LAS IGUALDADES PRODUCIDAS EN EL PROCESO DE TRADUCCION ALGEBRAICO. ESTUDIO DE LAS IGUALDADES CORRECTAS.[1]

Fernando Cerdán Pérez
Departamento de Didáctica de la Matemática. Universitat de Valéncia.

Resumen. *En este trabajo se indican las tareas que debe realizar un usuario competente en el manejo del Método Cartesiano para poner un problema verbal en ecuaciones. Mediante el uso de una colección de 13 problemas de distintas subfamilias propuestos a 258 estudiantes de bachillerato, 15-18 años, se indaga la manera en que los estudiantes usan el Método cartesiano cuando producen igualdades correctas. Se concluye que los estudiantes producen una diversidad de igualdades correctas en las que manifiestan algunas preferencias y tendencias, encontrándose un invariante de conducta: todas las expresiones algebraicas que contienen las igualdades correctas provienen de una lectura algebraica del problema.*

Abstract. *In this work it are suggested the tasks that a competent user in the handling of the Method Cartesiano to put a verbal problem in equations must realize. By means of the use of a collection of 13 problems of distinct subfamilies once 258 students of pre-university studies were proposed, 15-18 years, the manner that students use the Cartesian Method when they produce correct equalities in is investigated. It is been understood that students produce a diversity of correct equalities that they manifest some likes and dislikes and tendencies in, finding an invariante of conduct: All algebraic expressions that contain the correct equalities come from an algebraic reading of the problem*

Introducción

El proceso que partiendo del enunciado de un problema termina produciendo igualdades entre expresiones algebraicas lo denominamos proceso de traducción algebraico. El proceso de traducción puede suponerse guiado por el Método Cartesiano, MC, el método que por excelencia nos indica cómo proceder para reducir la solución de cualquier problema a la solución de una ecuación o sistema de ecuaciones. Uno de los propósitos de la Educación Matemática en la enseñanza secundaria es que los estudiantes sean usuarios competentes del MC. Este propósito hace imprescindible un estudio minucioso de las tareas que presupone el uso competente del MC y un análisis de la manera en que los estudiantes llevan a cabo el proceso de traducción y el resultado de mismo. Aquí se pretende presentar el resultado de parte de ese trabajo en el caso en el que el proceso de traducción haya concluido produciendo igualdades correctas, esto con la finalidad de que las actuaciones de los estudiantes puedan ser tomadas en cuenta en la elaboración del modelo de enseñanza.

[1] Estudio financiado en parte por M.E.C.D.G. de I.S.G. de Proyectos de Investigación. Proyecto de investigación: SEJ2005-06697/EDUC. “Modelos de Enseñanza para el desarrollo de Competencias de Modelización y Resolución de Problemas Aritmético-Algebraicos”

Propósito

La intención concreta de este trabajo es tomar en consideración los segmentos de signos "expresión algebraica = expresión algebraica", "expresión algebraica = número", dados por los estudiantes como planteamiento del problema e indagar la manera que los estudiantes usan el MC cuando producen igualdades correctas.

Marco teórico

Este trabajo comparte el modelo de investigación que propone la teoría de los LTM (Filloy 2007) y usa el marco teórico elaborado por Cerdán (2005, 2008) para el estudio de las actuaciones de los estudiantes cuando resuelven problemas de la Familia de Problemas Aritmético-Algebraicos. Tres de los elementos esenciales de este marco son: la representación del problema mediante una lectura analítica expresada por un grafo, la consideración de un espacio del problema especifico donde se da la búsqueda de solución al problema y las nociones de grafo teórico y diccionario teórico de cantidades que contienen todas las cantidades y relaciones que cualquier resolutor puede usar en cualquier solución del problema.

Del método Cartesiano

Lo que llamamos Método Cartesiano para referir la resolución de cualquier de problema a la resolución de ecuaciones ya figura en la Geometría de Descartes (Descartes 1954) y fue desgranado por éste en sus inacabadas *Reglas para la dirección del espíritu* (Descartes, 1984) y podemos verlo en acción en las lecciones que Newton imparte en Cambridge, (Newton, 1972). Polya lo reformula y reduce a 4 reglas, (Polya,1967) y desde el pinto de vista del resolutor ideal, Puig (2003) nos indica los pasos sucesivos que éste sigue.

Mirando el MC como un indicador de las tareas que debe realizar un estudiante competente en la traducción a ecuaciones de problemas enunciados verbalmente, podemos decir que el estudiante:

A) Debe realizar la traducción a partir de una lectura del problema que reduzca éste a una lista de cantidades conocidas, desconocidas y relaciones entre ellas. Lectura que se puede representar por un grafo y a la que llamamos lectura analítica.

B) En la traducción el estudiante tiene que:

1) decidir qué cantidades desconocidas va a designar por letras.
2) cambiar el status de las cantidades designadas por letras, de desconocidas a conocidas, esto es, considerarlas como datos.
3) decidir qué cantidades va a igualar en cada ecuación.
4) Si la cantidad que va a igualar es una cantidad conocida debe:
   a) decidir qué cantidades desconocidas debe determinar, para determinarla. Esto es, decidir cuáles van a ser sus incógnitas auxiliares,
   b) precisar para cada incógnita auxiliar:
      - qué cantidades son necesarias para determinarla,
      - si éstas cantidades son datos u otras incógnitas auxiliares,

- la relaciones entre esas cantidades que permite determinarla,
- la expresión de esas relaciones mediante operaciones aritméticas,

c) diseñar un entrelazado de determinación de incógnitas auxiliares que permita determinarlas siempre a partir de datos o cantidades intermedias, esto es, de datos o de cantidades determinadas a partir de ellos,

d) proceder a expresar la determinación de las cantidades desconocidas por medio de una expresión algebraica según el diseño esbozado en c),

e) por último, escribir el signo igual entre la expresión algebraica producida y dicha cantidad conocida.

5) Si la cantidad que va a igualar es desconocida, realizar a) b) c) d) dos veces, cuidando que el conjunto de incógnitas auxiliares utilizado sea diferente cada vez. Por último, escribir el signo igual entre las dos expresiones algebraicas producidas.

6) Proceder a obtener tantas ecuaciones como letras haya usado en 1).

Deduciéndose de 1) y 3) que el MC permite elegir, al menos, de entre las cantidades desconocidas, cuales designar por medio de letras y de entre las cantidades, qué cantidades igualar. Esto permite afirmar que dada una lectura analítica del problema hay un conjunto de ecuaciones que pueden considerarse solución del problema (Cerdán 2008)

Material y Método

Los problemas.- Se consideraron 13 problemas de lectura analítica algebraica de 6 subfamilias que constan junto con sus grafos en los Anexo 1 y 2.

Los estudiantes.- 258 estudiantes de BUP, 91 de 1º, 72 de 2º y 75 de 3º, que cursaban sus estudios en tres institutos de la red publica de enseñanza.

Las igualdades analizadas fueron las que los estudiantes proporcionaron como planteamiento de los problemas.

Como quiera que las igualdades producidas por los estudiantes eran en muchas ocasiones idénticas. Se acordó llamar producción a este conjunto de igualdades idénticas y se determinó su frecuencia para cada problema y curso.

Las producciones de dividieron en dos grupos correctas e incorrectas, según condujesen o no al resultado del problema. Y se obtuvo un listado secuencial de cada grupo dando preferencia en primer lugar al número de cursos en los que se había encontrado la producción, ver anexo 3.

Para el estudio de las producciones se elaboró un protocolo, ver anexo 4, que debía cumplimentarse para cada problema. El protocolo incluye la construcción del grafo de la resolución de cada producción que se construye como se indica en el anexo 5. En tal grafo se pueden observar las cantidades designadas por letras, las referidas por expresiones algebraicas y las cantidades que se igualan, ver anexo 6.

Resultados

1.-Para los 13 problemas y los 258 estudiantes se encontró que:

igualdades producidas/ estudiantes = 49, 8 %
igualdades correctas/estudiantes = 16, 2 %
igualdades correctas/ igualdades producidas = 32, 1 %.

Esto viene a decir que propuesto un problema a un estudiante en uno de cada dos casos el proceso de traducción culmina en la producción de una igualdad y cuando esto ocurre únicamente en uno de cada tres casos las igualdades producidas son correctas.

2.- Los porcentajes de igualdades e igualdades correctas producidas para cada problema y curso vienen dados en la fig. 1.

3.- Para todos los problemas se encontraron producciones correctas diferentes, con la excepción del problema DESCOMPONER EN 4 PARTES, ver tabla 1. En más de la mitad de los problemas el número de producciones correctas diferentes fue igual o superior a cinco.

4.- Para los problemas, en general, en el curso 3º se encontró un mayor número de producciones correctas diferentes que en los cursos 1º y 2º.

5.- Dado un problema, ninguna de las producciones correctas diferentes puede considerarse como representativa de la solución del problema, ya que ninguna tuvo una frecuencia superior al 50%. Deben de excluirse de esta afirmación los problemas de la subfamilia ABACO. Ver tabla 2

6.- Para un problema, no parece posible asociar una determinada producción con un curso determinado. Ahora bien, para la mayoría de los problemas hay determinadas producciones que sólo es posible encontrarlas en el curso 3º.

7.- En los problemas estudiados se encontraron producciones correctas que eran ecuaciones diferentes -no equivalentes- con la excepción de MITAD Y TERCERA PARTE, DESCOMPONER EN 4 PARTES y CAVAR. Ver tabla 3.

8.- Para un problema, siempre hay una ecuación o conjunto de ecuaciones equivalentes que acapara más del 50% de las igualdades correctas, ver tabla 3, lo que indica que existe una cierta preferencia por la elección de las cantidades que deben ser designadas con una letra.

9.- Para un problema, las producciones correctas no contienen siempre un número de letras igual al número de cantidades por las que se pregunta en el problema.

10.- Para la mayoría de los problemas, las ecuaciones encontradas como solución del problema contienen aproximadamente en la mitad de los casos más letras del mínimo requerido para ello. Además, cuando se usan más letras del mínimo requerido, la incógnita o una de las incógnitas del problema suelen ser designadas con una letra.

11.-*Las expresiones algebraicas que contienen las igualdades correctas provienen de una única lectura algebraica del problema. Esto ocurre para la inmensa mayoría de los problemas estudiados. La lectura algebraica considerada es precisamente la postulada por el investigador*.

12.-Para cada problema, existe una tendencia a igualar una determinada cantidad.

13.- Del examen de las expresiones algebraicas que figuran en los miembros izquierdo y derecho de la igualdad, se podría conjeturar que: en los problemas estudiados pueden distinguirse dos modos de construir la igualdad, modo A y modo B.

Modo A.- Donde las expresiones algebraicas que se igualan representan a tres cantidades relacionadas, y una de ellas se dice igual en función de la relación aritmética existente entre ellas.

Modo B.- Donde las expresiones que se igualan representan cuatro cantidades de dos relaciones ternarias que comparten una cantidad. La igualdad refiere la cantidad compartida en cada uno de sus miembros según su pertenencia a una u otra relación.

En las subfamilias MOVILES y OTROS se observa una tendencia a construir igualdades según el modo B y del modo A en el resto de subfamilias

Conclusiones

Los estudiantes en su conjunto no pueden ser juzgados competentes en la traducción de un problema a ecuaciones ya que la razón igualdades correctas/estudiantes fue 0,162. No obstante cuando los estudiantes hacen un uso competente del Método Cartesiano, producen igualdades correctas, lo hacen de una manera flexible produciendo una diversidad de igualdades para un mismo problema, igualdades que muestran la preferencia de los estudiantes por elegir las cantidades desconocidas que van a ser designadas por letras, entre las cuales se encuentra la incógnita del problema, tendiendo además a usar más letras del mínimo necesario para plantear la ecuación. En cuanto a la manera de construir la igualdad se han identificado dos modos que pueden entenderse como la expresión de una cantidad en función de su relación aritmética con otras o la expresión de una cantidad en dos sentidos diferentes. El único invariante encontrado en las igualdades correctas: todas las expresiones algebraicas que contienen provienen de una misma lectura algebraica, podría indicar que, en este caso, los estudiantes comparten la percepción de las cantidades y relaciones entre las cantidades del problema planteado que deben ponerse en juego para plantear la ecuación.

Referencias

Cerdán, F. (2005) Carácter isomorfía y complejidad de los problemas de la Familia de problemas aritmético-algebraicos. En Gomez B., Moreno M., Bolea P., Flores, P. y Camacho M. *Comunicaciones en los grupos de investigación en el IX Simposio de la SEIEM.* Córdoba. ISBN 84-8102-413-p

Cerdán, F. (2008) Estudios sobre la Familia de Problemas Aritmético-algebraicos. Tesis Doctoral. Universitat de València.

Descartes, R. (1954). *The geometry of René Descartes*. D.E. Smith & M.L.Latham (Ed.). New York. Dover.

Descartes, R. (1984). *Reglas para la dirección del espíritu* Traducción de J. M. Navarro. Alianza . Madrid

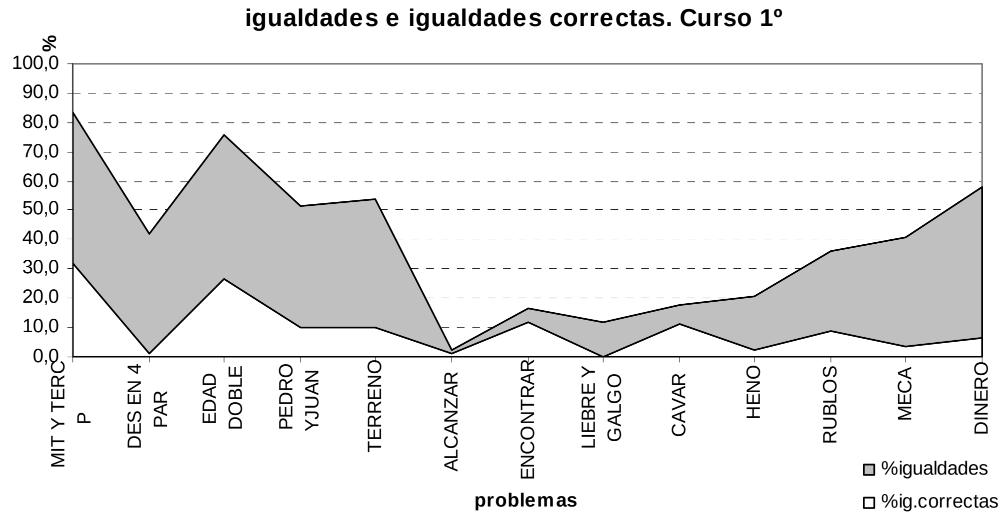
Filloy, E., Rojano, T., Puig, L. (2007). *Educational Algebra. A Theoretical an Empirical Approach*.New york: Springer.

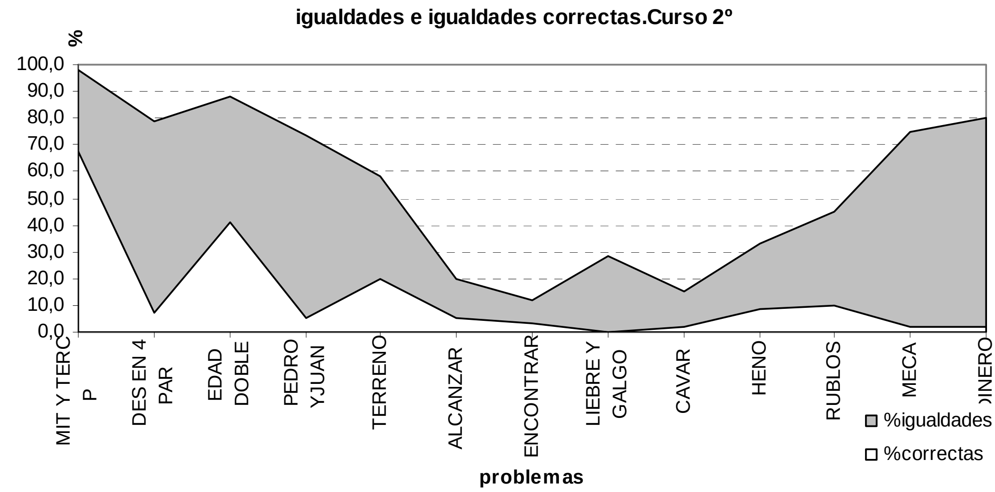
Newton, I. (1972) *The Mathematical Papers of Isaac Newton* . Volume V. Whiteside D.T. Editor. Cambridge University Press.

Polya, G. (1966). *Mathematical Discovery. 2 vols*. New York: John Wiley and Sons.

Puig, L. (2003). Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa. Castro, E.; Flores, P.; Ortega, T.; Rico, L. & Vallecillos, A. *(eds.) Investigación en Educación Matemática. Actas del VII Simposio de la SEIEM*, pp. 97-108. Universidad de Granada.Puig, L. (2003).

***figuras y tablas**





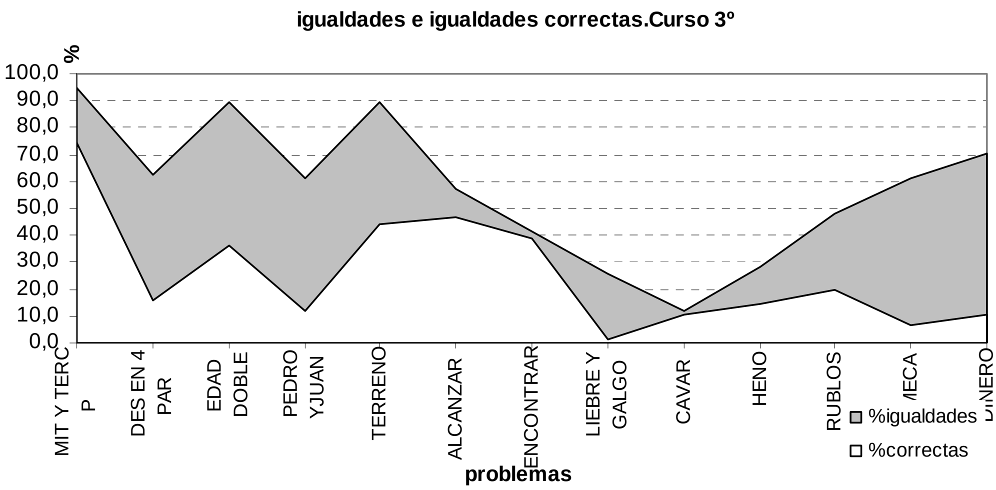


fig. 1. – Para cada problema, porcentaje de igualdades producidas y porcentaje de igualdades correctas. Cursos 1º,2º,3º

problema	**1º**	**2º**	**3º**	**totalidad estudiantes**
MIT Y TERC P	1	2	3	**3**
DES EN 4 PAR	1	1	1	**1**
EDAD DOBLE	3	6	4	**6**
PEDRO YJUAN	4	2	4	**6**
TERRENO	2	3	3	**3**
ALCANZAR	1	2	3	**4**
ENCONTRAR	1	2	5	**5**
LIEBRE Y GAL	0	0	0	**0**
CAVAR	4	1	1	**4**
HENO	2	5	5	**9**
RUBLOS	3	5	4	**8**
MECA	2	1	3	**5**
DINERO	4	2	4	**4**

Tabla 1.- Número de producciones diferentes para cada problema. Estudiantes de cada curso y totalidad de estudiantes.

problemas	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9
MIT Y TER P	**97**	2,5	0,5						
DES EN 4 PA	**100**								
EDAD DOBLE	42	19	5	32	9	9			
PEDRO YJUA	39	13	26	4	13	5			
TERRENO	24	13	64						
ALCANZAR	*73*	15	10	2					
ENCONTRAR	35	46	7	2	11				
CAVAR	*75*	13	6	6					
HENO	14	19	14	14	5	5	14	5	5
RUBLOS	16	16	38	3	9	3	9	6	
MECA	30	20	10	30	10				
DINERO	40	20	13	17					

Tabla 2.- Porcentaje del total de igualdades correctas de cada una de las producciones encontradas en cada problema.

problema	nº ecua.dif.	%	%	%	%
MIT Y TERC P	1	**100** (1)			
DES EN 4 PAR	1	**100** (5)			
EDAD DOBLE	2	44 (1)	**56** (2)		
PEDRO YJUA	2	24 (1)	**76** (2)		
TERRENO	3	24 (1)	13 (2)	**63** (2)	
ALCANZAR	3	**76** (1)	15 (1)	9 (2)	
ENCONTRAR	4	**80** (1)	2 (1)	11 (1)	7 (2)
CAVAR	1	**100** (1)			
HENO	4	29 (1)	29 (1)	19 (1)	24 (2)
RUBLOS	3	25 (1)	**53** (1)	9 (2)	13 (2)
MECA	3	10 (2)	30 (2)	**60** (3)	
DINERO	3	13 (2)	20 (2)	**67** (3)	

Tabla 3- Porcentaje del total de igualdades correctas en cada problema que corresponde a cada una de las ecuaciones diferentes. Entre paréntesis, número de letras utilizado.

Anexo 1.- Enunciados de los problemas.

MITAD Y TERCERA PARTE. Estoy pensando en un número tal que la suma de su mitad y su tercera parte es 7 unidades mayor que su cuarta parte. ¿Cuál es dicho número?

DESCOMPONER EN 4 PARTES. Descomponer un número en cuatro partes de modo que si se resta 4 de la primera, se suma 4 a la segunda, la tercera se multiplica por 4, y la cuarta se divide por 4, se obtiene el mismo número en todos los casos.

EDAD DOBLE. La edad de una persona es doble de la de otra. Hace siete años la suma de las edades de las dos personas era igual a la edad actual de la primera. ¿Cuál es la edad de cada una?

PEDRO Y JUAN. Pedro dice a Juan: Tengo dos veces la edad que tenía cuando tenía la edad que tienes tú. Cuando tú tengas la edad que yo tengo ahora, entre los dos tendremos 63 años. ¿Cuáles son nuestras edades actuales?.

TERRENO. El ancho de un terreno rectangular es 2/3 de su largo. Si ambas dimensiones se aumentan en 2 m, el área aumenta en 64 m^2. ¿Cuáles son las dimensiones de este terreno?

ALCANZAR. Un automóvil parte de un punto A con velocidad uniforme de 40 km/h hacia otro punto B. Dos horas después sale de A hacia B otro automóvil con velocidad uniforme de 60 km/h. Dígase a qué distancia de A se encuentran.

ENCONTRAR.. Un tren parte a las 16 h de Madrid con destino a Valencia con una velocidad de 120 km/h. A la misma hora sale de Valencia otro tren con destino Madrid y a una velocidad de 140 km/h. Dígase a qué distancia de Madrid se encuentran y a qué hora, si la distancia Madrid-Valencia es de 430 km.

LIEBRE Y GALGO. Una liebre era perseguida por un galgo al que llevaba 50 saltos de ventaja. La liebre daba 4 saltos mientras que el galgo daba 3, pero 2 saltos del galgo miden tanto como 3 saltos de liebre. ¿Cuántos saltos deberá dar el galgo para alcanzar a la liebre?

CAVAR. La superficie de un campo es de 6 ha. Juan puede cavarlo en 2 días. Antonio lo hace en 3 días. Si trabajan los dos juntos en el campo, ¿cuánto tiempo tardarán en cavarlo?

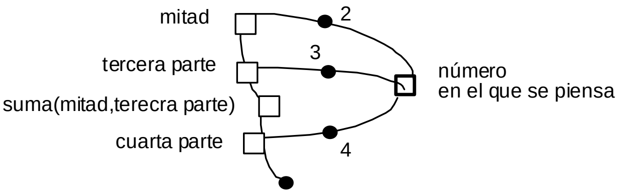
RUBLOS. Una escuela rusa compra libros para la biblioteca. Si los paga con billetes de 3 rublos, la escuela tiene que dar 8 billetes más que si los paga con billetes de 5 rublos. ¿Cuánto cuestan los libros?

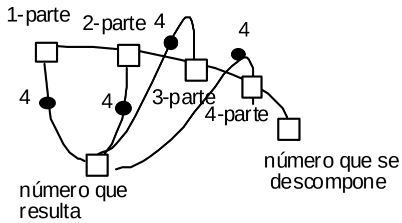
HENO Unos granjeros almacenaron heno para 40 días. Sin embargo el heno era de mejor calidad de la que pensaban y ahorraron 100 kg por día. Así tuvieron heno para 60 días. ¿Cuánto heno almacenaron?

MECANOGRAFA. Una mecanógrafa piensa que si escribe al día 2 páginas más de lo establecido normalmente, acabará el trabajo 3 días antes de lo previsto, mientras que si escribe 4 páginas más al día, acabará 5 días antes de lo previsto. ¿Cuántas paginas tiene que escribir y en cuánto tiempo?

DINERO. Una cierta suma de dinero se repartió a partes iguales entre cierto número de niños. Si hubiera habido dos niños más, cada uno hubiera recibido 100 pts menos; si hubiera habido dos niños menos, cada uno hubiera recibido 200 pts más. ¿Cuántos niños había y cuánto recibió cada uno?

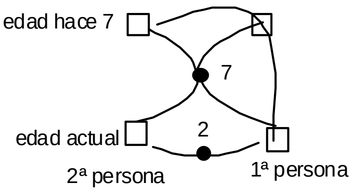
Anexo 2.- Grafos de los problemas.

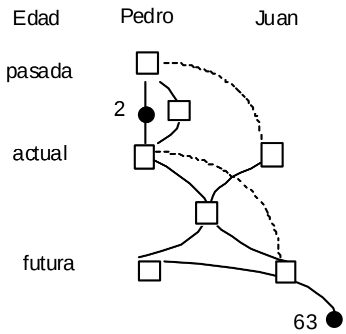




MITAD Y TERCERA PARTE

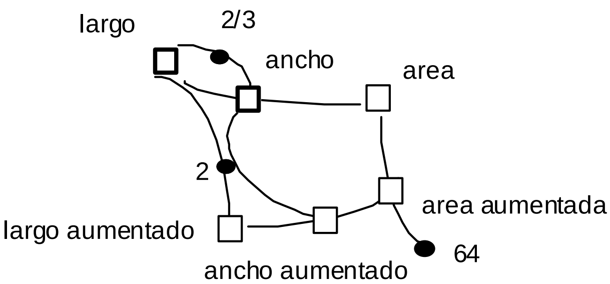
DESCOMPONER EN 4 PARTES

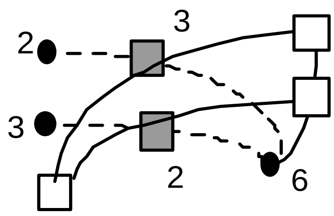




EDAD DOBLE

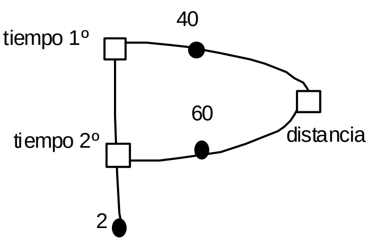
PEDRO Y JUAN

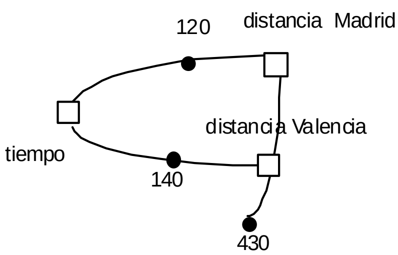




TERRENO

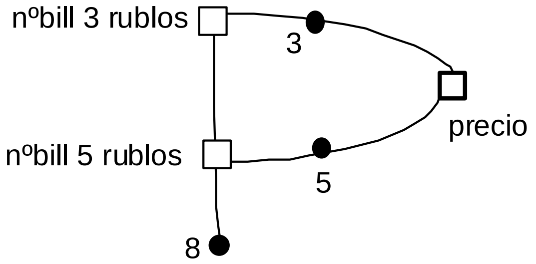
CAVAR



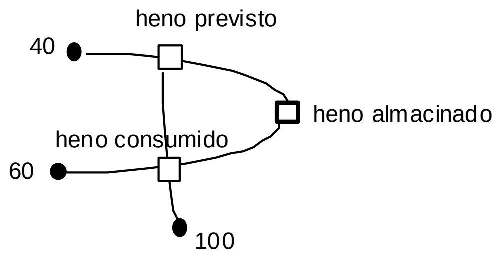


ALCANZAR

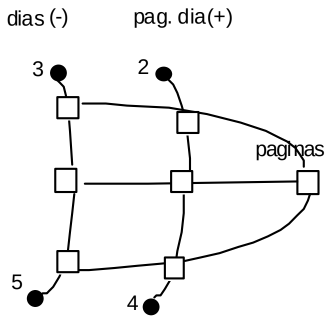
ENCONTRAR



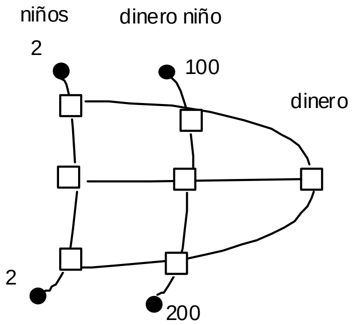
RUBLOS



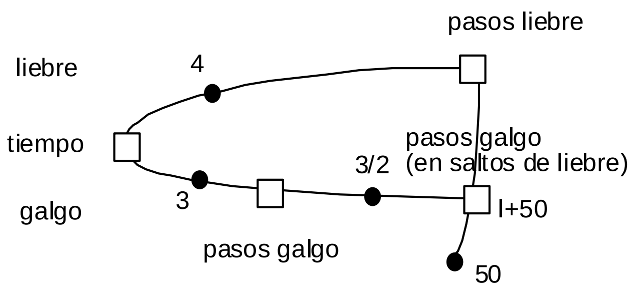
HENO



MECANOGRAFA



DINERO



LIEBRE Y GALGO

Anexo 3.- Ejemplos de listado de producciones correctas

Problema: MITAD Y TERCERA PARTE

Producciones correctas	**1º**	**2º**	**3º**
P-1 $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=\frac{x}{4}+7$	29	59	54
P-2 $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-7=\frac{x}{4}$		3	1
P-3 $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-\frac{x}{4}=7$			1

Problema HENO

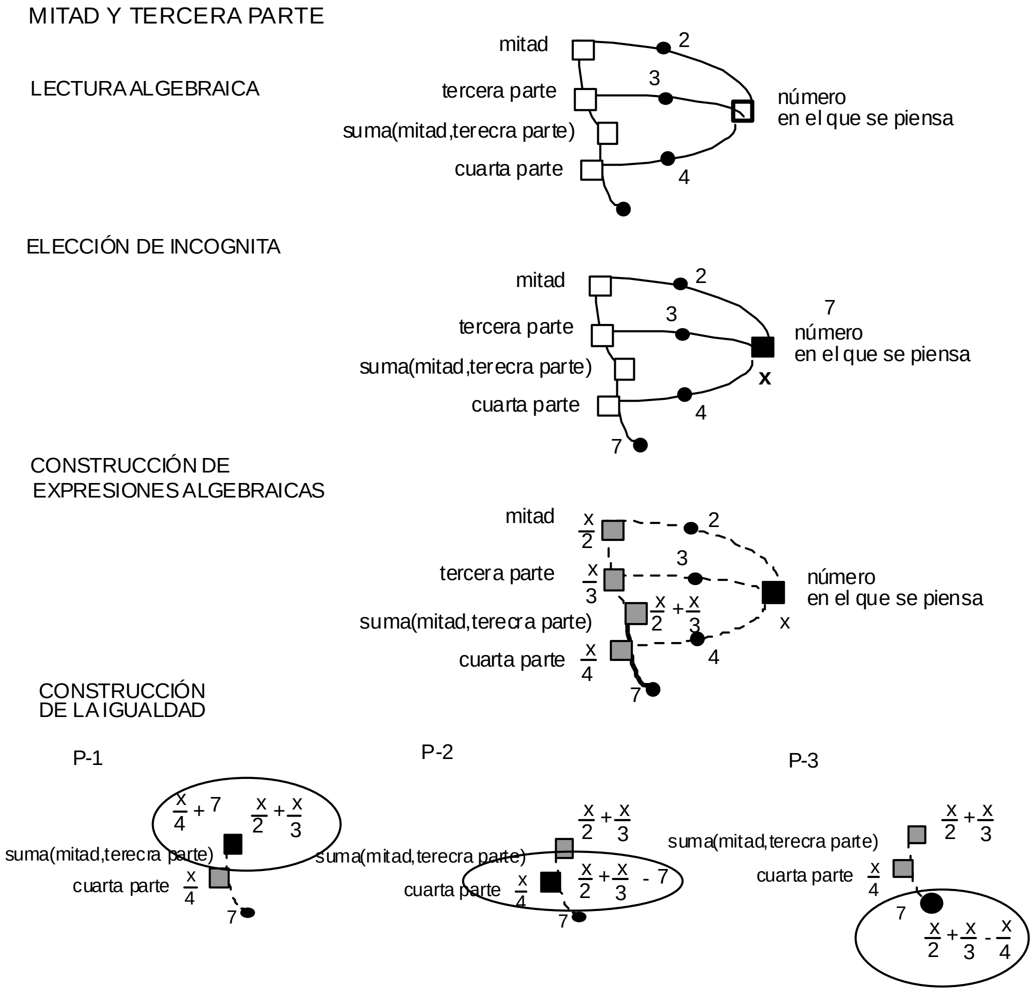
Producciones correctas	**1º**	**2º**	**3º**
1 $\frac{x}{40}-100=\frac{x}{60}$	1		3
2 $40x+4000=60x$	1	2	
3 $60x=40(x+100)$		3	
4 $(x-100)60=40x$			4
5 $60(\frac{x}{40}-100)=x$			1
6 $y=40x$ $y=60(x-100)$		1	2
7 $x=40y$ $x+4000=60y$		1	
8 $\frac{x}{40}=y$ $\frac{x}{60}=y-100$			1
9 x———40 x+4000———60 $\frac{x}{40}=\frac{x+4000}{60}$		1	

Anexo 4.- Protocolo para el estudio de las producciones.

1.-Producciones Correctas.

a) Número de producciones correctas.
b) Distribución porcentual de las producciones correctas:
   El porcentaje del total de igualdades correctas que supone cada una de las producciones.
c) Número de producciones encontradas en cada curso.
d) Distribución de la corrección en cursos:
   El porcentaje de igualdades correctas que corresponde a cada uno de los cursos, toda vez que se ha corregido el desigual número de estudiantes de cada curso de los que proceden las producciones, 92, 91, 75.
e) Grafo de la resolución de cada producción.
   Grafo que permite determinar: las cantidades que se han elegido cómo incógnitas, las expresiones algebraicas atribuidas a cada cantidad, su modo de construcción, la cantidad (es) que se igualan.
f) Comentarios.

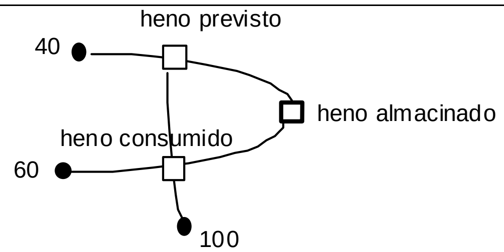
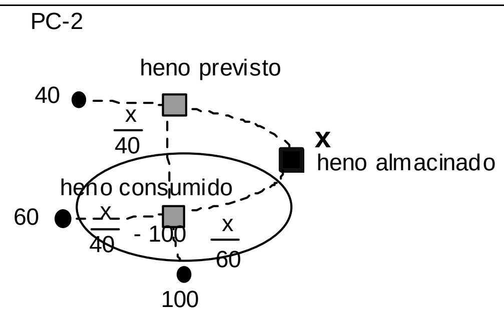
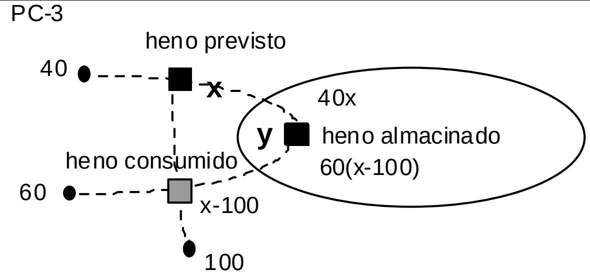
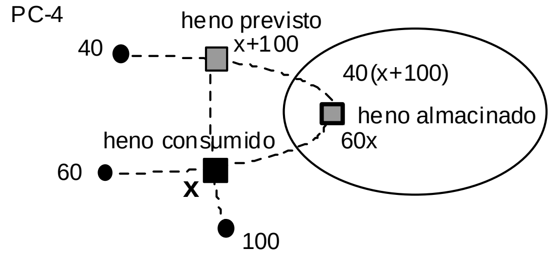
Anexo 5. Pasos en la construcción del grafo de las resoluciones de las producciones del problema MITAD Y TERCERA PARTE y Grafos de las producciones P-1,P-2,P-3



Anexo 6.- Grafos de la resolución de algunas producciones del problema HENO.

<table>
<tr>
<td>LECTURA ANALITICA ALGEBRAICA

DEL

PROBLEMA HENO</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>$\frac{x}{40} - 100 = \frac{x}{60}$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>y=40x y=60(x–100)</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>60x = 40(x+100)</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Cuadrados en negro.-Cantidades elegidas como Incógnitas.
Cuadrados en gris.- Cantidades referidas por expresiones algebraicas.
Aristas a trazos.- Relaciones utilizadas en la construcción de expresiones algebraicas.
En el interior de la elipse.- Cantidad que se iguala y expresiones algebraicas usadas para referirla.