{4}.$$

Explica tu respuesta.

…….

Ficha 1.2-N: Contexto de cálculo

**Cuestionario**: ***Radicales***

**Fecha:**

**Nombre:**

Si consideras

$$\sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[2\cdot 3]{(-8)^2} = \sqrt[3]{(-8)} = -2$$

entonces completa:

$$\sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = ....$$

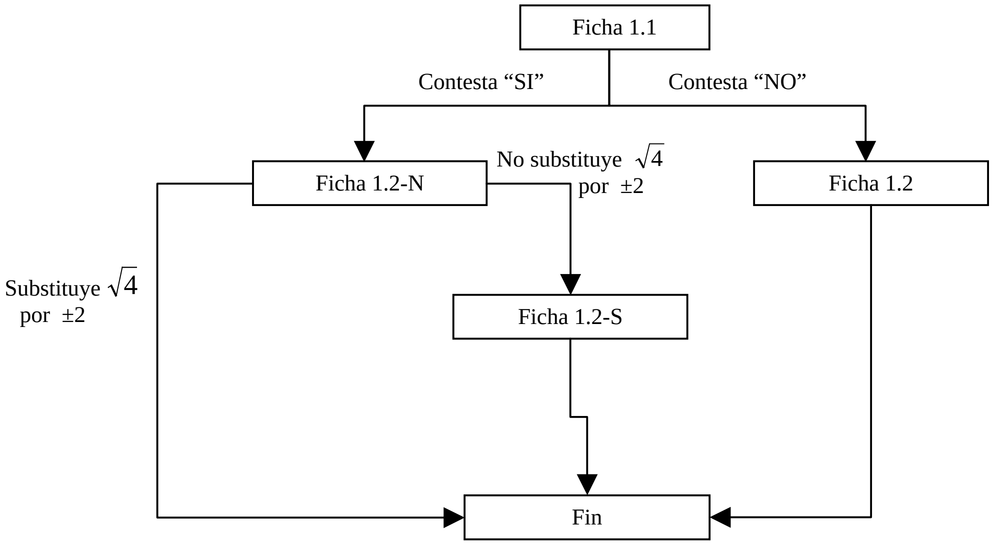
Explica la respuesta.

……

Ficha 2.3

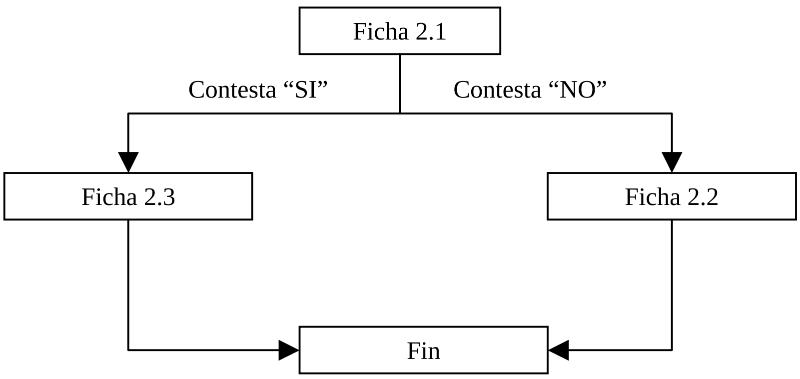
A continuación presentamos esquemático el guión de la entrevista:

- La primera parte se ha desarrollado empezando con la respuesta a la Ficha 1.1 del cuestionario:




1. El esquema del guión de la primera parte de la entrevista

- La segunda parte se ha desarrollado empezando con la respuesta a la Ficha 2.1 del cuestionario:




2. El esquema del guión de la segunda parte de la entrevista

## RESULTADOS DE LA REVISIÓN DE TEXTOS

Comparando la currícula oficial de matemáticas (de Secundaria y Bachillerato) de los dos países se observa que:

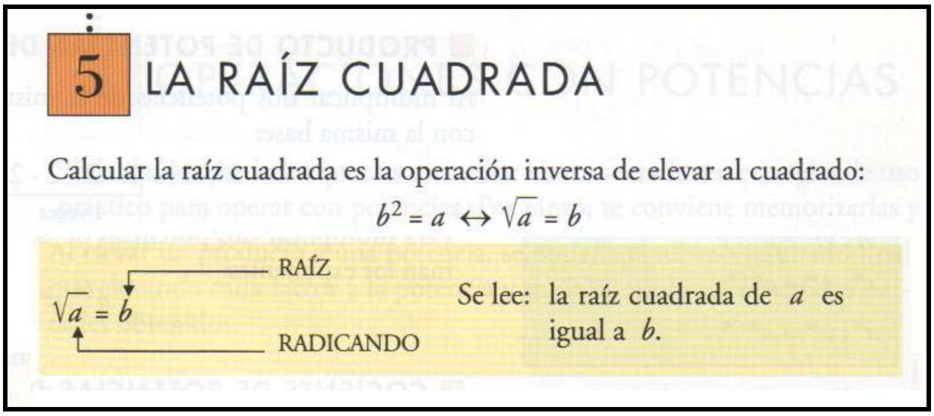
- Los temas sobre raíces y radicales se introducen en el bloque "Números" en la propuesta española y en el bloque "Álgebra" en la propuesta rumana.
- La noción de raíz cuadrada se introduce en el mismo nivel escolar en las dos propuestas de enseñanza (1º de la ESO y 7ª clase), que corresponde a niños de 13 años de edad.
- Es importante observar que la noción de radical y las reglas de cálculo elementales con radicales se introducen en la 7ª clase en la propuesta rumana (equivalente a 1º de la ESO), lo que no pasa en la propuesta española, en la cual

se introducen en 4º de la ESO, tres cursos más tarde que en su equivalente rumano.

- Otro aspecto relevante es que en la propuesta rumana se introduce la noción de valor absoluto de un número entero en la 6ª clase (equivalente a 6º de Primaria) y después el módulo de un número real en la 7ª clase (equivalente a 1º de la ESO), lo que no pasa en la propuesta española.

Revisando y comparando textos escolares, que tratan sobre raíces y radicales, de libros actuales de texto de los dos países se observa que:

- En los textos españoles:
    - el signo $\sqrt{\ }$ se asocia con la operación de hallar las raíces cuadradas, como operación inversa a la operación de elevar al cuadrado y recibe el nombre de "radical" o de "signo de la raíz".


5 LA RAÍZ CUADRADA

Calcular la raíz cuadrada es la operación inversa de elevar al cuadrado:

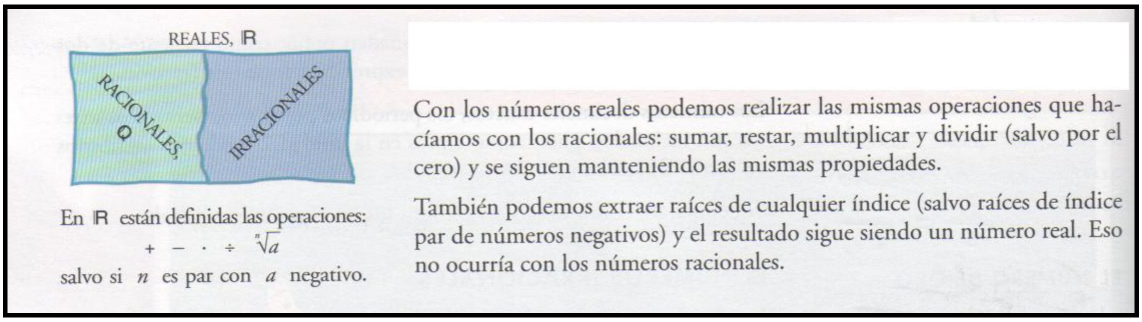
$$b^2 = a \leftrightarrow \sqrt{a} = b$$



Se lee: la raíz cuadrada de $a$ es igual a $b$.

1º Secundaria, Edit. ANAYA 2006, Pág. 52

    - la expresión $\sqrt[n]{a}$ se asocia también con la operación de extraer raíces de "cualquier índice" así como se puede ver en el siguiente extracto:




En ℝ están definidas las operaciones: $+ \quad - \quad \cdot \quad \div \quad \sqrt[n]{a}$ salvo si $n$ es par con $a$ negativo.

Con los números reales podemos realizar las mismas operaciones que hacíamos con los racionales: sumar, restar, multiplicar y dividir (salvo por el cero) y se siguen manteniendo las mismas propiedades.

También podemos extraer raíces de cualquier índice (salvo raíces de índice par de números negativos) y el resultado sigue siendo un número real. Eso no ocurría con los números racionales.

4º Secundaria, OPCIÓN A, Edit. ANAYA 2004, Pág. 48; 4º Secundaria, OPCIÓN B, Edit. ANAYA 2006, Pág. 29

    - las nociones de raíz n-ésima $(n \in N^*)$ real de un número real y de radical n-ésimo de un número real positivo $a$ ($\sqrt[n]{a}$) no se definen en el sentido de Martinón y otros (1990), así como se puede observar en los siguientes extractos:

Se llama **raíz *n*-ésima** de un número $a$, y se escribe $\sqrt[n]{a}$, a un número $b$ que cumple la siguiente condición:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{si} \quad b^n = a$$

$\sqrt[n]{a}$ se llama **radical**; $a$, **radicando**, y $n$, **índice** de la raíz.

4º Secundaria, OPCIÓN A, Edit. ANAYA 2004, Pág. 52; 4º Secundaria, OPCIÓN B, Edit. ANAYA 2006, Pág. 32

RADICAL DE ÍNDICE n

Índice → $\sqrt[n]{A} = b$ ← Raíz

↑

Radicando

$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$, n número natural.

En $\sqrt[n]{a}$, **n** se llama **índice**; $\sqrt{\ }$, **radical**, y **a**, **radicando**.

3º Secundaria, Edit. S. M., 2003, Pág.36

### 4.1. Raíz de índice *n* de un número

La raíz de índice $n$ de un número, $a$, es otro número, $b$, que elevado a $n$ da como resultado $a$.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$$

donde $n$ es un número natural mayor que 1.

La expresión $\sqrt[n]{a}$ recibe el nombre de **radical**, y sus elementos son:

**índice**

$\sqrt[n]{a}$ ← **radicando**

3º Secundaria, Edit. Oxford University Press, 2007, Pág. 32

- se habla sobre el número de raíces de un radical, lo que carece de sentido teniendo en cuenta a Martinón y otros (1990);

### 4.2. Número de raíces

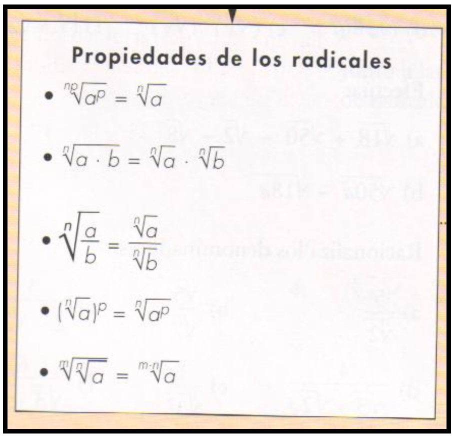
El número de raíces de un radical depende del índice y del radicando:

| | |
|---|---|
| **Índice par** | ■ Radicando negativo: no existe ninguna raíz real, ya que ningún número real elevado a un exponente par puede dar como resultado un número negativo.<br>■ Radicando positivo: existen dos raíces, una la opuesta de la otra.<br>■ Radicando igual a cero: existe una única raíz que es 0. |
| **Índice impar** | ■ Existe siempre una única raíz, independientemente de que el radicando sea positivo, negativo o cero. |

3º Secundaria, Edit. Oxford University Press, 2007, Pág.32

- no se toma en cuenta que: $\begin{cases} \sqrt{a^2} = |a|, \forall a \in R \\ \sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|, \forall a \in R \end{cases}$

- no se precisa el dominio de validez de las propiedades de los radicales que se presentan en los libros de texto;



**Propiedades de los radicales**

- $\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$
- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

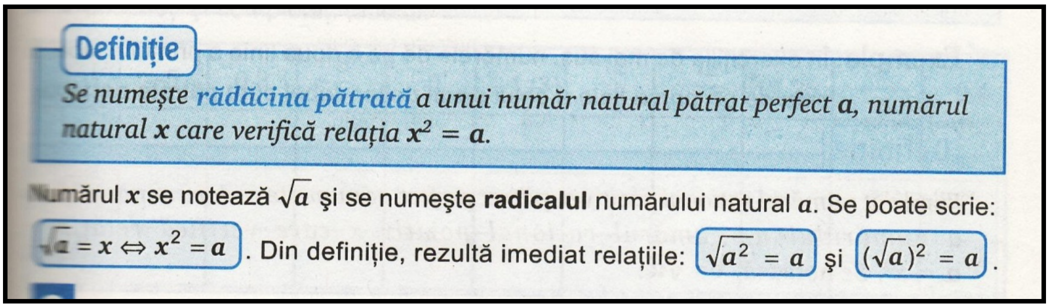
4º Secundaria, OPCIÓN B, Edit. ANAYA 2006, Pág. 36

**PROPIETATS DELS RADICALS**

| | |
|---|---|
| PRODUCTE | $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ |
| QUOCIENT | $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$ |
| POTÈNCIA D'UNA ARREL | $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ |
| ARREL D'UNA ALTRA ARREL | $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$ |

4º Secundaria, Edit. S. M., 2003, Pág.37

- En los textos rumanos:
    - La noción de radical se introduce con la de raíz cuadrada de un número natural cuadrado perfecto en la 7ª clase (equivalente a 1º de la ESO)



**Definiție**

*Se numește **rădăcina pătrată** a unui număr natural pătrat perfect **a**, numărul natural **x** care verifică relația $x^2 = a$.*

Numărul $x$ se notează $\sqrt{a}$ și se numește **radicalul** numărului natural $a$. Se poate scrie: $\boxed{\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^2 = a}$. Din definiție, rezultă imediat relațiile: $\boxed{\sqrt{a^2} = a}$ și $\boxed{(\sqrt{a})^2 = a}$.

7ª clase, Edit. Teora, 2006, Pág.53

- Se define la noción de radical en el sentido de Martinón y otros (1990).

## 4 Radicalul de ordinul 2 şi radicalul de ordinul 3. Proprietăţi

**Radicalul de ordinul 2**

Fie $a \geq 0$. Se poate arăta că există şi este unic $x \geq 0$ astfel încât $x^2 = a$. Privind acest număr ca fiind obţinut prin operaţia inversă ridicării la pătrat, acceptăm

**Definiţia 4.1** *Numărul pozitiv $x$, cu proprietatea $x^2 = a$, se numeşte radicalul de ordinul 2 al lui $a$ (rădăcina pătrată a lui $a$) şi se notează $\sqrt{a}$:*

$$\boxed{(\sqrt{a})^2 = a}, \quad a \geq 0.$$

1) $\sqrt{a} \geq 0$, pentru orice $a \geq 0$.
2) Nu se defineşte $\sqrt{a}$ pentru $a < 0$ întrucât $x^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Astfel, $\sqrt{a}$ are sens numai pentru $a \geq 0$.
3) Deşi $2^2 = 4$ şi $(-2)^2 = 4$, avem $\sqrt{4} = 2$. Cu alte cuvinte, a scrie $\sqrt{(-2)^2} = -2$ este o greşeală!

10ª Clase, Edit. Fair Parteners, 2005, Pág. 1

## 5 *Radicalul de ordinul $n \geq 2$. Proprietăţi

**I. Radicalul de ordin par dintr-un număr pozitiv**

Pornim de la observaţia că fiecare număr pozitiv $b$ satisface şirul de egalităţi:

$$b^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{2}{4}} = b^{\frac{3}{6}} = \cdots = b^{\frac{n}{2n}} = \cdots, \quad n \in \mathbf{N}^*,$$

deoarece un număr raţional se poate exprima prin mai multe fracţii ordinare. $\boxed{\text{Fie } a \geq 0 \text{ şi } p \in \mathbf{N}^*}$. Există şi este unic un număr real $x \geq 0$ astfel încât $x^{2p} = a$. Acest număr a fost notat cu $a^{\frac{1}{2p}}$. Conform observaţiei precedente, numărul $x = a^{\frac{1}{2p}}$ satisface şi condiţiile $x^{4p} = a^2$, $x^{6p} = a^3$ etc. Pentru a preciza că ne referim numai la condiţia $x^{2p} = a$, deci că $x = a^{\frac{1}{2p}}$ se obţine prin operaţia inversă ridicării la puterea $2p$, acceptăm

**Definiţia 5.1** *Unicul număr pozitiv $x$, care satisface condiţia $x^{2p} = a$, $a \geq 0$, se numeşte radical de ordin $2p$ al lui $a$ sau rădăcina de ordin par $2p$ a lui $a$ şi se notează cu $\sqrt[2p]{a}$.*

Deci, $\boxed{\sqrt[2p]{a} \geq 0}$, $\boxed{(\sqrt[2p]{a})^{2p} = a}$, $a \geq 0$.

**Exemple:**

1) $\sqrt[4]{16} = 2$; 2) $\sqrt[4]{625} = 5$; 3) $\sqrt[6]{729} = 3$; 4) $\sqrt[10]{1024} = 2$.

---

Radicalul $\sqrt[2]{a}$ se notează $\sqrt{a}$.

Pentru orice $a \geq 0$, $\sqrt[2p]{a} = a^{\frac{1}{2p}}$, $p \in \mathbf{N}$, $p \geq 1$.

Pentru orice $a \in \mathbf{R}$, $\sqrt[2p]{a^{2p}} = |a|$, $p \in \mathbf{N}$, $p \geq 1$.

10ª Clase, Edit. Fair Parteners, 2005, Pág. 22

- Se toma en cuenta que: $\begin{cases} \sqrt{a^2} = |a|, \forall a \in R \\ \sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|, \forall a \in R \end{cases}$

- Se precisa el dominio de validez de las propiedades de los radicales que se presentan en los libros de texto.

**Proprietăţi ale radicalilor de ordin 2:**

1) $\sqrt{a^2} = |a|, \quad \forall a \in \mathbf{R};$ 2) $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \quad a \geq 0, \ b \geq 0;$

3) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad a \geq 0, \ b > 0;$ 4) $\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n, \quad a \geq 0, \ n \in \mathbf{N}^*;$

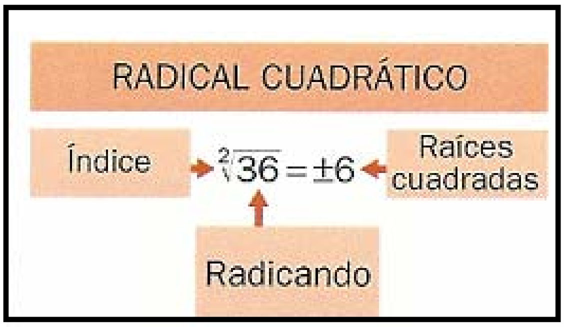
5) dacă $a \geq 0$ şi $b \geq 0$, atunci $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$ şi $a = b \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b};$

6) $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \quad \forall a, b \in \mathbf{R}, \ a > 0, \ b > 0.$[1]

10ª Clase, Edit. Fair Parteners, 2005, Pág. 13

En los textos escolares españoles hemos encontrado varios comentarios que favorecen la dificultad mencionada y el planteamiento de Patricia. A continuación vamos a presentar sólo tres.

- En el siguiente cuadro se presenta un ejemplo de “radical cuadrático”, $\sqrt{36}$, que se considera igual con las raíces cuadradas de 36, ±6.




3º Secundaria, Edit. S. M., 2003, pág. 36

La igualdad que aparece es entre un número, $\sqrt{36}$, y un conjunto de dos números, las raíces cuadradas de 36, ±6. Esta situación favorece la primera dificultad mencionada (La ambigüedad del signo de la raíz cuadrada y su paradoja) porque hace imperceptible la diferencia que hay entre la raíz y el radical de un número, utilizándose el radical cuadrático para designar las dos raíces cuadradas de un número, cuando, desde el punto de vista formal, el radical cuadrático de un número es la raíz positiva del número.

- En el siguiente cuadro se trata sobre radicales iguales o equivalentes y se da una regla para simplificar radicales.

**Radicales iguales o equivalentes. Comparación**

Los radicales $\sqrt{7} = \sqrt[2]{7^1}, \sqrt[4]{7^2}, \sqrt[6]{7^3}, \ldots$ tienen la misma raíz: 2,645... Estos radicales se dice que son **iguales** o **equivalentes**. Si observas estos radicales iguales, $\sqrt[2]{7^1} = \sqrt[4]{7^2} = \sqrt[6]{7^3}$, podrás darte cuenta de que para pasar del primero al segundo o al tercero se multiplican el índice y el exponente por un mismo número.

> Dos radicales son iguales o equivalentes si tienen las mismas raíces.
>
> Si se multiplica o divide el índice de un radical y el exponente del radicando por un mismo número natural distinto de 0, se obtiene otro radical equivalente.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$$

3º Secundaria, Edit. S. M., 2003, pág. 37

Lo que atrae la atención en el cuadro es que el autor llama *raíz* el valor numérico de un radical y habla de radicales que tienen las mismas raíces y no el mismo valor numérico. Al lector, esto le puede generar confusiones, como en el caso de Patricia.

Además en el cuadro aparece la afirmación que tenía aprendida Patricia (*Dos radicales son iguales o equivalentes si tienen las mismas raíces.)* y la regla para simplificar radicales que ella menciona en su correo. También aparece escrito $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$, sin ninguna mención de que sería una propiedad de los radicales y sin precisar la naturaleza de *a, k, m, n.*

- El siguiente cuadro que aparece en un libro de texto de 3º de Secundaria, del Editorial S. M., 2003, página 37, presenta la cantidad de raíces n-ésimas que puede tener un número real *a*.

**Número de raíces**

| $\sqrt[n]{a}$ | n par | n impar |
|---|---|---|
| $a > 0$ | 2 | 1 |
| $a = 0$ | 1 | 1 |
| $a < 0$ | 0 | 1 |

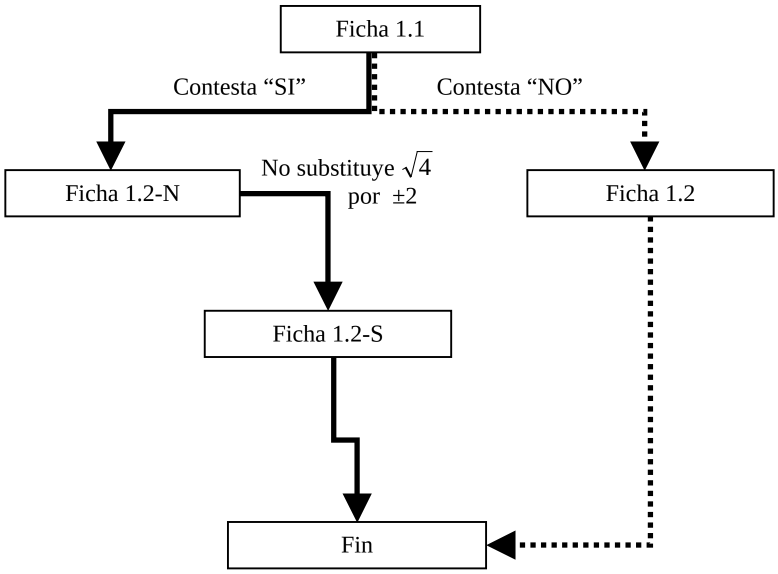
La cantidad de raíces del número real *a* se establece en función del índice del radical n-ésimo que aparece escrito y de su radicando. Esta situación puede inducir al lector la idea de que el radical n-ésimo de un número está vinculado con la cantidad de raíces reales del número. El cuadro no aclara que las raíces pueden expresarse mediante el uso de los radicales, ni indica la relación entre raíz y radical n-ésimo de un número real, así como lo hacen Martinón y otros (1990):

$$a \in \Re, n \begin{cases} par \begin{cases} a \geq 0 \Rightarrow \textit{las raíces reales n-ésimas de a son } \sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a} \\ a < 0 \Rightarrow \textit{no tiene raíz real n-ésima de a} \end{cases} \\ impar \begin{cases} a \geq 0 \Rightarrow \textit{la raíz real n-ésima de a es } \sqrt[n]{a} \\ a < 0 \Rightarrow \textit{la raíz real n-ésima de a es } -\sqrt[n]{a} \end{cases} \end{cases}$$

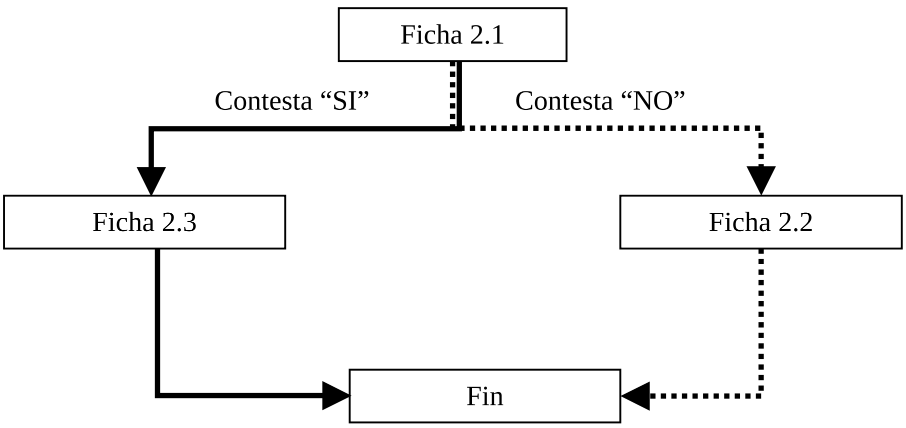
reiterando que *la expresión* $\sqrt[n]{a}$ *se lee "radical n-ésimo de a" y no "raíz n-ésima de a"* (pág. 29).

**RESULTADOS DE LA ENTREVISTA**

Las entrevistas de Patricia y Iulian se han desarrollado según los dos esquemas que se presentan a continuación. La línea continua representa la de Patricia y la línea de puntos la de Iulian.




3. El esquema del desarrollo de la primera parte de las entrevistas de Patricia y Iulian




4. El esquema del desarrollo de la segunda parte de las entrevistas de Patricia y Iulian

En los dos esquemas presentados se ve claramente que cada uno actuó de manera distinta.

Al analizar sus actuaciones se puede decir que en el caso de Patricia se reproduce la dificultad de Euler y como consecuencia no percibe la restricción de la regla para simplificar radicales en el caso $a < 0$, lo que no pasa en el caso de Iulian que viene de otra cultura matemática.

En este artículo nos vamos a centrar en los resultados de la primera parte de la entrevista.

Patricia considera que $\sqrt{4} = \pm 2$ y está de acuerdo con la justificación que aparece en la Ficha 1.1: „Como el radicando es positivo y el índice de la raíz es par, entonces la solución es doble, positiva y negativa." (Vea Ficha 1.1 de Patricia del Anexo), ella misma afirmando: *Es lo que realmente enseño.*

Además, la entrevista muestra que Patricia, al ver $\sqrt{4} = \pm 2$, piensa en una operación indicada que lleva a dos resultados.

> $E_1$. ¿Cómo lees tu esto? (Muestra con el dedo $\sqrt{4} = \pm 2$ )
>
> *P. Raíz de cuatro igual a más menos dos.*
>
> $E_2$. ¿Esto qué quiere decir? ¿Quiere decir que es un valor o dos valores?
>
> *P. Significa que tiene, que esta operación tiene dos soluciones, igual que cuando en una ecuación pueden aparecer dos soluciones. Así lo entiendo yo.*
>
> $E_2$. Dos valores.
>
> $E_1$. Pero, ¿de dónde te surgen a ti estas dos soluciones? Aquí. (Muestra con el dedo $\sqrt{4} = \pm 2$.)
>
> *P. A…de la…*
>
> $E_1$. ¿Qué te dice que hay dos soluciones?
>
> *P. La definición de raíz cuadrada como que es número que elevado al cuadrado me da el radicando.*
>
> (Se denota por P a Patricia y por $E_1$ y $E_2$ a cada uno de los dos entrevistadores).

Extracto[6] 1.1

Iulian, al contrario, no está de acuerdo con $\sqrt{4} = \pm 2$ (Vea Ficha 1.1 de Iulian del Anexo), argumentando que "Se defineşte radicalul de ordin par dintr-un număr (0,∞)"[7] (Vea la Ficha 1.2 de Iulian del Anexo). Además precisa que $\sqrt{4}$ representa al radical de orden dos de 4, es decir un número. De este modo Iulian demuestra que está fuera de la dificultad de Euler.

En la Ficha 1.2-N (Vea la Ficha 1.2-N de Patricia del Anexo), atrae la atención que al sumar $\sqrt{4} + \sqrt{4}$, Patricia usa una estrategia de operar radicales y al final substituye $\sqrt{4}$ por +2 y -2 encontrando dos resultados, 4 y -4. En la entrevista aclara que en clase, con los estudiantes, dejaría como resultado $2\sqrt{4}$ ya que en un contexto numérico, de cálculo con radicales, se limita a operar con los radicales, es decir a reducir las formas con radicales a unas formas más simples y no piensa en calcular los valores de las raíces que aparecen. Esto demuestra que en un contexto de cálculo, Patricia ve en $\sqrt{4}$ un objeto con cual tiene que operar.

---

[6] Las transcripciones completas de la entrevista de Patricia aparecen en Buhlea (2008).

[7] Traducido al castellano significa "Se define el radical de orden par de un número (0,∞)".

$E_1$. Después dices, cuando (en la Ficha 1.2-N) sumas $\left(\sqrt{4}+\sqrt{4}\right)$, te da $2\sqrt{4}$, entonces te da 4 y si fuera -2, -4.

P. *Sólo dos soluciones.*

$E_1$. Y, en el caso de la resta $\left(\sqrt{4}-\sqrt{4}\right)$, esto lo tienes claro, siempre será cero.

*P. Así es como operamos. Nosotros hacemos sumas de radicales, extraemos factor común y luego, cuando tenemos una suma de radicales, solamente nos olvidamos del resultado del valor numérico que puede tener el radical y operamos con el coeficiente del radical. Es lo que hacemos nosotros.*

(Se denota por P a Patricia y por $E_1$ a uno de los dos entrevistadores).

Extracto 1.2

*P. Esto es lo que sale en clase. Esto es lo que yo hago en clase cuando…*

$E_2$. Es decir, tu contestas que o es 4, o sea raíz de cuatro más raíz de cuatro vale 4 y -4.

*P. Pero también tengo que decir que yo me paro aquí.* (Muestra con el dedo $2\sqrt{4}$ en la ficha 1.2-N). *Cuando operamos con radicales, con sumas de radicales…*

$E_2$. Sí.

*P. Yo lo dejo expresado* $2\sqrt{4}$ *y no sigo y nunca me han preguntado: ¿Y esto cuánto da?*

$E_2$. Ya.

*P. Allí me paro*. (Muestra con el dedo $2\sqrt{4}$ ).

$E_2$. Sin embargo, aquí no te paras, dónde pone $\sqrt{4}$ .

*P. Allí no*.

$E_2$. Te pregunto ¿cuánto vale la raíz de 4? ±2. No te paras.

*P. No.*

$E_2$. Pero cuando te pide suma de radicales, te paras cuando llegas al final, a la expresión más sencilla, pero con el radical.

*P. Sí. Ya no sigo. Es verdad, nunca me lo había planteado, pero hago esto, es verdad.*

$E_2$. Claro esto, dónde pone dos raíz de cuatro y dónde pone raíz de cuatro, es curioso que cuando pone raíz de cuatro, sí que calculas, y cuando pone dos raíz de cuatro no calculas más. ¿No? ¿No es curioso?

*P. Es curioso, cierto… sí.*

$E_2$. En cualquier caso, si calcularas, aunque no lo has hecho nunca, tú crees que la respuesta es 4 y -4.

*P. En coherencia con lo anterior*.

(Se denota por P a Patricia y por $E_2$ a uno de los dos entrevistadores).

Extracto 1.3

Con la Ficha 1.2-S se consiguió llevar a Patricia a un conflicto cognitivo. Pero ella no reaccionó, volvió atrás y se quedó al final con la respuesta inicial, anclada firmemente en sus creencias primitivas, en lo que creía que le enseñaron.

Al final, vale enfatizar el hecho de que Patricia aclara que ella considera que $\sqrt{4}$ es +2 o -2, es decir o el uno o el otro. Ella no ve ±2 como un conjunto, ella ve dos soluciones que no pueden sustituir a $\sqrt{4}$ a la ves, en un calculo con radicales.

$E_2$. Te has quedado con la respuesta inicial. (La respuesta de la Ficha 1.2-N)

*P. Sí.*

$E_2$. Te has quedado con la idea de que hay que optar por uno de los dos valores de raíz de cuatro. Si en uno cojo dos, el positivo, en el otro raíz de cuatro le cojo el positivo.

*P. Esto es lo que hago yo.*

$E_2$. Y esta idea de coger los dos a la vez, el ± 2, no te convence. En la segunda ficha (la ficha 1.2-S) aparece un conjunto ± 2. ¿No? Y sumo ± 2 con ± 2. Lo has hecho bien. Lo has trabajado bien. Lo has trabajado como un conjunto. Como conjunto no te convence. Te convence más o el uno o el otro. Es decir raíz de cuatro es o más cuatro o menos cuatro. Pero tú has dicho que raíz de cuatro es ± 2 al principio. Tú, cuando has visto la expresión raíz de cuatro es igual a ± 2, has dicho que sí.

*P. Sí, sí. Claro.*

$E_2$. Y luego dices que o uno o el otro. Es que esto no acabo de entender. ¿Por qué?

*P. Esto sí, es verdad por la definición, que yo misma doy en clase, de raíz cuadrada.*

(Se denota por P a Patricia y por $E_2$ a uno de los dos entrevistadores).

Extracto 1.4

## CONCLUSIONES Y CONSECUENCIAS

Los resultados muestran que existen diferencias significativas entre las dos propuestas de enseñanza, tanto desde el punto de vista de la organización de los contenidos, como desde el punto de vista de los contenidos.

Se ha visto como la propuesta de enseñanza rumana sigue a Martinón y otros, introduciendo las dos nociones, de raíz y radical en el álgebra además, diferenciándolas, lo que no pasa en la propuesta española.

Otro aspecto importante que diferencia las dos propuestas de enseñanza es que, en la propuesta rumana, la noción de valor absoluto de un número entero se introduce a la vez con los números enteros y con los radicales en álgebra, lo que permite más tarde tomar en cuenta que $\sqrt{a^2} = |a|, \forall a \in R$, mientras que en la propuesta española no ocurre así y esto tiene consecuencias.

Por ejemplo, al resolver una ecuación del tipo $x^n = a$ en el conjunto de los números reales, no se toma en cuenta que en el caso en el cual *n* es par y *a* positivo, el doble signo "±" que aparece delante del radical n-ésimo de *a*, está generado por el módulo de *x* y no por el radical n-ésimo de *a*, que es sólo un número.

$$x^n = a \Rightarrow \sqrt[n]{x^n} = \sqrt[n]{a} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} n = 2k \\ a \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt[2k]{x^{2k}} = \sqrt[n]{a} \Rightarrow |x| = \sqrt[n]{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt[n]{a} \\ \begin{cases} n = 2k+1 \\ a \in \Re \end{cases} \Rightarrow \sqrt[2k+1]{x^{2k+1}} = \sqrt[n]{a} \Rightarrow x = \sqrt[n]{a} \end{cases}$$

Otra consecuencia que se ve en la entrevista de Patricia, es que ella no percibe la diferencia que hay entre raíz y radical de un número positivo puesto que no ve el radical como la raíz positiva, así como se define desde el punto de vista formal y por eso confunde $\sqrt{4}$ con el conjunto de soluciones de la ecuación $x^2 = 4$ considerando que

$\sqrt{4}$ “tiene dos soluciones (2 y -2)”, es decir, $\sqrt{4}$ es +2 ó -2 (“o el uno, o el otro”) y que hay contextos en los cuales $\sqrt{4}$ se sustituye por +2 y otros en los cuales $\sqrt{4}$ se sustituye por -2.

Otra consecuencia se manifiesta en la regla para simplificar radicales mencionada.

Los resultados muestran que el planteamiento de Patricia y sus respuestas a la entrevista tienen sustento en la propuesta de enseñanza española reflejada en los libros de texto.

La actuación de Iulian que viene de otra cultura matemática, muestra que está fuera de las dificultades analizadas y que está sostenida por la propuesta de enseñanza rumana, así como lo reflejan los libros de texto.

Las tres hipótesis de investigación se confirman a la vista de los datos obtenidos.

Nuestros resultados apuntan la necesidad de mejorar la enseñanza de raíces y radicales en los futuros currícula de matemáticas.

## REFERENCIAS


Buhlea, C. (2008). *Sobre raíces y radicales. Efectos de dos culturas de enseñanza (España-Rumania).* Memoria de tercer ciclo no publicada. Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Valencia, Valencia, España.

Buhlea, C. y Gómez, B. (2007). La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos. Un estudio comparativo España-Rumania. *Indivisa, Boletín de Estudios e Investigación.* Monografía IX, 19-21.

Euler, L. (1770). *Elements of Algebra.* Tranlated by Rev. John Hewlett, B. D. F.A.S. &c with an Introduction by C. Truesdell. Springer-Verlag New York. Reimpresión de1984 de la edición inglesa traducida del francés de 1840. London. Longman.

Gómez, B. (2006). Componentes de la investigación en pensamiento numérico y algebraico. En Isabel Vale, Teresa Pimentel, ana Barbosa, Lina Fonseca, Leonor Santos y Paula Canavarro (Eds.*). Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formaçao de professores*. Sociedade Portuguesa de Ciencias da Educaçao. Secçao de Educaçao Matemática. (Pp. 49-62). ISBN 972-8614-07-1.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp.11-49). Sense Publishers.

Martinón A., Pérez A., Sauret D. y Vásquez T. (1990). Nota sobre radicales y raíces. *Números*, 20, 25-35.

Pardo, T. y Gómez, B. (2007). La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos: un estudio en el nivel universitario. *Revista de investigación en Didáctica de la Matemática* (PNA), 2(1), 3-15. ISSN de la versión digital: 1887-3987. ISSN de la versión impresa: 1886-1350.

Peacock, G, (1830). *A Treatise on Algebra.* Cambrigde: J. & J. J. Deighton.

Puig, L. (2006). Vallejo Perplejo. En A. Maz, M. Rodríguez, y L. Romero, (Eds.), *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la Educación Matemática* (pp. 113-138). Córdoba: Servicio de Publicaciones, Universidad de Córdoba

Sfard, A. y Linchevsky L. (1994). The Gains and the Pitfalls of reification- The Case of Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191-228.

Vallejo, J.M. (1841). *Tratado Elemental de Matemáticas* escrito de orden de S.M. para uso de los caballeros seminaristas del seminario de nobles de Madrid y demás casas de educación del Reino. Cuarta edición corregida y considerablemente aumentada. Tomo I. Parte primera que contiene la Aritmética y Álgebra. Madrid: Imprenta Garrasayaza (1ª ed. 1813)

## Anexo

1

**Cuestionario**: ***Radicales***

**Fecha:** 28-11-07

**Nombre:** Patricia

En una clase de tercero de E. S. O., después de introducir el tema de los raíces y radicales, se pidió a los alumnos que calcularan la raíz cuadrada de cuatro.

Un alumno escribió $\sqrt{4} = \pm 2$, justificando:
"Como el radicando es positivo y el índice de la raíz es par, entonces la solución es doble, positiva y negativa."

¿Es correcto? Sí.

Ficha1.1 (de Patricia)

2-N

**Cuestionario**: ***Radicales***

**Fecha:** 28-11-07

**Nombre:** Patricia

Si

$$\sqrt{4} = \pm 2$$

entonces calcula el valor numérico de:

$$\sqrt{4} + \sqrt{4} \quad \text{y} \quad \sqrt{4} - \sqrt{4}.$$

$$\sqrt{4} + \sqrt{4} = 2\sqrt{4} = \begin{cases} 2 \cdot 2 = 4 \\ 2(-2) = -4 \end{cases}$$

Explica tu respuesta.

$$\sqrt{4} - \sqrt{4} = 0$$

$\sqrt{4} + \sqrt{4} = 2\sqrt{4}$ por la definición de producto

....... $\sqrt{4}$ tiene dos soluciones (2 y -2). Por tanto, $2\sqrt{4}$ también tiene dos soluciones $2 \cdot 2$ y $2 \cdot (-2)$

$\sqrt{4} - \sqrt{4} = 0$ porque al restar dos cantidades iguales obtenemos 0.

Ficha 1.2-N (de Patricia)

2-S

**Cuestionario**: ***Radicales***

**Fecha:** 28-11-07

**Nombre:** Patricia

Si

$$\sqrt{4} = \pm 2$$

entonces completa

$\sqrt{4} + \sqrt{4} = (\pm 2) + (\pm 2) = \ldots..$ Tiene 4 soluciones posibles

$+2+2=4$ $\quad -2+2=0$

$+2-2=0$ $\quad -2-2=-4$

$\sqrt{4} - \sqrt{4} = (\pm 2) - (\pm 2) = \ldots..$ Tiene 4 soluciones posibles

$+2-2=0$

$+2-(-2)=2+2=4$

$-2-2=-4$

$-2-(-2)=-2+2=0$

Explica la respuesta.

......

Ficha 1.2-S (de Patricia)

1.1

**Chestionar:** ***Radicali***

**Data:** 10. 01. 2008

**Nume:** Iulian

Intr-o clasa a IX-a, dupa ce s-a introdus tema radacinilor si radicalilor, s-a cerut elevilor sa calculeze radacina patrata a lui 4.

Un elev a scris $\sqrt{4} = \pm 2$, justificand:

"Cum numarul de sub radical este pozitiv si ordinul radacinii este par, atunci solutia este dubla, pozitiva si negativa."

Este corect? NU

Ficha1.1 (de Iulian)

1.2.

**Chestionar:** ***Radicali***

**Data:** 10. 01. 2008

**Nume:** Iulian

De ce nu?

Se def radicalul de ord par doar pe $(0, +\infty)$

Ficha 1.2 (de Iulian)