LAS MATEMÁTICAS COMO UNA HERRAMIENTA PARA LA COMPOSICIÓN MUSICAL

CARLOS ALBERTO GONZÁLEZ MARTINEZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D. C.
2006

LAS MATEMÁTICAS COMO UNA HERRAMIENTA PARA LA COMPOSICIÓN MUSICAL

CARLOS ALBERTO GONZÁLEZ MARTINEZ

Monografía para optar el título de Licenciado en Matemáticas.

Director.
EDGAR PÉREZ ORDÓÑEZ.
Profesor de Matemáticas.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D. C.
2006

A mis padres y hermanos quienes a lo largo de mi carrera y de mi vida entera, me han ofrecido su apoyo incondicional, su amor y protección, preocupándose por el fausto e indecible bienestar de cada día, que escoltó los innumerables escenarios sociales y académicos en tiempos de crisis y opulencia.

AGRADECIMIENTOS

A mi familia quienes aportaron todo lo necesario para cumplir con esta meta. A mis amigos quienes me acompañaron durante el desarrollo de mi carrera; a mis compañeros que brindaron sus ideas y conocimientos para enriquecerme como estudiante y como persona, y a aquellos profesores que nos regalaron su más sincero y productivo conocimiento en cada uno de sus campos, dentro del aula de clase.

Un agradecimiento muy especial a un amigo y compañero de música, Germán David Molano, con quien iniciamos un estudio relacionado al tema de la presente monografía y quien aportó algunas de sus ideas para que en este momento fuese posible los resultados que aquí se presentan.

Igualmente quiero agradecer muy fraternalmente y reconocer el apoyo ofrecido por mi director de trabajo de grado Edgar Pérez Ordóñez, quien a lo largo del desarrollo del mismo guió el camino a trazar vislumbrando diversas posibilidades que permitieran obtener los efectos que este documento contempla.

RESUMEN ANALÍTICO (RAE)

1. DESCRIPCIÓN BIBLIOGRÁFICA.

A. TIPO DE DOCUMENTO: TESIS DE GRADO.
B. TIPO DE IMPRESIÓN: MAGNÉTICO (CD)
C. NIVEL DE CIRCULACIÓN: GENERAL.
D. ACCESO AL DOCUMENTO: BIBLIOTECA UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL.

1. TITULO DEL DOCUMENTO: LAS MATEMÁTICAS COMO UNA HERRAMIENTA PARA LA COMPOSICIÓN MUSICAL.
2. AUTOR: GONZALEZ MARTINEZ, Carlos Alberto.
3. PUBLICACIÓN: Bogotá, 2006, 115 páginas.

FECHA DE ELABORACIÓN DE LA DESCRIPCIÓN BIBLIOGRÁFICA: JUNIO 22 DE 2006.
REDACTÓ: C.A.G.M   REVISÓ: C.A.G.M

2. PALABRAS CLAVE.

ACORDE
SN se refiere a un conjunto de sonidos que suenan en forma simultánea.

ARMADURA
SN se refiere a un concepto que indica las alteraciones que poseen las distintas tonalidades.

ARMONÍA

SN se refiere a una combinación de notas que se emiten simultáneamente.

ESCALA CROMÁTICA

SN se refiere al conjunto de las doce notas usadas en la música occidental.

ESCALA DIATÓNICA

SN se refiere al conjunto de siete sonidos determinados por la estructura del modo mayor.

MODULACIÓN

SN se refiere a la transición de una tonalidad a otra.

MONOCORDIO

SN se refiere a un instrumento inventado por Pitágoras que consta de una sola cuerda.

OCTAVA

SN se refiere al intervalo entre notas separadas por cinco tonos y dos semitonos.

TONALIDAD

SN se refiere a la organización de la música alrededor de una nota llamada tónica, que sirve como punto focal.

TONO

SN se refiere a la altura de un sonido determinado.

3. RESUMEN.

La presente monografía titulada "Las matemáticas como una herramienta para la composición musical", es el resultado de una idea que surge hace aproximadamente dos años, cuando un estudiante de la carrera de artes musicales de la ASAB (Academia Superior de Artes de Bogotá) trae a colación en una de nuestras reuniones matutinas, uno

de los temas vistos en algún momento de su carrera (el dodecafonismo) y evocando una posible relación de tal técnica de composición con algunos procesos matemáticos.

Es en este momento que emerge la duda sobre cómo puede apoyar algún concepto o teoría propia de las matemáticas a la composición musical. ¿Es posible utilizar algún procedimiento que me sirva para componer alguna obra?, ¿Es posible encontrar alguna relación entre estos dos campos diferente a la que se tiene con la física del sonido? Recuerdo haber leído un articulo hace bastante tiempo titulado: “Didáctica Pitagórica” dirigido por el profesor Jesús Hernando Pérez (Profesor de la U. Sergio Arboleda), donde se menciona el trabajo realizado por Pitágoras para el desarrollo de la primera escala musical. Es aquí donde empieza la búsqueda de estudios realizados sobre dichas relaciones que despertaron cada vez más la curiosidad y ofrecieron alguna información valiosa para el desarrollo del presente trabajo.

En este sentido se pensó en crear una notación matemática y construir una serie de funciones en relación a ésta, de modo que permitiera jugar con escritos musicales y fuese posible transformar obras clásicas y de música popular.

Se encuentra entonces el foco central del estudio presentado en este documento. Inicialmente se busca contextualizar al lector sobre algunas relaciones dadas históricamente entre estos dos campos del conocimiento (música y matemáticas) y destacando tres momentos importantes en este recorrido: la construcción de la escala diatónica por Pitágoras, el aporte de Marin Mersenne hacia las falencias presentadas por las escalas que hasta ese momento se venían utilizando y la propuesta de algunas técnicas de composición musical hacia mediados del siglo XX. De la misma manera se enuncia cómo el uso de conceptos de la geometría y la introducción del computador entre otros, han revolucionado las tendencias musicales.

Posteriormente se desarrolla la propuesta elaborando una notación por medio de ternas que contemplan básicamente el orden, la altura específica y la duración de una serie de notas dispuestas dentro de una partitura. Con esta asignación de ternas se describen ciertos procesos musicales a través de algunas funciones, la cuales se van a convertir en la herramienta fundamental para transformar las piezas musicales que más adelante se contemplan.

Las funciones construidas se basan esencialmente en las estructuras de determinadas escalas, como son la escala mayor, la escala menor armónica y las escalas pentatónicas correspondientes a las dos anteriores, así se elabora un procedimiento que posibilita ir de una a otra transformando melodías, y que adjuntando las funciones que convierten el carácter rítmico, se obtienen resultados interesantes dentro del campo musical ofreciendo las primeras bases para desarrollar una teoría a partir de las matemáticas sobre la composición musical.

B. FUENTES.

http://www.anarkasis.com

http://www.anarkasis.com/pitagoras/menu.htm.

http://www.apocatastasis.com/micro_afinac.htm

http://www.elementos.buap.mx/num44/htm/21.htm.

http://www.divulgamat.net/weborriak/TestuakOnLine/03-04/PG03-04-ibaibarriaga.pdf

http://www.dlsi.ua.es/~japerez/pub/pdf/mfsc2000.pdf

http://www.imaginarymagnitude.net

http://midimath.tucajon.com

http://www.monografias.com/trabajos7/dodec

http://www.musicaperuana.com
http://www.oni.escuelas.edu.ar/olimpi99/fractales/musica.htm

http://www.uvmnet.edu/investigacion/episteme/numero1-05/enfoque/a_musica.asp

http://www.wikilearning.com

C. CONTENIDO.

Se desarrolla en cinco capítulos. El primer capítulo titulado: "La evolución de la música a través de las matemáticas" hace un breve recorrido histórico acerca del aporte que algunos matemáticos han realizado para el diseño de estructuras dentro de la música y que son usadas en la actualidad. El segundo capítulo "El uso de algunos conceptos matemáticos en la composición" busca junto con el primero ambientar el tema central de la monografía. El tercer capítulo titulado "Comportamientos musicales frecuentes", se centra inicialmente en la construcción de una notación matemática para melodías a una sola voz haciendo uso del orden, la altura específica y la duración de cada nota dispuesta en una partitura cualquiera. En el cuarto capítulo, "Transformación de obras musicales", se proponen cinco funciones obtenidas a partir de la composición de las funciones descritas en el capítulo 3. En el quinto capítulo "Ajustes rítmicos y composición", se construyen un tipo de funciones que buscan transformar el carácter rítmico de la melodía para combinarlos con las funciones que transforman el aspecto melódico.

D. METODOLOGÍA.

El estudio parte de una pregunta ¿qué relaciones se dan entre las matemáticas y la música? En torno a esto se decide consultar estudios elaborados en el tema e ilustrar de qué manera pueden apoyar los conceptos matemáticos a la teoría musical. Posteriormente se decide plantear ciertos objetivos centrados en crear una notación matemática para realizar transformaciones musicales utilizando funciones matemáticas y así comenzar a experimentar con cambios en melodías para luego realizar análisis a partir de la teoría musical. Entonces, se puede construir unas funciones a partir con la cuales se experimentó y así realizar una propuesta a los nuevos estilos de composición musical.

E. CONCLUSIONES.

La inclusión de los nuevos métodos de composición en la primera mitad del siglo XX han abierto la mentalidad de muchos músicos de nuestra época y la curiosidad en otros tantos; del mismo modo, aquellos estudiosos de las matemáticas y que tienen una afinidad con las teorías de la música, han encontrado en diversas ramas de las matemáticas así como en muchos de los conceptos propios de ésta, la excusa para innovar en los esquemas de composición y que ofrece determinadas estructuras aceptadas por las nuevas generaciones. Se desarrollan entonces nuevos sonidos basados en modelos matemáticos salidos un poco de la música convencional pero admitidos por las comunidades. El presente trabajo se ajusta en cierto modo a estas nuevas formas de hacer música, tal vez más conciente, con la idea de ofrecer un método diferente y que sea en determinada manera "tangible", o mejor, posible, real y definitivamente utilizado.

AUTOR DEL RAE: CARLOS ALBERTO GONZALEZ MARTINEZ, RAE elaborado el 22 de Junio de 2006.

CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

LISTA DE PARTITURAS

pág

LISTA DE FIGURAS.

pág

GLOSARIO

ACORDE: conjunto de sonidos que suenan en forma simultánea.

ARMADURA: concepto que indica las alteraciones que poseen las distintas tonalidades.

ARMONÍA: combinación de notas que se emiten simultáneamente; el término se emplea también para la sucesión de estos conjuntos de sonidos.

CADENCIA: fórmula musical que brinda una sensación de reposo al final de una frase o composición.

COMPÁS: unidad musical de tiempo que divide a éste en partes iguales.

COMPOSICIÓN: creación de una obra musical en el caso de la música culta, o una canción en la música popular.

DODECAFONISMO: técnica de composición musical que dispone de las doce notas de la escala cromática dispuestas en un orden determinado por el autor.

DOMINANTE: quinta nota de una escala respectiva.

ESCALA: el arreglo, mediante la elevación o descenso de una serie tonal, de las notas usadas en un sistema musical.

ESCALA CROMÁTICA: llamada al conjunto de las doce notas usadas en la música occidental.

ESCALA DIATÓNICA: conjunto de siete sonidos determinados por la estructura del modo mayor.

FUGA: composición musical de un solo tiempo y escrita en estilo polifónico, en la que un tema melódico se ve sistemáticamente sometido a la imitación melódica.

INDICADOR DE COMPÁS: fracción escrita al inicio de una obra o durante el transcurso de la misma, equivale a un número de pulsos y a su vez indica el número de notas en cada uno de ellos.

INTERVALO: diferencia de altura entre dos tonos musicales escuchados simultáneamente.

MELODÍA: sucesión organizada de notas de tono y duración específicas, que entrelazadas producen una expresión musical coherente.

MODO: fórmula para la construcción de melodías basadas en una escala.

MODULACIÓN: transición de una tonalidad a otra.

MONOCORDIO: instrumento inventado por Pitágoras que consta de una sola cuerda.

OCTAVA: intervalo entre notas separadas por cinco tonos y dos semitonos.

POLIFONÍA: música que tiene dos o más partes, o voces, sonando de forma simultánea.

RITMO: aspecto de la música que trata sobre su movimiento en el tiempo y sobre la estructura de este.

SEMITONO: intervalo entre dos notas sucesivas de la escala cromática.
SERIALISMO: método compositivo cuyo principal objetivo es la desaparición total de la jerarquía de los sonidos entre sí.

SORDINAS: accesorio que modifica el timbre de los instrumentos y disminuye el volumen de los sonidos producidos por estos.

SUBDOMINANTE: cuarta nota de una escala.

TONALIDAD: organización de la música alrededor de una nota llamada tónica, que sirve como punto focal.

TONO: altura de un sonido determinado. También hace referencia al intervalo sumado, de dos semitonos consecutivos.

TRITONO: intervalo referido a la suma de tres tonos consecutivos.

INTRODUCCIÓN.

Las artes musicales, las artes gráficas y las artes escénicas ofrecen a la humanidad un espacio de inmensa relajación, que en muchas ocasiones nos transporta y nos sumerge en sus profundas utopías de las cuales brotan diversas y muy sinceras emociones, o tal vez, nos conducen hacia un campo de exploración en el cual es posible expresar nuestros pensamientos y sentimientos más intensos. La música en especial, nos permite gozar de variadas situaciones, escenarios y épocas que con ella se evoca; en muchas ocasiones trae a colación recuerdos tanto divertidos y alegres como nostálgicos que nos hacen vibrar por sus múltiples y enardecedoras representaciones de las cuales hemos querido, en alguna ocasión, ser los intérpretes. Ciertamente la sensibilidad del ser humano permite la filtración de las suaves e intensas melodías creadas por él mismo, y cautiva a todo aquel que se mezcla con su armonía.

Por otra parte, las matemáticas surcan un camino en busca de descubrir hasta los más recónditos elementos que construyen el universo. Es así que con el desarrollo de sus ideas ha permitido al hombre evolucionar y crear no sólo artefactos que facilitan sus labores diarias, artefactos que agilizan los procesos científicos, artefactos que proveen de informaciones a determinadas comunidades, sino también artefactos en contra de la naturaleza de la humanidad. Las matemáticas además de su valiosa utilidad para el "progreso" de la sociedad, es otro campo de gozo para quienes trabajan con ésta, pues la construcción de axiomas, teoremas y teorías satisfacen enormemente al creador de las mismas. Dichas teorías que conceden un inmenso orgullo a su descubridor, ocasionan un gran impacto al interior de otros campos académicos, intelectuales y socio-culturales, pues la física, la química, la electrónica, la estadística y hasta la música, entre otras, hacen uso de los conceptos matemáticos para elaborar estructuras al interior de cada uno de estos.

La música no se escapa de la incursión de las matemáticas en otras áreas, ya que fue ésta quién aprovisionó de argumentos para desarrollar las primeras ideas estructuradas en la teoría musical. La música y las matemáticas han tenido una estrecha relación desde hace más de 2000 años. Es innegable el aporte que campos como la física y por ende las matemáticas, han ofrecido al desarrollo de las teorías de la música y así como a la descripción de los fenómenos acústicos con los cuales se estructuran las ideas musicales, se diseñan instrumentos y en consecuencia se construyen esquemas que involucran la creatividad, el pensamiento y los sentimientos de todos aquellos quienes forman una parte activa o pasiva en tal campo.

Pero el aporte de las matemáticas hacia la música no sólo viene fundamentado en el hecho de la descripción que hace la física del sonido, sino también en el uso de conceptos de ramas como la estadística, el álgebra y la geometría para la construcción de ideas que incursionen en los métodos de composición. En este sentido se desarrolla la propuesta: "Las matemáticas como una herramienta en la composición musical", y con el ánimo de invitar a todas aquellas personas interesadas en el tema para desarrollar una teoría que pueda ser difundida en los métodos de composición musical.

La presente monografía se desarrolla en cinco capítulos. El primer capítulo titulado: "La evolución de la música a través de las matemáticas" hace un breve recorrido histórico acerca del aporte que algunos matemáticos han realizado para el diseño de estructuras dentro de la música y que son usadas en la actualidad; comenzando desde la propuesta de Pitágoras quien construyó el monocordio y ofreció la primera escala que sería usada durante muchos siglos, pasando por Marín Mersenne el cual ajustaría las falencias de la escala pitagórica y llegando hasta las últimas tendencias como son la música Fractal, música aleatoria y música informática, entre otras.

El segundo capítulo "El uso de algunos conceptos matemáticos en la composición" busca junto con el primero ambientar el tema central de la monografía, contextualizando al lector sobre como se han usado conceptos como son la reflexión, la rotación, la traslación, la sucesión de Fibonacci y la autosemejanza entre otros, para componer piezas musicales. En este sentido, se pretende dar la idea al lector de la posibilidad de usar conceptos y procesos propios de las matemáticas diferentes a los procesos de describir las diversas estructuras dispuestas dentro de la teoría musical.

El tercer capítulo titulado "Comportamientos musicales frecuentes", se centra inicialmente en la construcción de una notación matemática para melodías a una sola voz haciendo uso del orden, la altura específica y la duración de cada nota dispuesta en una partitura cualquiera; luego, en la descripción, a partir de las matemáticas y de la notación propuesta, de algunos elementos usados frecuentemente por los músicos en composición y en arreglos de obras o piezas musicales de diversos tipos (música académica, popular y cultural). Así se trae a colación los procesos de octavación, transportar, inversiones y el uso de ciertas escalas.

En el cuarto capítulo, "Transformación de obras musicales", se proponen cinco funciones obtenidas a partir de la composición de las funciones descritas en el capítulo 3 (estas son las funciones que describen los procesos de octavación, transportar, etc). En primer lugar, se hace la transformación de la primera voz una coral de Bach a la notación matemática para luego aplicar las cinco funciones propuestas, y después hacer la transformación a la partitura. Posteriormente se realiza un análisis desde la teoría musical y se transforman otras piezas musicales de otras características para realizar una comparación.

Finalmente, en el quinto capítulo "Ajustes rítmicos y composición", se construyen un tipo de funciones que buscan transformar el carácter rítmico de la melodía para combinarlos con las funciones que transforman el aspecto melódico; de este modo se propone un proceso a partir de las matemáticas para transformar obras o piezas musicales abriendo el camino hacia una propuesta enmarcada dentro de los métodos de composición musical.

La lectura de la presente monografía se acompaña del CD anexo, en el cual se han grabado 11 pistas que reflejan el proceso elaborado en los tres últimos capítulos. Se presenta inicialmente una sola voz de la coral de Bach titulada "An Wasserflüssen Babylon" con algunas de sus transformaciones; después se escuchan las transformaciones de la primera voz y el bajo de la coral para luego reposar en la transformación de todo el conjunto de melodías que forman la pieza musical. Del mismo modo se grabó la melodía y el bajo de un Joropo titulado "A sus horas" con su transformación melódica y rítmica, al igual que el último track en el cual se ha seleccionado una de las transformaciones de la coral de Bach para aplicarle la transformación rítmica.

Este trabajo está dirigido a aquellas personas interesadas en el tema con un conocimiento básico de teoría musical y que puedan llevarse consigo las ideas centrales para que puedan, en lo posible, difundir este conocimiento y seguir con la exploración del mismo.

OBJETIVOS.

OBJETIVO GENERAL.

Construir un Conjunto de Funciones aplicadas a un conjunto de notas musicales convertidas en ternas ordenadas, para transformar obras de tipo melódico a una sola voz y que aporten a la composición musical.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

1. Crear un marco histórico que describa el aporte de las matemáticas en el desarrollo de algunas teorías musicales.
2. Construir una notación matemática para las notas musicales.
3. Elaborar un Conjunto de Funciones que describen comportamientos musicales de uso común.
4. Usar una notación matemática y un conjunto de funciones para transformar obras musicales.
5. Analizar las transformaciones encontradas a la luz de la teoría musical.

6. Construir un conjunto de funciones aplicadas a ternas ordenadas, las cuales son el resultado de la notación asignada al conjunto de notas musicales, usadas como herramienta para la composición musical.

1. LA EVOLUCIÓN DE LA MÚSICA A TRAVÉS DE LAS MATEMÁTICAS.

Desde tiempos remotos las relaciones entre las matemáticas y la música han sido evidentes a la luz de aquellos individuos que se han formado en ambas disciplinas; no obstante, hay quienes sin tener un conocimiento profundo, de alguno de los campos mencionados inicialmente, han descubierto que a partir de conceptos propios de la matemática es posible elaborar métodos para creaciones de tipo musical e igualmente describir algunos comportamientos básicos de la teoría musical. Es así como Pitágoras y su monocordio, dio a conocer al mundo una serie de sonidos estándar usados en la composición musical de tipo instrumental y orquestal, que posteriormente fueron modificados debido a algunos problemas de afinación esencialmente.

Es entonces donde se conoce la primera propuesta de un conjunto de sonidos atractivos específicos, que combinados, producían sensaciones agradables al oído humano, tal conjunto de sonidos es conocido como la ***escala pitagórica diatónica***. Se dice que Pitágoras estuvo influenciado por su conocimiento sobre las medias (aritmética, geométrica y armónica) y por el conjunto de números naturales, especialmente por los cuatro primeros. De este modo comenzó a experimentar con cuerdas y con proporciones basadas en el "tetrakis" (los cuatro primeros naturales), para encontrar 3 sonidos que lo conducirían hacia la construcción de la escala diatónica, tales sonidos que en esa época fueron llamados diapasón, diapente y diatesaron, hoy son conocidos como la octava, la quinta y la cuarta.

Pero ¿cuáles fueron las proporciones usadas y cómo se construyó la escala? Para encontrar los tres sonidos mencionados anteriormente Pitágoras usó las medidas 1/2, 2/3 y 3/4 de la cuerda, así como muestra la figura:

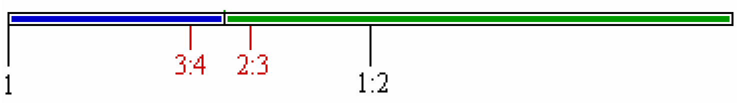


Figura 1. Longitudes de las cuerdas correspondientes a la 4ª, 5ª y 8ª de la tónica.

Cabe mencionar que las longitudes 1/2, 2/3 y 3/4 emiten la octava, la quinta y la cuarta nota de la escala respectivamente.

Posteriormente usó lo que hoy se conoce como el ciclo de quintas[1], y así medir las longitudes correspondientes a los sonidos encontrados. Cada vez que se pasaba de octava era necesario multiplicar por 2. Por ejemplo la quinta de Do es Sol y se encuentra a 2/3 de ella, secuencialmente la quinta de Sol es Re y se encuentra a 2/3 de Sol y a 4/9 del Do original, en este caso se sobrepasa la octava y es necesario multiplicar por 2 para ubicarla dentro de una misma octava, se observa gráficamente como sigue:

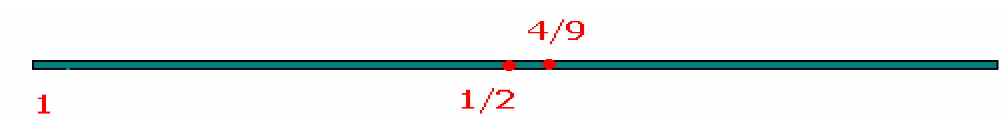


Figura 2. La 8ª de la 2ª nota de la escala.

Como muestra la figura anterior, los 4/9 de la cuerda indica que la nota señalada queda por fuera de la octava donde se encuentran la cuarta y quinta nota de la tónica. De este modo se ubica la quinta de la quinta de la tónica (Re), la cual va a ocupar el segundo lugar de la escala y su longitud es de 8/9 de la cuerda:

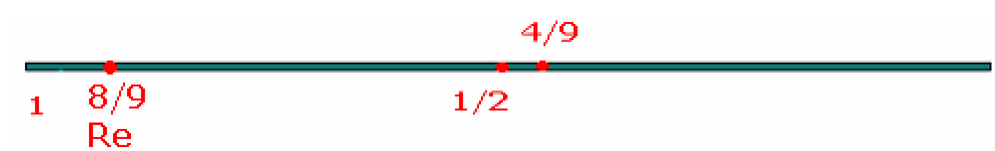


Figura 3. La 2ª nota de la escala.

[1] Para la escala diatónica formada por 8 sonidos (Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si,Do) sólo faltaba encontrar 4 de ellos, debido a esto se usó el ciclo de quintas, teniendo en cuenta que la quinta de un tono específico proporciona un sonido agradable. La quinta de una nota se cuenta a partir de la misma nota, así por ejemplo la quinta de Do es Sol.

Siguiendo esta misma estructura se obtiene la siguiente tabla:

Tabla 1. Longitudes de las cuerdas correspondientes a la escala diatónica.

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
1	8:9	64:81	3:4	2:3	16:27	128:243	1:2

Se nota entonces dos intervalos diferentes, el intervalo entre tonos y el intervalo entre semitonos. El intervalo de 1 tono hace referencia a los 8/9 de la longitud de la cuerda que emite el sonido inmediatamente anterior de la escala diatónica, este es el caso de los intervalos DO-RE, RE-MI, FA-SOL, SOL-LA y LA-SI; y el intervalo de 1 semitono hace referencia a los 243/256 de la nota anterior, este es el caso de los intervalos MI-FA y SI-DO.

De acuerdo al ciclo de quintas desarrollado por Pitágoras se encontraron otros sonidos intermedios de la escala, así:

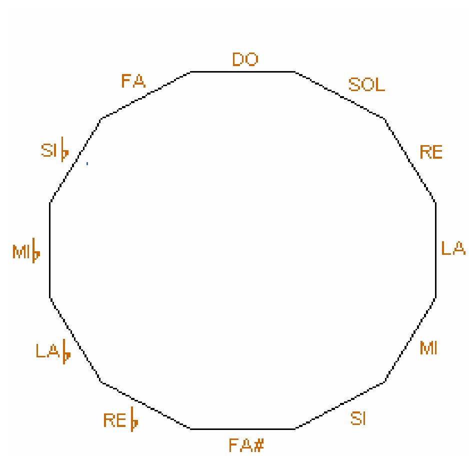


Figura 4. Escala cromática dispuesta por quintas.

Por tanto aparecen 5 sonidos más para llegar al punto de partida y se ubican dentro de la escala de la siguiente manera:

Do Re ***b*** Re Mi ***b*** Mi Fa Fa# Sol La ***b*** La Si ***b*** Si Do

Esto debería indicar que las notas Re ***b***, Mi ***b***, Fa#, La ***b*** y Si ***b*** se encuentran en intervalos de semitono respecto a las notas Re, Mi, Fa, Sol y La correspondientemente, y en consecuencia el intervalo de dos semitonos sería equivalente al intervalo de un tono, situación que no sucedió desafortunadamente.

Se puede describir la falla anterior de la siguiente manera: en primer lugar es necesario mencionar que la frecuencia producida por una nota es inversamente proporcional a la longitud de la cuerda, así por ejemplo la octava de una nota se encuentra reduciendo la cuerda a la mitad y para el caso de las frecuencias la octava produce 2 veces la frecuencia de la nota original. En segundo lugar, haciendo uso del ciclo de quintas y teniendo en cuenta la octava a la cual se llega en cada paso de este ciclo, se obtiene que 12 quintas son aproximadamente 7 octavas, de este modo se encuentra la siguiente relación:

$$(3/2)^{12}: 2^{7} = 1.0136432\ldots$$

Esta discrepancia fue llamada ***coma Pitagórica***, lo cual representaba un problema para los músicos en la composición de obras, ya que cuando se pretendía cambiar de tonalidad era necesario volver a afinar los instrumentos y por supuesto no se prestaba para procesos de modulación. Sin embargo, el trabajo desarrollado por Pitágoras, y que ofreció especialmente al mundo occidental, perduró por más de 20 siglos.

Es cierto, pasaron muchos años antes de encontrar la forma de corregir tal falencia y establecer una escala en la cual fuese posible cambiar de tonalidades sin reafinar los instrumentos en la interpretación de alguna obra, tal labor fue realizada por el matemático francés Marin Mersenne en 1627. Mersenne formula con precisión la relación entre la longitud de la cuerda y la frecuencia, lo cual permite establecer una escala de doce sonidos (Escala Cromática) donde todos los intervalos son iguales, intervalos de semitonos.

Marin Mersenne

(1588 - 1648)

En este momento se da solución a los procesos de modulación. Teniendo una escala en donde todos los intervalos fueran iguales, los músicos podían cambiar fácilmente de tonalidades. Este nuevo sistema fue considerado como **Temperamento** eliminando así la coma pitagórica.

La siguiente tabla permite realizar una comparación de las frecuencias de las notas de la escala Pitagórica diatónica con la escala cromática producto del Temperamento:

Tabla 2. Frecuencias de la escala pitagórica y la escala cromática.

Pitagórica	260.74	278.44	293.33	309.03	330.00	347.65	371.25	391.11	417.66	440.00	463.54	495.00
Cromática	261.63	277.18	293.66	311.13	329.63	349.23	369.99	392.00	415.30	440.00	466.16	493.88
	C	**C#**	**D**	**D#**	**E**	**F**	**F#**	**G**	**G#**	**A**	**A#**	**B**

Ya establecidas las frecuencias con las cuales podían jugar los músicos en adelante, era posible interpretar obras en diferentes tonalidades, la composición gozaba de nuevas herramientas y el trabajo del músico se "facilitaba"; se estableció así un método de afinación y éste incorporaba mucho más, que en épocas anteriores, la percepción auditiva. En este sentido y dando una muestra del buen resultado obtenido con la nueva escala cromática, el músico Johann Sebastián Bach compone en el siglo XVIII su obra musical titulada “El clave bien temperado”, ésta obra consiste en 24 piezas usando las doce tonalidades en los modos mayor y menor.

Bach demuestra de esta manera las posibilidades de modulación creadas por una afinación igual (aunque él mismo no pudiese ejecutarla perfectamente debido a las limitaciones del clavicordio). En ésta época las matemáticas y la música se estudiaban por separado.[2]

1.1 COMPOSICIÓN Y COMBINACIÓN[3]

Componer es el arte de combinar distintas ideas buscando una unidad formal. Cuanto más largo sea el desarrollo de las distintas ideas, más costará combinarlas. La combinación resulta más fácil cuando se trata de juntar frases muy cortas (como los compases). Tanto es así que si se establecen bien unos cuantos compases es posible combinarlos de una variedad increíble de formas, todas ellas placenteras al oído.

Wolfgang Amadeus Mozart
(1756 - 1791)

En su obra *Musikalisches Würfelspiel* (Juego de dados musical) K516f, de 1787, Mozart compone 176 compases para los minuetos y 96 compases para los tríos. Cada pieza consta de 16 compases. Estos compases están sueltos, pero Mozart ofrece unas reglas basadas en el lanzamiento de dados que permite combinarlos de múltiples formas. ¿De cuántas?:

Minuetos: 11^{16} (casi 46 mil billones) formas no equiprobables correspondientes a dos dados.

Tríos: 6^{16} (casi 3 billones) equiprobables correspondientes al lanzamiento de un solo dado.

Obra conjunta (minueto + trío): 66^{16} (más de 10^{29}). Es decir, más que granos de arena hay en la Tierra.

[2] En la Grecia antigua se estableció la división del conocimiento en dos áreas llamadas Quadrivium y Trivium, la primera fue conocida como los saberes exactos y la segunda como los saberes humanos. La música era considerada dentro del quadrivium junto a la geometría, la aritmética y la astronomía, debido a las relaciones encontradas con las matemáticas.

[3] Tomado de www.anarkasis.com/pitagoras/menu.htm.

Minueto

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	96	22	141	41	105	122	11	30	70	121	26	9	112	49	109	14
3	32	6	128	63	146	46	134	81	117	39	126	56	174	18	116	83
4	69	95	158	13	153	55	110	24	66	139	15	132	73	58	145	79
5	40	17	113	85	161	2	159	100	90	176	7	34	67	160	52	170
6	148	74	163	45	80	97	36	107	25	143	64	125	76	136	1	93
7	104	157	27	167	154	68	118	91	138	71	150	29	101	162	23	151
8	152	60	171	53	99	133	21	127	16	155	57	175	43	168	89	172
9	119	84	114	50	140	86	169	94	120	88	48	166	51	115	72	111
10	98	142	42	156	75	129	62	123	65	77	19	82	137	38	149	8
11	3	87	165	61	135	47	147	33	102	4	31	164	144	59	173	78
12	54	130	10	103	28	37	106	5	35	20	108	92	12	124	44	131

Trío

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	72	6	59	25	81	41	89	13	36	5	46	79	30	95	19	66
2	56	82	42	74	14	7	26	71	76	20	64	84	8	35	47	88
3	75	39	54	1	65	43	15	80	9	34	93	48	69	58	90	21
4	40	73	16	68	29	55	2	61	22	67	49	77	57	87	33	10
5	83	3	28	53	37	17	44	70	63	85	32	96	12	23	50	91
6	18	45	62	38	4	27	52	94	11	92	24	86	51	60	78	31

Se puede oír cada uno de los 176 compases por separados; aquellos que están señalados fueron elegidos al azar según las normas de Mozart. Una vez combinados, el minueto y trío resultantes es posible que se escuchen por primera vez en la historia ya que la probabilidad de que alguien hubiera generado la misma combinación es despreciablemente pequeña.

La partitura correspondiente a esta combinación es:

1.2 LA ATONALIDAD.

Si se entiende como tonalidad el ordenamiento jerárquico de los grados de la escala en torno a la tónica, atonalidad significará la ausencia de este ordenamiento. Más aún: si la tonalidad es un medio de integración y de control de todos los elementos de la obra como temática, modulación y desarrollo formal, la atonalidad será un medio para la liberación de todos estos componentes.[4]

En un sentido más amplio, el término atonal se aplica también a todas aquellas músicas cuyo sentido tonal está debilitado total o parcialmente por la utilización de sistemas ajenos a la de gravitación tonal:

- ✓ Los modos griegos y gregorianos disponen igualmente de relaciones armónicas que poseen una tónica pero a la cual se accede de forma diferente que la tonal.
- ✓ Las escalas pentáfonas, hexátonas, sintéticas y otras, por su estructura interválica privan a la tónica de soporte auxiliar necesario que facilite la frase creando una tonalidad suspensiva de color modal.
- ✓ Los mecanismos cadenciales de los acordes desde funciones de dominante y subdominante que no sean el cuarto y quinto grado desestabilizan el sentimiento de tonalidad asentada sobre los modos mayor y el menor.
- ✓ La disposición de los acordes por cuartas pone en duda la verificación tonal creando zonas de desvío de tonalidad hacia la línea melódica más sobresaliente.
- ✓ El cromatismo crea campos armónicos de bipolaridad o multipolaridad tonal y modal desvirtuando el carácter absoluto de la tonalidad tradicional.

De esta forma se reconocen estructuras que irrumpen los esquemas tradicionales de la música tonal y ellas abren los parámetros usuales en la composición, permitiendo a los nuevos músicos desarrollar teorías que ofrezcan herramientas para la incursión en los sistemas de composición; como ejemplo de estas nuevas generaciones de compositores se encuentran Pierre Boulez, Arnold Schoenberg y Iannis Xenakis entre muchos más.

Para Arnold Schoenberg los primeros años que sucedieron a la guerra fueron una etapa de reconsideración de su producción anterior y de consolidación de su futuro como creador.

---

[4] http://www.divulgamat.net/weborriak/TestuakOnLine/03-04/PG03-04-ibaibarriaga.pdf

La causa fundamental de su crisis creativa fue algo más profundo y artístico. Había llegado un punto en el que no confiaba más el carácter "intuitivo" característico de la música que había compuesto antes de la guerra.

Schoenberg pensaba que el desarrollo de los nuevos métodos necesitaba de un sistema específico para la música, en cierto modo, análogo con el tonal, capaz de incorporar las nuevas melodías disonantes y las estructuras de acordes propias de la música del siglo XX dentro de un esqueleto concebido de una forma más consciente y ordenado sistemáticamente.

Creyó que su misión histórica era la de desarrollar un sistema nuevo, y esos siete años de silencio "entre 1916-1923" indican las dificultades que encontró para llevar a cabo esta tarea que él mismo se impuso.

En 1921 Schoenberg comentó a uno de sus discípulos que había realizado un descubrimiento que "aseguraría la supremacía de la música alemana durante los próximos 100 años". A lo que estaba refiriéndose era al dodecafonismo que, según él, permitía la continuación de los valores musicales tradicionales siguiendo el camino que ya había recorrido la evolución musical del siglo XX. Explica en sus escritos, que desarrolló este sistema con la intención de conseguir un control más consciente sobre los nuevos materiales cromáticos que hasta entonces sólo había utilizado de forma intuitiva.

Se trata de la creencia de que estos nuevos sonidos obedecen las leyes de la naturaleza y forma de pensar del ser humano. Orden, lógica, comprensibilidad y forma no pueden estar presentes sin la obediencia a este tipo de leyes. Todo esto obliga al compositor a seguir el camino de la exploración donde debe encontrar, si no leyes o reglas, al menos las formas que expliquen el carácter disonante de estas armonías y de sus sucesiones. Para Schoenberg, el sistema dodecafónico era capaz de proporcionar (y por lo tanto de reemplazar) las diferencias estructurales que antiguamente proporcionaba la tonalidad. Los principios básicos del sistema fueron descritos de forma sencilla.

Cada composición extrae su material melódico básico de una única secuencia escogida dentro de las doce notas de la escala cromática, conocida como “serie” de doce notas. Por añadidura al original, o forma “primera de la serie” se utilizan otras tres formas relacionadas con ella. La forma retrógrada (R), invierte la sucesión de notas de intervalos. En la inversión (I) invierten cada uno de los intervalos originales por lo que una quinta justa ascendente puede pasar a convertirse en una quinta justa descendente. Finalmente, también se puede invertir la forma retrógrada, la “inversión retrógrada” o forma RI.

Por otro lado, alguna de estas cuatro formas básicas de la serie podrían transportarse para comenzar en otra nota. Las cuatro formas básicas de la serie, multiplicadas por 12 transportes posibles dan un total de 48 posibles versiones de la serie original. Normalmente no se utilizan todas las versiones en una misma pieza, sino que según el tipo de obra que quiera componerse se elegirán unas u otras.

Por ejemplo, en la primera obra en la que utilizó completamente el sistema dodecafónico, la suite para piano, Opus 25 (1924), Schoenberg utilizó solamente ocho series distintas. Aunque la serie determina la sucesión de notas utilizada en una pieza, no señala ni sus registros y sus duraciones. Tampoco señala la disposición de la textura o la forma de la música.

La Serie es una estructura “abstracta”, un conjunto de relaciones potenciales que deben incluirse en los detalles musicales de una composición determinada. Es importante señalar lo siguiente:

1. Schoenberg articula el final de cada serie con un esforzando que es seguido por silencio.
2. La repetición inmediata del si bemol, la última nota de la primera serie y la primera de la segunda serie, es subrayada mediante su permanencia en el mismo registro.
3. El tritono Sol - Reb común a ambas series se tocan simultáneamente en ambas exposiciones y se repiten en el mismo registro.

No fue entonces sino hasta el siglo XX donde la música sufrió un cambio brusco en los sistemas de composición. Análogamente al aporte de las geometrías no euclidianas, en el sentido de encontrar elementos que irrumpieran una teoría contradiciendo uno de sus axiomas, los nuevos compositores pensaron en crear obras que rompieran con la estructura tradicional de la tonalidad. Es así como los nuevos talentos toman elementos y conceptos propios de las matemáticas para cumplir con estos objetivos que se habían propuesto.

Aparecen entonces lo que hoy son conocidas como música dodecafónica, música serial, música estocástica y música fractal entre otras. Uno de los representantes más importantes de este siglo fue el músico Iannis Xenakis (1922-2001), quién prefirió las leyes de la probabilidad:

- ✓ Distribución aleatoria de puntos en un plano.
- ✓ Ley de Maxwell-Boltzmann.
- ✓ Restricciones mínimas.
- ✓ Cadenas de Markov.
- ✓ Distribuciones de Gauss.
- ✓ Teoría de Juegos.
- ✓ Teoría de Grupos.
- ✓ Teoría de conjuntos y álgebra booleana.

El serialismo contra el cual reaccionó Xenakis fue un movimiento musical que desdeñaba el uso de cualquier escala disponible hasta entonces y las jerarquías propias de la misma, y a su vez proponía el uso de una serie de sonidos que normalmente utilizaba los doce sonidos que se encuentran en una octava sin que se pudiera repetir una sola nota hasta no haber aparecido los doce sonidos. Esta música llegó a ser extremadamente compleja.

Esto lleva al desarrollo de su música estocástica. La música estocástica se caracteriza por masas de sonido, “nubes” o “galaxias”, donde el número de elementos es tan grande que la conducta de un elemento individual no puede ser determinada, pero sí la del todo. La palabra estocástica proviene del griego “tendencia hacia una meta”. Esto significa que la música es indeterminada en sus detalles, sin embargo tiende a una meta definida.

Probablemente la composición más famosa de Xenakis sea su primera pieza estocástica, Metástasis, de 1954, para orquesta de 61 músicos. Esta pieza está basada en el desplazamiento continuo de una línea recta. Tal modelo se representa en la música como un glissando continuo. La contracción y expansión del registro y la densidad a través del movimiento continuo son ilustraciones de las leyes estocásticas. Esta obra sirvió como modelo para la construcción del pabellón Philips que, junto con Le Corbusier, Xenakis construyó para la Exposición Internacional de Bruselas, de 1958. En tal estructura no hay superficies planas.

La rigurosidad matemática de la obra de Xenakis podría hacer pensar en resultados excesivamente intelectuales, pero la expresiva contundencia de sus composiciones genera un impacto emocional ligado a una extrema claridad armónica y estructural.

Escuchar la obra de Xenakis con una postura abierta y libre de prejuicios permite disfrutar de una experiencia que ejemplifica lo que puede ser la comunión de la música y las matemáticas.[5]

Pero no sólo compositores extranjeros se han dedicado al estudio de estas nuevas tendencias musicales como es el caso de la compositora colombiana Carmen Nova Sandag, quién realizó estudios en el conservatorio de la Universidad Nacional de Colombia y posteriormente en el Instituto Torcuato Di Tella en el CLAEM (Buenos Aires), trabaja sobre el concepto de dodecafonismo y serialismo; su obra Doce Móviles escrita en base al serialismo toma los parámetros intensidad, altura, duración y timbre.

---

5 Tomado de www.elementos.buap.mx/num44/htm/21.htm.

2. EL USO DE ALGUNOS CONCEPTOS MATEMÁTICOS EN LA COMPOSICIÓN.

Como se mencionaba en el capítulo anterior, la música y las matemáticas disfrutaron de una larga hermandad hasta los últimos tiempos de la edad media. Posteriormente sufrieron un rompimiento de tal modo que los músicos concebían diversos elementos para enaltecer sus composiciones, diferentes a conceptos matemáticos. Las musas de inspiración de aquellos personajes (de cualquier modo siempre lo han sido, pero en este trance se incrementaron) como los sonidos de la naturaleza, la belleza de las mujeres de su entorno o quizás las situaciones de la sociedad de su época, no estaban provistas de tales elementos que proporcionaron el auge y la popularización de los sonidos estandarizados utilizados en la actualidad (relaciones matemáticas).

Tal vez fue esa ley del hielo adoptada por el arte musical la que provocó que nuevos individuos, aproximadamente a mediados del siglo pasado, retomaran la herramienta que suministró la posibilidad de establecer métodos de difusión universales de la música junto a sus estructuras, y entonces desarrollar nuevas teorías de composición que se salen un poco de los parámetros que se venían manejando hasta el momento.

Aparecen entonces estilos como la música aleatoria, música fractal, el uso de conceptos geométricos y hasta la sucesión de Fibonacci, impresos en creaciones de carácter instrumental y orquestal.

2.1 LA GEOMETRÍA EN LA MÚSICA.

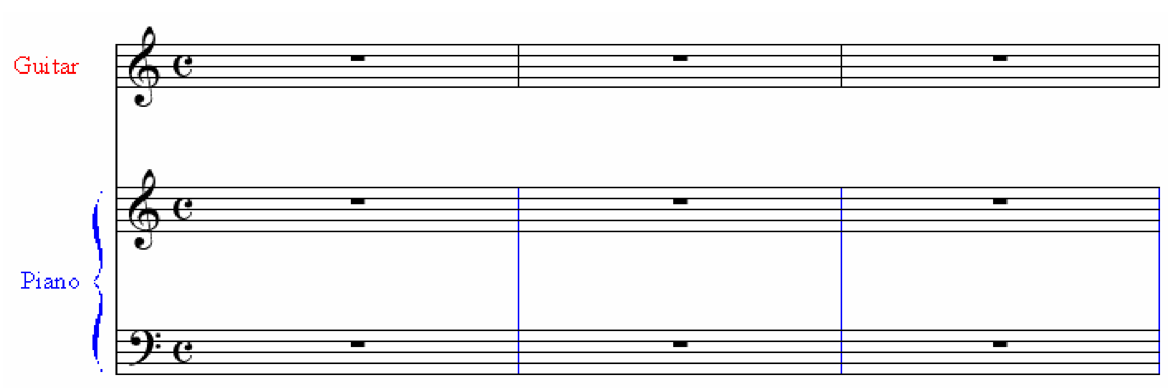
Se distinguen en su mayoría los conceptos de movimientos rígidos en el plano (traslación, reflexión y rotación) dentro de algunas obras musicales de Bach, Beethoven, Mozart, Haydn y Chopin entre otros. La repetición así como la retrogradación son tal vez unas de las características más comunes que se pueden encontrar dentro de una partitura, tales formas de frases musicales son asociadas a los conceptos de traslación y reflexión.

La traslación vista desde un enfoque práctico en el ejercicio de la composición, emite la repetición de frases melódicas o armónicas que se pueden complementar con dinámicas y que proporcionan el mismo carácter rítmico en cada una de sus interpretaciones. La reflexión puede proporcionar frases retrogradas, inversiones y hasta el mismo proceso de traslación.

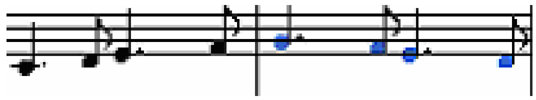
Inicialmente es necesario conocer cual es el espacio sobre el cual se producirán los movimientos y posteriormente crear la frase que será asunto de una reflexión, traslación o rotación. El "espacio" sobre el cual se mueven las figuras depende básicamente del registro que enmarca el instrumento y de la cantidad de compases consignados en la partitura. Se puede entonces mencionar diversos "espacios" dentro de la idea que se está generando, pues el registro del piano es mucho más amplio que el de una guitarra, la cual emite un poco más de 4 octavas en su afinación natural.

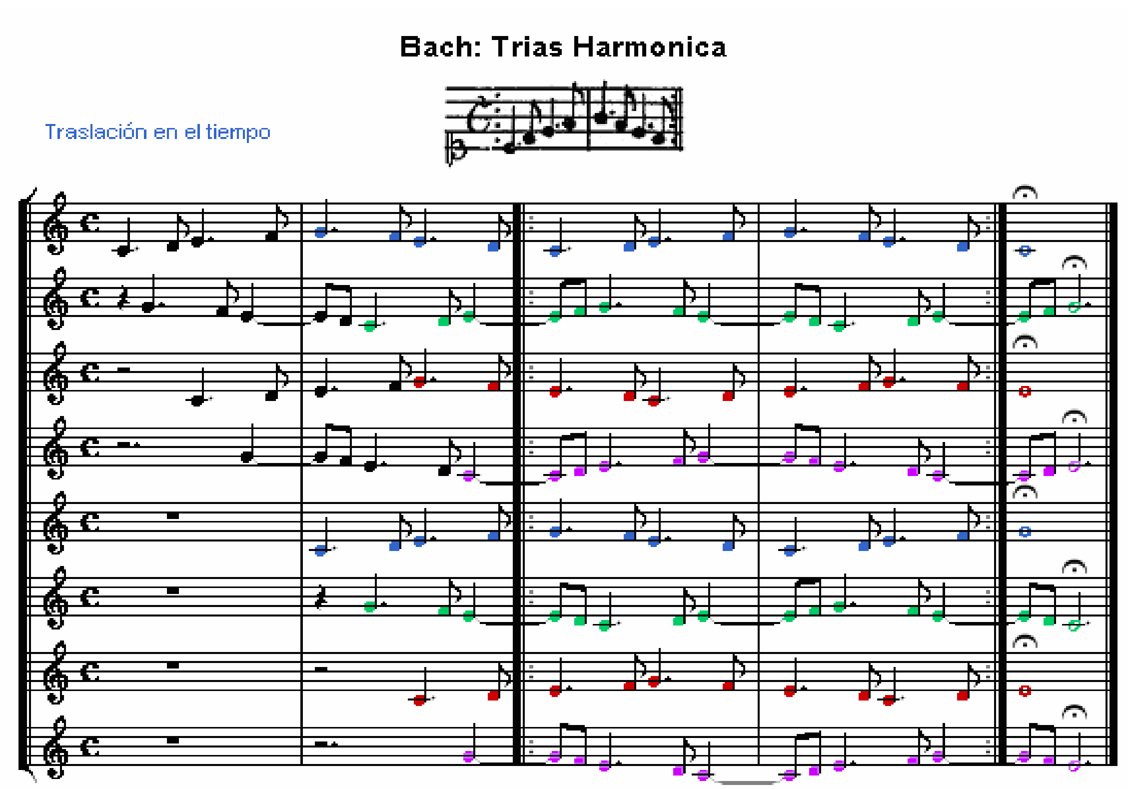
Gráficamente se observa como sigue:

Figura 5. Pentagramas usados por la guitarra y el piano.



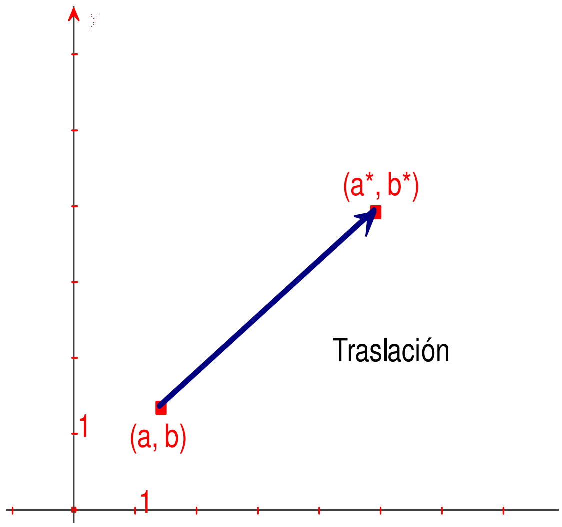
Como se puede observar en la figura anterior, el piano puede producir notas más agudas y más graves que una guitarra, esto permite que el "espacio" sobre el cuál se mueven las figuras sea más extenso, como primera situación, y el número de compases se encuentra sujeto a la voluntad del compositor. Viene enseguida la frase que será objeto de una traslación (la creación de tal frase recoge elementos propios de creación e inspiración del músico en cuestión):



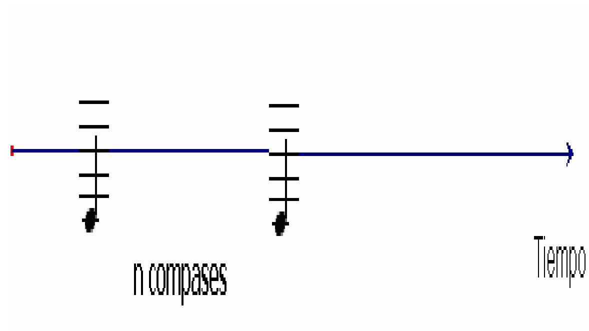


Cabe notar en la obra anterior algunas traslaciones de la frase que se indica inicialmente, frase que se encuentra en los dos primeros compases de la partitura y se repite en los compases 3, 4 y en el tercer renglón, entre otros. Análogamente a la traslación de un punto (a, b) en el plano hacia un punto cualquiera (a^*, b^*), la traslación de un sonido se ejecuta sobre una recta determinada por el tiempo y se traduce a la partitura en un compás posterior determinado por el autor:

Traslación de un punto en el plano



Traslación de una nota en el tiempo

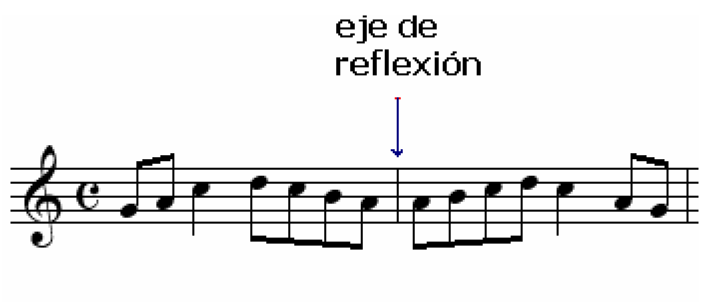


Asimismo como se realiza una traslación es posible efectuar una reflexión en donde los ejes de simetría lo forman las barras de compás, si es una reflexión con eje vertical; o las líneas del pentagrama sí es una reflexión con un eje horizontal.

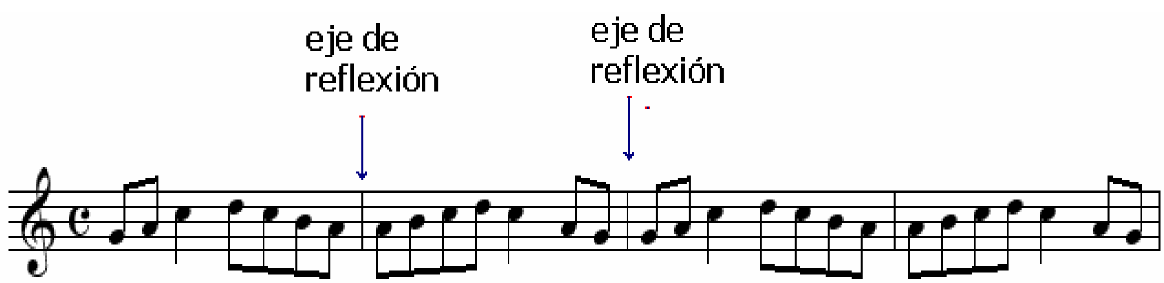
Reflexión desplazada en la gigantesca *Sonata Hammerklavier* Op. 106, de Beethoven (la imagen reflejada aparece ¡al cabo de 132 compases!)[6]

[6] Tomado de www.anarkasis.com/pitagoras/menu.htm.

Más claramente, la reflexión con eje vertical puede ocasionar una retrogradación y una doble reflexión se puede transformar en una traslación, que básicamente es una repetición de frases en tiempos diferentes.



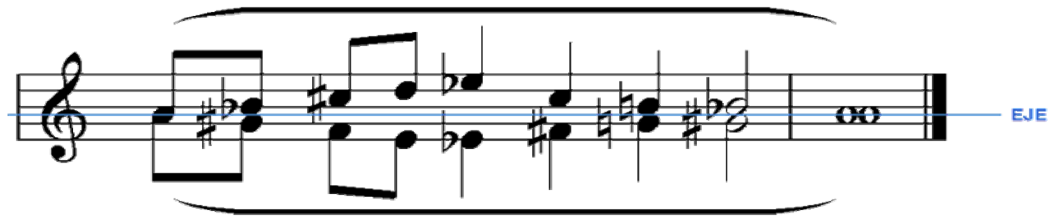
La figura anterior muestra una reflexión con eje vertical de un compás completo que en música es llamado retrogradación, en seguida se muestra una doble reflexión que ocasiona un proceso de traslación:



El primer compás se refleja en el segundo y la doble reflexión toma los dos primeros compases para reflejarlos en el tercero y cuarto.

Como se mencionó, una reflexión con un eje horizontal utiliza las líneas del pentagrama tal como indica la figura siguiente:

Reflexión de la altura en el acorde



También es posible usar el concepto de rotación como una herramienta en la composición, en este caso es necesario establecer un punto sobre el cual se va a efectuar tal operación y entonces generarla.

2.2 NÚMEROS PALÍNDROMOS.

Como es sabido Palíndromo, término derivado del verbo griego palindromeo significa "desandar lo andado" y designa a aquellas palabras que pueden leerse tanto de izquierda a derecha como de derecha a izquierda. Son palíndromos las palabras oso, ojo, asa, ala, sus, anilina, reconocer, somos, rever, entre otras.

Igualmente en matemáticas existen números llamados palíndromos y evidentemente sucede la misma situación descrita en el párrafo anterior, así son números palíndromos 111, 222, 3223, 45654 entre una infinidad. Teniendo en cuenta tales condiciones es posible crear piezas musicales que cumplan con tal concepto, como por ejemplo el siguiente fragmento:

Fragmento palíndromo de la *Sonata* nº 4 *para violín y piano*, de Haydn.

2.3 LA SUCESIÓN DE FIBONACCI.[7]

Los números de la llamada serie de Fibonacci, son elementos de una serie infinita. El primer número de esta serie es 1, y cada número subsecuente es la suma de los dos anteriores. Como el primero es 1 y antes no hay nada, el segundo es 1, el tercero 1+1, el cuarto es 1+2 y así sucesivamente:

[7] http://www.divulgamat.net/weborriak/TestuakOnLine/03-04/PG03-04-ibaibarriaga.pdf

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …

La razón entre dos elementos subyacentes de la serie lleva a converger al decimal 0.618..., y sus recíprocos al decimal 1.618... La proporción de estas razones, sea en fracción o en decimal, es considerada por muchos como atractiva a la vista, balanceada y bella, y es nombrada proporción áurea.

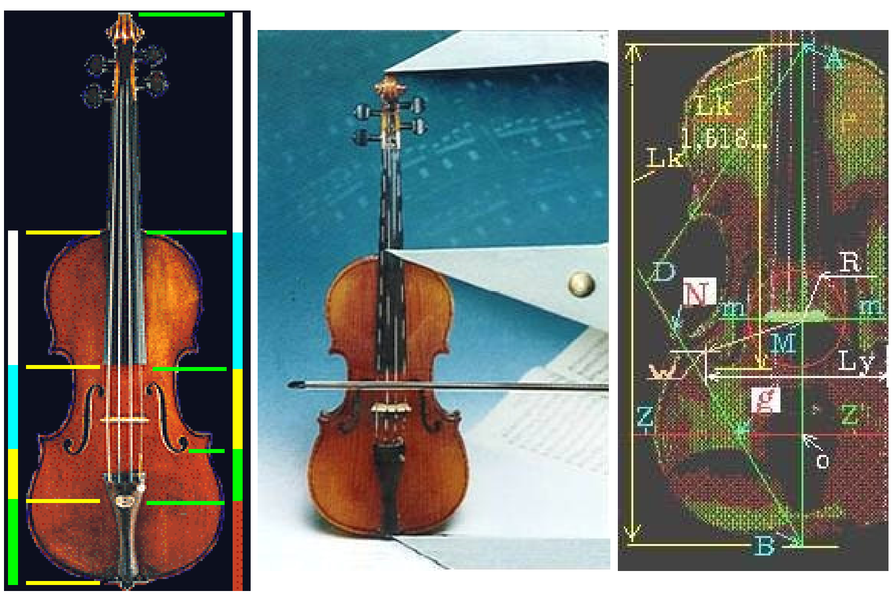
Esta proporción se encuentra en los siguientes instrumentos:

Figura 6. La razón áurea en los instrumentos.

"Si deseamos que la parte menor sea a la parte mayor como esta al todo,

la proporción que buscamos es necesariamente la razón áurea.

La proporción áurea se encuentra también en las creaciones musicales humanas".



Por su atractiva estética la proporción áurea se usa ampliamente en el arte y en la arquitectura. Muchos elementos de la naturaleza se desarrollan en esta proporción, las vueltas del caracol, los cuernos del cimarrón, la forma en que nacen las ramas y hojas de ciertas plantas, etcétera.

Las superficies se dividen para obtener la proporción áurea, dando lugar a una composición bella y balanceada. Los números de la serie se utilizan porque es una manera fácil de lograr la proporción áurea. Pero no sólo es agradable a la vista sino al oído.

No se sabe si el uso de la serie es intencional o, de manera intuitiva, tal vez el compositor la usa sin saber, sólo porque se oye bien. Por ejemplo, Beethoven no sólo la emplea en el tema de su Quinta Sinfonía, sino además en la forma en que incluye este tema en el transcurso de la obra, separado por un número de compases que pertenece a la serie.

Béla Bartók usó esta técnica para desarrollar una escala que denominó la escala Fibonacci.

• ***Música para cuerdas, percusión y celesta (primer movimiento) por Béla Bartók:***

Compuesta en cuatro partes, el primer tiempo es una fuga de 88 compases (1, el deán acusa, que consideramos como tal; a todos los efectos). Las cuerdas se hallan divididas en dos grupos:

Grupo 1: violines primeros y segundos, violas primeras, violonchelos primeros y contrabajos primeros.

Grupo 2: violines terceros y cuartos, violas segundas, violonchelos segundos y contrabajos.

En este primer tiempo no se utilizan el piano ni el arpa y las percusiones solamente intervienen en circunstancias especiales: la gran caja en un compás (56), los platos en 2 (1 y 52) y los timbales en 5 (del 34 al 38) y 3 (53 al 55 y acento en el 56) y la celesta en una intervención de la figura penal y 144 fusas; y el color instrumental está, pues, casi ilimitado por las cuerdas.

Estas, están divididas en dos grupos y, al iniciarse el tema en las violas primeras y segundas se produce, por su distinta situación, un efecto "estereo". Por el contrario, los violines de la segunda entrada (4) son los violines terceros y cuartos, es decir, pertenecen al mismo grupo así como los de la cuarta entrada (12) que son los segundos, del primer grupo; el mismo efecto "estereo" reaparecerá, no obstante, en la tercera entrada (8), en los violonchelos primeros y segundos y en la quinta y séptima en los contrabajos (16 y 27). La sexta entrada se realiza únicamente en los violines primeros (26).

El primer movimiento, andante tranquilo, se inicia con el enunciado del tema en violas primeras y segundas, con sordina (del 1 al 4); éste se halla dividido en cuatro secciones o células separados por pausas de corchea. A su vez estas cuatro células se agrupan en dos frases (A y B), la primera creando una tensión que se resuelve en la segunda. En A se recorren todos los grados cromáticos comprendidos desde la nota inicial LA-que será también la nota final y que cumple la función de tónica-, hasta la más aguda de ella, MI *b*. La frase asciende hasta Mi pero desciende hasta SI*b* formándose así dos ámbitos de distancia de tritono que vienen encuadrados dentro del típico sistema tonal de Bartók.

Se observa una constante de relaciones subdominante-tónica-dominante; la misma constante se observa en el círculo de quintas completo.

Separando las tres funciones unas de las otras y denominándolas ejes de tónica, de dominante y de subdominante, obtendremos: los puntos opuestos de los ejes son correspondientes y pueden ser reemplazados entre sí sin que cambie su función tonal.

Numerando las notas del tema se puede observar que: del 14 al 19 el grupo resulta igual que desde el 2 al 7, subido en una tercera menor (este intervalo aparece entre 2 y 3 como segunda aumenta y es el de mayor extensión entre notas consecutivas del que procede, casi siempre, por segundas menores o eventualmente alguna mayor).

Observamos que del 20 al 26 el grupo procede del fragmento que va del 1 al 7, pero 2 semitonos más alto; el que va del 21 al 27 se corresponde con el grupo 14 al 20 bajado un semitono y finalmente el que va del 20 al 24 es la exacta retrogradación de las notas comprendidas entre 8 y 12. La curva dinámica general de la fuga completa que se inicia en pp (y con sordinas) finaliza en pp (y asimismo con sordinas); el fff, al que se asciende gradualmente, se alcanza en el punto culminante (HP) para decrecer hasta el ppp final.

Todo este movimiento viene generado y controlado por la llamada sección áurea; la proporción 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144... (Serie de Fibonacci) en uno de sus aspectos más sencillos y en ella se basa la fuga de Bartók. En los primeros 55 compases se crea la tensión que halla su punto culminante en 56 para concluir 34 compases más tarde; la obra consta de 89 compases.

La curva de intensidades viene controlada por el uso de las sordinas: las cuerdas colocan las sordinas en 1; tocan sin sordinas después del 34 y durante los 21 + 13 compases que siguen y vuelven a tocar con las sordinas puestas los últimos 21 compases. En total, con sordina, tocan los 34 primeros compases más los 21 finales igual a 55 y, sin sordinas, tocan 21 + 13 centrales.

2.4 UN COMPOSITOR MEXICANO[8]

Al recorrer una de las librerías de ocasión cerca del Hospital General, de la ciudad de México, se encontró un engargolado que contiene siete composiciones musicales bajo el título de: "Piezas para piano para niños por un niño", cuyo autor es José Manuel Castro Skertchly, bajo la dirección de la profesora María de León de Jara, fechado en marzo de 1989. Inicia con una pequeña biografía del autor que por cierto nació en 1977, es decir, que éste pequeño álbum, lo compuso a la edad de 12 años.

Al ejecutar sus composiciones, se observa que poseen melodía, ritmo, armonía, son muy alegres, y aunque son trozos musicales pequeños, sus frases musicales siguen un claro patrón binario.

Una frase musical es el conjunto de compases musicales que llegan a un punto de, por lo menos, estabilidad momentánea, como la creada por una cadencia. Dicho de otra manera,

[8] Tomado de www.uvmnet.edu/investigacion/episteme/numero1-05/enfoque/a_musica.asp

es el conjunto de compases que encierran una idea musical. En los grandes autores como Bach y Mozart y en muchísimos autores, aún los modernos, las frases musicales tienen la forma: $\mathbf{2}^{n}$, donde $\boldsymbol{n}$ es un número natural. Así por ejemplo, en Mozart, sus frases contienen 16 compases, es decir $\mathbf{2^4}$, otros son de 8 compases es decir, $\mathbf{2^3}$.

Aún en autores modernos, como por ejemplo, José María Napoleón, compositor que triunfara en la década de los 70's, en su melodía "Vive", la frase es de 16 compases, o $\mathbf{2^4}$. Entre más se acerquen a la forma de $\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}}$ las frases musicales de una composición, más bellas y armónicas "suenan" tales composiciones. En el caso de las obras de José Manuel Castro, todas sus composiciones contienen frases de esta forma descrita. Se hizo una observación de la composición titulada "Jugando con papá", fechada en mayo de 1989. Es una composición escrita en Fa mayor, en compás de 4/4 es decir, que por cada compás habrá necesariamente, 4 notas llamadas "negras" o sus equivalentes. El ritmo es "Allegro", es decir alegre, rápido, etc. El valor de las notas en su mayoría equivalen a 1/16 de la unidad o sea las llamadas "semicorcheas", y tomando en cuenta el compás marcado, habrá 16 de esas notas por compás que a una velocidad alegre, el lector se dará cuenta de lo dinámico de la composición. Consta de **8** compases en su primera frase, $\mathbf{2^3}$, de otros **8** compases en su segunda frase, $\mathbf{2^3}$, nuevamente, y concluye con otros **8** o $\mathbf{2^3}$ compases que cambian repentinamente a un ritmo ternario, igualmente rápido, que le dan un toque especial a la composición.

Esta última frase se repite dos veces, por lo que hay un total de **4** frases de **8** compases, es decir, el total de $\mathbf{2^2}$ frases de la forma $\mathbf{2^3}$, dicho en forma de modelaje binario, que aunque el lector no haya escuchado esta obra, al análisis anterior le garantiza que le agradará enormemente al escucharla. Siguiendo las ideas de Douglas Hofstadter quién fuera uno de los pioneros en la graficación de sonidos musicales, se muestra aquí la gráfica de la primera frase de la composición mencionada anteriormente, misma que se obtuvo al colocar los valores de las frecuencias en el eje vertical y la secuencia melódica en el eje horizontal:

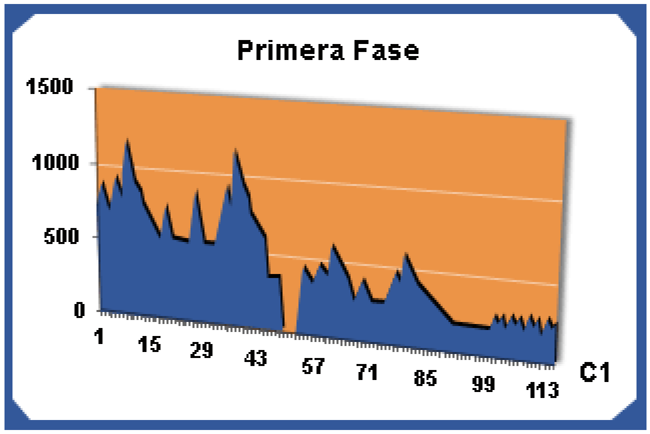


Figura 7. Primera frase de la composición "Jugando con Papá" de José M. Castro.

2.5 MÚSICA INFORMÁTICA[9]

Hoy en día se presenta una revolución tecnológica en las distintas facetas de la vida. Insignificantes aparatos electrónicos facilitan tareas que, hasta hace unas décadas, podrían imaginarse imposibles. El campo que atañe (la música) en este momento, no ha permanecido aislado a esta revolución. Ejemplos de estas innovaciones son, por poner un ejemplo, afinadores digitales, sintetizadores, compact y mini disc, sistemas de sonido de alta calidad, etc... siendo el astro rey por antonomasia el computador personal, como sistema de cómputo de elevadísima velocidad 'programable'.

Además, gracias a la red Internet, como medio de difusión y como fuente de recursos, el computador personal experimenta día a día un avance incomparable en el terreno de la música. La ventaja principal que lo diferencia de los demás elementos es la posibilidad de ser 'programado' a gusto del usuario, esto es, realizar todo lo que la mente sea capaz de imaginar (desde un punto de vista programático, valga la redundancia). Dentro de la composición musical, por poner posibles ejemplos, es posible observar la creación de nuevos timbres, efectos sonoros, composición asistida, etc...

Desde que Schöenberg hiciera su propuesta compositiva, diferentes técnicas basadas en métodos alternativos a la música se han aplicado a la creación de la misma. Una gran parte

[9] Todo es tomado de http://midimath.tucajon.com

de éstos se han basado en la transformación de la simbología musical (tanto ritmo como tímbrica o melodía), en simbología matemática, esto es, números. La forma de componer se reduce, por llamarlo así, a manipular esos números de una manera más o menos consciente. Matemáticas, estadística y probabilidad hacen su incursión en la música con una actitud *racionalizante*.

Dentro del campo de la informática, la concepción de un computador es la de una mera caja negra, a la cual, suministrada una información de entrada, realiza una transformación de la misma, y proporciona otra información de salida. Las leyes de esa transformación son lo que hoy día se conoce como 'programa informático'. Pues bien... Anteriormente se dijo que determinadas técnicas compositivas utilizan traslaciones de simbologías musicales a numéricas, con lo que, si al diseñar, de alguna manera, unas leyes de transformación que entienda esos símbolos numéricos y/o matemáticos, y efectivamente produzca una información musical (audible o representable), se estará diseñando un sistema que permita, en una primera instancia, crear ideas musicales, a partir de unos conceptos matemáticos, de forma 'automatizada'.

Así, se enlaza, de una manera lógica y natural, el desarrollo de la música y la revolución tecnológica, en concreto con la del computador. Este vínculo se produce también debido al extraordinario esfuerzo por parte de una persona a la hora de realizar esa labor de transformación, esfuerzo que se ve reducido a unas milésimas de segundo por un computador.

Por otro lado, detractores de la música automática y basada en matemáticas, afirman que el compositor no realiza ninguna labor creativa, tan sólo introducir una serie de parámetros en el computador, y esperar a obtener un resultado. Como todo, hay que decir que existen diferentes tendencias.

La creación proviene de un proceso de transformación, la cuál está diseñada conforme a un sistema de reglas numéricas que se apoyan en diferentes campos de las matemáticas, siendo uno de los importantes el de la Estadística y la aleatoriedad (con sus correspondientes teorías del caos y fractales). ¿Qué significa esto último? Muy sencillo: El autor que diseña las reglas de transformación elige en cada momento qué parte del control desea tener, y qué parte del proceso se deja a la máquina, con criterios estadísticos y aleatorios. De este modo, se hace posible tener música automática 'pura' (aquella en la que influye poco o nada el compositor) por llamarla de alguna manera, música automática 'mixta' (aquella en la que el compositor participa activamente en el proceso de creación, esto es, la mayoría de las posibles opciones en cuanto a timbre, ritmo y estructura tonal o atonal están previamente conceptuadas), y un tercer conjunto, que es el considerar la computación como una herramienta de 'inspiración', o de estructuración motívica, en la cual el producto de salida del computador no es sino un mero boceto de una composición más extensa, ya sea desde el punto de vista tonal o estructural.

2.6 MÚSICA FRACTAL[10]

Otra aplicación de los fractales aparentemente irrelevante es la música fractal. Ciertas músicas, incluyendo las de Bach, Beethoven y las de Mozart, cumplen con las propiedades fractales.

Una simple pieza de la música de Beethoven, la "Primera Escossaien" muestra líneas con un análisis formal; son un total de 32 unidades o compases que se dividen en 2 secciones de 16 unidades cada una: A (1 a 16), B (17 a 32), y a la vez se dividen en 2 períodos: A (1 y 2) y B (3 y 4), que se fraccionan en 2 partes: (a y a') compuestas por 4 unidades (1, 2, 3, 4) agrupadas cada una de a 2 (1y2) que serán definidas y diferenciadas con letras y números. Presenta esta melodía un balance simétrico de 2 partes. Cada sucesiva subdivisión de 32 unidades es una unidad binaria y una réplica más pequeña de la unidad más larga que la contiene.

Sus divisiones forman motivos y pequeñas unidades de estructuras binarias autosimilares. "Períodos" y "Secciones" son construcciones de pequeñas unidades acumuladas dentro de un gran grupo binario (A y B). La forma binaria es, probablemente la más corriente en la

[10] Tomado de www.oni.escuelas.edu.ar/olimpi99/fractales/musica.htm

música encontrándose distintas variedades de esta forma. Incluso la forma ternaria (ABA) está constituida sobre motivos binarios y también las formas sonatas. Cada sección (A y B) son construcciones con unidades binarias. Desde entonces sinfonías y conciertos usan formas sonatas teniendo el mismo tipo de estructura jerárquica. La forma de "Escossaien" de Beethoven no es una excepción entre las composiciones musicales, muchas composiciones son estructuradas de manera similar con unidades de 4 y de 2 compases.

Otro ejemplo es el Scherzo, construido sobre un compás de 3 tiempos, tiene un motivo claramente identificable: 2 corcheas y una negra como acorde desplegado en forma descendente. El principal motivo consiste en 2/8 (dos corcheas) agregadas en conjunto en 1/4 (una negra) como acorde. Este motivo ternario (porque está compuesto por 2 corcheas y una negra (2+1=3)), es repetido en todas las partes del Scherzo. El Scherzo tiene formas ternarias y binarias en varias escalas. Estas combinaciones son abundantes en toda la literatura musical. Las formas fractales fueron generadas al usar una simple fórmula repetitiva y una "semilla" o "motivo". Esta semilla es la forma básica usada para generar un fractal. Todas las partes de un árbol pueden ser hechas por una línea geométrica básica y una simple regla de transformación.

3. COMPORTAMIENTOS MUSICALES FRECUENTES.

Existen, en el campo de la teoría musical, algunos comportamientos o transformaciones usadas frecuentemente en la interpretación de piezas musicales, de carácter popular y académico que pueden ser descritas a través del lenguaje matemático.

En ciertas ocasiones es posible escuchar frases, en intérpretes o tal vez en directores de grupos u orquestas, como: "un tono más arriba", "toquemos por re menor" ó "bájele un tono", entre muchas más. Dichas frases han de referirse a las alturas de las notas de la obra (o canción en el caso de la música popular) que se desea interpretar; así el subir o bajar el tono de alguna nota hará referencia a la alteración de la frecuencia de la nota propuesta inicialmente, por una frecuencia determinada en una escala determinada. Tal transformación es conocida como transportar, lo que gráficamente se observa como sigue:

- ✓ Transportar:

frase inicial:

frase transportada:

Del mismo modo se conocen otros comportamientos y/o alteraciones, de los que se puede decir son frecuentes, como lo son la inversión retrograda, la retrogradación, la inversión tonal, la inversión real y una transformación muy usual, octavar, entre muchos más.

Así como muestra el ejemplo anterior, en seguida se proponen algunos ejemplos de los comportamientos musicales mencionados anteriormente:

- ✓ Octavar:

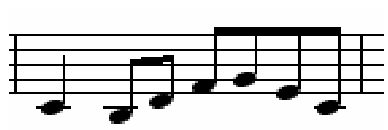
frase inicial:

frase octavada:

- ✓ Retrogradación:

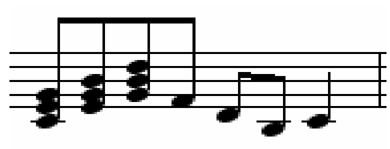
frase inicial:

frase retrograda:



- ✓ Inversión Tonal:

frase inicial:



inversión tonal:

- ✓ Inversión Real:

frase inicial:

inversión real:

Como se mencionó al inicio del capítulo los esquemas presentados se pueden escribir mediante lenguaje matemático, lo cuál será objeto de estudio posteriormente. Para esto es necesario establecer ciertos aspectos que serán fundamentales en el trabajo que sigue, como son la notación, el conjunto de frecuencias y las duraciones de cada una de los sonidos.

3.1 DE NOTACIÓN MUSICAL A NOTACIÓN MATEMÁTICA.

El asunto en cuestión es ¿cómo asignarle una notación musical a una obra, una canción o un movimiento determinado? La primera idea que surge es tomar un fragmento de una melodía y llevarla al lenguaje de conjuntos; a partir de allí observar características y propiedades que pueda tener determinada obra, o tal vez, qué operaciones se pueden realizar con éste conjunto para formar un nuevo conjunto que me ofrezca una nueva melodía.

Sea el fragmento 1 el conjunto en cuestión:

Fragmento 1.

En esta sección se presenta la parte inicial (tres primeros compases) de una partitura cualquiera en 4/4 y con su armadura que nota la tonalidad[11] de la melodía, *Do mayor*. El sistema acentual dado por el indicador de compás no es tenido en cuenta en esta etapa, puesto que al aplicar algunas de las funciones (trabajo que se verá más adelante) es muy posible que el conjunto de las duraciones cambie radicalmente y no tendrá ya relación alguna con su métrica original, por lo tanto se dice que se va a trabajar sin barras de compás.

[11] La organización de los sonidos que se usan en la música occidental tradicional corresponden al *sistema temperado*, el cual tiene como base a Pitágoras pero ha sido ajustado con el paso del tiempo para darle paso a la tonalidad. Esta palabra define la organización y las relaciones que hay alrededor de una nota llamada *tónica* y que a su vez le da el nombre a la tonalidad. Es así que decimos *Sol mayor* cuando las notas están organizadas y funcionado de cierta manera en relación directa con la nota *Sol*.

Los elementos a tener en cuenta inicialmente serán: el orden dentro de la partitura, la altura específica (o frecuencia) y la duración de cada nota musical, para lo cual se realiza la asignación de ternas ordenadas (*a, b, c*) que representan los elementos anteriormente mencionados respectivamente. Para el conjunto A (el cual se refiere a las alturas específicas) se decidió trabajar con melodías a una sola voz, al menos por el momento, ya que es la forma más tradicional de un hecho musical; para el conjunto D se observaron cuáles son las figuras más sobresalientes dentro de movimientos usuales musicales y entonces se formó el conjunto sin incluir más duraciones; y el conjunto O define la ubicación de cada una de las notas dentro de la obra.

En este sentido es posible notar un conjunto de sonidos que se interpretan secuencialmente ya sea de una obra clásica, una canción popular u otros sucesos musicales como una coral. Por tanto se define P como el conjunto de notas de una pieza musical determinada y cada elemento de P se define como la terna ordenada anteriormente descrita, de la siguiente manera:

$$(a, b, c)$$

Orden Altura Duración

De este modo se notan los siguientes conjuntos:

$$O = \{a \,/\, 1 \leq a \leq n,\ a, n \in N\}$$

Los elementos de éste conjunto definen el orden de la terna en la partitura, o mejor, la posición de la nota en ella.

Para construir A, el conjunto que determina la altura de la terna ordenada, se ha decidido considerar las alturas específicas que produce un piano con un número natural, donde DO_1 es la nota más grave y DO_8 la más aguda, como muestra la siguiente tabla:

Tabla 3. Asignación numérica a notas musicales.

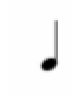
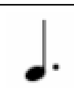
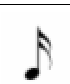
1	**DO 1**	**25**	**DO 3**	**49**	**DO 5**	**73**	**DO 7**
2	**DO# 1**	**26**	**DO# 3**	**50**	**DO# 5**	**74**	**DO# 7**
3	**RE 1**	**27**	**RE 3**	**51**	**RE 5**	**75**	**RE 7**
4	**RE# 1**	**28**	**RE# 3**	**52**	**RE# 5**	**76**	**RE# 7**
5	**MI 1**	**29**	**MI 3**	**53**	**MI 5**	**77**	**MI 7**
6	**FA 1**	**30**	**FA 3**	**54**	**FA 5**	**78**	**FA 7**
7	**FA# 1**	**31**	**FA# 3**	**55**	**FA# 5**	**79**	**FA# 7**
8	**SOL 1**	**32**	**SOL 3**	**56**	**SOL 5**	**80**	**SOL 7**
9	**SOL# 1**	**33**	**SOL# 3**	**57**	**SOL# 5**	**81**	**SOL# 7**
10	**LA 1**	**34**	**LA 3**	**58**	**LA 5**	**82**	**LA 7**
11	**LA# 1**	**35**	**LA# 3**	**59**	**LA# 5**	**83**	**LA# 7**
12	**SI 1**	**36**	**SI 3**	**60**	**SI 5**	**84**	**SI 7**
13	**DO 2**	**37**	**DO 4**	**61**	**DO 6**	**85**	**DO 8**
14	**DO# 2**	**38**	**DO# 4**	**62**	**DO# 6**	**0**	**SILENCIOS**
15	**RE 2**	**39**	**RE 4**	**63**	**RE 6**		
16	**RE# 2**	**40**	**RE# 4**	**64**	**RE# 6**		
17	**MI 2**	**41**	**MI 4**	**65**	**MI 6**		
18	**FA 2**	**42**	**FA 4**	**66**	**FA 6**		
19	**FA# 2**	**43**	**FA# 4**	**67**	**FA# 6**		
20	**SOL 2**	**44**	**SOL 4**	**68**	**SOL 6**		
21	**SOL# 2**	**45**	**SOL# 4**	**69**	**SOL# 6**		
22	**LA 2**	**46**	**LA 4**	**70**	**LA 6**		
23	**LA# 2**	**47**	**LA# 4**	**71**	**LA# 6**		
24	**SI 2**	**48**	**SI 4**	**72**	**SI 6**		

Luego:

$$A = \{\, b \,/\; 0 \le b \le 85,\ b \in N \}$$

Ahora para el conjunto D (este define la duración de la terna), es necesario asignar a cada figura musical un número natural de la siguiente manera:

Tabla 4. Asignación numérica a figuras musicales.

 $\mapsto$ **1**	 $\mapsto$ **7**
 $\mapsto$ **2**	 $\mapsto$ **8**
 $\mapsto$ **3**	 $\mapsto$ **9**
 $\mapsto$ **4**	 $\mapsto$ **10**
 $\mapsto$ **5**	 $\mapsto$ **11**
 $\mapsto$ **6**	

Igualmente se tiene que:

$$D = \{ c \,/\, 1 \leq c \leq 11, c \in N\}$$

Y así decir que $(a, b, c) \in O \times A \times D$ y $P \subseteq O \times A \times D$.

En el ejemplo del **fragmento 1** se observan 21 notas en tres compases diferentes, lo cual indica 21 ternas distintas de una melodía. De acuerdo a la notación establecida anteriormente, las 7 ternas del primer compás son: (1, 25, 9), (2, 29, 9), (3, 32, 9), (4, 30, 9), (5, 27, 9), (6, 24,9) y (7, 25, 7)

De lo anterior se obtiene que para cada altura es posible asignar 11 duraciones distintas, lo que da como resultado 946 combinaciones diferentes; ahora bien, la primera coordenada indica el orden de cada nota, lo cual permite conocer la cantidad de notas que se interpretan en alguna obra; teniendo en cuenta esto último es posible encontrar melodías a una sola voz (con este parámetro se trabajará inicialmente) de 250, 300 o más notas.

Con esto es permisible formar un gran conjunto, que para el caso inicial de este estudio sería el conjunto referencial, integrado por todas las posibles combinaciones de ternas ordenadas. Se puede entonces empezar con un referencial que involucre una cantidad no mayor de 500 notas, así la cantidad de elementos del conjunto es no mayor de 473.000. Este conjunto se ha de llamar **Conjunto Referencial Musical** (M), el cual se pretende extender más adelante para una cantidad n de notas, lo cual permite trabajar con un conjunto de orden $946n$.

3.2 EL CONJUNTO M.

Sean O, A y D los conjuntos determinados por la asignación de orden, altura y duración de una nota en una obra musical respectivamente, donde:

$$O = \{a / 1 \leq a \leq n,\ a, n \in N\},$$

$$A = \{b / 0 \leq b \leq 85,\ b \in N\} \text{ y}$$

$$D = \{c / 1 \leq c \leq 11,\ c \in N\}$$

El conjunto O x A x D = M.

3.3 ALGUNAS FUNCIONES IMPORTANTES.

Comportamientos usuales dentro de la música como octavar o transportar algunos sonidos, o tal vez cambiar fragmentos pequeños de una melodía, facilitan en ocasiones la interpretación de ciertos temas para algún instrumento determinado (comúnmente para interpretaciones vocales). Del mismo modo, herramientas como inversiones o retrogradaciones ayudan a encontrar elementos de juicio para la composición musical.

En torno a esto se pretende describir, mediante ciertas funciones, dichos comportamientos, funciones que servirán de apoyo para transformaciones de algunas obras y como instrumentos de apoyo en la composición musical.

3.3.1 Función de Transportar.

Transportar hace referencia a la alteración de las frecuencias en un rango determinado y dirigidas hacia unas frecuencias preestablecidas (frecuencias usadas de manera universal), en este sentido la función de transportar que afecta a cada nota se producirá de modo tal que dicha nota tomará valores a una distancia no mayor de 11 unidades, de acuerdo a la tabla de frecuencias convenida anteriormente. Así por ejemplo RE_7 no puede convertirse en un RE_6 o en RE_8 sino que puede tomar valores definidos entre estos rangos.

Esta herramienta permite la interpretación de melodías -sí tomamos como referencia la música popular- en diferentes tonalidades para el caso de los cantantes. Como es sabido existen diversos registros para las voces masculinas como para las femeninas, esto indica la capacidad de producir sonidos graves, medios o agudos; luego un cantante con registro de tenor puede emitir sonidos más agudos que un cantante con registro de barítono.

Igualmente sucede con los registros de las voces femeninas y sobre todo en la comparación de las voces femeninas con las de los hombres.

Por tanto, se define la función de Transportar (**t**) como sigue:

$$\mathbf{t}: \quad P \quad \rightarrow \quad T(P) \subseteq O \times A \times D$$

$$(a, b, c) \mapsto \quad (a, b+k, c), \textit{ para algún } |k| < 12,\ k \in Z$$

de modo tal que $1 \leq b+k \leq 85$.

En la música popular de la región andina, música folclórica enriquecida con tamboras, quenas, zampoñas y charangos, entre muchos más de los instrumentos característicos de este género, se han elaborado composiciones dirigidas a la naturaleza, a los dioses de las comunidades indígenas, a los ritos, a las situaciones de sus festejos y sobre todo a las mujeres concebidas dentro de este marco social. La melodía del ejemplo que se muestra a continuación, es la perteneciente a uno de estos temas y, que además, es muy famosa dentro de la música popular.

La letra de la primera estrofa de la canción es la siguiente:

"Poco, poco a poco me has querido
Poco a poco me has amado,
Y al final todo ha cambiado,
Asenita de mi amor..."

La frase que se ha subrayado es la frase que se menciona en el siguiente fragmento:

Haciendo uso de la notación matemática se obtienen 14 ternas sin contar los silencios finales del tercer compás. Este fragmento será llamado F_1, de tal modo que:

$F_1 = \{(1, 29, 7), (2, 29, 8), (3, 29, 8), (4, 29, 9), (5, 29, 8), (6, 27, 11), (7, 25, 8), (8, 32, 8),$
$(9, 29, 7), (10, 29, 7), (11, 29, 9), (12, 29, 9), (13, 29, 9), (14, 27, 9)\}$

La función de transportar permite modificar las alturas específicas, teniendo en cuenta que esta operación se realiza para cada una de las ternas con la misma magnitud, es decir, sí la primera terna se transporta 5 unidades en alguna dirección, las demás ternas también se transportarán cinco unidades en la misma dirección.

Entonces, a cada terna $(a, b, c) \in F_1$ se le asigna $(a, b+k, c)$ para $k = -5$, luego se tiene que:

$T(F_1) = \{(1, 24, 7), (2, 24, 8), (3, 24, 8), (4, 24, 9), (5, 24, 8), (6, 22, 11), (7, 20, 8), (8,27,8),$
$(9, 24, 7), (10, 24, 7), (11, 24, 9), (12, 24, 9), (13, 24, 9), (14, 22, 9)\}$

Lo cual se traduce como sigue:

Como todo el sistema tiene el mismo movimiento se dice que se transportó la tonalidad original de la canción, desde La menor hasta Mi menor. Al tomar en cuenta la escala cromática, se ve que el intervalo entre La y Mi es de 5 semitonos hacia abajo.

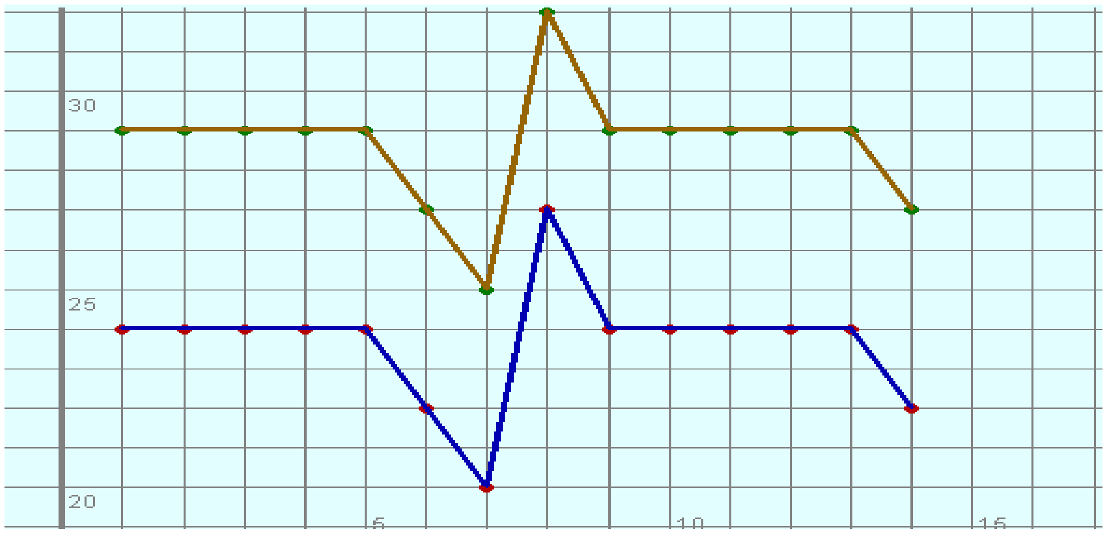


Figura 8. Gráfica del comportamiento de transportar.

Sin tomar en cuenta la duración de cada terna del fragmento observado, se observan movimientos paralelos de la melodía original y la melodía transportada. Los puntos verdes indican las notas de la melodía original y los puntos rojos son el resultado de aplicar la función de transportar, con k = -5.

3.3.2 Función de Octavar.

Otro de los comportamientos usuales es el de octavar, sobretodo en modelos armónicos o en combinaciones de notas con el fin de priorizar alguna de ellas; es común encontrar corales en donde se usa también esta función con el objeto de interpretar polifonías enmarcadas dentro de una tonalidad específica.

Cuando se habla de octavar una nota, se hace referencia al hecho de duplicar la frecuencia de ésta, precisamente la nota que se producirá es la misma pero con una frecuencia más amplia. Para el caso de una cuerda de guitarra, si ésta se ejecuta libremente (al aire) equivale a la mitad de la frecuencia que si ésta es excitada en el traste número 12; esto quiere decir que la cantidad de oscilaciones de la cuerda ejecutada al aire es menor que la cantidad de oscilaciones cuando la cuerda se pisa en el 12º traste.

En la tabla de frecuencias propuesta en este estudio se describen 8 octavas, referida a las teclas de un piano, y el conjunto de notas de cada octava está notado mediante un subíndice, por ejemplo la octava superior de MI_4 es MI_5 y la octava inferior es MI_3.

Así, octavar una nota será sumar o restar 12 unidades a ésta, luego definimos la función octavar (**o**) así:

$$\mathbf{o}: \quad P \quad \rightarrow \quad O(P) \subseteq O \text{ x } A \text{ x } D$$

$$(a,\ b,\ c) \quad \mapsto \quad (a,\ b+k,\ c),\ |k| = |12n|,\ k \in \mathbf{Z}$$

de modo tal que $1 \leq b+k \leq 85$.

Como se ha establecido, las frecuencias a tener en cuenta van desde DO_1 hasta DO_8, esto implica que las frecuencias de la primera octava sólo puedan octavarse hacia arriba y las frecuencias de la última octava sólo puedan octavarse hacia abajo.

Un ejemplo de la transformación obtenida a partir de la función octavar es el siguiente. En el caso de la función anterior (transportar) se usó una canción de la música popular andina titulada “Poco a Poco”, en este ejemplo también se hará uso de ella para luego establecer una comparación entre la melodía original y las melodías transformadas a partir de las dos funciones mencionadas hasta el momento.

Al asignarle la notación a la melodía se obtiene el conjunto F_1, de tal modo que la imagen de este al aplicarle la función de octavar será $O(F_1)$. Ahora, la coordenada que ha sufrido la modificación es la correspondiente a la altura, si se toma $|k| = |12n|$ con $n = 1$, se dice que se ha subido una octava la melodía y se obtiene:

Gráficamente se observa un comportamiento como el siguiente:

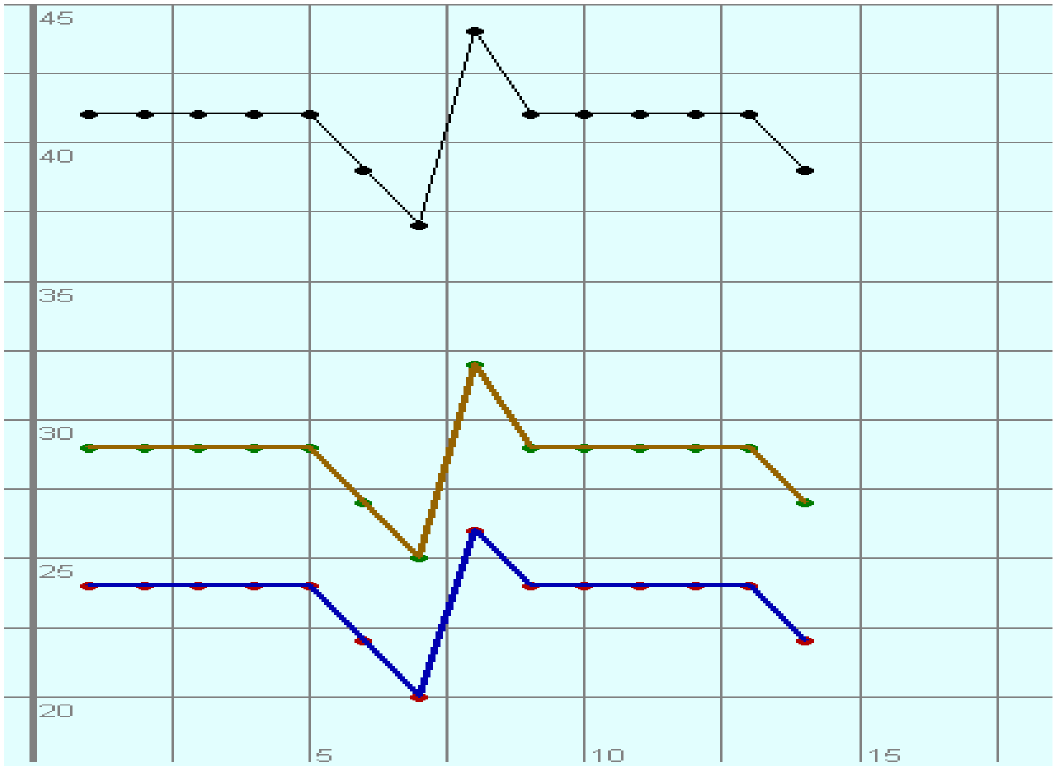


Figura 9. Gráfica del comportamiento de octavar.

El eje vertical indica las frecuencias específicas de acuerdo a la convención de la tabla y el eje horizontal indica la posición de las notas dentro de la partitura, se puede decir que es la posición en el tiempo. No se ha tenido en cuenta la duración de cada nota para realizar la gráfica, ya que la única modificación ha sido la referente a las alturas, y por ende los resultados obtenidos son estructuralmente idénticos en cuanto a duración.

La curva amarilla indica la melodía original, la curva azul es el resultado de aplicar la función transportar y la negra cuando la original ha sido octavada.

3.3.3 Función de Retrogrado.

La retrogradación es el proceso de realizar una lectura en dirección opuesta a la dirección original de una melodía cualquiera. Por ejemplo, si se tiene una secuencia de notas como DO-MI-FA-RE-SOL-SI, la retrogradación implica que se haga la siguiente lectura: SI-SOL-RE-FA-MI-DO, simplemente se tiene un cambio de posición de las ternas de P.

Entonces, para un conjunto P de orden n realizamos la siguiente operación, la terna $(1, b_1, c_1)$ pasará a tomar la posición n , la terna $(2, b_2, c_2)$ tomará la posición n -1, la terna $(3, b_3, c_3)$ tomará la posición $n - 2$ y así sucesivamente hasta la terna (n, a_n, b_n), la cual tomará la posición 1.

Así definimos la función de retrogradación (**r**):

$$\mathbf{r}: \quad P \quad \rightarrow \quad R(P) \subseteq O \times A \times D$$

$$(a, b, c) \quad \mapsto \quad (n - a + 1, b, c), \; n \text{ el orden de P.}$$

Con las funciones anteriormente mencionadas es posible transformar melodías en otras nuevas y tener una herramienta para la composición de piezas musicales después de un proceso de selección adecuado de ternas ordenadas (trabajo que se hará más adelante). Aunque aún falta la descripción de otros comportamientos a partir de funciones, se establece en este momento una primera proposición que involucra la composición de tales funciones.

3.3.4 Proposición 1.

Las composición de las funciones **t**, **o** y **r** definidas sobre un conjunto P (conjunto definido a partir de la notación musical) es conmutativa. Es decir, sea z una terna ordenada de P, entonces:

1. $\mathbf{t}(\mathbf{o}(z)) = \mathbf{o}(\mathbf{t}(z))$
2. $\mathbf{t}(\mathbf{r}(z)) = \mathbf{r}(\mathbf{t}(z))$
3. $\mathbf{o}(\mathbf{r}(z)) = \mathbf{r}(\mathbf{o}(z))$
4. $\mathbf{t}(\mathbf{o}(\mathbf{r}(z))) = \mathbf{o}(\mathbf{t}(\mathbf{r}(z)))$

Demostrar tales igualdades no tiene mayor complicación; se hará la demostración de la primera identidad, las demás son ejercicios de rutina.

- ✓ $\mathbf{t}(\mathbf{o}(z)) = \mathbf{o}(\mathbf{t}(z))$

Dem//.

Sea $z = (a, b, c) \in$ P. $\mathbf{o}(z) = (a, b+12n, c)$ y $\mathbf{t}(\mathbf{o}(z)) = (a, (b+12n)+k, c)$ para algún $k \in \mathbf{Z}$ y $n \in \mathbf{Z}$. De acuerdo a la definición ordinaria de la suma en $\mathbf{Z}$ y las propiedades asociativa y conmutativa, se tiene que $(b+12n)+k = (b+k)+12n$, luego $(a, (b+12n)+k) = (a,(b+k)+12n)$ y $\mathbf{t}(\mathbf{o}(z)) = \mathbf{o}(\mathbf{t}(z))$.

3.3.5 Proposición 2.

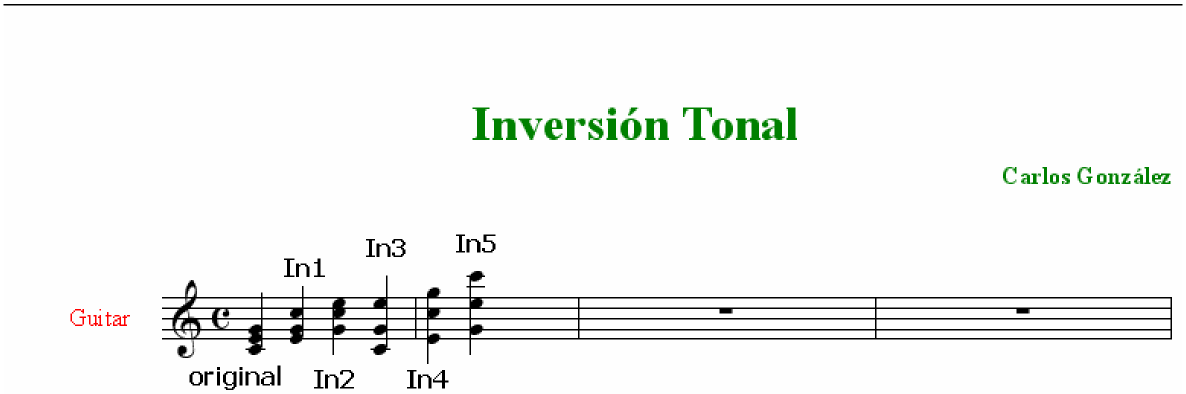
Las funciones de transportar, octavar y de retrogrado con la operación de composición de funciones cumplen con la propiedad asociativa.

3.3.6 Función de Inversión Tonal.

Este estudio se enfoca primordialmente dentro de comportamientos melódicos a una sola voz, pero en este caso se abre un paréntesis que puede apoyar otros estudios basados en secuencias armónicas y que se pretende estudiar posteriormente en un trabajo diferente al realizado en esta monografía. Se incluye esta función en este estudio porque es muy posible encontrar dentro de las obras que se transformarán movimientos que incluyan segmentos de armonías y además permite transformar el acompañamiento de cada melodía a tratar.

La tonalidad como ya se mencionó, depende de una nota que tiene la jerarquía y los movimientos de la melodía se encuentran estructuralmente ligados a dicha nota. Asimismo la construcción de los acordes se enmarcan dentro de esta misma estructura y las inversiones de estos acordes deben encajar dentro de la misma tonalidad.

Cuando se habla de inversiones de acordes, en algunos casos se busca enfatizar sobre una nota o tal vez buscar un color armónico que cause diversas sensaciones, claro que todo se encuentra sujeto a la creatividad del compositor. El concepto de inversión tonal de acordes es básicamente una permutación de las notas que conforman el acorde sumado al proceso de octavar algunas de ellas, pero primordialmente es la permutación. Aquí únicamente se trabajará con acordes de 3 o 4 notas. Así por ejemplo una inversión de Do mayor formado por las notas Do-Mi-Sol, será Mi-Do-Sol. Como lo que se va a transformar son acordes de una partitura cualquiera, se toma a A como el conjunto de todos los acordes de una obra determinada y su transformación serán los mismos acordes en diferente orden, la imagen de A será $In_t(A)$.



La figura muestra el acorde original y sus respectivas inversiones. En este caso las ternas con las que se ha venido trabajando toman otra forma, pues la coordenada que determina las alturas específicas pasará a ser una terna o una *n*-pla de 4 componentes así:

$$(a, (b_1, b_2, b_3), c) \text{ ó } (a, (b_1, b_2, b_3, b_4), c)$$

Para el caso del acorde de tres notas $(a, (b_1, b_2, b_3), \mathrm{c})$ la función lo transforma en cualquiera de las siguientes inversiones:

$$(a, (b_1, b_3, b_2), \mathrm{c}), (a, (b_2, b_1, b_3), \mathrm{c}), (a, (b_2, b_3, b_1), \mathrm{c}), (a, (b_3, b_2, b_1), \mathrm{c}), (a, (b_3, b_1, b_2), \mathrm{c})$$

Si el acorde es de cuatro notas, se observan 24 inversiones.

3.3.7 Función de Inversión Real.

La función de inversión real respeta los intervalos definidos en una secuencia de notas, pero en una dirección opuesta a la dirección propuesta inicialmente. Así por ejemplo, si la secuencia es Do-Re-Fa, entonces la inversión real será Do-Sib-Sol.

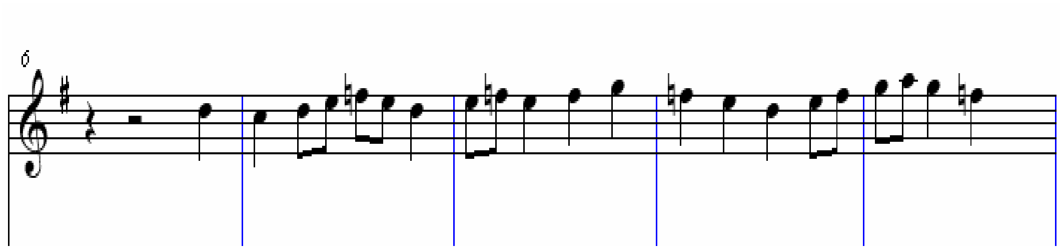
Se define la inversión real de la siguiente manera:

$$\mathrm{In}_R: \quad P \quad \rightarrow \quad \mathrm{In}_R(P)$$

$$(a, b, c) \quad \mapsto \quad \begin{cases} (a,b,c), a = 1 \\ (a, |b^1 - b| + b^1, c), a \neq 1 \wedge b^1 > b \\ (a, b^1 - |b^1 - b|, c), a \neq 1 \wedge b^1 < b \end{cases}$$

La nota b^1 es la primera nota de la partitura o del fragmento que se desea invertir. El siguiente es un fragmento de una coral de Bach, que se trabajará en el siguiente capítulo cuando se definan algunas funciones especiales para la transformación de obras y su posterior análisis. El fragmento y su inversión real son los siguientes:

Inversión Real



3.3.8 Función Modo Mayor a Menor.

Existen 12 tónicas mayores y menores posibles, cada una estructurada de acuerdo a una nota predominante. En la música occidental se han definido 12 notas diferentes de acuerdo al temperamento, de tal forma que para cada nota se establecen diferentes modos como el modo mayor, menor, jónico, eólico entre otros; en este estudio se tratará básicamente con los modos mayor y menor.

A cada tónica se le asignará un número natural así:

Do	Re ***b***	Re	Mi***b***	Mi	Fa	Fa#	Sol	La ***b***	La	Si ***b***	Si
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

Como *b* es la componente referida a la altura, la terna asignada se notará como sigue:

$$(a, b_K, c), \quad 1 \leq K \leq 12, \; K \in \mathbf{Z}$$

Esto ha de indicar el centro tonal de la melodía, así por ejemplo (a, b_3, c) señala que la tónica de la obra es Re Mayor. La finalidad de la función es cambiar hacia el modo menor, sin alterar el centro tonal, entonces se debe identificar los tonos III y VI de la escala en cuestión, luego la función se define:

$$Ma_m: \quad P \quad \rightarrow \quad Ma_m(P) \subseteq O \times A \times D$$

$$(a, b_K, c) \mapsto (a, b_K - 1, c)$$

Tal que $b_K = k + 4 + 12p$ ó $b_K = k + 9 + 12p$, para $0 \leq p \leq 7$ y $1 \leq K \leq 12$.

3.3.9 Función Modo Menor a Mayor.

Como se mencionó en la función anterior es necesario identificar los tonos III y VI de la escala, igualmente se hace en esta función, pues estos son los mismos tonos que se han de transformar. Luego se define la función:

$$Me_M: \quad P \quad \rightarrow \quad Me_M(P) \subseteq O \times A \times D$$

$$(a, b_K, c) \mapsto (a, b_K + 1, c)$$

Tal que $b_K = k + 3 + 12p$ ó $b_K = k + 8 + 12p$, para $0 \leq p \leq 7$ y $1 \leq K \leq 12$.

3.3.10 Función Tonal Mayor a Pentatónica Mayor.

Las escalas pentatónicas ofrecen un color bastante interesante a las interpretaciones melódicas, en algunas ocasiones lleva al mundo del jazz y del blues y es una herramienta rica para la práctica de improvisaciones. Las escalas pentatónicas referidas a una jerarquía tonal no son únicas en cada centro, pero en este caso se va a hablar de una sola escala pentatónica mayor formada por los tonos: I-II-III-V y VI de la escala respectiva.

Luego se define la función de transformación de una escala Mayor a una escala pentatónica Mayor de la siguiente manera:

$$\mathrm{Ma_P}: \quad P \quad \rightarrow \quad \mathrm{Ma_P}(P) \subseteq O \times A \times D$$

$$(a, b_K, c) \quad \mapsto \quad (a, b_K - 1, c), b_K = K + 5 + 12p$$

$$(a, b_K, c) \quad \mapsto \quad (a, b_K - 2, c), b_K = K + 11 + 12p,$$

Tal que $0 \leq p \leq 7$ y $1 \leq K \leq 8$.

3.3.11 Función Tonal Menor a Pentatónica Menor.

Como escala pentatónica menor se ha de tomar la formada por los tonos: I- III- IV- V y VII bemol. Se define la función de la siguiente manera:

$$\mathrm{Me_P}: \quad P \quad \rightarrow \quad \mathrm{Me_P}(P) \subseteq O \times A \times D$$

$$(a, b_K, c) \mapsto (a, b_K + 1, c), b_K = K + 2 + 12p$$

$$(a, b_K, c) \mapsto (a, b_K - 1, c), b_K = K + 8 + 12p \text{ ó } b_K = K + 11 + 12p$$

Tal que $0 \leq p \leq 7$ y $1 \leq K \leq 8$.

4. TRANSFORMACIONES DE OBRAS MUSICALES.

Hasta el momento se ha creado un ambiente en donde las matemáticas pueden jugar un papel muy interesante frente al hecho de obtener nuevas técnicas de composición musical. Es así como se han definido algunas funciones con el fin de transformar obras clásicas y temas de música popular, y en este sentido se puede buscar un procedimiento que permita construir funciones que cambien radicalmente melodías (obviamente que suenen bien o que se obtenga un sonido interesante). Inicialmente se recurrirá a la composición de las funciones descritas en el capítulo anterior y posteriormente, se construirán unas nuevas pero que recojan algo esencial de las funciones previas.

El primer estudio se va a realizar sobre la primera voz de la coral de Bach titulada: "An Wasserflüssen Babylon".

Partitura 1. 1ª voz de An Wasserflüssen Babylon.

De acuerdo a la notación ya establecida el conjunto V_1, es el conjunto formado por todas las ternas de la primera voz de la coral, por tanto se tiene que:

V_1

(1, 39, 7)	(21, 32, 7)	(41, 39, 7)	(61, 32, 9)
(2, 41, 7)	(22, 34, 7)	(42, 41, 7)	(62, 30, 7)
(3, 39, 9)	(23, 36, 7)	(43, 39, 9)	(63, 29, 7)
(4, 37, 9)	(24, 37, 9)	(44, 37, 9)	(64, 27, 7)
(5, 36, 9)	(25, 36, 9)	(45, 36, 7)	(65, 27, 9)
(6, 37, 9)	(26, 34, 7)	(46, 37, 4)	(66, 25, 9)
(7, 39, 7)	(27, 36, 7)	(47, 36, 7)	(67, 32, 7)
(8, 37, 9)	(28, 34, 7)	(48, 41, 7)	(68, 34, 7)
(9, 36, 9)	(29, 32, 7)	(49, 41, 7)	(69, 36, 5)
(10, 37, 7)	(30, 32, 9)	(50, 41, 7)	(70, 37, 9)
(11, 36, 7)	(31, 34, 9)	(51, 34, 7)	(71, 39, 7)
(12, 34, 7)	(32, 36, 7)	(52, 39, 7)	(72, 37, 9)
(13, 36, 7)	(33, 37, 7)	(53, 37, 7)	(73, 36, 9)
(14, 37, 7)	(34, 39, 7)	(54, 36, 7)	(74, 34, 7)
(15, 39, 7)	(35, 41, 7)	(55, 34, 7)	(75, 36, 9)
(16, 37, 9)	(36, 36, 7)	(56, 37, 7)	(76, 37, 9)
(17, 36, 9)	(37, 38, 7)	(57, 36, 7)	(77, 34, 4)
(18, 34, 9)	(38, 39, 7)	(58, 34, 7)	(78, 32, 7)
(19, 32, 9)	(39, 36, 9)	(59, 32, 7)	
(20, 34, 7)	(40, 37, 9)	(60, 34, 9)	

En seguida se define cuales funciones se van a aplicar al conjunto V_1. Como ya se dijo, la composición de funciones va a ser la herramienta que permita establecer cambios, no tan bruscos en la melodía original, teniendo en cuenta que las transformaciones no tocan el carácter rítmico. También se debe tener en cuenta que si se quiere jugar con la composición de funciones, se puede encontrar muchas opciones para las transformaciones, aquí solamente se van a usar cinco de ellas para realizar un pequeño análisis y posteriormente aplicar las funciones que son tal vez más interesantes en otros temas y entonces realizar una comparación de los cambios sufridos en cada melodía.

Las funciones son:

1. $\mathbf{f_1 = t(o(V_1))}$
2. $\mathbf{f_2 = Ma_m(t(V_1))}$
3. $\mathbf{f_3 = Me_p(Ma_m(t(V_1))}$
4. $\mathbf{f_4 = In_R(r(V_1))}$
5. $\mathbf{f_5 = Ma_p(r(V_1))}$

Para la primera función ($\mathbf{f_1}$)**,** se toma n = -1 en el caso de $\mathbf{o(V_1)}$, como ya se sabe la función de octavar se definió de tal forma que $k = 12n$; y para el caso de aplicar **t**, se toma $k = 3$.

Luego se obtiene el siguiente conjunto:

$\mathbf{f_1(V_1)}$

(1, 30, 7)	(13, 27, 7)	(25, 27, 9)	(37, 29, 7)
(2, 32, 7)	(14, 28, 7)	(26, 25, 7)	(38, 30, 7)
(3, 30, 9)	(15, 30, 7)	(27, 27, 7)	(39, 27, 9)
(4, 28, 9)	(16, 28, 9)	(28, 25, 7)	(40, 28, 9)
(5, 27, 9)	(17, 27, 9)	(29, 23, 7)	(41, 30, 7)
(6, 28, 9)	(18, 25, 9)	(30, 23, 9)	(42, 32, 7)
(7, 30, 7)	(19, 23, 9)	(31, 25, 9)	(43, 30, 9)
(8, 28, 9)	(20, 25, 7)	(32, 27, 7)	(44, 28, 9)
(9, 27, 9)	(21, 23, 7)	(33, 28, 7)	(45, 27, 7)
(10, 28, 7)	(22, 25, 7)	(34, 30, 7)	(46, 28, 4)
(11, 27, 7)	(23, 27, 7)	(35, 32, 7)	(47, 29, 7)
(12, 25, 7)	(24, 28, 9)	(36, 27, 7)	(48, 32, 7)

(49, 32, 7)	(57, 27, 7)	(65, 18, 9)	(73, 27, 9)
(50, 32, 7)	(58, 25, 7)	(66, 16, 9)	(74, 25, 7)
(51, 25, 7)	(59, 23, 7)	(67, 23, 7)	(75, 27, 9)
(52, 30, 7)	(60, 25, 9)	(68, 25, 7)	(76, 28, 9)
(53, 28, 7)	(61, 23, 9)	(69, 27, 5)	(77, 25, 4)
(54, 27, 7)	(62, 21, 7)	(70, 28, 9)	(78, 23, 7)
(55, 25, 7)	(63, 20, 7)	(71, 30, 7)	
(56, 28, 7)	(64, 28, 7)	(72, 28, 9)	

Lo que se traduce como[12]:

Partitura 2. An Wasserflüssen transformada por f_1.

[12] En el CD anexo se encuentra la melodía original de la primera voz junto a algunas de sus transformaciones. También se encuentran las 4 líneas melódicas originales y una de sus transformaciones.

$f_2(V_1)$

(1, 35, 7)	(21, 28, 7)	(41, 35, 7)	(61, 28, 9)
(2, 36, 7)	(22, 30, 7)	(42, 36, 7)	(62, 26, 7)
(3, 35, 9)	(23, 31, 7)	(43, 35, 9)	(63, 24, 7)
(4, 33, 9)	(24, 33, 9)	(44, 33, 9)	(64, 23, 7)
(5, 31, 9)	(25, 31, 9)	(45, 31, 7)	(65, 23, 9)
(6, 33, 9)	(26, 30, 7)	(46, 33, 4)	(66, 21, 9)
(7, 35, 7)	(27, 31, 7)	(47, 31, 7)	(67, 28, 7)
(8, 33, 9)	(28, 30, 7)	(48, 36, 7)	(68, 30, 7)
(9, 31, 9)	(29, 28, 7)	(49, 36, 7)	(69, 31, 5)
(10, 33, 7)	(30, 28, 9)	(50, 36, 7)	(70, 33, 9)
(11, 31, 7)	(31, 30, 9)	(51, 30, 7)	(71, 35, 7)
(12, 30, 7)	(32, 31, 7)	(52, 35, 7)	(72, 33, 9)
(13, 31, 7)	(33, 33, 7)	(53, 33, 7)	(73, 31, 9)
(14, 33, 7)	(34, 35, 7)	(54, 31, 7)	(74, 30, 7)
(15, 35, 7)	(35, 36, 7)	(55, 30, 7)	(75, 31, 9)
(16, 33, 9)	(36, 31, 7)	(56, 33, 7)	(76, 33, 9)
(17, 31, 9)	(37, 34, 7)	(57, 31, 7)	(77, 30, 4)
(18, 30, 9)	(38, 35, 7)	(58, 30, 7)	(78, 28, 7)
(19, 28, 9)	(39, 31, 9)	(59, 28, 7)	
(20, 30, 7)	(40, 33, 9)	(60, 30, 9)	

Aquí se tomó k = -4. Por tanto se traduce en:

Partitura 3. An Wasserflüssen transformada por f_2.

$f_3(V_1)$

(1, 35, 7)	(10, 33, 7)	(19, 28, 9)	(28, 41, 7)
(2, 35, 7)	(11, 31, 7)	(20, 30, 7)	(29, 28, 7)
(3, 35, 9)	(12, 31, 7)	(21, 28, 7)	(30, 28, 9)
(4, 33, 9)	(13, 31, 7)	(22, 31, 7)	(31, 31, 9)
(5, 31, 9)	(14, 33, 7)	(23, 31, 7)	(32, 31, 7)
(6, 33, 9)	(15, 35, 7)	(24, 33, 9)	(33, 33, 7)
(7, 35, 7)	(16, 33, 9)	(25, 31, 9)	(34, 35, 7)
(8, 33, 9)	(17, 31, 9)	(26, 31, 7)	(35, 35, 7)
(9, 31, 9)	(18, 31, 9)	(27, 34, 7)	(36, 31, 7)

(37, 34, 7)	(48, 35, 7)	(59, 28, 7)	(70, 33, 9)
(38, 35, 7)	(49, 35, 7)	(60, 31, 9)	(71, 35, 7)
(39, 31, 9)	(50, 35, 7)	(61, 28, 9)	(72, 33, 9)
(40, 33, 9)	(51, 31, 7)	(62, 25, 7)	(73, 31, 9)
(41, 35, 7)	(52, 35, 7)	(63, 23, 7)	(74, 31, 7)
(42, 36, 7)	(53, 33, 7)	(64, 23, 7)	(75, 31, 9)
(43, 35, 9)	(54, 31, 7)	(65, 23, 9)	(76, 33, 9)
(44, 33, 9)	(55, 31, 7)	(66, 21, 9)	(77, 31, 4)
(45, 31, 7)	(56, 33, 7)	(67, 28, 7)	(78, 28, 7)
(46, 33, 4)	(57, 31, 7)	(68, 31, 7)	
(47, 31, 7)	(58, 31, 7)	(69, 31, 5)	

Partitura 4. An Wasserflüssen transformada por f_3.

$f_4(V_1)$

(1, 32, 7)
(2, 30, 4)
(3, 27, 9)
(4, 28, 9)
(5, 30, 7)
(6, 28, 9)
(7, 27, 9)
(8, 25, 7)
(9, 27, 9)
(10, 28, 5)
(11, 30, 7)
(12, 32, 7)
(13, 39, 7)
(14, 37, 9)
(15, 37, 7)
(16, 35, 7)
(17, 34, 7)
(18, 32, 9)
(19, 30, 9)
(20, 32, 7)
(21, 30, 7)
(22, 28, 7)
(23, 27, 7)
(24, 30, 7)
(25, 28, 7)
(26, 27, 7)
(27, 25, 7)
(28, 30, 7)
(29, 23, 7)
(30, 23, 7)
(31, 23, 7)
(32, 28, 7)
(33, 27, 4)
(34, 28, 7)
(35, 27, 9)
(36, 25, 9)
(37, 23, 7)
(38, 25, 7)
(39, 27, 9)
(40, 28, 9)
(41, 25, 7)
(42, 26, 7)
(43, 28, 7)
(44, 23, 7)
(45, 25, 7)
(46, 27, 7)
(47, 28, 7)
(48, 30, 9)
(49, 32, 9)
(50, 32, 7)
(51, 30, 7)
(52, 28, 7)
(53, 30, 7)
(54, 28, 9)
(55, 27, 9)
(56, 28, 7)
(57, 30, 7)
(58, 32, 7)
(59, 30, 7)
(60, 32, 9)
(61, 30, 9)
(62, 28, 9)
(63, 27, 7)
(64, 25, 7)
(65, 27, 7)
(66, 28, 7)
(67, 30, 7)
(68, 28, 7)
(69, 27, 7)
(70, 28, 9)
(71, 27, 9)
(72, 25, 7)
(73, 27, 9)
(74, 28, 9)
(75, 27, 9)
(76, 25, 9)
(77, 23, 7)
(78, 25, 7)

Partitura 5. An Wasserflüssen transformada por f_4.

$f_5(V_1)$

(1, 32, 7)	(9, 36, 9)	(17, 30, 7)	(25, 36, 7)
(2, 34, 4)	(10, 36, 5)	(18, 32, 9)	(26, 36, 7)
(3, 36, 9)	(11, 34, 7)	(19, 34, 9)	(27, 39, 7)
(4, 36, 9)	(12, 32, 7)	(20, 32, 7)	(28, 34, 7)
(5, 34, 7)	(13, 24, 9)	(21, 34, 7)	(29, 41, 7)
(6, 36, 9)	(14, 27, 9)	(22, 36, 7)	(30, 41, 7)
(7, 36, 9)	(15, 27, 7)	(23, 36, 7)	(31, 41, 7)
(8, 39, 7)	(16, 29, 7)	(24, 34, 7)	(32, 36, 7)

(33, 36, 4)
(34, 36, 7)
(35, 36, 9)
(36, 36, 9)
(37, 41, 7)
(38, 39, 7)
(39, 36, 9)
(40, 36, 9)
(41, 39, 7)
(42, 38, 7)
(43, 36, 7)
(44, 41, 7)
(45, 39, 7)
(46, 36, 7)
(47, 36, 7)
(48, 34, 9)
(49, 32, 9)
(50, 32, 7)
(51, 34, 7)
(52, 36, 7)
(53, 34, 7)
(54, 36, 9)
(55, 36, 9)
(56, 36, 7)
(57, 34, 7)
(58, 32, 7)
(59, 34, 7)
(60, 32, 9)
(61, 34, 9)
(62, 36, 9)
(63, 36, 7)
(64, 39, 7)
(65, 36, 7)
(66, 36, 7)
(67, 34, 9)
(68, 36, 7)
(69, 36, 7)
(70, 36, 9)
(71, 36, 9)
(72, 39, 7)
(73, 36, 9)
(74, 36, 9)
(75, 36, 9)
(76, 39, 9)
(77, 41, 7)
(78, 39, 7)

Partitura 6. An Wasserflüssen transformada por f_5.

Las corales de Bach han sido la inspiración de muchos compositores, y evidentemente, este gran músico ha sido admirado por muchos otros como Beethoven y Mozart; en su época la admiración era esencialmente por su virtuosismo como instrumentista y no tanto como compositor, pero hoy se reconoce su valioso aporte implícito en cada una de sus obras.

La coral es básicamente una melodía utilizada para cantar los himnos en las iglesias, generalmente al unísono. El nombre se aplica, habitualmente, a los himnos de ese estilo introducidos por Martín Lutero en la iglesia alemana protestante durante el siglo XVI.

Lutero apreció el gran poder que tiene la música para despertar la emoción religiosa y tomó la determinación de llevar a cabo sus reformas en la música del servicio eclesiástico. Seleccionó melodías simples a partir de múltiples fuentes, tanto sacras como profanas, y las arregló para que sirvieran de himnos y salmos en el servicio religioso. Algunos de ellos son antiguos himnos en latín, mientras que otros tienen su origen en materiales tomados del folclore alemán. Entre las primeras colecciones de corales destacan las publicadas por Lutero y su amigo, el compositor alemán Johann Walther en 1524. Los corales originariamente eran acompañados al órgano, que actuaba a modo de contrapunto. Con el tiempo, esos acompañamientos de los organistas se hicieron cada vez más elaborados.

A finales del siglo XVII se convirtieron en uno de los rasgos principales de la cantata de iglesia. Johann Sebastian Bach escribió cerca de 250 cantatas de ese tipo, usando los corales de muchas maneras diferentes. Por ejemplo, en la cantata Ein' feste Burg (1730, que se basa en la melodía del coral de Lutero del mismo nombre), el primer movimiento presenta la melodía como una frase a un tiempo en la orquesta, mientras que el coro entona una textura de contrapunto en notas cortas. En el tercer movimiento, este procedimiento se invierte: el coro canta la melodía, mientras que el acompañamiento instrumental se mueve rápidamente. El último movimiento es una simple armonización a cuatro voces del coral, en acordes cada vez más espaciados. Este tipo de armonización a modo de himno es uno de los rasgos más característicos de la música de la iglesia luterana, así como una parte de la cantata en la que la congregación se unía para cantar solamente la melodía.

Otra forma musical basada en la elaboración del contrapunto del coral es el preludio coral. Se trata de una composición para órgano cuyos orígenes se remontan a las improvisaciones de los organistas sobre melodías conocidas durante los servicios religiosos. Constaban de dos tipos principales. En el primero, cada frase de la melodía se presentaba por turno, entretejiéndose con otras melodías en una intrincada textura que a menudo exploraba terrenos armónicos inusuales. En el segundo tipo, las notas iniciales de la melodía se usaban como base de una fantasía mucho más libre y sin estructura. Una vez más, J. S. Bach compuso las mejores páginas de esta forma. Su colección más conocida es un grupo de 46 piezas reunidas bajo el título de Orgelbüchlein.

Haciendo una observación de la coral que se está estudiando, “An Wasserflüssen”, a partir de la aplicación de las funciones $\mathbf{f_1}$ a $\mathbf{f_5}$, se nota que los resultados obtenidos tienen cada uno sus características específicas, evidentemente de acuerdo a la función que se aplicó. La melodía original referida a la primera voz de la coral, se encuentra en una tonalidad Mayor (G) con un indicador de compás en 4/4, se nota un desplazamiento por las notas que se encuentran rotuladas en tal tonalidad con ciertos parámetros de cromatismo. Es ciertamente un representante de las obras no sólo de Bach, sino de la música de los siglos XVII y XVIII, de carácter pintoresco y alegre que invita a la danza de vestido pomposo y antifaces.

La primera función es tan sólo una operación para el desplazamiento de las frecuencias, la melodía conserva su estructura y se puede decir que los movimientos obtenidos son paralelos a los movimientos de la melodía original, la transformación implica una interpretación en la tonalidad de A# y se conserva igualmente el carácter rítmico durante toda la pieza. Una función de este tipo es útil para acomodar las notas a los registros de los cantantes, pero en cuanto a su transformación es algo monótona y no provee movimientos interesantes diferentes a la tesitura de su escala.

La segunda función ataca, no solo la tonalidad de la pieza sino que busca dar una representación más solemne. Se conservan del mismo modo sus fragmentos de cromatismo y la jerarquía tonal, con el ajuste del nuevo modo. En comparación con la original, se siente la ausencia de esa alegría que acompaña al modo mayor y se caracteriza evidentemente el color triste de la melodía. Se convierte en una tonalidad de Re# menor y se es posible adaptar una serie de dinámicas que enriquecen la melodía, sacándola de una interpretación plana y sobretodo, al conjugarla con las demás líneas melódicas del sistema polifónico, se obtiene un conjunto interesante de escuchar.

La tercera función además de la transformación anterior, se caracteriza por enfatizar en una escala pentatónica, que conjuga los elementos mencionados de la segunda función con un poco de modernismo. Esta transformación es un poco más interesante de escuchar puesto que el conjunto de notas se desenvuelve dentro de parámetros más limitados, pero las dinámicas y el juego de combinaciones de la figuras pueden garantizar una estructura más moderna, aunque en este caso el carácter rítmico sea el mismo de la melodía original. Las escalas pentatónicas puede ser más exploradas y por eso se deben considerar a éstas como una opción para la composición y en este caso para la transformación de obras que proveen diversas estructuras funcionales de formas y colores en la interpretación.

La cuarta función inicialmente conserva su estructural tonal con una lectura opuesta a la lectura que se realiza de la melodía original, evidentemente es el resultado de la retrogradación; la cantidad de notas y compases no sufren alteración alguna dado que, como en las funciones anteriores, el esquema rítmico se conserva. Posteriormente ésta inversión provoca básicamente una composición de octavación hacia abajo para luego transportarla tres semitonos más arriba, la melodía se mueve entre los tonos de la escala de A# Mayor y se observa en gran supremacía la presencia de los movimientos entre tónica, dominante y subdominante; así como en la original se presentan algunos cortes de cromatismo y su carácter alegre de tonalidad mayor permanece.

La quinta función produce un sonido bastante interesante posiblemente por el mismo hecho de la tercera función, es decir, por la transformación hacia una escala pentatónica que provee esquemas más modernos que la música barroca y que son frecuentes en las improvisaciones del jazz, el blues y el latin entre otros ritmos. La tonalidad en G Mayor se conserva con cortes pequeños de cromatismo y se puede jugar con la velocidad de la interpretación, esto genera un esquema más dinámico ofreciendo la sensación, tal vez, de una música de aventura. La retrogradación, aunque conserve su jerarquía tonal, produce un sentimiento diferente al que provoca el movimiento original y al esquema característico de la función anterior, es decir, el desplazamiento entre la tónica, dominante y subdominante, encuentra una ruptura debido a que el subdominante desaparece, dando así paso a los movimientos entre tónica, tercera menor y dominante.

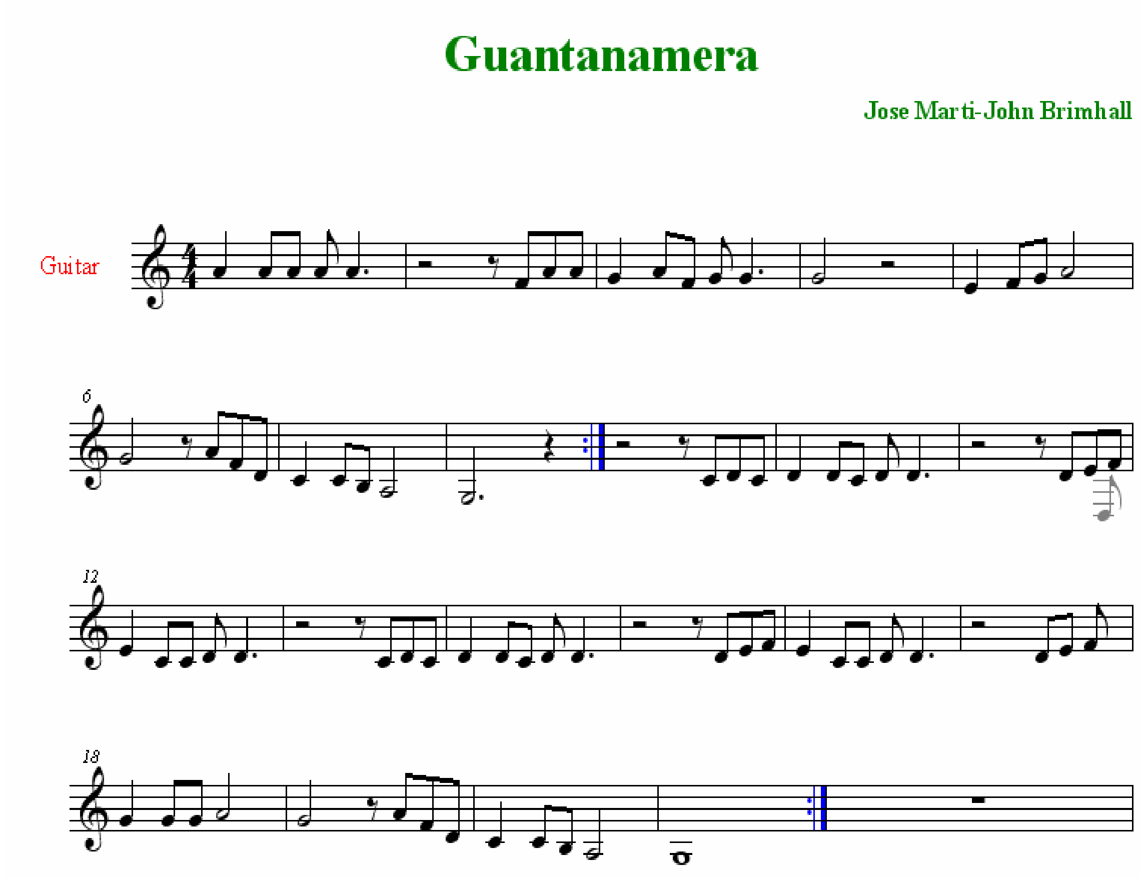
Se puede decir entonces que las transformaciones entre las cuales se encuentran involucradas las escalas pentatónicas, producen resultados interesantes debido a su modernidad, al uso en diversos estilos musicales, al uso en la música no sólo de occidente sino de los orientales quienes se ajustan más a la microtonalidad, al hecho del ensamble con dinámicas y con la interpretación a partir de diversos instrumentos que ofrecen una gama de colores atractivos, a los movimientos provocados en cada escala, también al hecho de ofrecer una melodía que suena bien (esto puede ser de carácter subjetivo), y al aporte de las matemáticas en este proceso de transformación que sin duda abre una ventana más a las técnicas de composición musical.

Hasta el momento se han aplicado las funciones a una pieza de música clásica (únicamente a la primera voz de la coral), sería bastante interesante ver que sucede cuando se aplican estas mismas funciones a temas de música popular.

En seguida se proponen varias melodías populares a las cuales se les aplicará las funciones $\mathbf{f_3}$ y $\mathbf{f_5}$, para luego realizar una comparación entre sus transformaciones. Las melodías a transformar serán: “Guantanamera”, música popular cubana por José Marti y John Brimhall; “Ayer me echaron del pueblo”, bambuco de José A. Morales e “Himno Invasor”, en ritmo Allegro por E. Loynaz del Castillo.

El proceso de transformación será ciertamente el mismo que en las transformaciones anteriores de la coral de Bach. Cabe mencionar que únicamente se está tocando el carácter melódico de la pieza musical; posteriormente se incurrirá un poco en el estudio del aspecto rítmico, aspecto que será una herramienta más para métodos de composición y que junto al aspecto melódico abarcarán un espacio amplio en las nuevas tendencias musicales.

En seguida se visualizan las melodías originales y sus respectivas transformaciones:

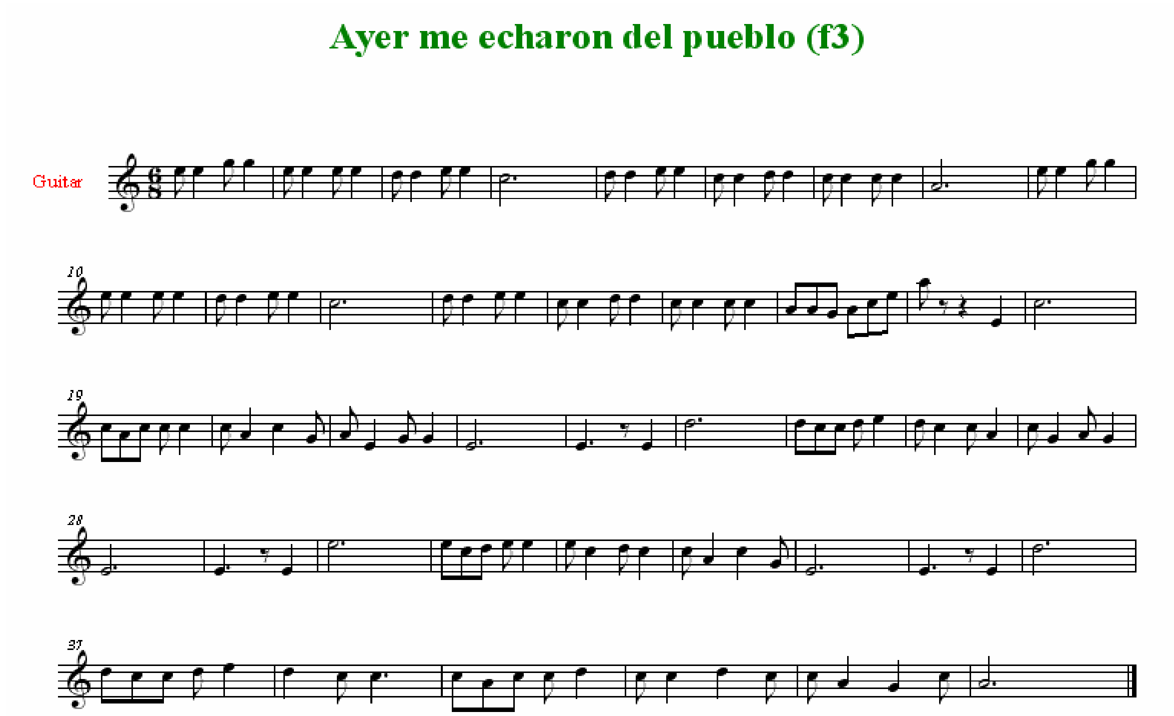


Partitura 7. Guantanamera.

Partitura 8. Guantanamera transformada por f_3.

Partitura 9. Guantanamera transformada por f_5.

Partitura 10. Ayer me echaron del pueblo.



Partitura 11. Ayer me echaron del pueblo transformada por f_3.

Ayer me echaron del pueblo (f5)

Partitura 12. Ayer me echaron del pueblo transformada por f_5.

Himno Invasor

E. Loynaz del Castillo

Partitura 13. Himno Invasor.

Partitura 14. Himno Invasor transformado por f_5.

Cabe mencionar que las piezas originales[13] anteriores se encuentran en una tonalidad mayor, de otro modo no tendría sentido aplicar las funciones $\mathbf{f_5}$ y $\mathbf{f_3}$. Los movimientos obtenidos por las funciones, evidentemente reflejan las sensaciones descritas en el análisis de las transformaciones de “An Wasserflüsen Babylon”, es decir, en $\mathbf{f_3}$ se obtiene un carácter triste combinado con un poco de modernismo, conservando ciertas estructuras melódicas y rítmicas de la pieza original, asimismo manteniendo un color muy parecido al producido por la secuencia melódica original cuando se escucha el conjunto completo; lo anterior es debido a que se mantiene el esquema rítmico, pues la transformación aún sigue en 6/8, y el armónico menor de una tonalidad mayor sugiere cambios no tan contundentes, proporcionando diferencias pequeñas respecto a cada uno de los tonos de cada escala.

[13] Para entender un poco mejor los análisis de las transformaciones, se recomienda al lector escuchar el CD anexo donde se encuentran algunas de las piezas musicales estudiadas con sus respectivas transformaciones. Del mismo modo se encuentran las melodías a una sola voz en tracks diferentes y las melodías con sus acompañamientos. En el archivo magnético se encuentran los links correspondientes sobre cada una de las melodías.

Respecto a la transformación obtenida por $\mathbf{f_5}$, la diferencia entre la melodía original y ésta es mucho más amplia. Se conserva la tonalidad de la pieza pero se limita la escala completa a una escala pentatónica, y sobretodo, los movimientos obtenidos son evidentemente distintos a los originales, pues la secuencia melódica y el carácter rítmico de la transformación se disponen básicamente por la lectura que se da a la partitura del tema en juego. En este sentido, se podría ver que el cambio sufrido debido al cambio de posiciones de cada una de las notas, es una transformación sobre las frecuencias y sobre la figura que ataca cada nota. El esquema rítmico cambia radicalmente.

De lo anterior se puede concluir que las transformaciones más interesantes posibles no sólo deben apuntar hacia un cambio melódico, sino también a una alternativa de esquemas rítmicos diferentes que produzca interacciones entre los sistemas ternarios, binarios y no convencionales dentro del campo musical. Teniendo en cuenta estas características, el trabajo posterior incluirá transformaciones de los esquemas rítmicos, al igual que de las secuencias melódicas, aplicadas a piezas musicales (incluyendo en algunas de ellas sus respectivos acompañamientos), y con las cuales se realiza un aporte a los métodos de composición.

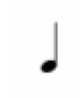
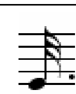
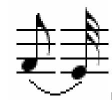
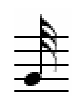
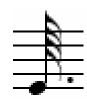
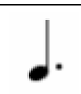
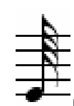
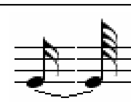
5. AJUSTES RÍTMICOS Y COMPOSICIÓN.

Dentro de las diferentes melodías que se han venido estudiando se establece el ritmo propio de cada una de éstas, así por ejemplo: "An Wasserflüssen Babylon" se enmarca en un compás de 4/4 al igual que "Guantanamera", o tal vez "Ayer me echaron del pueblo" que se encuentra en un compás de 6/8. Estos compases indican la acentuación de cada una de las notas y revelan el dinamismo a lo largo de sus interpretaciones; en este sentido y pensando en una transformación más completa de una determinada obra, es interesante observar los resultados que se obtienen cuando se realiza un cambio no sólo melódico sino en cuanto a la duración de cada una de sus notas.

Cada nota de una partitura cualquiera está representada por una terna (a, b, c), como ya se ha convenido; la coordenada $\boldsymbol{c}$ es la que indica la duración de la nota y es ésta la que nos interesa para los cambios rítmicos.

¿Qué pasa cuando sumamos una constante a dicha coordenada? En primer lugar se ampliará el conjunto de figuras; esto debido a que cuando se suma una constante a ciertas figuras que son bastante frecuentes, es posible encontrar resultados no definidos, como es el caso de la semicorchea. El nuevo conjunto de figuras es el siguiente:

Tabla 5. Nueva asignación numérica a figuras musicales.

 ↦ **1**	 ↦ **7**	 ↦ **13**
 ↦ **2**	 ↦ **8**	 ↦**14**
 ↦ **3**	 ↦ **9**	 ↦**15**
 ↦ **4**	 ↦ **10**	 ↦**16**
 ↦ **5**	 ↦ **11**	 ↦**17**
 ↦ **6**	 ↦ **12**	

De este modo, $1 \leq \boldsymbol{c} \leq 17$, $\boldsymbol{c} \in \mathbf{N}$. Las figuras más usadas y especialmente las de las melodías analizadas en este trabajo, son las etiquetadas desde el 4 al 13 de acuerdo a la tabla anterior, por esto se analizará el cambio rítmico cuando a $\boldsymbol{c}$ se suma una constante $\boldsymbol{p}$ tal que $-3 \leq \boldsymbol{p} \leq 3$, $\boldsymbol{p} \in \mathbf{Z}$. Del mismo modo se estudiarán las consecuencias de esta transformación para melodías en 3/4 y 4/4.

Se inicia con un compás de 3/4, por ejemplo la siguiente frase:

Como se puede observar las figuras sobresalientes son la corchea y la negra, etiquetadas 10 y 7 respectivamente. Ahora sea la función ***g***:

$$\boldsymbol{g}: \quad \mathrm{P} \quad \rightarrow \quad \mathrm{G(P)}$$

$$(a,\ b,\ c) \quad \mapsto \quad (a,\ b,\ c+\ p),\ -3 \leq \boldsymbol{p} \leq 3,\ \boldsymbol{p} \in \mathbf{Z}$$

Para ***p*** = 1, la transformación de la frase anterior será:

El indicador de compás cambia de 3/4 a 9/16, ya que inicialmente cada corchea es 1/8 de la fundamental y al sumarle 1, ésta pasa a ser una semicorchea con puntillo que equivale a 3/32 de la fundamental, entonces la suma de las figuras de cada compás llevan a encontrar un indicador de 9/16.

Lo que se puede observar en primera instancia es la estructura misma de cada compás, es decir, la transformación rítmica no cambia estructuralmente sino que cambia en cuanto a las duraciones de cada nota, esto supone una misma sensación rítmica a la de la melodía original pero con un incremento o disminución de la velocidad de acuerdo a la suma realizada. En el ejemplo anterior como se ha sumado una unidad, las figuras obtenidas tienen una menor duración que las originales, por esto la velocidad de la melodía se incrementa; asimismo si restamos unidades la melodía se hará más lenta.

La siguiente tabla muestra los cambios de indicadores de compás:

Tabla 6. Cambio de indicador de compás de 3/4.

De 3/4 a otros indicadores de compás	
Para $p = -1$	**3/4** se transforma en **15/16**
Para $p = -2$	**3/4** se transforma en **9/8**
Para $p = -3$	**3/4** se transforma en **3/2**
Para $p = 1$	**3/4** se transforma en **9/16**
Para $p = 2$	**3/4** se transforma en **15/32**
Para $p = 3$	**3/4** se transforma en **3/8**

Del mismo modo se opera con melodías en 4/4, así por ejemplo:

Son notorias las figuras negra, corchea y blanca; si se toma $p = -2$ se tiene:

En este caso como se han restado dos unidades, las figuras tienen una duración mayor y la melodía se hace más lenta.

Para el caso del compás de 4/4 se muestra la tabla de cambios de indicadores siguiente:

Tabla 7. Cambio de indicador de compás de 4/4.

De 4/4 a otros indicadores de compás	
Para ***p*** = -1	**4/4** se transforma en **20/16**
Para ***p*** = -2	**4/4** se transforma en **12/8**
Para ***p*** = -3	**4/4** se transforma en **4/2**
Para ***p*** = 1	**4/4** se transforma en **6/8**
Para ***p*** = 2	**4/4** se transforma en **5/8**
Para ***p*** = 3	**4/4** se transforma en **4/8**

Con estas transformaciones es posible describir cambios de velocidades de piezas musicales, y combinarlas ofrecerá una gama de dinámicas dentro de una misma melodía. Ahora, si se desea un cambio más abrupto en los esquemas rítmicos se puede jugar con frases musicales o con movimientos completos de una misma obra y entonces realizar transformaciones diferentes que permita jugar con diversas velocidades.

En fin, resulta entonces que utilizar algunas de las funciones descritas a lo largo de este trabajo posibilita transformar obras completamente en los esquemas rítmicos y melódicos, a continuación se presenta un resultado final de la composición de algunas funciones especiales para la transformación de piezas rítmica y melódicamente.

La siguiente es la melodía original de un Joropo acompañada del bajo fundamental, su compositor es Carlos Monroy y tiene por título “A sus horas”:

Partitura 15. A sus horas.

En seguida se aplicará la función $\mathbf{f_5(g)}$ para $\mathbf{p}$ = -2. Así se tiene entonces:

Partitura 16. A sus horas transformada por f_5(g).

De la misma manera se procederá con “An Wasserflüssen Babylon” utilizando las 4 líneas melódicas, entonces se aplicará la misma función anterior, **f_5(g)**. La coral original es:

Partitura 17. An Wasserflüssen 4 líneas melódicas.

Al aplicar $\mathbf{f_5(g)}$ con $\mathbf{p} = 1$, se tiene:

An Wasserflüssen Babylon f5(g)

Partitura 18. An Wasserflussen transformada por $f_5(g)$.

Los resultados obtenidos se enmarcan en una tonalidad definida; se ha hecho un estudio dentro de la música tonal pero aún quedan muchos aspectos que juegan papeles muy importantes dentro de la música y dentro de los diferentes estilos que se conocen. Las ligaduras de expresión, de extensión, los caracteres que simbolizan las dinámicas y los signos de repetición son elementos que hacen parte de las expresiones en las interpretaciones de piezas musicales y merecen igualmente un estudio juicioso, que junto al realizado en esta monografía posibilitan la construcción de nuevos modelos en el campo de la composición musical.

Este estudio de transformaciones pretende proporcionar una herramienta más a la teoría musical y a los métodos de composición, que se podría pensar como una composición conciente y en algunos casos compleja, de acuerdo a la definición de las funciones que se van a aplicar. También cabe destacar que este método puede incursionar en los nuevos estilos de creaciones musicales como lo es el desarrollo de la música atonal y de la cual se ha hecho mención en los primeros capítulos.

Por último, es importante mencionar que éste es un primer estudio y se proyecta una profundización con el apoyo de sujetos interesados en el caso, o tal vez de comunidades académicas que se desempeñen en estos campos del conocimiento e igualmente se pretende hacer la incorporación del computador como instrumento que agiliza los cálculos necesarios en todo este proceso.

6. CONCLUSIONES.

La inclusión de los nuevos métodos de composición en la primera mitad del siglo XX han abierto la mentalidad de muchos músicos de nuestra época y la curiosidad en otros tantos; del mismo modo, aquellos estudiosos de las matemáticas y que tienen una afinidad con las teorías de la música, han encontrado en diversas ramas de las matemáticas así como en muchos de los conceptos propios de ésta, la excusa para innovar en los esquemas de composición y que ofrece determinadas estructuras aceptadas por las nuevas generaciones. Se desarrollan entonces nuevos sonidos basados en modelos matemáticos salidos un poco de la música convencional pero admitidos por las comunidades. El presente trabajo se ajusta en cierto modo a estas nuevas formas de hacer música, tal vez más conciente, con la idea de ofrecer un método diferente y que sea en determinada manera “tangible”, o mejor, posible, real y definitivamente utilizado.

La propuesta: “Las Matemáticas como una herramienta en la composición musical”, se ha establecido con el fin de proporcionar las bases de una nueva teoría de composición dentro del campo de la música; en este sentido, se ha construido una notación que puede ser extendida a obras completas donde se elaboran diferentes líneas melódicas y para diversas clases de instrumentos. Del mismo modo que se ha realizado este estudio, se hace la proyección de uno que incluya además de los aspectos musicales ya usados, otros aspectos que son bastante relevantes dentro de la música como son el uso de ligaduras, repeticiones, dinámicas y la inclusión de estructuras armónicas.

Los análisis realizados de las transformaciones de las piezas musicales evidencian su cambio estructural con la posibilidad de obtener nuevas melodías a partir de otras haciendo uso de funciones matemáticas, por esto se pretende realizar la difusión de los resultados obtenidos en el presente trabajo, así como de los procedimientos usados para tal fin, de modo que la comunidad académica realice nuevas propuestas o refuerce la realizada en esta monografía.

Dentro de los currículos de las carreras de música se han incorporado asignaturas sobre las cuales se realizan estudios de las últimas tendencias de composición, como es el dodecafonismo y el serialismo; teniendo en cuenta este aspecto y los escasos grupos de investigación (a nivel nacional) en estos temas, se ofrece un camino, que como ya se mencionó, da los primeros pasos para la formalización de una teoría de composición y puede llegar a establecerse dentro de los currículos de la carrera de música; del mismo modo se abre la brecha hacia la creación de grupos de investigación en el tema o en afines, y que consecuentemente se realice la incorporación hasta las salas de conciertos.

Los cálculos inmersos dentro de las transformaciones realizadas de cada obra podrían agilizarse con la ayuda de un software especializado; siguiendo esta idea es posible conformar un equipo de trabajo en el cual se desarrolle el campo de la programación para realizar dichas tareas y de este modo la labor sea más eficiente. En este sentido se obtiene una conjunción de áreas dirigidas hacia el mismo objetivo, la música, las matemáticas y la informática trabajan en cooperación para desarrollar un nuevo proyecto de investigación.

BIBLIOGRAFÍA

http://www.anarkasis.com

http://www.anarkasis.com/pitagoras/menu.htm.

http://www.apocatastasis.com/micro_afinac.htm

http://www.elementos.buap.mx/num44/htm/21.htm.

http://www.divulgamat.net/weborriak/TestuakOnLine/03-04/PG03-04-ibaibarriaga.pdf

http://www.dlsi.ua.es/~japerez/pub/pdf/mfsc2000.pdf

http://www.imaginarymagnitude.net

http://midimath.tucajon.com

http://www.monografias.com/trabajos7/dodec

http://www.musicaperuana.com

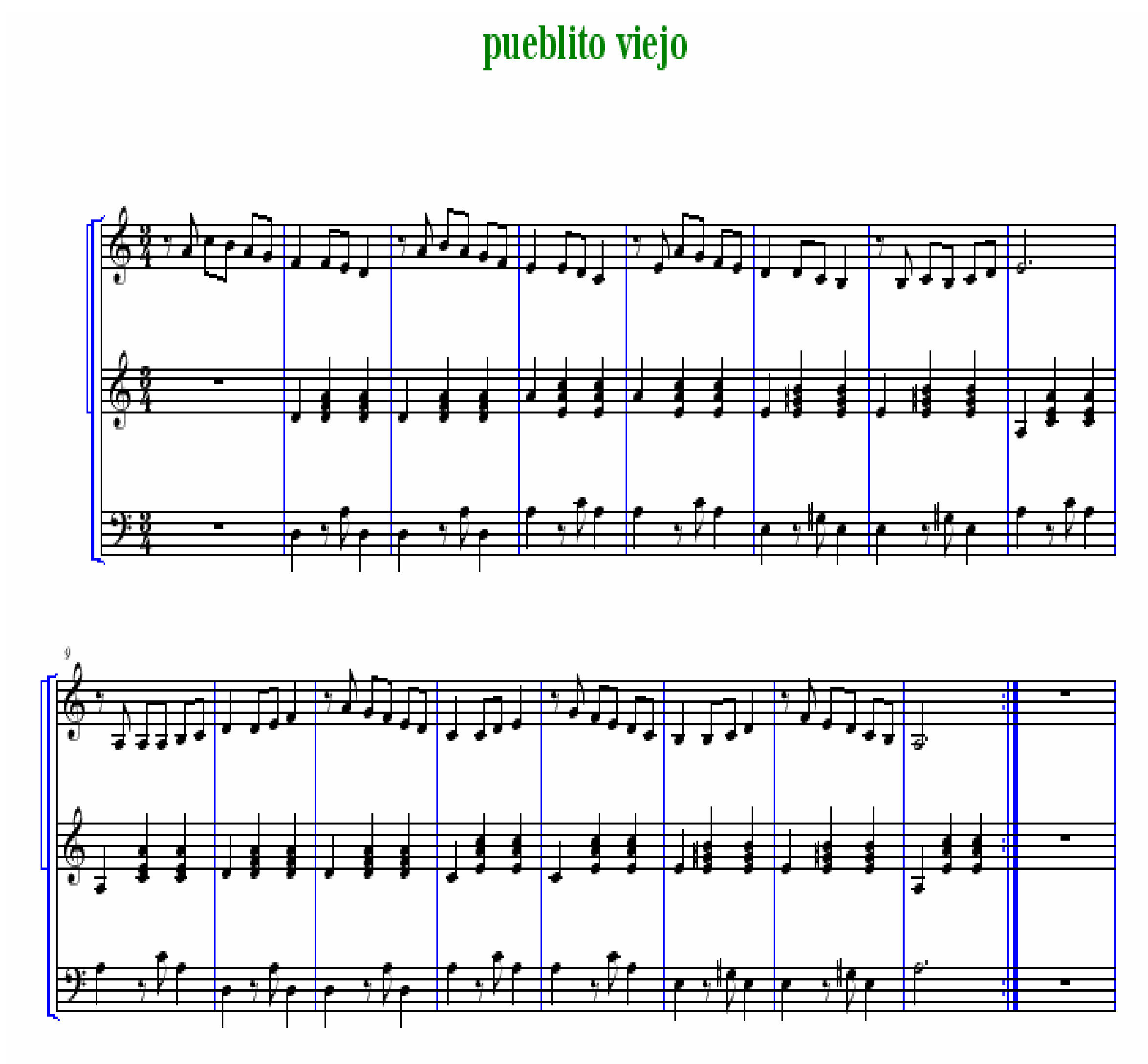
http://www.oni.escuelas.edu.ar/olimpi99/fractales/musica.htm

http://www.uvmnet.edu/investigacion/episteme/numero1-05/enfoque/a_musica.asp

http://www.wikilearning.com

ÍNDICE TEMÁTICO

Anexo A. Pueblito Viejo.



Anexo B. Pueblito Viejo transformado por la función h.

La función *h* se define por:

$$h:\quad P \quad\rightarrow\quad H(P)$$

$$(a,\, b,\, c) \;\rightarrow\; \mathrm{Ma}_{\mathrm{p}}\,(\,\mathrm{t}\,(\,\mathrm{Me}_{\mathrm{ma}}\,(\,\mathrm{r}\,(a,\, b,\, c{+}1))))$$

para la función t, se considera $k = 4$.