MONOGRAFÍA

“MÓDULO DE ACTIVIDADES PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL”

SANDRA HARLAIDY CABALLERO RODRÍGUEZ

2000140010

LILIANA PAOLA RAMOS RAMÍREZ

2000140041

ASESOR

MAURICIO BAUTISTA BALLÉN

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

PROYECTO CURRICULAR DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D. C.

2006

A mis padres por su dedicación y esfuerzo, y aquellos que me han brindado su apoyo en el transcurso de mi carrera.

SANDRA C.

A Dios por haberme inspirado. A mi Papá, a mi Mamá y a mi Hermano por todo su amor y colaboración, y a mi gran amiga y compañera de tesis por su apoyo incondicional.

LILIANA R.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN ANALÍTICO

TÍTULO: MÓDULO DE ACTIVIDADES PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL.

AUTOR: Caballero Rodríguez Sandra Harlaidy

Ramos Ramírez Liliana Paola

PUBLICACIONES: Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional. 2006.

UNIDAD PATROCINANTE: Universidad Pedagógica Nacional. Facultad de Ciencia y Tecnología. Departamento de Matemáticas.

PALABRAS CLAVES: Pensamiento variacional, situación problema, estándares básicos de calidad para la educación en el área de matemáticas.

DESCRIPCIÓN: En está monografía se presenta una propuesta para potenciar el desarrollo del pensamiento variacional. Parte del trabajo realizado por estudiantes de licenciatura en matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, durante la práctica Educativa, bajo la asesoria de la profesora Lorenza Lozano en el colegio Distrital República de Costa Rica. Se plantea un módulo de actividades reconocidas como situación problema y que pertenecen al pensamiento variacional, sistemas algebraicos y analíticos. Este componente del currículo tiene en cuenta una de las aplicaciones más importantes de la matemática: la formulación de modelos matemáticos, para diversos fenómenos.

FUENTES: Documentos relacionados con las situaciones didácticas, problema, estándares curriculares en matemáticas, fundamentos teóricos matemáticos sobre contenidos reconocidos en el pensamiento variacional.

CONTENIDOS: El trabajo comienza con un marco teórico, que se compone de un marco didáctico, identificación de una situación problema, un marco histórico de los contenidos matemáticos, un marco teórico del sustento matemático de la propuesta, las actividades propuestas y los anexos.

METODOLOGÍA: Inicialmente se revisó el material que surge a partir de la práctica de la cual se escogieron las actividades que colaborarían con la construcción de la propuesta final y estudio de bibliografía relativa a las situaciones didácticas, problema, teoría matemática sobre proporcionalidad, generalización, variable, ecuaciones y funciones. Luego se adaptaron cada uno de los talleres de tal forma que se reconocieran como situación problema y fueran clasificados en los estándares curriculares en matemáticas para los grupos de séptimo y noveno grado.

CONCLUSIONES:

- Los trabajos producidos a partir de la práctica docente de diversos estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas, permitieron organizar las actividades a partir del sustento didáctico referente a las situaciones didácticas según Brousseau, hacia las situaciones problema y el sustento matemático de proporcionalidad, expresiones algebraicas, ecuaciones y funciones. Se hizo la clasificación de cada una de las actividades, con logros, estándares y temáticas especificas, de donde surge la inquietud de que existe material productivo realizado en las prácticas educativas y que sería de gran provecho que no se quede solo para el momento y para la institución en donde se produjo.

- Las situaciones problema en la educación matemática pueden ser asumidas como un instrumento de enseñanza y aprendizaje que propicia niveles de conceptualización y simbolización de manera progresiva hacia la significación matemática.
- Se espera que el módulo propuesto sea una ayuda práctica y organizada referente al pensamiento desarrollado en está monografía enfocando cada una de las actividades al planteamiento de situaciones problema, utilizando aspectos numéricos, geométricos y analíticos.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo de grado se presenta un módulo basado en actividades que potencian el desarrollo del pensamiento variacional, sistemas algebraicos y analíticos, a partir de un material producido por estudiantes de práctica del Departamento de Matemáticas en los años 2003-2005 en el colegio Distrital Republica de Costa Rica, a quienes agradecemos su dedicación y compromiso con la educación a la hora de proponer actividades ya que permitieron generar ideas que fueron contextualizadas para originar situaciones problema, basadas en la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau, además del sustento teórico de los contenidos matemáticos que serán determinados en cada una de las actividades para la propuesta que se pretende plantear.

En la parte temática los contenidos se establecen en la educación básica secundaria (de sexto a noveno grado) referente al pensamiento variacional, en las cuales se realiza una fundamentación didáctica y se evalúa dicho pensamiento variacional como estructura, contestando ¿qué es? y ¿cómo se reconoce?, teniendo en cuenta el vinculo directo con los estándares de matemáticas, con su respectivo sustento respecto a los contenidos matemáticos. En el pensamiento variacional reconocemos una gran importancia en cuanto al desarrollo de la comprensión en matemáticas, ya que logra articular los campos matemáticos definidos en los estándares como lo es el pensamiento numérico, aleatorio, geométrico, y métrico, teniendo en cuenta que para la enseñanza de conceptos estructurados como el de función, se debe contar con herramientas que involucren a los estudiantes no solo en el qué hacer en clase, sino además en el cómo hacer, convirtiéndose en un proceso de aprendizaje dinámico, que desarrolle varios campos como la interpretación, la relación y la comprensión no sólo como concepto matemático.

JUSTIFICACIÓN

A partir de las actividades propuestas por estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, durante la práctica educativa, bajo la asesoría de la Profesora Lorenza Lozano en el Colegio Distrital Republica de Costa Rica, se pretende plantear un módulo basado en actividades que potencian el desarrollo del pensamiento variacional, sistemas algebraicos y analíticos, puesto que esté componente del currículo "*tiene en cuenta una de las aplicaciones más importantes de la matemática, como es la formulación de modelos matemáticos para diversos fenómenos. Por ello, este currículo debe permitir que los estudiantes adquieran progresivamente una comprensión de patrones, relaciones y funciones, así como desarrollar su capacidad de representar, analizar situaciones y estructuras matemáticas mediante símbolos algebraicos y gráficas apropiadas. Así mismo, debe desarrollar en ellos la capacidad de analizar el cambio en varios contextos y de utilizar modelos matemáticos para entender y representar relaciones cuantitativas*" (M.E.N, 2002).

La fundamentación didáctica tendrá como base el aprendizaje por medio de situaciones problema basadas en la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau, analizando la construcción del sentido de los conocimientos, la institucionalización de los saberes, asumiendo una epistemología para llegar a conocer el lugar del alumno, donde éste "*implica una interacción constante con situaciones problemáticas, interacción dialéctica (porque el sujeto anticipa y finaliza sus acciones) somete a revisión los conocimientos, los modifica, los completa o los rechaza para formar concepciones nuevas. Determinando así, que el objeto principal de la didáctica es justamente estudiar las condiciones que deben cumplir las situaciones o los problemas propuestos al alumno para favorecer la aparición, el funcionamiento y el rechazo de esas concepciones*" (Brousseau 1983).

Es así como se pretende brindar una herramienta sustentada para el trabajo escolar, dirigido a la enseñanza del pensamiento variacional, sistemas algebraicos y analíticos, en donde el docente tenga a su alcance una situación apropiada para favorecer el aprendizaje a partir del contenido que pretenda desarrollar y así poder propiciarlo adaptándolo a su medio.

OBJETIVO GENERAL

Conformar un módulo de actividades con el fin de orientar a docentes de educación básica secundaria en la articulación del pensamiento variacional, sistemas algebraicos y analíticos, a partir de actividades realizadas por estudiantes de la Universidad Pedagógica Nacional, durante la práctica educativa, bajo la asesoría de la Profesora Lorenza Lozano en el Colegio Distrital Republica de Costa Rica, de las cuales se hará el análisis pertinente para determinar si se adecúan a una situación problema basada en la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau, analizando la construcción del sentido de los conocimientos, la institucionalización de los saberes y asumiendo una epistemología. Además de sus contenidos matemáticos, se establecerá su pertinencia a partir de los estándares básicos de calidad para la educación en el área de matemáticas, específicamente en la educación básica secundaria.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

- Clasificar las actividades pertinentes al pensamiento variacional, sistemas algebraicos y analíticos a partir de los estándares básicos de calidad para la educación en el área de matemáticas.
- Analizar las actividades identificando el contenido temático que se maneja.
- Sustentar los contenidos para cada una de las actividades tanto matemática como didácticamente analizando la construcción del sentido de los conocimientos, la institucionalización de los saberes y asumiendo una epistemología.
- Organizar las actividades a partir del sustento matemático y didáctico.

1. MARCO TEÓRICO

1. 1 MARCO DIDÁCTICO

Los fundamentos didácticos que inspiran esta propuesta para la enseñanza del pensamiento variacional, sistemas algebraicos y analíticos tendrá como base el aprendizaje por medio de situaciones problema basadas en la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau, las cuales son apoyadas en fuentes directas o en análisis realizados por otros investigadores, de ésta forma se expondrán dichas percepciones y se harán algunas reflexiones sobre su valor en el campo de la enseñanza.

1.1.1 SITUACIONES DIDÁCTICAS

Los lineamientos curriculares de matemáticas (M.E.N; 1998), proponen como alternativa para lograr involucrar al estudiante en su proceso de aprendizaje, el diseño e implementación de situaciones problema, de modo que generen en los estudiantes procesos que faciliten la construcción del conocimiento. El profesor como profesional reflexivo, decide, diseña, implementa y experimenta estrategias de acción para lograr el aprendizaje de sus estudiantes, de tal manera que aprender matemáticas no se reduzca a recordar fórmulas, teoremas o definiciones, para resolver problemas mediante la imitación de explicaciones dadas por el profesor en clase o con apego a los métodos ilustrados en los textos escolares.

Uno de los puntos que permite la reflexión del profesor es proponer "*el estudio de las condiciones en las cuales se constituyen los conocimientos matemáticos; y se considera que el control de estas condiciones permitirá reproducir y optimizar los procesos de adquisición escolar del conocimiento*" (Cantoral, R. y Farfán, R. M., 2000). Los profesores deben ser transformadores y constructores del conocimiento, mas no reproductores de él, con el fin de optimizar los procesos que construya el estudiante a partir de planteamientos que cuestionan su conocimiento y, por tanto, que busquen transformarlo, razón que pone al descubierto la necesidad de utilizar ciertas herramientas que permitan acercarse a esta construcción. Una de las más importantes herramientas, en este sentido, es la didáctica, la cual "*no consiste en ofrecer un modelo para la enseñanza, sino en producir un campo de cuestiones que permita poner a prueba cualquier situación de enseñanza, corregir y mejorar las que se han producido, y formular interrogantes sobre lo que sucede*" (Brousseau, 1994). El campo de cuestiones sugerido por Brousseau debe ser una asociación entre buenas preguntas y buenas respuestas, donde se pide al profesor que realice las adaptaciones deseadas, con una elección acertada de los "problemas" que proponen. Estos son elegidos para que el estudiante actúe, hable, reflexione y evolucione por si mismo, así como se espera que "*el profesor al mismo tiempo que los problemas, debe dar los medios para resolverlos y mostrar que los medios ya enseñados permitirán construir la solución*" (Brousseau, 1986). Teniendo en cuenta que la labor no se limita solo a la construcción de preguntas, se debe vislumbrar un camino de respuesta de los estudiantes, donde se tenga en cuenta la pertinencia de unas y otras.

Se entiende "*el aprendizaje como una modificación del conocimiento que el alumno debe producir por sí mismo y que el maestro sólo debe provocar, donde la labor del maestro es hacer vivir el conocimiento, hacerlo producir por los alumnos como respuesta razonable a una situación familiar*" (Brousseau, 1994), considerando que el docente debe buscar situaciones apropiadas que den sentido a los conocimientos por enseñar, " *es necesario que la respuesta inicial que el alumno piensa frente a la pregunta planteada no sea la que queremos enseñarle: si ya fuese necesario poseer el conocimiento por enseñar para poder responder, no se trataría de una situación problema*" (Brousseau, 1994). Se espera entonces que las actividades planteadas busquen la construcción de un camino que les permita llegar a un fin y no que lleguen a éste antes de abordar el camino.

"*Las situaciones de aprendizaje son el portador casi exclusivo del conocimiento de los alumnos, esta idea surge de una concepción epistemológica bastante discutible, una idea empirista de la construcción del conocimiento: el alumno, colocado frente a* *una situación bien elegida, en contacto con un cierto tipo de realidades, debería construir su saber idéntico al saber humano de su época*" (Brousseau, 1994). Estas situaciones le permitirán al estudiante adquirir conocimiento, determinando que sus contenidos, todos sus conceptos, incluso los más generales y abstractos proceden únicamente de la experiencia y que ésta es su única base de valor.

Para esto se debe tener en cuenta que "*la hipótesis básica de la teoría de situaciones de Brousseau es que el conocimiento construido o usado en una situación es definido por las restricciones de esta situación, y que, por tanto, creando ciertas restricciones artificiales el profesor es capaz de provocar que los estudiantes construyan un cierto tipo de conocimiento*" (Sierpinska, A. y Lerman, S., 1996), es decir, se debe tener claro a la hora de plantear una situación problema las restricciones necesarias para que éstas en verdad provoquen el tipo de conocimiento deseado.

Un aspecto fundamental es tener claro que "*enseñar un conocimiento matemático concreto" es, en una primera aproximación, hacer posible que los alumnos desarrollen con dicho conocimiento una actividad matemática, lo que significa que formule enunciados y pruebe proposiciones, que construya modelos, lenguajes, conceptos y teorías, que los ponga a prueba e intercambie con otros, que reconozca los que están conformes con la cultura matemática y que tome los que son útiles para continuar su actividad*" (Chevallard, Y. Bosch, M. Hascon, J.). Se espera, entonces, que las actividades sean utilizadas en un medio pertinente, no como una actividad más sino como un proceso reflexivo y en construcción, que sea un precursor del uso del lenguaje matemático, como de la misma lógica.

Brousseau identificó varios tipos de situaciones didácticas, que, para él, crearían un esquema general de una "secuencia didáctica" o situaciones que provocan una "génesis artificial" de un concepto matemático" (Sierpinska, A. y Lerman, S., 1996).

Las situaciones se centran en:

1) Las situaciones de **acción**, en las que se genera una interacción entre los alumnos y el medio físico. Los alumnos deben tomar las decisiones que hagan falta para organizar su actividad de resolución del problema planteado.

2) Las situaciones de **formulación**, cuyo objetivo es la comunicación en informaciones entre alumnos. Para esto deben modificar el lenguaje que utilizan habitualmente, precisándolo y adecuándolo a las informaciones que deben comunicar.

3) Las situaciones de **validación**, en las que se trata de convencer a uno o varios interlocutores de la validez de las afirmaciones que se hacen. En este caso, los alumnos deben elaborar pruebas para demostrar sus afirmaciones. No basta la comprobación empírica de que lo que dicen es cierto; hay que explicar que necesariamente debe ser así.

4) Las situaciones de **institucionalización**, destinadas a establecer convenciones sociales. En estas situaciones se intenta que el conjunto de alumnos de una clase asuma la significación socialmente establecida de un saber que ha sido elaborado por ello en situaciones de acción, de formulación y de validación.

Finalmente "*se dice que un situación didáctica es especifica de un conocimiento concreto si cumple las dos condiciones siguientes:*

1) Es comunicable sin utilizar dicho conocimiento.

2) *La estrategia óptima del juego formal a la situación didáctica se obtiene a partir de la estrategia, utilizando el conocimiento en cuestión*" (Chevallard, Y. Bosch, M. Hascon, J.).

Se ha realizado una caracterización de las situaciones didácticas en las que es fundamental la implementación de las situaciones problema, las cuales permitirán a los estudiantes obtener herramientas para acceder a un conocimiento, por tanto, la siguiente tarea es caracterizar las situaciones problema.

1.1.2 SITUACIÓN PROBLEMA

Para Brousseau (1986), desde "*la concepción más general de la enseñanza, el saber es una asociación entre buenas preguntas y buenas respuestas*". Teniendo en cuenta esto, es importante diseñar "buenas preguntas" que sean los detonadores del aprendizaje; "*estas buenas preguntas constituyen las situaciones didácticas*" (Moreno, L. y Waldegg, G. 2002), donde el docente debe hacer una elección acertada de las preguntas que propone, para que así el estudiante logre acceder al conocimiento y no solo aprenda a repetir el saber de los libros de texto, siendo incapaz de utilizar los conocimientos aprendidos en nuevas situaciones.

A partir de situaciones problema se genera la construcción conceptual por parte de los estudiantes de aquello que se les desea enseñar, que además de integrar redes conceptuales y analizar las herramientas metodológicas, a través de las cuales se diseñan propuestas de aula, se constituyen en una herramienta importante para la implementación de los estándares básicos de matemáticas.

Según Brousseau "*saber matemáticas no es solamente aprender definiciones y teoremas para reconocer la ocasión de utilizarlas y aplicarlas; sabemos bien que hacer matemáticas implica ocuparse de problemas, sin perder de vista que resolver un problema no es más que parte del trabajo; encontrar buenas preguntas es tan importante como encontrarles solución. Una buena reproducción por parte del alumno de una actividad científica exigirá que actúe, formule, observe, construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que los intercambie con otros, que reconozca las que están conformes con la cultura, que tome las que son útiles*" (1993), es decir, la importancia de la situación problema es vincular de manera activa al estudiante en la elaboración teórica, y hacer del arte de conocer un proceso no acabado, permitiendo utilizar aspectos contextuales como herramientas dinamizadoras del aprendizaje, relacionando las conceptualizaciones particulares con las formas universales socialmente construidas.

"*Cuando las matemáticas se originan de forma natural a partir de situaciones problemas que tienen sentido para los niños y están regularmente relacionadas con su entorno, pasan a ser relevantes y ayudan al niño a ligar su conocimiento con distintos tipos de situaciones. A medida que el niño avanza de nivel, debe encontrarse con tipos más diversos y complejos de problemas que surjan tanto del mundo real como de contextos matemáticos*" (NCTM, 1989), siendo necesario que las actividades a proponer mantengan una complejidad adecuada al nivel de los estudiantes.

A continuación se darán algunas definiciones de "situación problema" para lograr definir las pautas mediante las cuales se hará la elección de cada uno de los talleres que conformaran el **"Módulo de actividades para el desarrollo del pensamiento variacional"**.

"*La situación problema constituye el punto de partida de las situaciones didácticas*" (Moreno, L. y Waldegg, G. 2002). Si en una situación problema se plantean buenas preguntas, esto hará que un determinado conocimiento aparezca como una solución optima a ésta, siendo esto parte fundamental en las situaciones didácticas. Donde se "*pone en juego, como instrumento implícito, los conocimientos que el alumno debe aprender. La situación problema se convierte en el detonador de la actividad cognitiva; para que esto suceda debe tener las siguientes características:*

- *Involucrar implícitamente los conceptos que se van a aprender.*
- *Representar un verdadero problema para el estudiante, pero a la vez debe ser accesible a él.*
- *Permitir al alumno utilizar conocimientos anteriores.*
- *Ofrecer una resistencia suficiente para llevar al alumno a poner en duda sus conocimientos y a proponer nuevas soluciones.*
- *Contener su propia validación.*

La resolución de la situación problema supone una serie de interacciones simétricas entre estudiantes y de interacciones asimétricas entre los estudiantes y el profesor, pero también supone la superación de un conflicto cognitivo interno del sujeto entre sus conocimientos anteriores y los que resuelven la situación planteada" (Moreno, L. y Waldegg, G. 2002). Al resolver una situación problema, el estudiante interactúa a un mismo nivel con otros estudiantes y con el profesor en un nivel distinto, ya que la fundamentación del docente es más amplia, el alumno también logra superar un conflicto interno de aprendizaje entre sus conocimientos anteriores y aquellos que necesita para resolver la situación problema planteada.

"*Una situación problema la podemos interpretar como un contexto de participación colectiva para el aprendizaje, en el que los estudiantes, al interactuar entre ellos mismos, y con el profesor, a través del objeto de conocimiento, dinamizan su actividad matemática generando procesos conducentes a la construcción de nuevos conocimientos. Así, ella debe permitir la acción, la exploración y la hetero-evaluación*" (Obando, G. y Múnera, J. 2003), estableciendo que la situación problema como constructo de todos los elementos que intervienen, permite a los estudiantes a través del objeto de conocimiento, a medida que interactúan entre ellos mismos y el profesor, forjar procesos oportunos que generan la construcción de nuevos conocimientos.

"*La formación de conceptos es un proceso creativo, no mecánico ni pasivo*" en donde se pone en juego el espíritu inventivo, siendo este un proceso activo; *[...] "un concepto surge y toma forma en el curso de una operación compleja encaminada a la solución de un problema, y [...] la mera presencia de condiciones externas favorables a una vinculación mecánica de la palabra y el objeto no basta para producir un concepto*" (Vigotsky 1995). Es así como la situación problema se constituye en una vía fundamental para la conceptualización.

"*Una situación problema la podemos interpretar como un espacio para el aprendizaje, en el que los estudiantes al interactuar con los conceptos, dinamizan la actividad cognitiva, generando procesos de reflexión conducentes a la adquisición de* *nuevos conocimientos*" (Munera, J. 2003), constituyéndose en una herramienta adecuada para que los estudiantes a medida que resuelven la situación planteada desarrollen diferentes campos del saber.

Determinando la importancia que tienen las situaciones problema como implementación en el aula y teniendo en cuenta las definiciones anteriores, para realizar este trabajo se definirá "**situación problema**" como aquella que cumple las siguientes condiciones:

- Se convierte para el estudiante en formas de conocer.
- Contiene implícitos los conceptos que queremos que el estudiante aprenda.
- Contiene preguntas que no son demasiado abiertas.
- Permite utilizar conocimientos anteriores.
- Representa un verdadero problema para el estudiante, pero a la vez, es accesible a él.

1.2 MARCO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL, SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS

Para la clasificación de actividades pertinentes al pensamiento variacional, sistemas algebraicos y analíticos a partir de los estándares básicos de calidad para la educación en el área de matemáticas, se requiere del sustento didáctico con base en la construcción del sentido de los conocimientos, la institucionalización de los saberes y asumiendo los principios generales de éstos. Por lo tanto, es pertinente abordar algunos aspectos teóricos que logren ubicar esta propuesta en el marco didáctico planteado.

1.2.1 ASPECTOS HISTÓRICOS DE LA VARIACIÓN Y EL CAMBIO

Es importante abordar aspectos históricos del pensamiento variacional, sistemas algebraicos y analíticos que permitan un acercamiento a la construcción histórica, de tal forma que se caracterice la distancia entre dicha construcción y la manera como se reelaboran para incluirlos en el currículo.

En la siguiente tabla se ubican los aspectos más relevantes en el transcurso de diferentes épocas, culturas, y se presentan los autores que se han destacado:

ÉPOCA	ASPECTOS
4000 a.c.	Los babilonios iniciaron el trabajo de resolver ecuaciones de la forma $x^3 + x^2 = b$.
3100-322 a.c.	Los egipcios formularon y solucionaron problemas de su vida cotidiana, donde involucraban aspectos algebraicos.
540 a.c- 445 a.c	Algunos griegos, como Apolonio de Perga, establecieron las primeras relaciones funcionales ligadas a problemas astronómicos con la aplicación de modelos geométricos al movimiento de los planetas.
2800a.c.-600	Los griegos transformaron la matemática en una ciencia deductiva. Euclides en algunas de sus demostraciones hizo uso de operaciones algebraicas.
250d.c	Diofanto introdujo las incógnitas dentro del lenguaje algebraico.

	Los árabes incrementaron el número de funciones de los griegos, principalmente las funciones trigonométricas.
Siglo XII	Omar Jayyam, matemático Persa, generalizó los métodos indios de extracción de raíces cuadradas y cúbicas para calcular raíces cuartas, quintas y de grado superior. El matemático árabe Al-Jwārizmī (de su nombre procede la palabra algoritmo, y el título de uno de sus libros es el origen de la palabra álgebra) desarrolló el álgebra de los polinomios; al-Karayi la completó para polinomios incluso con infinito número de términos.
Siglo XIII	Se realizó un estudio cuantitativo de fenómenos de la naturaleza, ejemplo: Luz, calor, densidad y velocidad.
Siglo XIV	Se realizó un estudio cuantitativo del movimiento local no uniforme. Hacia 1545 Nicolás Oresme, empezó a hacer uso de representaciones para estudiar diferentes tipos de cambio. Se construyó el álgebra simbólica, trabajo en el cual se destacaron: Tartaglia, Cardan; Vieta, Galileo, Descartes, Wallis, Newton, Leibniz.
Siglo XV-XVII	Se dio paso al nacimiento de la geometría analítica y el cálculo infinitesimal. Galileo, (1636) estudió el movimiento y estableció leyes funcionales entre magnitudes. Descartes, (1637) hizo una algebrización de la geometría. Se introdujeron signos para algunas operaciones y letras para

	representar cantidades. Fermat, (1679) propuso la ecuación de la recta, la circunferencia y otras cónicas. Newton, (1664-1666) desarrolló en series de potencias una función, lo cual fue un método fundamental para el estudio de las funciones; desarrolló la diferenciación y la integración en términos de movimiento. Leibniz, (1684) utilizó representación gráfica para la diferenciación e integración. Bernoulli, (1718) definió una función arbitraria de x como una cantidad formada de manera cualquiera a partir de x e y constantes.
Siglo XVIII-XIX	Se consolidó el sistema de representación simbólica del álgebra actual y la noción de función como representación de procesos de variación y cambio. El análisis matemático pierde su carácter geométrico y mecánico en favor del uso exclusivo del álgebra. Euler, denota la función como $F(x)$ utilizada en nuestros días. Fourier, desarrolla funciones arbitrarias por medio de series trigonométricas. Cauchy, Riemann y Weierstrass; desarrollaron la teoría de funciones de variable compleja.
Siglo XIX-XX	Surgen nuevas definiciones generales de conceptos como función, limite, integral y magnitud variable.

	Weierstrass, Dedekind y Cantor, introdujeron los cimientos de la teoría de los conjuntos transfinitos. Surge una nueva rama del análisis matemático, la teoría de funciones de una variable ligada principalmente a los matemáticos franceses Borel y Lebesge. Surge el análisis funcional construido a partir de los trabajos de Hilbert, Riesz y Banach.

1.2.2 CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL, SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS

Ya que se ha tenido en cuenta al Pensamiento Variacional, Sistemas Algebraicos y Analíticos, es necesario hacer claridad del por qué ha sido tomado como un eje de construcción de conocimiento fundamental y para ello recurrimos a los estándares curriculares en el cual se entiende este pensamiento como el componente del currículo que "*tiene en cuenta una de las aplicaciones más importantes de la matemática: la formulación de modelos matemáticos para diversos fenómenos. Por ello, debe permitir que los estudiantes adquieran progresivamente una comprensión de patrones, relaciones y funciones, así como desarrollar su capacidad de representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas mediante símbolos algebraicos y gráficas apropiadas. Así mismo, debe desarrollar en ellos la capacidad de analizar el cambio en varios contextos y de utilizar modelos matemáticos para entender y representar relaciones cuantitativas*" (MEN, Estándares Curriculares para Matemáticas 2003), convirtiéndose en un eje articulador del currículo puesto que está ligado estrechamente a las aplicaciones de la Geometría y al Análisis de datos vinculando las interpretaciones matemáticas con datos de otras áreas, más específicamente con fenómenos y características de modelos cotidianos, teniendo en cuenta que las temáticas van de la mano con procesos de generalización tanto de ideas aritméticas como geométricas que era como en la antigüedad se entendía el álgebra .

1.2.3 DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL: UNO DE LOS LINEAMIENTOS BÁSICOS EN EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS DE COLOMBIA.

En los lineamientos curriculares para matemáticas de 1998, se plantea contribuir al desarrollo del pensamiento matemático a partir del trabajo con situaciones problemas provenientes del contexto sociocultural, de otras ciencias o de las mismas matemáticas. Entre los pensamientos propuestos en los lineamientos curriculares de matemáticas se plantea el "pensamiento variacional".

Los lineamientos proponen el inicio y desarrollo del pensamiento variacional como uno de los logros para alcanzar en la educación básica, presupone superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y compartimentalizados, para ubicarse en el dominio de un campo conceptual que involucra conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permiten analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas (MEN, 1998).

Uno de los primeros acercamientos en la búsqueda de las interrelaciones que permite identificar algunos de los núcleos conceptuales matemáticos en los que está involucrada la variación son:

- Las magnitudes.
- La función como dependencia y modelos de función con sus respectivas representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas, tabulares, gráficas).

- El álgebra en su sentido simbólico, liberada de su significación geométrica, particularmente la noción y significado de variable son determinantes en el campo del pensamiento variacional.
- Modelos matemáticos de tipos de variación aditiva, multiplicativa, variación para medir el cambio absoluto y relativo. La proporcionalidad cobra especial significado.

La variación se encuentra en contextos de dependencia entre variables o en contextos donde una misma cantidad varía (se conoce como medición de la variable absoluta o relativa), estos contextos como por ejemplo las relaciones físicas de movimiento y velocidad propician en el estudiante actitudes de observación, registro, justificación y utilización del lenguaje matemático.

A partir de esto se asume que el aprendizaje del Pensamiento Variacional es un proceso que debe ir madurando progresivamente para hacer más natural y manejable, la comprensión de una estructura matemática de tal forma que utilice varias interpretaciones entre los diferentes sistemas de representación asociados a la variación, entre los que se encuentran:

- Los enunciados verbales.
- Representaciones tabulares.
- Las gráficas de tipo sagital y cartesiano.
- Las representaciones pictóricas e icónicas.
- La instruccional (programación).
- La mecánica (molinos).
- Las fórmulas y expresiones analíticas.

El significado y sentido de la variación se puede establecer a partir de las situaciones problema cuyos escenarios sean referidos a los fenómenos de cambio y variación de la vida práctica. De los sistemas de representación antes mencionado podemos resaltar utilidades como la organización de la variación en tablas, ya que se constituye en un elemento para iniciar el estudio de la función, pues es un ejemplo concreto de función presentada numéricamente. Y aunque en algunas ocasiones enfatiza la variación numérica discreta, es necesario avanzar en la construcción de la variación numérica continua, además puede ser usada para iniciar en los estudiantes el desarrollo del pensamiento variacional por cuanto la solución de tareas que involucren procesos aritméticos, inicia también la comprensión de la variable y de las fórmulas. En estos problemas los números usados deben ser controlados y los procesos aritméticos también se deben ajustar a la aritmética que se estudia. Igualmente, la aproximación numérica y la estimación deben ser argumentos y usados en la solución de los problemas. La calculadora numérica se convierte en una herramienta necesaria en la iniciación del estudio de la variación. Tal como lo señala Demana (1990), la exposición repetida de construcciones de fórmulas, como expresiones que explicitan un patrón de variación, ayuda a los estudiantes a comprender la sintaxis de las expresiones algebraicas que aparecerán después del estudio del álgebra.

Las gráficas cartesianas hacen posible el estudio dinámico de la variación. La relación explícita entre las variables que determinan una gráfica puede ser iniciada con situaciones de variación cualitativa y con la identificación de nombres para los ejes coordenados. Particularmente, tiene como fin abordar los aspectos de la dependencia entre variables, gestando la noción de función como dependencia.

Los contextos de la variación proporcional integran el estudio y comprensión de variables intensivas con dimensión, así como también ayudan al estudiante a comprender el razonamiento multiplicativo.

En conclusión, en los Lineamientos curriculares se hace alusión explicita a la promoción y desarrollo del Pensamiento Variacional a partir de situaciones de la realidad, de las matemáticas y otras ciencias relacionadas con fenómenos o procesos de variación y cambio, proponiendo el uso de diferentes sistemas de representación en su exploración, compresión y estudio sistemático.

En éste caso se tiene una estructura del pensamiento variacional para los grados de sexto a noveno de educación media en los estándares de matemáticas, que son registrados en dos grupos para séptimo grado y noveno grado.

1.2.4 VARIABLE

Para la enseñanza y aprendizaje del álgebra es fundamental el concepto de variable (Schoenfeld,1988) y, sin embargo, la mayoría de las veces las variables se utilizan como si pudieran entenderse sin ningún problema, simplemente, después de una cierta práctica; el uso de las variables se confunde con el uso de las x, las y …, o de otras letras, manejándolas habitualmente con naturalidad, sin llegar a valorar ni la complejidad que tiene el concepto, ni los múltiples significados y usos que pueden tener las letras para los alumnos.

Adquirir el concepto de variable supone la conjunción de dos procesos:

- **Generalización:** que permite pasar de un conjunto de situaciones concretas a algún aspecto común a todas ellas.
- **Simbolización:** que permite expresar de forma abreviada lo que tienen en común todas las situaciones.

1.2.5 LA GENERALIZACIÓN Y EL ÁLGEBRA

Uno de los procesos esenciales de la actividad matemática, y de los que más a menudo se pone en juego, es la generalización. El establecimiento de proposiciones, la resolución de problemas y otras muchas formas de "hacer matemáticas" requieren a menudo procesos de generalización. La expresión de las relaciones cuantitativas, el lenguaje natural o simbólico, hace posible razonar sobre estas relaciones, compararlas y deducir otras.

La generalización en muchas ocasiones lleva consigo un proceso de abstracción de orden elevado, de cierta dificultad. No en vano la capacidad para apreciar lo general es utilizada a menudo como uno de los indicadores de la inteligencia y, por ello, los instrumentos que suelen utilizarse para medirla suelen contener un buen número de cuestiones en los que ha de ponerse de manifiesto. Ver y expresar los aspectos generales tiene interés en sí mismo, como una potente actividad intelectual que tiene que ponerse en juego en muchas ocasiones. Pero es además una capacidad que puede desarrollarse.

El lenguaje natural es suficiente en muchos casos para expresar las relaciones cuantitativas, pero lo que proporciona la potencia al lenguaje algebraico con respecto al natural es, precisamente, la posibilidad de expresar lo general utilizando símbolos. Los símbolos y las reglas usuales para utilizarlos aumentan su funcionalidad y permiten expresar las relaciones con mayor precisión y simplicidad, mezclar información sobre distintas relaciones, entre otras.

1.2.5.1 LAS FASES DE LA GENERALIZACIÓN

Los procesos de generalización, y sobre todo aquéllos que tiene relación con el álgebra, permiten una división en fases (Mason y otros, 1985). Como primera aproximación se puede distinguir entre la visión de la regularidad, la configuración, en definitiva el proceso, y, por otra, su expresión. Desde el punto de vista del álgebra, esta expresión debe tender a ser simbólica, y por ello, escrita. Por tanto, se considera que el proceso de generalización requiere tres pasos bien diferenciados:

1) La visión de la regularidad, la diferencia, la relación.

2) Su exposición verbal.

3) Su expresión escrita, de la manera más conocida posible (simbolismo).

1.2.6 ESTÁNDARES BÁSICOS DE CALIDAD EN MATEMÁTICAS “PENSAMIENTO VARIACIONAL, SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS”

SÉPTIMO GRADO

1) Describir y representar situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales, generalizadas y tablas).
2) Reconocer el conjunto de valores de una variable en situaciones concretas de cambio (variación).
3) Analizar las propiedades de variación lineal e inversa en contextos aritméticos y geométricos.
4) Utilizar métodos informales (ensayo-error, complementación) en la solución de ecuaciones.
5) Identificar las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan.

NOVENO GRADO

1) Identificar relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
2) Construir expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
3) Usar procesos inductivos y lenguaje algebraico para verificar conjeturas.
4) Modelar situaciones de variación con funciones polinómicas.
5) Identificar diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.
6) Analizar los procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales.

7) Interpretar los diferentes significados de la pendiente en situaciones de variación.

8) Interpretar la relación entre el parámetro de funciones con la familia de funciones que genera.

9) Analizar en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones polinómicas, racionales y exponenciales.

1.3 MARCO MATEMÁTICO

1.3.1 ASPECTOS HISTÓRICOS

1.3.1.1 RAZONES Y PROPORCIONES

El esfuerzo del hombre por entender y expresar el mundo ha sido una preocupación permanente desde los primeros albores de la historia. Este esfuerzo se concretó no solo en la necesidad de utilizar los números para contar objetos sino también para expresar la relación entre las cosas.

La noción de proporción se ha tenido desde la antigüedad. El griego Thales de Mileto (640-550 a.C.) la utilizó en sus experimentos para determinar la altura de una gran pirámide comparando la sombra de ésta con la de una vara vertical.

Las formas de comparar objetos de la misma especie descritas a través de las relaciones se convirtieron en un medio para ordenar y jerarquizar el mundo. Fue durante la edad de oro en Grecia donde el estudio de las comparaciones se estructuró como un cuerpo de conocimientos matemáticos, llamado teoría de las proporciones numéricas. Eudoxio Cnido (408-355 a. C.) las concibió como uno de los principios generadores del conocimiento matemático. Siglos más tarde, Galileo las utilizó para estudiar la caída libre de los cuerpos. Hasta el siglo XVII, la teoría de las proporciones numéricas fue una herramienta sólida de las matemáticas para resolver problemas.

Las razones y proporciones fueron de gran utilidad durante el renacimiento, época en la que se desarrollaron el arte y las letras. Los artistas con un buen dominio de las proporciones y la perspectiva lograban tener imágenes de figuras humanas y grandes lienzos y murales.

1.3.1.2 EXPRESIONES ALGEBRAICAS Y ECUACIONES

Para dar una idea de los inicios del álgebra es impredecible remontarse al concepto de número. Los números eran percibidos por los antiguos como una propiedad inseparable de una colección de objetos, propiedad que ellos no podían distinguir claramente. Más adelante, aparecen operaciones con números como reflejo de las relaciones entre los objetos concretos, y los hombres fueron descubriendo y asimilando las relaciones entre los números. Finalmente, a medida que la vida social se hizo más intensa y complicada, fueron apareciendo problemas más complejos que impulsaron a perfeccionar los nombres y "símbolos" de los números.

La primera etapa hacia los signos matemáticos y las fórmulas en general, la constituye la aparición de los símbolos numéricos, que aparentemente se produjo al mismo tiempo que la escritura y jugó un papel fundamental en el desarrollo de la aritmética. Todavía en ese tiempo, cualquier ley o la resolución de un problema matemático se expresaba con palabras, pues la utilización de signos para las operaciones aritméticas y la designación literal para la incógnita tuvo lugar mucho más tarde.

La palabra "ÁLGEBRA" proviene del titulo de un libro **Al-jabr** (algunos usan Al-gebr) **w'al-muqabqlah**, escrito en Bagdad, alrededor del año 825 por el matemático y astrónomo **Mohammed ibn-Musa al-Khwarizmi (Mohammed** hijo de Musa nativo de **Khwarizm),** que muestra en sus trabajos la primera fórmula general para la resolución de ecuaciones de primero y segundo grado.

El titulo **Al-jabr w'al-muqabalah** significa "ciencia de la restauración y oposición" o "transposición y eliminación" o, como expresa Carl Boyer, la transferencia de términos al otro miembro de la ecuación (al-jabr) y la cancelación de términos iguales en ambos miembros de la ecuación (al-muqabalah).

Así dada la ecuación

$$x^2 + 3x + 7 = 7 - 2x + 4x^3$$

al-jabr da (transferencia de términos al otro miembro de la ecuación)

$$x^2 + 5x + 7 = 7 + 4x^3$$

y al-muqabalah da (cancelación de términos iguales en ambos miembros de la ecuación)

$$x^2 + 5x = 4x^3$$

Esta obra fue traducida al latín en los primeros años del siglo XII por Juan de Sevilla y Gerardo de Cremona, y con el tiempo se le llamo simplemente **Álgebra**.

El origen del vocablo responde satisfactoriamente al contenido real de la ciencia misma. El álgebra comienza en realidad cuando los matemáticos empiezan a interesarse por las "operaciones" que se pueden hacer con cualquier número, más que por los mismos números; es, en esencia, la doctrina de las operaciones matemáticas considerada formalmente desde un punto de vista general con abstracción de los números concretos.

La primera fase de la construcción de la idea de álgebra, comprende el periodo de 1700 a. C. al 1700 d. C., se caracterizó por la invención gradual de símbolos y la resolución de ecuaciones. Dentro de esta fase encontramos un álgebra desarrollada por los griegos (300 a. C.), llamada álgebra geométrica, rica en métodos geométricos para resolver ecuaciones algebraicas.

La introducción de la notación simbólica asociada a Viéte (1540-1603), marca el inicio de una nueva etapa en la cual Descartes (1596-1650) contribuye de forma importante al desarrollo de dicha notación. En este momento, el álgebra se convierte en la ciencia de los cálculos simbólicos y de las ecuaciones. Posteriormente, Euler (1707-1783) la define como la teoría de los "cálculos con cantidades de distintas clases" (cálculos con números racionales enteros, fracciones ordinarias, raíces cuadradas y cúbicas, progresiones y todo tipo de ecuaciones).

Cabe señalar en este periodo los trabajos de George Peacock (1791-1858), en los que se buscó fundamentar y justificar las operaciones con expresiones literales. A él se debe el principio de "permanencia" que decía:

"Todos los resultados del álgebra aritmética que se deducen por aplicación de sus reglas, y que son generales en su forma, aunque particulares en su valor, son igualmente resultados del álgebra simbólica, donde son generales tanto en su valor como en su forma"

Se distingue entre álgebra y aritmética, en el que letras representan números naturales y los signos + y – tienen el significado aritmético ordinario, y el álgebra simbólica, donde siguen actuando las leyes del álgebra aritmética, pero se elimina la restricción a los naturales.

El principio de permanecía afirmaba que las reglas que se verifican con los naturales, por ejemplo, conmutativa y asociativa de la suma y de la multiplicación respecto a la suma, seguían verificándose para todos los números u objetos representados por las letras. Así, la importancia del significado de los símbolos quedó relegada a un segundo término ante la primacía de los símbolos por sí mismos y sus leyes de combinación; por ejemplo, la adición significa cualquier proceso que se ajuste a determinadas leyes, ya que está se cumple tanto para los números como para las letras.

En la antigüedad fue necesario inventar símbolos para representar y operar los números naturales. Al generalizar los procedimientos matemáticos con cualquier clase de números, se hizo indispensable crear una nueva simbología. Esta tarea fue iniciada por los griegos y desarrollada por los árabes; pero no se complementó hasta el siglo XVII, cuando el sistema simbólico actual fue expuesto en los trabajos de Descartes y otros autores. Así se da inicio al estudio del álgebra que en esencia es, la ciencia que estudia las operaciones matemáticas consideradas formalmente desde un punto de vista general, con abstracción de los números concretos.

En la segunda fase a finales del siglo XVIII y primera mitad del XIX, el álgebra era la ciencia de las ecuaciones y su problema fundamental radica en la teoría de resolución de ecuaciones algebraicas.

En la segunda mitad del siglo XIX, el álgebra presentó un notable impulso debido a grandes matemáticos, entre los cuales destacamos las ideas de Galois (1801-1832) sobre la teoría de ecuaciones algebraicas. Teorías tales como la de grupos, determinantes y matrices, por citar algunas, alcanzaron un profundo desarrollo.

Todo esto favoreció el nacimiento del álgebra abstracta contemporánea (3ª fase), llamada algunas veces álgebra moderna. En este periodo se prescinde de los números, de ahí el nombre de abstracta, y los objetos utilizados pueden ser cualesquiera (matrices, vectores, tensores, etc.) sobre los cuales se definen ciertas operaciones que verifican unas determinadas propiedades construyéndose el álgebra a partir de axiomas previamente definidos.

En la actualidad, la revolución de los ordenadores está creando nuevos problemas sobre la mecanización de los cálculos algebraicos, lo que lógicamente conducirá a un desarrollo aun mayor del álgebra.

La notación algebraica presenta también tres periodos claramente diferenciados:

- El periodo retórico o verbal, en el cual las operaciones se describían con palabras. Este periodo se extiende desde los babilonios (1700 a. C.) hasta Diophante (250 d. C.).
- El periodo sincopado o abreviado, cuando empiezan a utilizarse algunas abreviaciones para simplificar la resolución de problemas. Este periodo comienza con Diophante y dura hasta comienzos del siglo XVI.

  La ecuación $2x^3 + 8x - (5x^2 + 4) = 44$ se escribía en notación de Diophante así:

$$K^{\tilde{\bullet}}\beta \quad s\eta \quad \wedge \quad \Delta^{\tilde{\bullet}}\varepsilon \quad M\delta \quad \varepsilon\sigma\tau\xi\zeta \quad \mu\delta$$
$$x^3 2 \quad x8 \quad - \quad x^2 5 \quad 1\cdot 4 \quad = \quad 44$$

- El periodo simbólico aparece en el siglo XVI y utiliza ya diferentes símbolos y signos matemáticos. Esta notación que fue más o menos estable en tiempos de Isaac Newton (1642-1727), se mantiene actualmente sin uniformidad total. Este periodo coincide con la 2ª fase anteriormente indicada que, como hemos señalado, está asociada al nombre de Viéte, el cual comenzó a denotar por las letras no sólo las incógnitas, sino números dados previamente.

  Así, la ecuación

$$x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x = 120$$

  Se escribía como

$$IQC - 15QQ + 85C - 225Q + 274N \quad aequatur \quad 120$$

  Nuestra notación moderna es debida a Descartes (1596-1650), con ligeras modificaciones posteriores

$$x^3 - 6xx + 13x - 10 \quad \alpha \quad 0$$

1.3.1.3. FUNCIONES

Para el desarrollo del concepto de función se fundamentan tres espacios definidos por Youschkevitch (1976).

1) El mundo antiguo: A pesar de la existencia de casos particulares de dependencia entre dos cantidades, no aparecen nociones generales sobre cantidades variables y funciones.

    - El aporte de los Babilonios: fue de carácter astronómico en el cual muestran la caracterización de una función de forma tabular, en el sentido de no limitarse a una tabulación de datos empíricos sino al uso de interpolaciones, y extrapolaciones y a la búsqueda de regularidades.

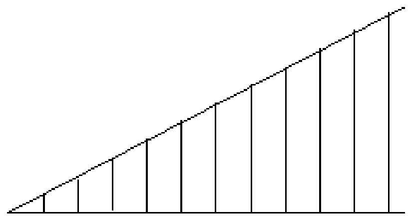
- El aporte de los Griegos: Es atribuible a los pitagóricos la determinación de las leyes simples de la acústica que representan el intento por buscar relaciones cuantitativas de dependencia entre variables físicas, como por ejemplo las longitudes de las cuerdas y los tonos emitidos al pulsarlas, por otra parte, el trabajo con las proporciones desarrolladas en este momento esconden la dependencia que existe entre magnitudes distintas, por ejemplo, cuando se comparan el área de dos círculos y se establece que están en la misma proporción que los cuadrados de sus diámetros, se esconden la dependencia de que existe entre el diámetro y el área de un circulo, relación que nos acerca a la idea de función.

2) La edad media: aparecen ciertas nociones generales, en forma geométrica o mecánica, los casos de dependencia obtenidos en este momento eran expresados por descripciones verbales o mediante gráficos; de esta época se destaca el trabajo realizado por:

- Nicolás Oresme (s. XIV) como método para representar las cualidades cambiantes de los objetos. Oresme utiliza la continuidad de los segmentos para expresar la relación de variabilidad entre cantidades variables, pues no disponen de un continuo numérico para representar el movimiento, de esta forma, las gráficas se consideraron modelos geométricos de las relaciones funcionales. Con la teoría de las Latitudes, Oresme elabora una teoría pura comprobable, exenta de experiencias, pues se abstrae la forma o las cualidades concretas de los problemas.

Para Youschkevitch, esta teoría está basada "*en el uso consciente de ideas generales acerca de las cantidades variables dependientes e independientes*" (1976) pues cada una de las cantidades involucradas, latitud y longitud, se “*interpretaban de manera general pero dependientemente de su longitud*”, en la representación gráfica las dos cantidades corresponden a lo que en el lenguaje moderno se denomina ordenada y abcisa. La representación planteada por Oresme a partir de la idea que todo lo medible puede imaginarse como una cantidad continúa y luego pasando a la representación de diversos tipos de cambio, por ejemplo para representar la velocidad de un móvil a lo largo del tiempo, Oresme traza un segmento horizontal cuyos puntos representan los sucesivos instantes de tiempo (longitudes) y para cada instante traza un segmento perpendicular (latitud) cuya longitud representa la velocidad en aquel instante.

Los extremos superiores de las latitudes determinan una curva, en el ejemplo una recta, y si el movimiento parte del reposo, la totalidad de las latitudes cubren un triángulo rectángulo.



3) El periodo moderno: aparición del concepto de función como aproximaciones cada vez más amplias y generales, en el cual el estudio del movimiento se convierte en un problema esencial, al mismo tiempo que el descubrimiento de la geometría analítica, permite el desarrollo de las expresiones algebraicas de funciones. Posteriormente, en la segunda mitad del siglo XVII, la expresión de funciones por medio de series de potencias permitió ampliar el campo de las funciones tratadas analíticamente. Fue el método analítico para introducir funciones lo que revolucionó las matemáticas. Más tarde se dio lugar a nuevas definiciones del concepto de función que han sido universalmente aceptadas en el análisis matemático.

- Galileo (1564-1642) introdujo lo numérico en las representaciones gráficas e hizo una interpretación de la teoría para expresar las leyes del movimiento, a la que le incorporó el lenguaje de la teoría de las proporciones, dando un sentido de variación directa e indirectamente proporcional. Este lenguaje junto con la teoría matemática de la época cubrió aspectos de la variación continua, pues sólo se consideraban ciertos valores para las variables debido a la ruptura que se tenía entonces, sobre número y magnitudes y el problema de la inconmensurabilidad. Es así como las representaciones gráficas aun siendo cualitativas, o los enunciados verbales en términos cinemáticos se convirtieron en la forma de introducir las funciones, Galileo aborda el problema de la correspondencia entre conjuntos infinitos y trata cuestiones concernientes al continuo, haciendo referencia a las "heréticas" ideas de Demócrito.

- Con los trabajos de Descartes y Fermat (s. XVII) sobre las curvas se introduce por primera vez la idea de una ecuación en x y y como un medio para expresar la dependencia entre dos cantidades variables. Surge así la primera concepción de función asociada a lo analítico-geométrico. Este aporte en el contexto del desarrollo de la matemática, es el de relacionar dos ramas: Geometría y Álgebra, buscando establecer métodos de expresión de relaciones numéricas entre propiedades de objetos geométricos. Con el apoyo del desarrollo del Álgebra, se aporta la introducción de signos para las operaciones, la utilización de letras para representar cantidades desconocidas y letras para las constantes, junto con los progresos alcanzados en la extensión del concepto de número "aparición de los imaginarios", la dependencia entre variables comienza a ser reconocida como una relación que se expresa por medio de expresiones analíticas. Descartes y Fermat introducen el método analítico para la representación de las funciones en ecuaciones algebraicas, asociadas a las curvas geométricas, y denominaron curvas mecánicas a los que no sean de naturaleza geométrica.

- Con los trabajos de Newton (s. XVI) se hizo posible representar analíticamente cualquier relación funcional. Newton al resolver problemas del movimiento asociando ideas físicas y matemáticas introduce el método de representarlas en series infinitas de potencias, pero las ideas principales eran expresadas en términos mecánicos y plantea de esta manera los dos problemas fundamentales del cálculo infinitesimal: la diferenciación y la integración. Para Newton el movimiento esta caracterizado por la velocidad, en el movimiento la variable independiente (fluyente) es una cantidad correlacionada (quantitas correlato) con la cantidad dependiente (relata).
- Leibniz (s. XVII) introduce por primera vez el término función asociándolo a las representaciones geométricas, pero separándolo de la variación de magnitudes físicas al caracterizarlo como: "ciertas longitudes tales como abcisas, ordenadas tangentes, normales, etc., asociadas con la posición de un punto en una curva". Sin embargo el vocablo función sigue ligado a lo geométrico, segmentos en general, lo que seguía preocupando, porque no indicaba de manera general "cantidades arbitrarias dependientes de alguna variable". Con base en estos argumentos Bernoulli intenta generalizar la noción al formular la siguiente definición "llamamos función a las diversas cantidades dadas de alguna forma por una (cantidad) indeterminada x y por constantes ya sea algebraicas o trascendentes", ésta se convierte en la primera definición de función como expresión analítica. Bernoulli propone también las notaciones φ y f para distinguir la característica de una función y x para describir el argumento.
- Con este avance y con el desprendimiento paulatino de los conceptos del Cálculo de lo geométrico, lo mecánico da lugar a iniciar el estudio del análisis matemático como una disciplina científica autónoma.

- Euler (s. XVII) continúa el camino de precisar la noción de función, comenzando a definir nociones iniciales como son constante y cantidad variable. Define: "Una cantidad variable es una cantidad indeterminada, o universal que comprende en sí misma a absolutamente todos los valores determinados", con esta definición, la cantidad variable comprende todos los números tanto positivos, como fracciones, racionales, irracionales y trascendentales.

- Con estas aclaraciones define la noción cambiando el termino cantidad, propuesto en la definición de Bernoulli por el de expresión analítica "La función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de esa cantidad variable y de números o cantidades constantes" Luego entra a precisar Lo que se debe entender por expresión analítica, la cual determina como serie infinita de potencias $A + Bz + Cz^2 + Dz^3$, pero no llega a determinar claramente si abarca las funciones trascendentes, o las obtenidas en el Calculo Integral. De esta forma, la definición de función como expresión analítica fue aceptada por los matemáticos de la época.

- Por otra parte Dirichlet, discípulo de Fourier propuso una definición muy general: si una variable Y está relacionada con otra variable X de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable x.

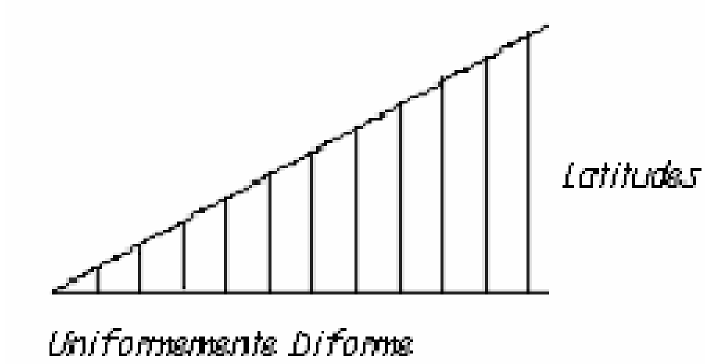
- Al considerar la definición en términos conjuntistas decimos que dados dos conjuntos arbitrarios A y B, una función de A en B es una ley que a cada elemento de x en A hace corresponder un solo elemento y de B; o si se prefiere una función de A en B es un subconjunto F del producto cartesiano A x B tal que si (x, y) y (x, z) pertenecen a F entonces $y = z$.

- El largo proceso de abstracción (3.700 años, aproximadamente) donde se suceden una tras otras las invariantes, representaciones (gráficas, simbólicas) que van perfilando la abstracción y el nivel de generalización que comporta la definición moderna ha eliminado la idea de variación, para poner de relieve caracterizaciones más generales y precisas del concepto, este proceso permite inferir presupuestos para convertir el concepto en objeto de enseñanza.

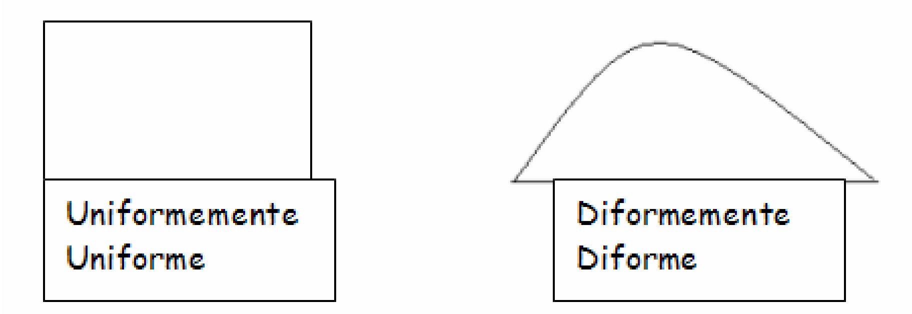
A partir del trabajo histórico, pueden encontrarse diferentes concepciones sobre el reconocimiento del concepto de función.

- Búsqueda de regularidades entre cantidades de magnitudes variables: (A partir de la edad antigua): las cuales permitían predecir periodos de visibilidad de un planeta, relacionando fenómenos naturales sujetos al cambio (calor, distancia, velocidad, etc.), y la variación entre magnitudes "relaciones de causa -efecto", con representación tabular donde se identifican los elementos que varían en el análisis cuantitativo de un fenómeno.
- Razón o Proporción:(A partir de la edad media), la proporcionalidad se buscaba como una relación privilegiada y modelizadora entre magnitudes variables. Que permitían relacionar magnitudes físicas y en particular en dominios geométricos y astronómicos. desarrollando la conmensurabilidad entre magnitudes de la misma naturaleza, con representación descriptiva de las relaciones establecidas, comparaciones entre magnitudes homogéneas (longitudes con longitudes, áreas con áreas, etc.).
- Gráfica: (A partir de la edad media), con el fin de entender la naturaleza de los cambios llevó a crear una representación geométrica que permitiera tener una visión del fenómeno analizado. Permitían reconocer fenómenos en los que aparecen magnitudes físicas dependientes, relacionando la dependencia cualitativa de las

magnitudes de diferente naturaleza, su representación se realizo por medio de figuras geométricas, a partir de esta concepción se utiliza la continuidad de los segmentos para representar todo lo que varia (no se disponía de un continuo numérico). Por ejemplo para representar la velocidad de un móvil a lo largo del tiempo se representa como:



Donde los puntos del segmento horizontal representan los sucesivos instantes de tiempo y para cada instante se traza un segmento perpendicular (latitud), cuya longitud representa la velocidad de cada instante. Los extremos superiores de las latitudes determinan una curva, otras configuraciones fueron:



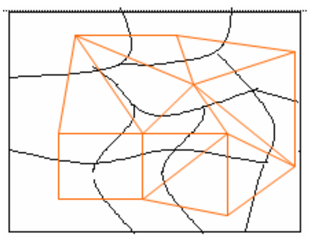
El fenómeno puede ser descrito por toda figura y no por una de sus partes como seria la línea superior obtenida de la variación de latitudes.

- Curva: (A partir de la edad moderna). El fin que se pretende es expresar la relación de dependencia entre las cantidades variables mediante una ecuación, la cual surge al intentar conectar los problemas de geometría y álgebra. Donde a partir de propiedades geométricas de un objeto se establezcan relaciones entre números y se encuentra una expresión algebraica que permite expresar la relación. Trabajando así la dependencia y continuidad, su representación se hizo por medio de una curva en el sistema cartesiano y representación algebraica.

- Expresión Analítica: (A partir de la edad moderna), Bernoulli y Euler plantean definiciones de función que vinculan directamente la dependencia entre cantidades y la correspondencia, su representación fue dada en expresiones analíticas y curvas.

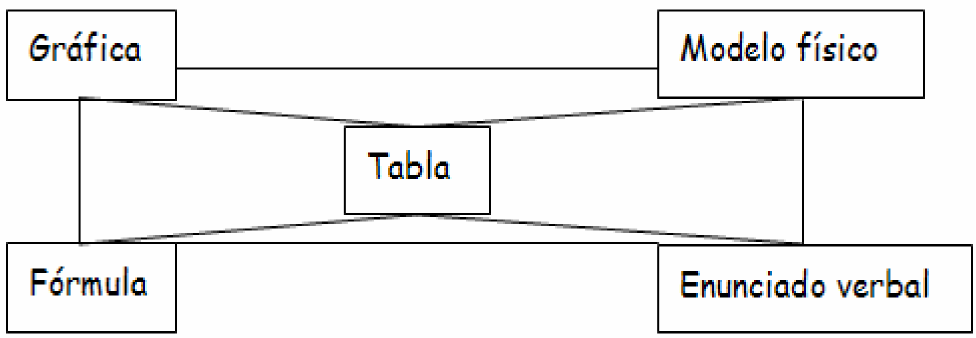
- Correspondencia arbitraria: Se reconoce la correspondencia arbitraria pero no la unicidad en funciones tal que: "en los puntos de discontinuidad la función tiene dos valores", se relaciona la correspondencia univaluada restringida a números, la representación genérica $y = f(x)$, agregándose a las anteriores representaciones los diagramas sagitales.

- Terna: Las situaciones matemáticas que pueden ser modelizadas por funciones. Donde f = (A, B, G) es una función si y solo si G = A x B, donde $x \in$ A, $y \in$ B, tal que $(x, y) \in$ G. R es una función si y Solo si para todo x, y, z $(x, y) \in$ R y $(x, z) \in$ R, entonces $y = z$.



- En el campo semántico, el concepto de función se presenta a través de la variación y transformación de magnitudes, dependencia entre variables. Las formas de representación del concepto de función: precisan la concepción dinámica o estática. La representación gráfica cartesiana globaliza y permite encontrar características puntuales y dinámicas (crecimiento, continuidad); en los enunciados verbales se define la variación entre magnitudes físicas o cantidades. Por otra parte, la representación algebraica permite asumirla como fórmula, para calcular la variable dependiente a partir de la independiente, obteniendo una idea dinámica, cuando se asume como *y =f(x)* sin referentes de los elementos se obtiene una idea estática.

Para finalizar, a partir de la teoría de las representaciones planteadas por Janvier (1989) en particular para el caso de las funciones, el aprendizaje del concepto se dará siempre y cuando el estudiante desarrolle la interpretación y uso de cada una de las representaciones del concepto de función, así mismo, la capacidad de traducir de una representación a otra. Donde, los niveles de representación al que llega el estudiante determinan un orden creciente de abstracción en la construcción del concepto.



1.3.2 ASPECTOS MATEMÁTICOS

1.3.2.1 PROPORCIONALIDAD

1.3.2.1.1 MAGNITUDES Y MEDIDA

Se entiende por magnitud a un conjunto M el cual no es vacío, con una relación de orden y una operación definida de tal forma que para todo a, b, $c \in M$, se cumplen las siguientes propiedades:

- Ordenación: $a < b \quad ó \quad a = b \quad ó \quad b < a$
- Transitiva: $a < b \quad y \quad b < c \quad implica \quad que \quad a < c$
- Propiedad asociativa: $(a+b)+c = a+(b+c)$
- Simplificación: $a+b = b+c \quad implica \quad que \quad a = b$
- Propiedad conmutativa: $a+b = b+a$
- Diferencia: $a < b \quad si\ y\ solo\ si\ existe \quad un \quad c \quad tal\ que \quad a+c = b$
- Divisibilidad: Para cada *a* en *M* y *n* número natural existe un *b*, $b \in M$, tal que $a = n \cdot b$ donde $nb = b + \ldots + b$ con *n*-sumandos. Con estas condiciones *M* admite la multiplicación y la división por números naturales y en consecuencia por números racionales positivos.
- Postulado de Arquímedes: Para cada *c* y $d \in M$ existe un número natural *n* tal que $d < n \cdot c$.

A los elementos de *M* se denominan como cantidades.

Cada elemento *e* de *M* se llama unidad.

Cada $a \in M$ permite dividir a los racionales positivos, en dos partes:

$$C_1 = \{q \in Q^+ / q \cdot e \leq a\}$$

$$C_2 = \{q \in Q^+ / q \cdot e > a\}$$

Estos dos conjuntos determinan lo que llamaremos una cortadura en Q^+. Esta cortadura determina un número real $r \in R$, de la siguiente manera:

$$r = \sup\{q \in Q^+ / q \cdot e \leq a\} = SupA$$

Es decir, *r* es la cota superior mínima de A.

Por definición r representa la **medida** de a con respecto a e. Es decir, el número r puede tomarse como una representación de la cantidad a. De donde podemos indicar que:

$$med_e(a) = r; \quad m_e(a) = r; \quad a = r \cdot e; \quad r = \frac{a}{e}(razón\ entre\ cantidades)$$

- Si r es un número racional se dice que las cantidades a y e son conmensurables (esto es, con medida común).

  Sea $r = \dfrac{m}{n}$ se tiene que a contiene m divisiones n-ésimas de e.

  Recíprocamente a todo número racional $\dfrac{m}{n}$, corresponde una cantidad, cuya medida es este número (hasta considerar la cantidad $\dfrac{m \cdot e}{n}$). Así entre las cantidades conmensurables con la unidad y los números racionales positivos existe un **Isomorfismo**[1].

- En caso contrario, si r es un número irracional se dice que a y e son inconmensurables. La correspondencia entre las cantidades inconmensurables y los números irracionales no tiene porque ser biunívoca. Para que se tenga un isomorfismo debe existir otro axioma.

- **Axioma de continuidad**

  Si las cantidades conmensurables con una unidad ***e*** de una magnitud se clasifican en dos clases no vacías de modo que toda cantidad de la primera sea menor que todas las cantidades de la segunda.

1. ISOMORFISMO: decimos que dos grupos son isomorfos si son idénticos en su estructura pero con variación en los elementos de cada uno de los grupos y sus operaciones. Con una transformación lineal $T : v \rightarrow w$, T es un isomorfismo si T es uno a uno y sobre.

Hay una cantidad que separa a ambas es decir, mayor o igual que cualquiera de ellas y menor o igual que todas estas, según pertenezca a una u otra clase. Diremos en este caso, que la magnitud *M* es continua y entonces $M = R^{+} \cdot e$.

En el caso de las magnitudes continuas, la medida establece un isomorfismo entre *M* y R^{+}: tal que para cada $a \in M$ y fijada una cantidad e, $med_e(a) = m_e(a)$.

1.3.2.1.2 PROPORCIONALIDAD ENTRE MAGNITUDES

Diremos que dos magnitudes son proporcionales si se puede establecer un isomorfismo entre sus cantidades $f : M \rightarrow N$ tal que:

I. Si $a < b$ *implica* $f(a) < f(b)$ la relación de orden es monótona.

II. $f(a+b) = f(a) + f(b)$, es decir, se conserva el orden y la suma.

III. Si la magnitud es continua la proporcionalidad f queda unívocamente determinada dando la cantidad homóloga $f(a)$ de una cantidad cualquiera y en particular las cantidades correspondientes a una unidad. En efecto si

$$a = r \cdot e; \quad entonces \quad f(a) = f(r \cdot e) = rf(e)$$

Así, las medidas de cantidades correspondientes, a, $f(a)$ con unidades correspondientes, e, $f(e)$ son iguales.

$$a = re \quad ; \quad f(a) = rf(e)$$

Basta para ello distinguir los siguientes casos:

1) $r \in N$, 2) $r \in Q^{+}$, 3) $r \in R^{+} \setminus Q^{+}$

1) $r \in N$, $r = n$, $a = n \cdot e = \overbrace{e + ... + e}^{n\ términos}$ y por tanto

$$f(a) = f(\overbrace{e + ... + e}^{n términos}) = f(e) + ... + f(e) = n \cdot f(e)$$

2) $r \in Q^{+}$, $r = \frac{m}{n} = \overbrace{\frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n}}^{m\ términos}$ y como

$$f(e) = f\left(\frac{n}{n}e\right) = f\left(\overbrace{\frac{1}{n}e + ... + \frac{1}{n}e}^{n\ términos}\right) = \overbrace{f\left(\frac{1}{n}e\right) + ... + f\left(\frac{1}{n}e\right)}^{n\ términos} \text{ Por tanto}$$

$$f\left(\frac{1}{n}e\right) = \frac{1}{n} \cdot f(e) \text{ y por tanto.}$$

$$f(a) = f\left(\frac{m}{n}e\right) = f\left(\overbrace{\frac{1}{n}e + ... + \frac{1}{n}e}^{m\ términos}\right) = \overbrace{f\left(\frac{1}{n}e\right) + ... + f\left(\frac{1}{n}e\right)}^{m\ términos} = \frac{m}{n} \cdot f(e)$$

3) $r \in R^{+} \setminus Q^{+}$, significa que a es inconmensurable con e

Sea *(C_1, C_2)* la cortadura sobre los números racionales definida por *r*, si formamos las clases $C_1 \cdot e$, $C_2 \cdot e$ esta clasificación es una cortadura en el conjunto de las cantidades conmensurables y definen según el axioma de continuidad, una cantidad de separación tal cantidad tiene evidentemente como medida el número dado por *(C_1,C_2)*.

Por tanto, de la monotonía de f y de las condiciones I, II se verificará automáticamente la condición III, es decir, si $a = r \cdot e$; *entonces* $f(a) = f(r \cdot e) = rf(e)$, es decir, la medida de $f(a)$, con la unidad $f(e)$, será la misma que la medida de a con unidad e.

En efecto todas las operaciones de medida de a con unidad e, se fundamentan en las relaciones de desigualdad y suma, las cuales se conservan íntegramente en la correspondencia establecida. Por tanto los resultados para medir a con unidad e serán los mismos que para medir $f(a)$, con la unidad $f(e)$ y por consiguiente, las medidas obtenidas serán iguales. Este resultado permite reducir la medida de ciertas cantidades a las de otras proporcionales a ella, con lo cual se justifica la **medida indirecta de cantidades**.

1.3.2.1.3 CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD

Sean *M y N* dos magnitudes proporcionales continuas, sea f la correspondencia entre sendas cantidades e y u, dos unidades respectivas de *M y N*.

$$\begin{aligned} f : M &\rightarrow N \\ e &\rightarrow u \end{aligned}$$

Se puede escribir $f(e) = k \cdot u$

Diremos entonces que *k* es la constante de proporcionalidad respecto de las unidades e y u. En este sentido la constante de la proporcionalidad es una representación de la correspondencia y por eso la denotaremos por:

$$k = [f]\{e\}\{u\}$$

Como las magnitudes *M y N* pueden ser descritas completamente por sus medidas m_e *y* m_u respectivamente, entonces la proporcionalidad f puede expresarse como una aplicación g de R^+ en R^+, específicamente: $g = m_u \; o \; f \; o \; m_e^{-1}$ así $g(r) = m_u(f(r \cdot e))$.

Por lo tanto *g* satisface la ecuación formal de Cauchy (1821).

$$g(x + y) = g(x) + g(y) \text{ con, } x, y \in R$$

Y al ser *g* monótona, es decir que conserva el orden, admite como única solución, que caracteriza la proporcionalidad:

$$g(r) = k \cdot r \quad con \quad r \in R^{+}$$

Efectivamente, para cualquier constante k, $g(r) = k \bullet r$, satisface la ecuación

$$g(x + y) = g(x) + g(y) \ con, \ x, y \in R$$

Recíprocamente, si *g* es monótona y satisface la ecuación

$$g(x + y) = g(x) + g(y) \ con, \ x, y \in R$$

Dados los números naturales *m, n >0* se cumple

$$g(1) = g\left(\frac{n}{m}\right) = g\left(\overbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}^{n\ terminos}\right) = \overbrace{g\left(\frac{1}{n}\right) + \ldots + g\left(\frac{1}{n}\right)}^{n\ terminos} = n \cdot g\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{Por tanto}$$

$$g\left(\frac{m}{n}\right) = g\left(\overbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}^{m\ terminos}\right) = \overbrace{g\left(\frac{1}{n}\right) + \ldots + g\left(\frac{1}{n}\right)}^{m\ terminos} = m \cdot g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n} \cdot g(1) \quad \text{es decir, para}$$

cualquier número racional positivo $r = \frac{m}{n}$,

$$g(r) = k \cdot r \quad con \quad k = g(1)$$

Por último, como todo número real viene determinado por cortaduras sobre los números racionales definidos mediante la relación de orden, al ser *g* monótona, se cumplirá la expresión anterior sobre los números reales.

La aplicación *g* se llama la **función lineal representante de la proporcionalidad.** Se cumple que $k = g(1) = m_u f(e)$, es precisamente la constante en la proporcionalidad *f.* Evidentemente $[f]_{\{e\}\{f(e)\}} = 1$, lo cual significa que si para medir dos magnitudes proporcionales, se adoptan unidades correspondientes, en la proporcionalidad las cantidades correspondientes tienen la misma medida, en efecto:

Sea *a* una cantidad *M* y $f(a) \in$ ***N*** la cantidad correspondiente a la proporcionalidad *f.* Sea *r* la medida de *a* con respecto a la unidad e, $a = r \cdot e$, entonces como $f(a) = f(r \cdot e) = rf(e)$, *r* también será la medida de la cantidad homologa con la unidad correspondiente. En contraposición si la cantidad $f(a)$ no se mide con la unidad correspondiente $f(e)$ sino con otra unidad *u*, su medida *r'* ya no será la misma *r*, sino ésta multiplicando por *k*, siendo *k* la constante de proporcionalidad, en efecto:

$$f(a) = r' \cdot u$$

$$f(a) = f(r \cdot e) = r \cdot f(e) = r \cdot k \cdot u$$

En conclusión $r' \cdot u = r \cdot u = r \cdot k \cdot u$, de donde $r' = k \cdot r$

En general si $M = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$ son cantidades de *M* con medidas correspondientes respecto de la unidad *e,* $\{r_1, r_2, r_3, ..., r_n\}$ entonces $M' = \{a'_1, a'_2, a'_3, ...\}$ son las cantidades homologas respecto de una proporcionalidad *f* con medidas correspondientes $\{r_1, r_2, r_3, ..., r_n\}$ respecto de la unidad *u* entonces se tiene:

$$\frac{r'_1}{r_1} = \frac{r'_2}{r_2} = \frac{r'_3}{r_3} = ... = \frac{r'_n}{r_n} = ... = k \text{ Constante de proporcionalidad}$$

Este número *k,* cociente de las medidas de la magnitud *N* por las medidas de la magnitud *M* es fija para cada proporcionalidad, pero varia de una a otra, y sirve para caracterizar cada proporcionalidad. Dos proporcionalidades se dicen iguales cuando son iguales los cocientes *k* de la medida de las cantidades correspondientes.

Este número *k* se puede a su vez tomar como medida de una nueva magnitud *V* que se llama **razón entre magnitudes.** Si las unidades de ambas son *e* y *u*, la nueva unidad *v* se representará simbólicamente así $v = \frac{u}{e}$.

En el caso particular de que las magnitudes *M* y *N* sean homogéneas, es decir, *M* = *N*, la constante de proporcionalidad es independiente de la unidad elegida:

$$k=[f]_{ee}=[f]_{uu} \text{ Para cada } e,u\in M$$

En efecto, para cualquier unidad u la medida m con respecto a u cumple las siguientes propiedades.

- m es una biyección entre M y R^+
- $a<b$ implica $m(a)<m(b)$
- $m(a+b)=m(a)+m(b)$
- $m(e)=1$
- $m(qa)=qm(a)$ para $q\in Q^+$

Estas propiedades aseguran que m es una proporcionalidad entre M y R^+ por tanto las medidas de las cantidades correspondientes $f(e), m(f(e))$ con unidades correspondientes e y $m(e)$ respecto a m son iguales.

$$med_e f(e)=med_{m(e)}m(f(e))$$

Así

$$k=[f]_{ee}=med_e f(e)=med_{m(e)}[m(f(e))]=\frac{m(f(e))}{m(e)}=\frac{med_u(f(e))}{med_u(e)}$$

Ahora si $e=r\cdot u$ se tendrá que *f(e)=rf(u)* y en consecuencia

$$[f]_{ee}=\frac{med_u(f(e))}{med_u(r\cdot u)}=\frac{r\cdot med_u f(u)}{r\cdot med_u}=med_u f(u)=[f]_{uu}$$

Como se quería demostrar.

En resumen la constante de proporcionalidad entre dos magnitudes homogéneas, es la razón de sus cantidades y es igual a la razón de sus medidas tomadas con la misma unidad.

1.3.2.1.4 RAZONES ENTRE MAGNITUDES

Dadas dos cantidades a y b, la razón entre ambas se puede definir sin hacer referencia directa a la medida.

Basta para ello considerar la cortadura (P_1, P_2) sobre los números racionales positivos:

$$P_1 = \left\{ \frac{m}{n}; \quad m,n \in N \,/\, na < mb \right\}$$
$$P_1 = \left\{ \frac{m}{n}; \quad m,n \in N \,/\, na \geq mb \right\}$$

Entonces el número real r que se define será la razón entre dichas cantidades a y b. Indicaremos simbólicamente que

$$\frac{a}{b} = r$$

Toda razón entre cantidades determina una proporcionalidad entre las cantidades de la misma magnitud.

En efecto, definimos $f_{\frac{a}{b}}(d) = c$ si y solo si

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad para \quad a,b,c,d \; en \; M$$

Diremos que $\{a,b,c,d\}$ son proporcionales y a la cantidad c la llamaremos la cuarta proporcional.

$f_{\frac{a}{b}}$ Es un automorfismo[2] en M, efectivamente.

2. AUTOMORFISMO: Un automorfismo de un cuerpo es una transformación entre sus elementos que hace corresponder a la suma de dos de ellos la suma de sus transformados y, al producto, el producto.

Sea $\dfrac{a}{b}=\dfrac{v_1}{u_1}=\dfrac{v_2}{u_2}$ para $u_1,u_2,v_1,v_2, de\, M,$ se tendrá que $\dfrac{a}{b}=\dfrac{v_1+v_2}{u_1+u_2}$ por tanto

$$f_{\frac{a}{b}}(u_1+u_2)=v_1+v_2=f_{\frac{a}{b}}(u_1)+f_{\frac{a}{b}}(u_2)$$

Se cumple también que sí $u<r, f_{\frac{a}{b}}(u)<f_{\frac{a}{b}}(r)$.

Así $f_{\frac{a}{b}}$ será una proporcionalidad en M.

La constante de proporcionalidad de $f_{\frac{a}{b}}$ coincidirá precisamente con su razón.

En efecto sea $k=\left[f_{\frac{a}{b}}\right]_{u,u}$ para u unidad en M.

$$f_{\frac{a}{b}}(u)=k\cdot u$$

Ahora por la definición de $f_{\frac{a}{b}}$ se tendrá simbólicamente

$$\frac{a}{b}=\frac{ku}{u}$$

es decir que (a,b) y (ku,u) definen la misma cortadura y como la cortadura definida por (ku,u) es k, se concluye que $k=r$, razón de (a,b).

Como la cortadura (P_1,P_2), es equivalente a la cortadura (C_1,C_2) donde

$$C_1=\{q\in Q^+ / q\cdot b>a\}$$

$$C_2=\{q\in Q^+ / q\cdot b<a\}$$

Y como (C_1,C_2) define la medida de a con respecto a b, podemos concluir que la razón $\dfrac{a}{b}$ coincide con la medida de a respecto a b y por tanto con el cociente de sus medidas tomadas con la misma unidad. En efecto recordemos que a partir de la definición 6 del libro V de Euclides dice que:

a y b están en la misma razón que c y d, cuando, para todos los números naturales n y m, se tiene las implicaciones siguientes según los tres casos posibles:

- Si $na > mb$ entonces $nc > md$.
- Si $na = mb$ entonces $nc = md$.
- Si $na < mb$ entonces $nc < md$.

Esta definición es equivalente a decir que $(a,b;\, c,d)$ son proporcionales, es decir, a y b determinan la misma cortadura que c y d. La cortadura determinada para dos cantidades a y b sobre los números racionales positivos es (P_1, P_2)

Por otra parte, con el anterior resultado podemos reducir a proporciones numéricas las proporciones entre cantidades y aplicar a éstas las denominaciones y propiedades de la aritmética. Así podemos determinar efectivamente la razón entre dos cantidades a, b aplicando el mismo esquema (algoritmo de Euclides) que sirve para calcular el máximo común divisor de sus correspondientes medidas s y t

$s_i - cociente$
$r_i - resto$

	s_1	s_2	s_3		s_{n-2}	s_{n-1}	s_n	s_{n+1}
s	t	r_1	r_2	...	r_{n-3}	r_{n-2}	r_{n-1}	r_n
r_1	r_2	r_3	r_4	...	r_{n-2}	r_n	0	

$1 \leq i \leq n$

Si s y t son primos entre si, resulta $r_n =$ m.c.d (s,t)=1.

Si, $r_n \neq 1$ representa el máximo común divisor o máxima parte alícuota común a las dos magnitudes dadas a y b; pero sean o no sean primos entre si, s y t obtendremos como expresión de la razón $\frac{a}{b}$ la expresión siguiente, que se llama fracción continua.

$$\frac{a}{b} = \frac{s}{t} = s_1 + \cfrac{1}{s_2 + \cfrac{1}{\ddots \quad \ddots \, s_n + \cfrac{1}{s_{n+1}}}}$$

Como las cantidades $r_1, r_2, r_3, ...$ van disminuyendo, pronto llegan a no ser apreciados. Si despreciamos por ejemplo el segundo resto r_2 tenemos $s_1 + \frac{1}{s_2}$ como valor aproximado de la razón.

1.3.2.1.5 TEORÍA DE LA PROPORCIÓN

Dadas dos cantidades a y b, se define la proporción (a,b) como el cociente

$$p(a,b) = \frac{máx(s,t)}{mín(s,t)}$$

siendo s, t las medidas respectivas de a y b en una unidad determinada.

La proporción es una aplicación P que, a todo par de cantidades asigna un número mayor o igual que 1, es decir:

$$\begin{aligned} P : MxM &\rightarrow (1,+\alpha) \\ (a.b) &\rightarrow p(a,b) \end{aligned}$$

Que cumple:

I. Propiedad de simetría

$P(a,b) = P(b,a)$, para todo $a, b \in M$

II. Propiedad de semejanza

$P(ra,rb) = P(a,b)$ para todo $r > 0 \quad y \quad a,b \in M$

III. Aditividad

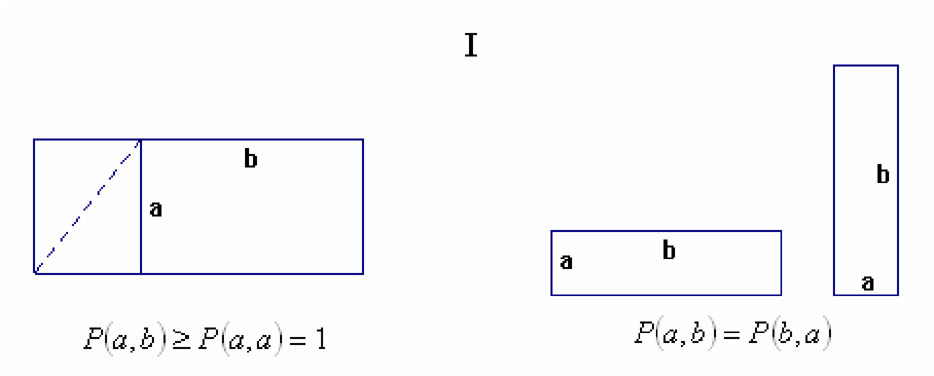
$P(a,b) + P(a,c) = P(a,b+c)$ si $a \leq b \quad y \quad b \leq c \quad siendo \quad a,b,c \in M$

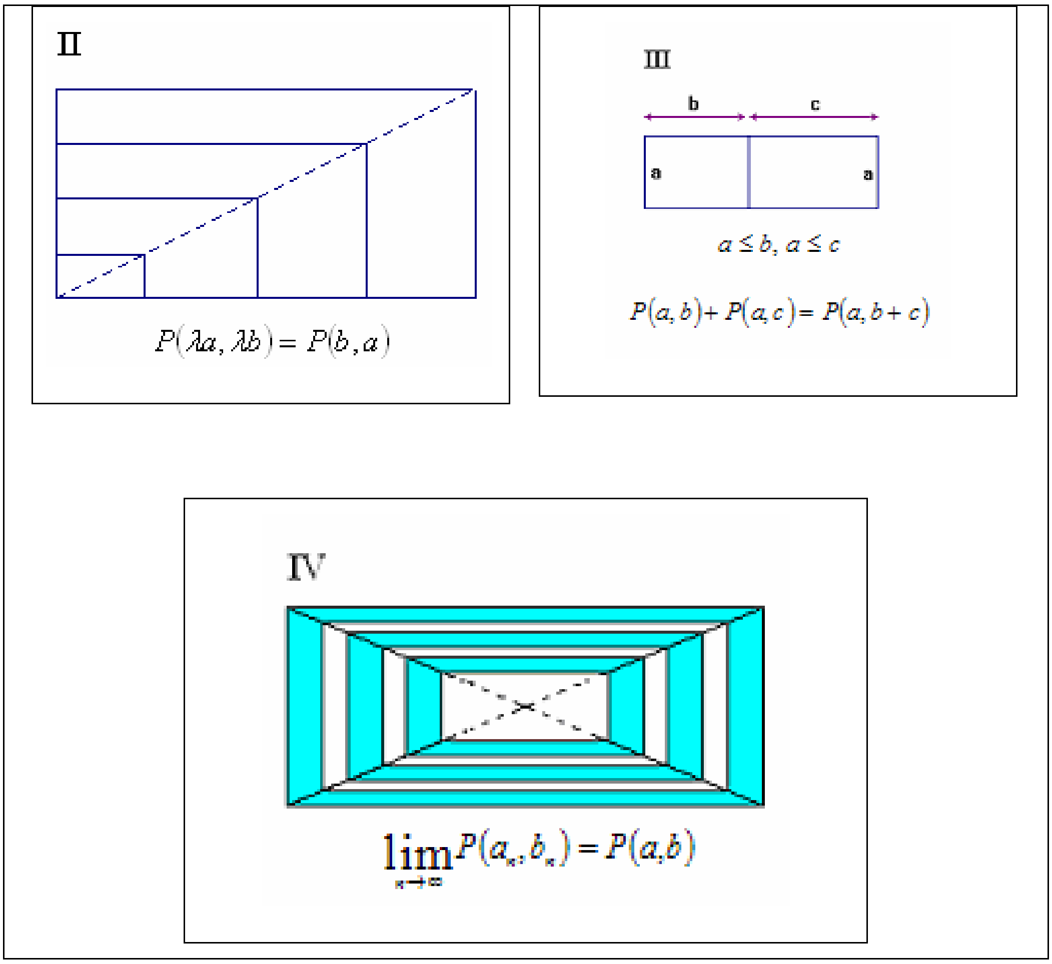
IV. Continuidad

$\lim_{n \to \alpha} P(a_n, b_n) = P(a,b)$ si $a = \lim_{n \to \alpha} a_n \quad b = \lim_{n \to \alpha} b_n$

A partir de las propiedades de la teoría de la proporción podemos identificarlas a partir de su relación geométrica.

Relaciones geométricas de la proporcionalidad





Se define:

$$p(a,b) = \frac{máx(s,t)}{mín(s,t)} \geq 1$$

1) $p(a,b) = \dfrac{máx(s,t)}{mín(s,t)} = \dfrac{máx(t,s)}{mín(t,s)} = p(b,a)$

2) $p(ra,rb) = \dfrac{máx(rs,rt)}{mín(rs,rt)} = \dfrac{máx(s,t)}{mín(s,t)} = p(a,b) \quad si \quad r > 0$

3) Si $a \leq mín(b,c)$ entonces resulta

4) $p(a,b)+p(a,c)=\dfrac{máx(s,t)}{mín(s,t)}+\dfrac{máx(s,r)}{mín(s,r)}=\dfrac{t}{s}+\dfrac{r}{s}=\dfrac{t+r}{s}=p(a,b+c)$

5) si $m(a)=s, \quad m(b)=t, \quad m(c)=r$

6) $\lim\limits_{n\to\infty} P(a_n,b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{máx(sn,n)}{mín(sn,n)}=\dfrac{máx\left(\lim\limits_{n\to\infty} sn,\ \lim\limits_{n\to\infty} n\right)}{mín\left(\lim\limits_{n\to\infty} sn,\ \lim\limits_{n\to\infty} n\right)}=\dfrac{máx(s,t)}{mín(s,t)}=P(a,b)$

De hecho estas propiedades geométricas de la proporción son esenciales, es decir, caracterizan la fórmula usual del cociente de la dimensión mayor por la menor.

Así podemos concluir que la proporción de dos magnitudes es la razón entre la mayor y la menor.

- La proporción de la media geométrica

$$\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{b}; \quad \frac{a}{b}=\frac{b}{c}$$

Donde dados segmentos *a* y *c*, sea un segmento *b*, tal que se verifica la *relación* $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, se dice en este caso que *b* es media proporcional de *a* y *c*.

- La proporción armónica

En la que el término medio excede al primero en una fracción de éste igual a la fracción en que aquel es sobrepasado por el último. Por ejemplo, los números 6, 8 y 12.

$$\frac{b-a}{a+c}=\frac{a}{c} \quad \Rightarrow \quad b=\frac{2ac}{a+c}$$

- La proporción aritmética

  Donde el término medio excede al primero en una cantidad en la que este es excedido por el último. Por ejemplo, los números 2, 4 y 6.

$$a - b = b - c \quad \Rightarrow \quad b = \frac{a+c}{2}$$

1.3.2.4 LA RELACIÓN ARITMÉTICA – ÁLGEBRA

En este punto se ve la necesidad de utilizar conceptos dados por el pensamiento numérico, que representan una gran utilidad para el desarrollo del álgebra y de la idea de variación, por tal razón se recurre a las propiedades ya establecidas para operar cantidades numéricas y que permiten establecer un puente o relación entre la aritmética y el álgebra. El conocimiento aritmético adquirido por los estudiantes sobre la construcción de los distintos significados del número, se constituyen en pilares fundamentales para acercarse significativamente a las nociones de variable, incógnita y a los métodos para resolver ecuaciones lineales, por eso se ve la importancia de definir las operaciones y propiedades de los números reales.

Pese a que se podría inducir los números naturales por medio de los axiomas de Peano, se mostrará de manera inductiva. Suponemos la existencia del conjunto de los **números reales** $\Re$**,** al igual que dos operaciones llamadas **adición y multiplicación**, tales que para cada par de números reales *x* e *y* se puede formar la **suma** de *x* e *y*, que es otro número real designado por $x + y$ y el producto de *x* por *y* designado por *xy* o *x.y*. La suma $x + y$ y el producto *xy* están unívocamente determinados por *x*e *y*.

Axiomas de Cuerpo*:* Sean *x, y, z* números reales, entonces:

- Axioma 1*:* Propiedad Conmutativa $x + y = y + x$, $xy = yx$.
- Axioma 2*:* Propiedad Asociativa $x + (y + z) = (x + y) + z$, $x(yz) = (xy)z$.
- Axioma 3*:* Propiedad Distributiva $x(y + z) = xy + xz$.

- Axioma 4: Existencia de Elementos Neutros. Existen dos números reales distintos, que se indican por 0 y 1 tales que para cada número real x se tiene: $0 + x = x + 0$ y $1.x = x.1 = x$
- Axioma 5: Existencia de Negativos. Para cada número real x existe un número real y tal que $x + y = y + x = 0$.
- Axioma 6: Existencia del Recíproco. Para cada número real $x \neq 0$ existe un número real y tal que $xy = yx = 1$.

Ahora para definir los números naturales se utilizará el conjunto de los números enteros positivos.

Definición de conjunto inductivo. Un conjunto de números reales se denomina conjunto inductivo si tiene las siguientes propiedades:

- El número 1 pertenece al conjunto.
- Para todo x en el conjunto, el número $x + 1$ pertenece también al conjunto.

Definición de Enteros Positivos. Un número real se llama entero positivo si pertenece a todo conjunto inductivo.

Sea **P** el conjunto de todos los enteros positivos. Definimos entonces el conjunto **N** de los números naturales como la unión de los números enteros positivos y 0.

Definición (múltiplo y divisor). Si n y d son enteros y $n = cd$ para algún entero c, diremos que d es un **divisor** de n, o que n es un múltiplo de d, y escribiremos $\frac{d}{n}$ (se lee: d divide a n). Adicionalmente, un entero n es *primo* si $n>1$ y si los únicos divisores positivos de n son 1 y n. Si n no es primo, entonces n es compuesto. El entero 1 no es ni primo ni compuesto.

1.3.2.5 FUNCIÓN

Definición: Una función puede considerarse como una correspondencia de un conjunto *X* de números reales *x* en un conjunto *Y* de números reales *y*, donde el número *y* es único para cada valor especifico de *x*.

Definición: Una función es una relación en la cual no existen dos o más parejas distintas con la misma primera componente; o lo que es lo mismo:

$$f \text{ es una función} \Leftrightarrow f \text{ es una relación y}$$
$$(\forall x, y, z)((x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \rightarrow y = z).$$

Por ejemplo, $f = \{(1,2),(2,2),(3,1),(4,3)\}$ es una función.

Su dominio es $D(f) = \{1,2,3,4\}$ y su recorrido es $R(f) = \{1,2,3\}$.

La relación $R = \{(2,1),(2,2),(a,b)\}$ no es una función ya que las parejas ordenadas $(2,1)$ y $(2,2)$ poseen la misma primera componente.

Definición: Una función de *A* en *B* es una función f tal que

- $D(f) = A$ y
- $R(f) \subseteq B$

En otras palabras una función de *A* en *B* es una relación f de *A* en *B* tal que **todo** elemento de *A* está relacionado (por f) con **un único** elemento de *B*.

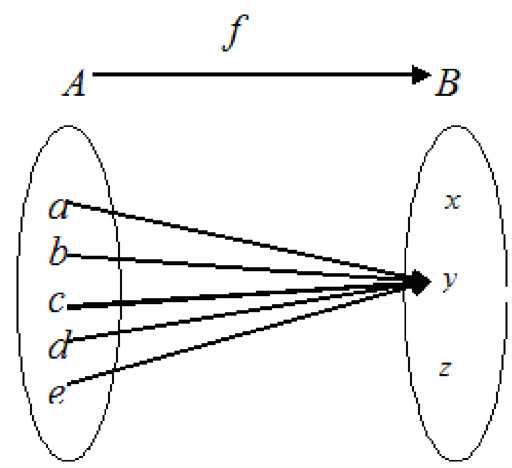
Debido a este hecho, es costumbre notar por $f(x)$ a este único elemento de *B* con el cual *x* se esta relacionado mediante $y = f(x)$ en vez de $(x, y) \in f$. Se dice que *y* (o que $f(x)$) es la imagen por f de *x*, o el valor tomado por f en *x*.

Una función es simplemente un conjunto de parejas ordenadas tal que todas sus primeras componentes son distintas. En cambio, una función de A en B (o una aplicación de A en B), es una tripla ordenada (f, A, B) en la cual $A = D(f)$ y $B \supseteq R(f)$. Por este motivo es costumbre notarla $f : A \to B$, $A \xrightarrow{f} B$, ó $f : A \mapsto B$, , con $x \to f(x)$.

Al conjunto B se reconoce como, **el conjunto de llegada de f o el condominio de f.**

Ejemplos de funciones:

1) Sean $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{x, y, z\}$. A la función de A en B que posee como diagrama sagital

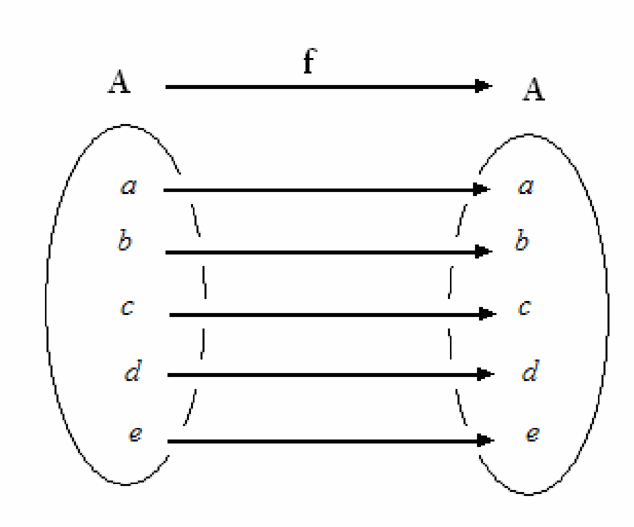


Se le llama una función constante, debido a que toma el mismo valor en todos los elementos de A.

Generalizando: Una función $f : A \to B$ con $B \neq \phi$ se llama una función constante, si existe $b_0 \in B$ que $f(x) = b_0$ cualquiera sea x en A.

Nótese que aun cuando todos los elementos de A tienen la misma imagen, no se esta contradiciendo la definición de función ya que cada elemento de A sigue estando relacionado con un único elemento de B. Lo que la definición prohíbe es que algún elemento de A este relacionado con dos o más de B.

2)



Observamos que cada elemento de A se le hace corresponder precisamente él mismo. Por eso se le acostumbra llamar la **función idéntica** de A o la **identidad** de A y se le representa pos I_A. Generalizando: Si A es un conjunto cualesquiera, se llama identidad de A a la función de $I_A : A \to A$ tal que para todo elemento de x de A, se tiene que $I_A(x) = x$.

Simbolismo de una función:

Se puede determinar cuando se está hablando de una función, si se tienen en cuenta los siguientes simbolismos:

- $y = f(x)$, simboliza que una función cualquiera f a x se le llama variable independiente, a y se le llama variable dependiente.
- $x \to y \quad o \quad x \to f(x)$

Características de una función:

- Se define un dominio en un conjunto específico, para la variable independiente x, a la que denominamos dominio de la función.
- Se define el conjunto de llegada de la función, llamada codominio de la función.

- Se define una regla, tal que a cada elemento del primer conjunto del dominio le corresponde un elemento del codominio; de acuerdo con la regla.

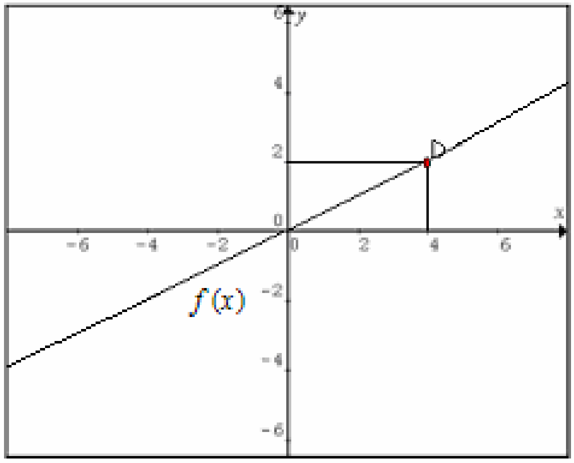
Para que la función esté bien definida es necesario que la regla cumpla las siguientes condiciones:

- Que toda *x* tenga una imagen, es decir que la función este definida para todas y cada una de las *x* en el dominio.
- Que para cada *x* en el dominio se tenga una sola imagen, es decir que no haya ambigüedad respecto a la imagen de cada *x*, se dice que la función debe estar unívocamente definida.

Gráfica de una función:

La representación gráfica se realiza en el sistema de coordenadas cartesianas, rectangulares, que consiste en dos rectas perpendiculares, el eje *x* "horizontal de las abscisas" y el eje *y* "vertical de las ordenadas", fijando una dirección positiva y una negativa para cada una de ellas. El punto de intersección se reconoce como el punto 0, origen de las coordenadas, para cada punto en el plano se asigna un punto determinado por la pareja (x, y) que indica la distancia con sentido del punto a los ejes de las ordenadas y abscisas respectivamente.

Definición: Si f es una función, entonces la gráfica de f es el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano R^2 para los cuales (x, y) es un par ordenado de f.



Donde D es uno de los puntos (x, y) del plano R^2 para los cuales (x, y) es un par ordenado de f $\quad f(x)$

Tablas de una función:

Cuando se utilizan tablas como representación de las funciones está tiene dos columnas (o dos filas), en la que se determina una de ellas para los valores del dominio y la otra para los valores correspondientes al conjunto de llegada. Cuando el dominio de la función corresponde a un conjunto finito de pocos elementos la tabla contiene todas las relaciones, si por el contrario el dominio es un conjunto infinito solo se puede hacer una representación parcial, escogiendo valores representativos para la función.

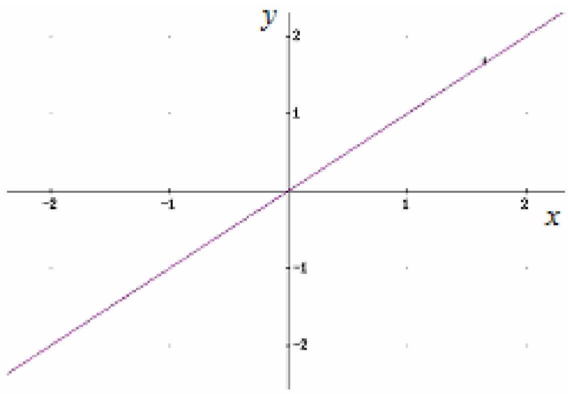
Ejemplo: Dado un x arbitrario del subconjunto Z, $10 < x < 20$, al dividirlo por 7 tiene asociado un resto y.

x	11	12	13	14	15	16	17	18	19
y	4	5	6	0	1	2	3	4	5

Las tablas permiten visualizar regularidades como diferencias constantes, diferencias crecientes y productos constantes.

Clasificación de una función:

- Función lineal:



Su nombre se debe al hecho de que su representación gráfica en el plano cartesiano es una línea recta que pasa por el origen.

La función lineal se define por la expresión algebraica a $y = f(x) = mx$ con $m \neq 0$ y constante, el dominio de *f* es el conjunto de los números reales, esta función es de primer grado en *x*.

La expresión algebraica $y = f(x) = mx + b$ que nos sirve para definir las familias de ecuaciones lineales en dos indeterminadas *x, y*.

Para el caso especifico de *f(x)= x* se denomina función identidad. La cual en su gráfica es una línea recta que biseca los cuadrantes primero y tercero.

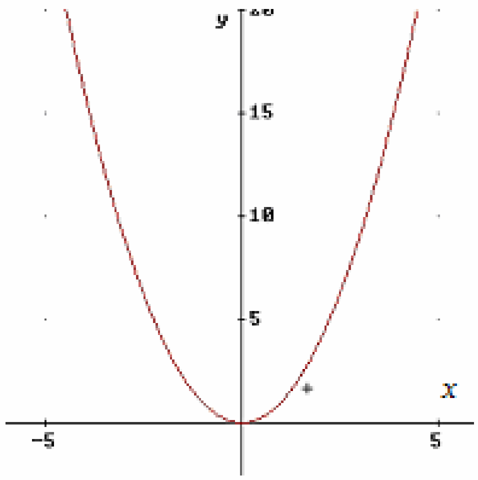
- Función polinomial

Aquellas funciones que sean definidas de la forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son reales $(a_n \neq 0)$ y *n* es un número entero no negativo son reconocidas como funciones polinomiales de grado *n*, de esta manera si el grado polinomial de la función es 2, entonces es una función cuadrática; si es de grado 3, entonces es una función cúbica.

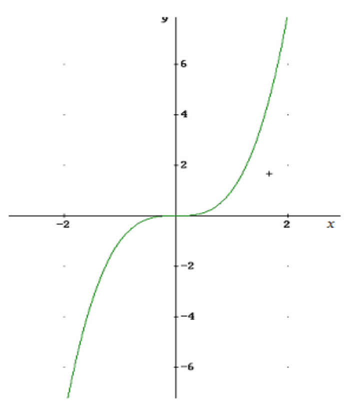
Función cuadrática



Sean $a, b \ y \ c$ números reales cualesquiera. Entonces si $a \neq 0$, decimos que la función definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una función cuadrática. Además, el conjunto que define la función cuadrática es: $C = \{(x, y) / x \in \Re, \ y = f(x) = ax^2 + bx + c, \ \ a, b, c \in \Re \ constantes, a \neq 0\}$ donde el dominio de la función es el conjunto de todos los números reales $D_f = \Re$.

En la definición de función cuadrática, a representa el coeficiente del término de segundo grado, b el coeficiente del término de primer grado y c el término independiente.

Función cúbica



Sean $a, b\ y\ c$ números reales cualesquiera. Entonces si $a \neq 0$, decimos que la función definida por $f(x) = a(x-h)^3 + k$.

Función racional

Cuando se puede expresar una función como el cociente de dos funciones polinomiales, se denomina función racional.

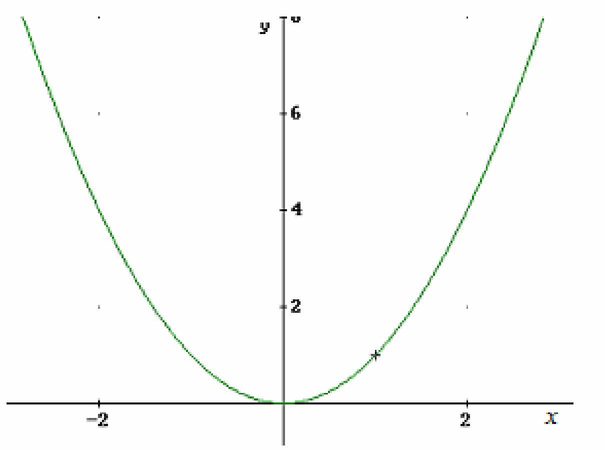
Función algebraica

Son aquellas expresiones formadas por un número finito de operaciones algebraicas sobre la función identidad y una función constante. Donde se incluyen operaciones tales como (la adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación)

A su vez la anterior clasificación de las funciones puede ser de dos clases pares o impares;

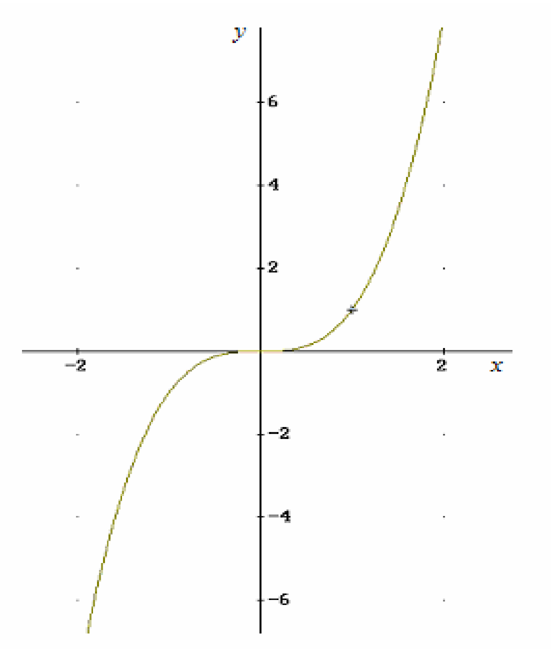
Función par

Una función *f* es una función par si para cada x del dominio de *f*, $f(-x) = f(x)$.



Función impar

Una función f es una función impar si para cada x del dominio de f, $f(-x) = -f(x)$.



ASPECTOS A RESALTAR

- Una función matemática intuitivamente corresponde a unas reglas que regulan la dependencia entre cantidades u objetos variables.
- Sea un conjunto D dado, se dice que la variable x varía en el dominio D para expresar que x puede ser cualquier elemento de D. Un dominio es un conjunto que puede ser numérico o no, finito o infinito.
- Para cada valor de una variable x, se asocia un valor determinado de otra variable y, se dice que y es función de x y se reconoce como: $y = f(x)$.
- Para cualquier función está se conforma de: un dominio, un conjunto de llegada, una regla tal que cada elemento del dominio le hace corresponder un elemento único del conjunto de llegada.

2. ACTIVIDADES

2.1 DESCRIPCIÓN Y GENERALIDADES

La implementación de los estándares básicos de matemáticas en las instituciones educativas del país debe generar espacios de reflexión, debate, análisis, confrontación entre otros; a partir de los cuales se introducen formas nuevas de comprender, implementar, evaluar y transformar el currículo de matemáticas en nuestro país, en tanto que es un conjunto de formulaciones que tienen como meta normalizar el currículo, pero a la vez, dejando espacios para la autonomía curricular de las instituciones, exigiendo el diseño de planes de estudio acordes con las necesidades institucionales, pero con pertinencia en el marco nacional propuesto por los estándares.

Al resaltar elementos decisivos referentes a la intención pedagógica de los estándares se encuentra, por ejemplo lo relativo al **contexto** como elemento fundamental para recrear los conceptos matemáticos en el aula. Desde los Lineamientos curriculares se propone que los contextos deben ser entendidos como espacios creados en el seno del aula de clase cuyo objetivo es permitir el desarrollo de la actividad matemática en los estudiantes y una manera de generar tales contextos es a través de las situaciones problema, el presente módulo se fundamentara didácticamente a partir del aprendizaje por medio de situaciones problema basadas en la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau.

En un primer momento se realizó la clasificación de las actividades que se creen pertinentes en sus contenidos matemáticos, basados en los estándares básicos de calidad para la educación en el área de matemáticas. Estos tienen en cuenta tres procesos generales que deben estar presentes en la actividad matemática: Planteamiento y resolución de problemas, razonamiento matemático (formulación, argumentación, demostración) y la comunicación matemática (consolidación de la manera de pensar (coherente, clara y precisa)), éstos se encuentran organizados en cinco tipos de pensamiento matemático

1) Pensamiento numérico y sistemas numéricos.
2) Pensamiento espacial y sistemas geométricos.
3) Pensamiento métrico y sistemas de medidas.
4) Pensamiento aleatorio y sistemas de datos.
5) Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

De éstos se seleccionaron aquellos que se considera potencian el desarrollo del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

Después de seleccionar las actividades, se realizó una elección de éstas a partir de su estructura, determinando su coherencia, de tal manera que se pueda presentar como una situación problema, como aquella que cumple las siguientes condiciones:

- Se convierte para el estudiante en formas de conocer.
- Contiene implícitos los conceptos que queremos que el estudiante aprenda.
- Contiene preguntas que no son demasiado abiertas.
- Permite utilizar conocimientos anteriores.
- Representa un verdadero problema para el estudiante, pero a la vez, es accesible a él.

De esta manera, se da un sustento matemático a la propuesta y se organizan las actividades por niveles temáticos dando el sustento matemático correspondiente a los contenidos y procedimientos asociados a cada tema, a partir de los fundamentos teóricos respectivos, así mismo talleres que cumplían con un mismo objetivo se unieron y se complementaron.

Finalmente al tener un sustento didáctico definido respecto a la situaciones problema y un sustento matemático, se encuentran las actividades, generando una propuesta para el trabajo escolar que permita brindar a los docentes un esquema que pueda ser empleado en el aula de clase para el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de básica secundaria, un módulo que presente diferentes tipos de actividades que desarrollen el pensamiento variacional, sistemas algebraicos y analíticos por medio de situaciones problema. Es así que surgen las actividades que se proponen a continuación, las cuales se encuentran enmarcadas por los estándares básicos de calidad para la educación en el área de matemáticas, manejando los temas de proporcionalidad, variable, generalización, algebra y funciones, donde en cada una de ellas se presenta el(los) estándar(es) que le corresponde(n), la temática manejada y el objetivo que pretende cumplir, buscando con cada una de ellas que el estudiante desarrolle estrategias de resolución de problemas, generalice por inducción sobre casos particulares, plantee conjeturas y las compruebe, organice información y realice la traducción correspondiente de las diferentes maneras en que ésta se presenta.

2.2 TALLERES

TALLER # 1

Estándar (Sexto a séptimo grado):

- ✓ Describir y representar situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).
- ✓ Identificar las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan.

Temática: Razones y proporciones.

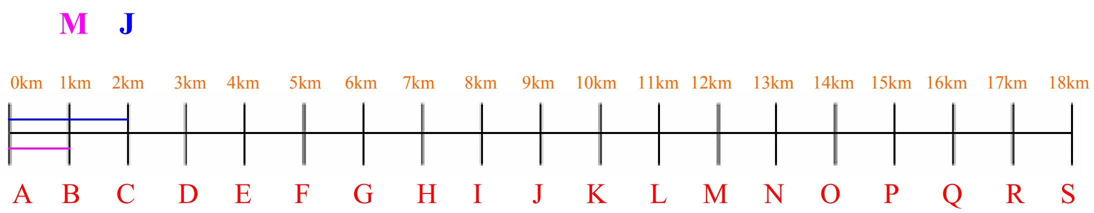
Objetivo: Reconocer que la igualdad de dos razones conduce al planteamiento de proporción entre los datos de dos variables.

"POR LA MARATÓN DE BOGOTÁ"

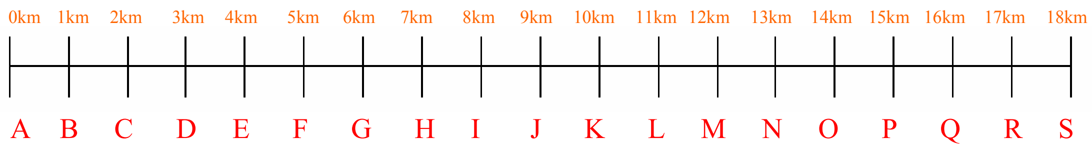
Julio y Marisol son dos grandes atletas que vienen preparándose para la media maratón de Bogotá, ellos entrenan diariamente. En la primera semana que entrenaron juntos, se notaron grandes avances en el rendimiento de cada uno, ya que han incrementado su recorrido.

Los recorridos realizados durante la semana fueron:

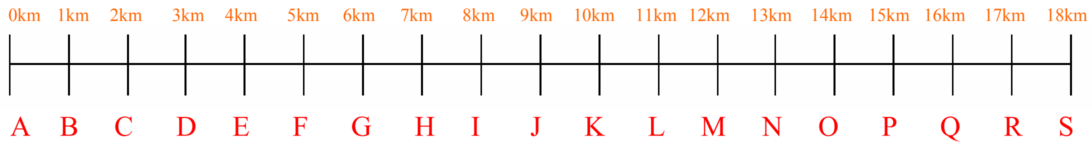
- El lunes Marisol recorrió 1 km y Julio recorrió 2 km.



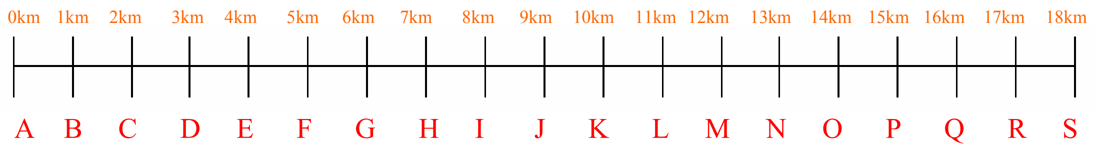
- El martes Marisol recorrió 2 km y Julio 4 km. Represéntalo gráficamente.



- El miércoles Marisol recorrió 6 km y Julio recorrió 8 km. Represéntalo gráficamente.



- El jueves Marisol recorrió 12 km y Julio recorrió 16 km. Represéntalo gráficamente.



Registra los recorridos realizados por Marisol y Julio en la siguiente tabla:

	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES
MARISOL				
JULIO				

A partir de los datos obtenidos en los recorridos realizados por Marisol y Julio, determina en forma escrita la relación entre los recorridos de:

a) El día lunes de Marisol y Julio.

b) El día martes de Marisol y Julio.

c) El día miércoles de Marisol y Julio.

d) El día jueves de Marisol y Julio.

e) Los días lunes y martes de Marisol.

f) Los días lunes y martes de Julio.

g) Los días miércoles y jueves de Marisol.

h) Los recorridos de los días miércoles y jueves de Julio.

A partir de tus respuestas completa:

	JULIO	MARISOL	RELACION	RAZÓN
LUNES	2 km	1 km	Julio recorrió el doble de lo que recorrió Marisol	$\frac{2}{1} = 2$
MARTES				
MIÉRCOLES				
JUEVES				

De las relaciones que has encontrado ¿Puedes decir si hay algunas razones equivalentes?, escríbelas en la siguiente tabla:

RELACIÓN	RAZÓN	RELACIÓN	RAZÓN	PROPORCIÓN
Julio recorrió el doble de lo que recorrió Marisol	$\frac{1}{2}$			

TALLER # 2

Estándar (Sexto a séptimo grado):

- ✓ Describir y representar situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).
- ✓ Identificar las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan.

Temática: Razones y proporciones.

Objetivo: Reconocer que la igualdad de dos razones conduce al planteamiento de proporción entre los datos de dos variables.

Las medidas de mi cuerpo

Materiales: metro de costura, hojas de papel en blanco, lápiz y toda su disposición.

1) Conforma grupos de 3 estudiantes donde se tomen las siguientes medidas y recopila los datos en la siguiente tabla.

   - Tu estatura (E)
   - Medida de los pies hasta el ombligo(O)
   - Medida del ombligo a la cima del cráneo (S)
   - Medida de la muñeca hasta el codo (I)
   - Medida de la cintura (C)
   - Medida de la cabeza (Ca)

- Medida de un hombro al otro (P)
- Medida desde los dedos de una mano a los dedos de la otra mano con los brazos extendidos a los lados(B)

Nombre del estudiante	E	O	S	I	C	Ca	P	B

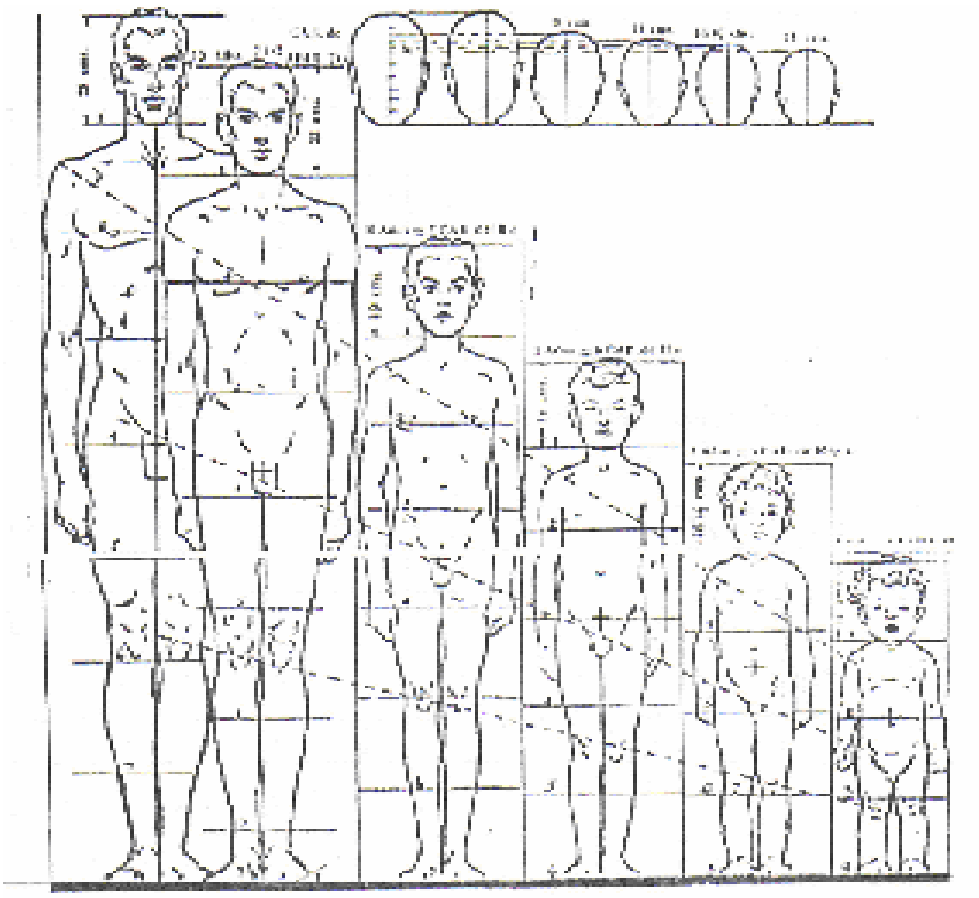
2) Establece las siguientes relaciones a partir de los datos de la tabla anterior.

Nombre del estudiante	E/O	E/S	S/O	C/I	I/ Ca	C/Ca	E/B	P/Ca

3) Escribe las relaciones que encontraste en la tabla anterior y describe el porque crees que esta relación se tiene.

4) ¿Existe alguna relación entre los datos obtenidos en la última tabla y la de tus compañeros?
5) ¿Existe alguna relación similar a las anteriores con las medidas de la cara?

PROPORCIONES IDEALES A VARIAS EDADES



TALLER # 3

Estándar (Sexto a séptimo grado):

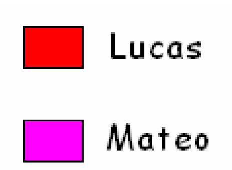
- ✓ Describir y representar situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).
- ✓ Identificar las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan.
- ✓ Reconocer el conjunto de valores de una variable en situaciones de cambio (variación).

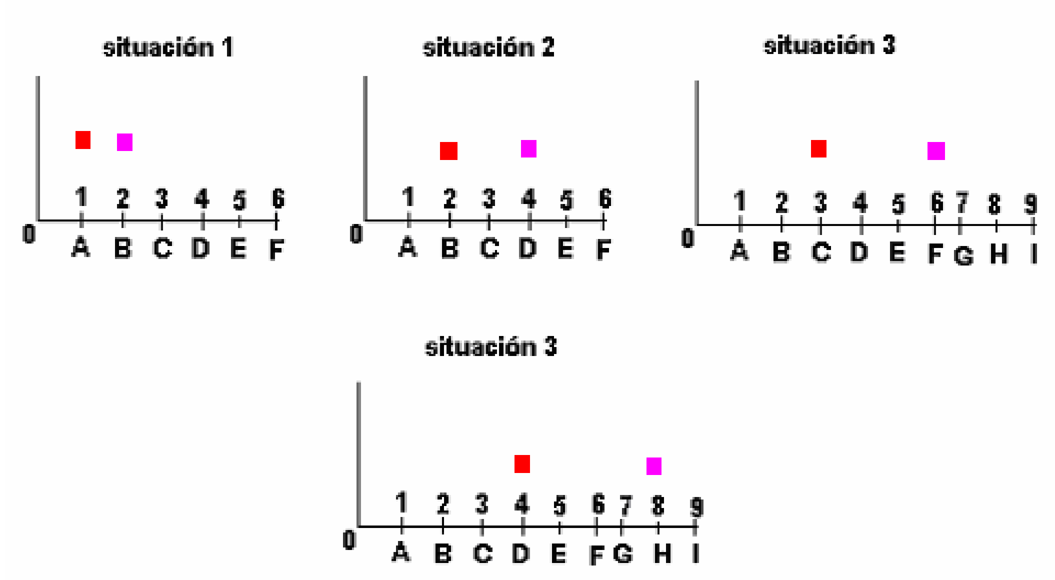
Temática: Razones y proporciones.

Objetivo: Utilizar un sistema de coordenadas cartesianas para representar dos magnitudes relacionadas.

La competencia de perros

En una competencia de perros que se hizo entre Lucas y Mateo, dos labradores, hemos observado lo siguiente (en intervalos de tiempos iguales):





- En la *situación 1*, Mateo avanza hasta el segmento OB que mide ________ y Lucas avanza hasta el segmento ________ que mide 1 unidad, entonces Mateo ha recorrido ________ por cada unidad que recorre Lucas.
- En la *situación 2*, Mateo avanza hasta el segmento________ que mide _______y Lucas avanza hasta el segmento ______ que mide ______, entonces el Mateo ha recorrido 4 unidades mientras que Lucas ha recorrido _________.

Escribe conclusiones similares para las demás situaciones y responda las siguientes preguntas:

- En la *situación 3*, ¿Hasta donde avanza Mateo y hasta donde avanza el Lucas?
- En la *situación 3*, ¿Qué segmento le lleva de ventaja Mateo a Lucas y cuanto mide este segmento?

- En la *situación 4*, ¿Hasta donde avanza Mateo? ¿Cuánto mide este segmento?
- En la *situación 4*, ¿Hasta donde avanza Lucas? ¿Cuánto mide este segmento?
- En la *situación 4*, ¿Qué relación se puede establecer entre la medida de los segmentos recorridos por Mateo y Lucas?
- ¿Cuánto avanza (segmento y medida) de una situación a la otra?

Completa el cuadro que aparece a continuación, en las casillas de Mateo y Lucas escriba el segmento y la longitud recorrida, según corresponda el caso (siendo u: unidades):

	MATEO	LUCAS	RAZÓN 1	RAZÓN 2
Situación 1	$\overline{OB}$ OB = 2 u	$\overline{OA}$ OA = 1 u	$\frac{OB}{OA} = \frac{2\,u}{1\,u}$	$\frac{OA}{OB} = \frac{1\,u}{2\,u}$
Situación 2				
Situación 3				
Situación 4				
Situación 5	OJ = 10 u			

Situación 6			$\frac{OL}{OF} = \frac{12\,u}{6\,u}$	
Situación 7		OG = 7 u		

¿A qué razón avanza Mateo respecto a Lucas?

¿A qué razón avanza Lucas respecto a Mateo?

TALLER # 4

Estándar (Octavo a noveno grado):

- ✓ Describir y representar situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).
- ✓ Identificar las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan.

Temática: Expresiones algebraicas.

Objetivo: Analiza información suministrada en tabla o en cualquier otra forma para interpretar relaciones cuantitativas.

COLFLORES

La empresa Colombiana "Colflores" exporta flores a diferentes países del mundo. Está empresa fue fundada con el capital de dos hermanos Jorge y Ricardo, cuenta con un centro administrativo ubicado en Bogotá y una hacienda en Funza llamada "Porvenir" donde tienen sus cultivos de flores.

Cuando iniciaron la empresa Jorge y Ricardo aportaron cada uno cierta cantidad de dinero. La cuarta parte de lo invertido por Jorge menos

$3.570.000 equivale a lo invertido por Ricardo. Si Jorge aportó a la empresa $27.000.000.

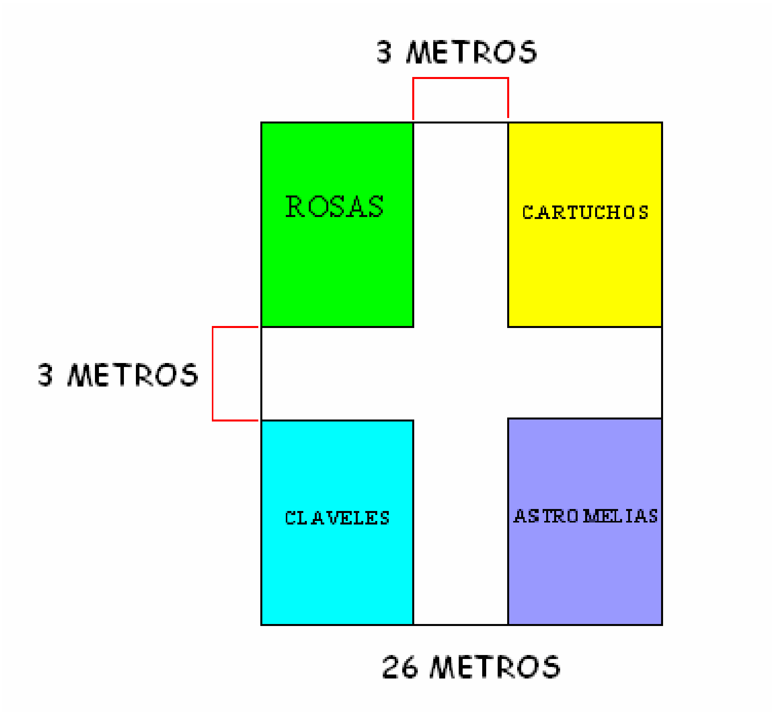
- ¿Cuánto capital aportó Ricardo?
- ¿Con cuánto capital se fundó la empresa?
- Si Ricardo decidiera aportar el doble de lo que aportó, pero teniendo en cuenta que la empresa se funda con el mismo capital. ¿En cuánto se reduciría el capital aportado por Jorge?
- A los cuatro años de fundada la empresa se presenta el siguiente informe: en el primer año hubo ganancias por $3.000.000, en el segundo año por una mala inversión la empresa perdió $5.000.000, en el tercer año tuvo una leve mejoría y ganó $2.000.000 y en el cuarto año fue un excelente año en ventas y se ganaron $12.000.000. ¿Cuánto dinero tiene en este momento la empresa? Representa en una recta numérica los cambios registrados.

El terreno de la hacienda "Porvenir" ubicada en Funza, tiene de largo 750 metros y 450 metros de ancho; en una esquina se ha construido una casa de 37 metros de largo por 20 metros de ancho. La zona del cultivo debe repartirse para producir rosas, para producir cartuchos y para producir claveles.

- ¿Qué área del terreno no esta construida?
- ¿De cuántos m^2 dispone el cultivo para cada tipo de flor?
- ¿Cuál de los dos perímetros es mayor, el de la casa o el del terreno?, ¿En cuánto lo excede?

- Para colocar el piso de la casa se invirtieron $841.380, ¿Cuánto se gastó por m^2?
- Si se cerca el terreno dando 3 vueltas con alambre, ¿Cuánto alambre se necesita?

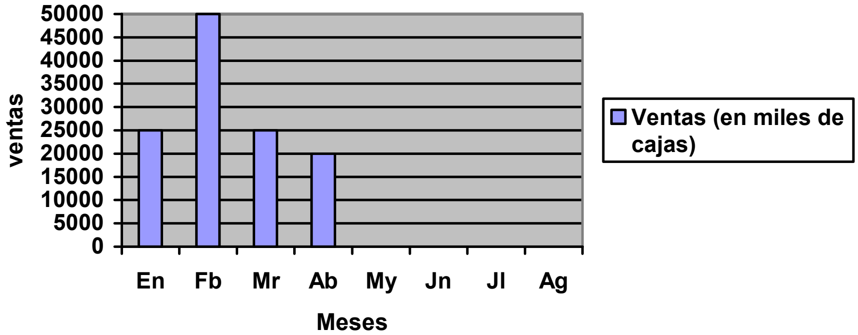
En vista de las buenas ganancias que se han obtenido en la empresa, los dueños de Colflores adquirieron otro terreno. Las nuevas plantaciones están ubicadas en Funza, el terreno tiene forma rectangular y los cultivos son de igual área y forma como se muestra en el diagrama:



- La mitad del perímetro del terreno es 64 metros. Si el ancho es 26 metros, ¿Cuál es el largo del terreno?
- ¿Cuáles son las dimensiones de cada plantación?
- ¿Cuál es el área de cada plantación?

- Si desea colocar una primera fila de ladrillos alrededor de cada plantación. Si un ladrillo mide 25 centímetros de largo ¿Cuántos ladrillos se necesitan para el borde de cada plantación?
- Se desea embaldosinar el corredor del terreno. ¿Cuántas baldosas de 50 x 50 centímetros se necesitan?

Daniel es el contador de Colflores, debe entregar un informe solicitado por el gerente de la empresa, sobre las ventas de los meses de Enero a Julio de este año, para lo cual utiliza la siguiente gráfica.



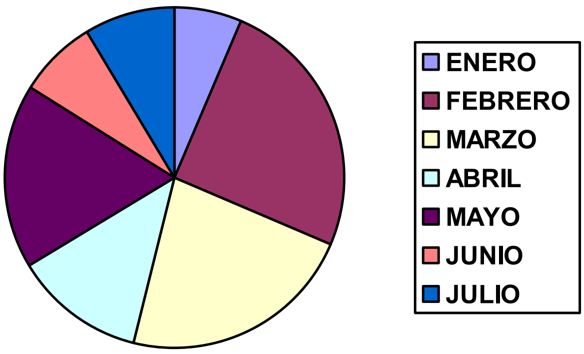
Daniel no ha terminado todavía el informe, completa la gráfica teniendo en cuenta que:

- En el mes de Mayo se vendieron 15000 cajas más que en Marzo.
- En Junio las ventas son aumentadas a las de Enero, en 7000 cajas.
- Para el siguiente mes las cajas vendidas fueron el triple de las ventas en Marzo, disminuidas en lo vendido en Mayo.

- ¿Cuál ha sido el mejor mes en la venta de flores?
- ¿En qué meses la venta ha sido la misma?

- ¿Qué puede decir Daniel de la venta de flores de mayo con respecto a julio?
- Para Agosto la meta es vender 38600 cajas. ¿Colflores debe vender más cajas o menos cajas o menos que en junio? ¿Cuántas cajas más o menos debe vender?

El gerente de mercadeo de Colflores recibió la siguiente gráfica, que contiene los datos de las ventas de otra empresa de flores llamada "Mercaflores", en lo que va este año.



- ¿En qué mes se presentaron las mayores ventas? ¿En cual las más bajas?
- En Febrero ¿Cuál empresa vendió más cajas de flores?
- En Mayo, ¿qué empresa vendió más? ¿Cuál fue la diferencia?
- Si el total de las ventas fue de 200.000 cajas. ¿Cuál de las dos empresas han vendido más cajas de flores este año?

Sebastián, el administrador de la Hacienda "Porvenir" revisa el trabajo de sus empleados; en la sección de empaques contabiliza el tiempo que demoran dos trabajadores, Arturo y Pedro en empacar las flores. Sebastián registra los datos en las siguientes tablas.

ARTURO

Tiempo (minutos)	5	10	15	20	25
Número de flores	3	6	9	12	15

PEDRO

Tiempo (minutos)	5	10	15	20	25
Número de flores	4	8	12	16	20

Teniendo en cuenta los datos en las tablas, contesta:

- ¿Puedes decir que cantidad de flores habrá empacado Arturo al cabo de 35 minutos?
- ¿Quién ha empacado más flores después de 15 minutos?
- ¿Cuántas flores le lleva Pedro a Arturo en 20 minutos? ¿Es la misma cantidad que a los 10 minutos?
- La jornada de trabajo comienza a las 8 a.m, para que entre Arturo y Pedro empaquen 72 flores en una hora, ¿Cuánto tiempo puede descansar cada uno si deben empacar la misma cantidad?

TALLER # 5

Estándar (Octavo a noveno grado):

- ✓ Describir y representar situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).
- ✓ Reconocer el conjunto de valores de una variable en situaciones concretas de cambio (variación)

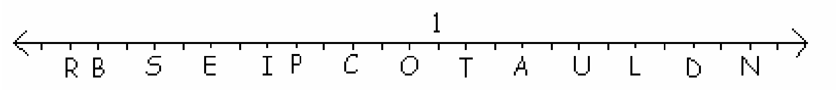
Temática: Expresiones algebraicas

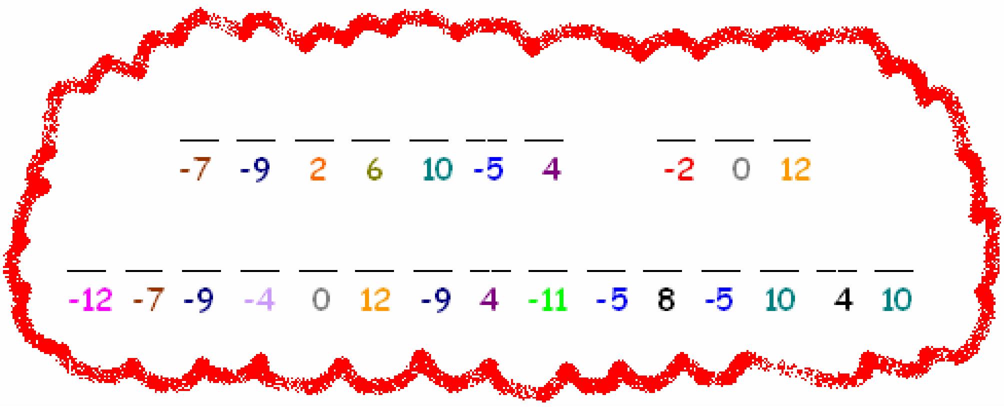
Objetivo: Reconocer que el valor de una expresión con literales varía según se asignen valores a cada letra.

El juego Egipcio

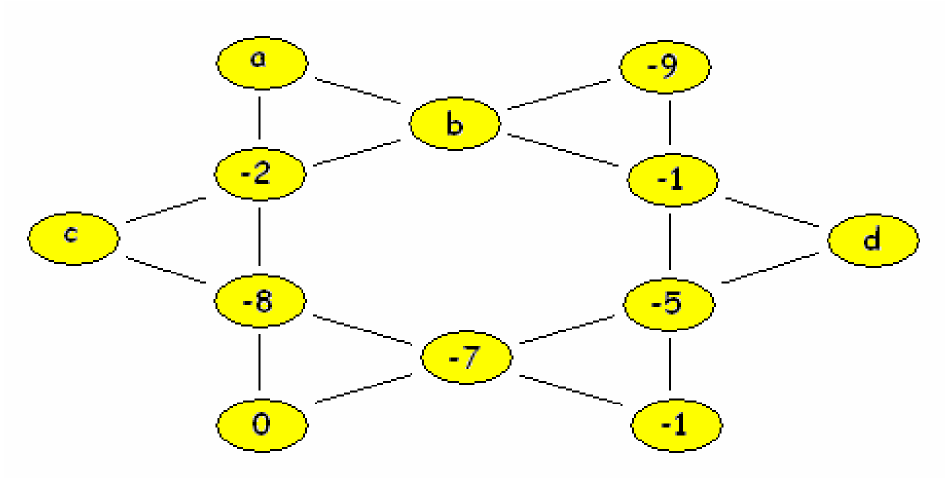
Santiago recibió de cumpleaños un juego Egipcio en el cual tiene que descifrar ciertos códigos para poder avanzar y terminarlo satisfactoriamente.

- En el primer nivel debe usar las siguientes letras y su posición para descifrar el mensaje oculto:

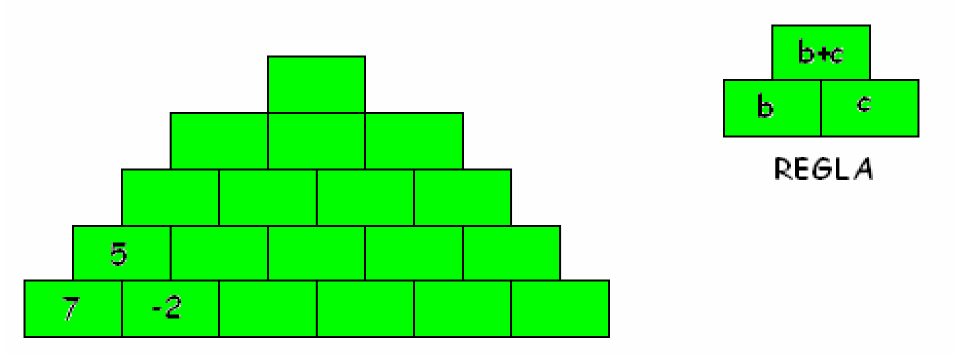


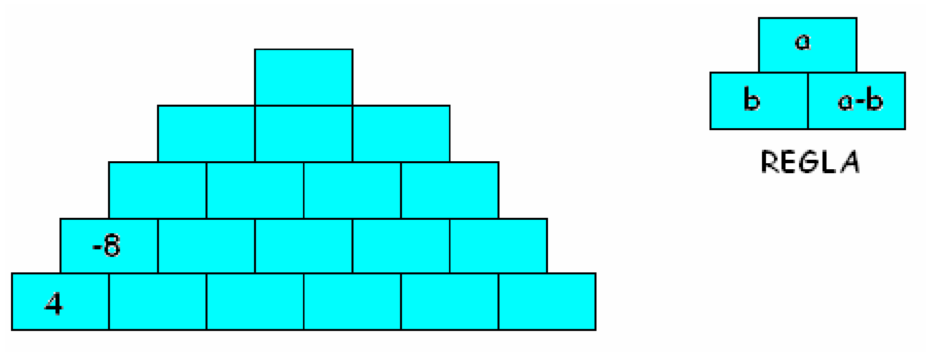


- En el segundo nivel debe terminar la estrella mágica en la que la suma de los cuatro números alineados es siempre la misma (donde a, b, c y de son números enteros):



- En el tercer nivel debe completar las siguientes pirámides con números enteros usando la regla que se indica en cada caso:


5
7
-2
b+c
b
c
REGLA


-8
4
a
b
a-b
REGLA

TALLER # 6

Estándar (Octavo a noveno grado):

- ✓ Construir expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
- ✓ Usar procesos inductivos y lenguaje algebraico para verificar conjeturas.

Temática: Iniciación al uso de literales.

Objetivo: Comprender que las matemáticas ofrecen un lenguaje para interpretar las relaciones cuantitativas.

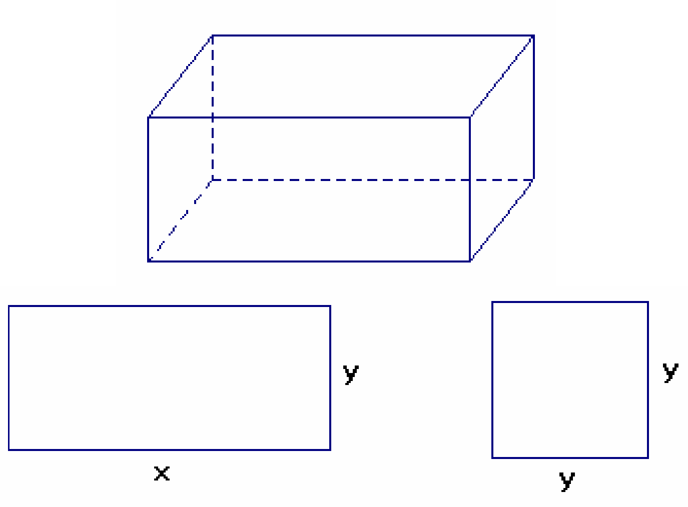
CAMILA DE SHOPPING

Camila fue a la papelería y compro siete cuadernos, tres bolígrafos y cuatro libros.

- Si c es el costo de cada cuaderno, ¿Cómo se puede expresar algebraicamente el valor total de los cuadernos?
- Si b es el costo de cada bolígrafo, ¿Cómo se puede expresar algebraicamente el valor total de los bolígrafos?
- Si l es el costo de cada libro, ¿Cómo se puede expresar algebraicamente el valor total de los libros?
- ¿De que depende el valor total que Camila debe cancelar?
- ¿Cuál es la expresión algebraica que indica el valor total que pago Camila?

Además de estos útiles, Camila fue a comprar la sudadera del colegio la cual le costó dos veces el precio de los cuadernos. ¿Cuál es el precio de la sudadera?

Después de realizar todas sus compras, Camila se va para su casa y decide construir una caja con láminas de madera para guardar los útiles escolares que compro. Si las dimensiones de las láminas son las siguientes (***x*** e ***y*** son medidas):



- ¿Cuál es el perímetro de cada lámina?
- ¿Cuál es el área de cada lámina?
- ¿Cuál es el área total de la caja, si esta construida por las láminas que tienen?
- ¿Cuál es el volumen de la caja?

TALLER # 7

Estándar (Octavo a noveno grado):

- ✓ Construir expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
- ✓ Usar procesos inductivos y lenguaje algebraico para verificar conjeturas.

Temática: Iniciación al uso de literales.

Objetivo: Comprender que las matemáticas ofrecen un lenguaje para interpretar las relaciones cuantitativas.

CLAVES DEL JUEGO DOOM

Mauricio debe expresar y traducir los siguientes enunciados en forma verbal al lenguaje simbólico para encontrar la clave que le permitirá avanzar al siguiente nivel del juego DOOM.

Un número par: ____________________

Un múltiplo de 3: __________________

Un múltiplo de m: _________________

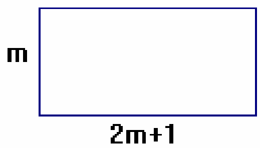
Un número impar: __________________

Las tres cuartas partes de un número: ____________________

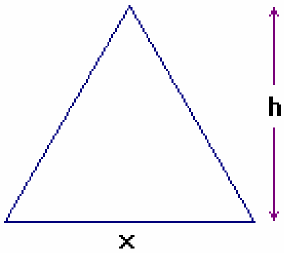
La raíz cuadrada de un número: ________________________

Un número elevado a una potencia par: _________________

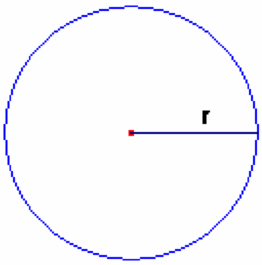
- Ayuda a Mauricio a expresar algebraicamente el área de:



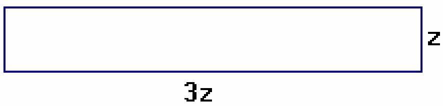
____



____



____



____

Ahora ayúdalo a expresar cada oración como una expresión algebraica:

La suma de un número con el doble de otro: ______________

El área de un triangulo: ________________

El área de un cuadrado: ________________

El perímetro de un pentágono regular: ___________________

TALLER # 8

Estándar (Octavo a noveno grado):

- ✓ Construir expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
- ✓ Usar procesos inductivos y lenguaje algebraico para verificar conjeturas.

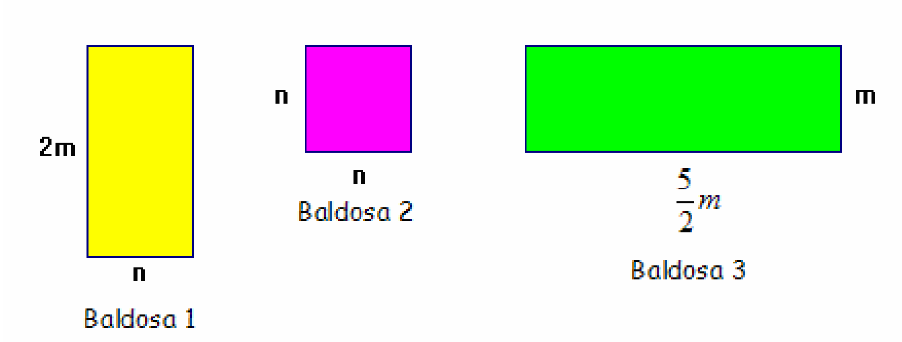
Temática:

- ✓ Iniciación al uso de literales.
- ✓ Situaciones aditivas en el álgebra.

Objetivo: Expresar y traducir enunciados dados en forma verbal y gráfica al lenguaje simbólico.

CLUB "LA FRAGUITA"

Alberto es uno de los dueños del Club "La Fraguita" y quiere construir una pista de baile con 3 tipos de baldosa diferentes, cuyas dimensiones se presentan en el siguiente gráfico. Siendo m y n medidas de los lados.

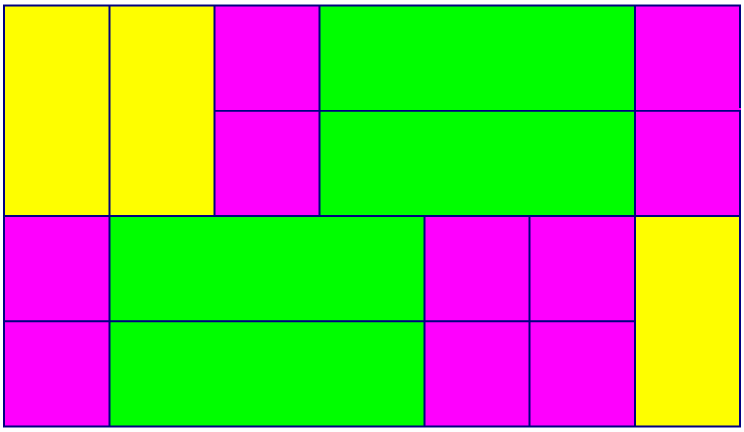


1) El área de la baldosa 1 es:

2) El área de la baldosa 2 es:

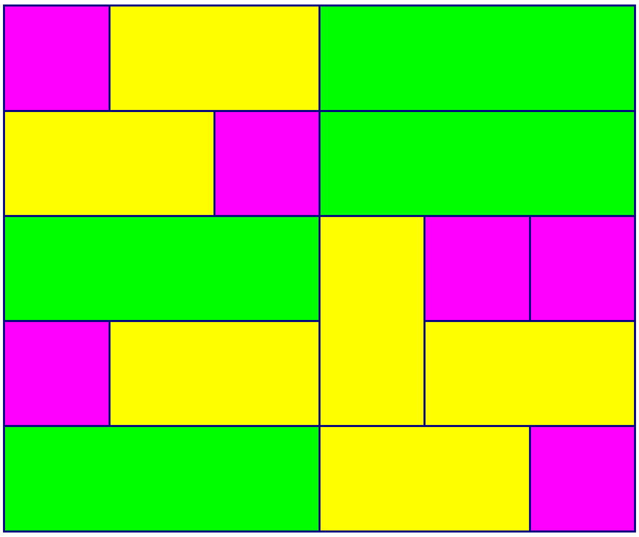
3) El área de la baldosa 3 es:

Un arquitecto le presentó dos modelos que se pueden realizar con una distribución diferente de las baldosas.



Modelo 1

- El área del modeló 1 es:

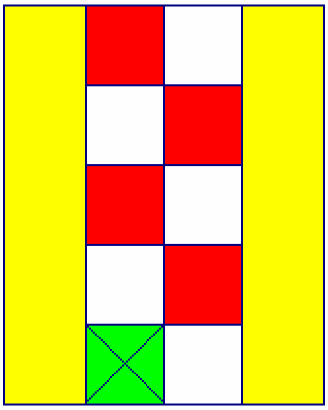


Modelo 2

- EL área del modeló 2 es:
- Si se unen los dos modelos, el área resultante es:

El arquitecto se ha dado cuenta que las áreas de los modelos son diferentes; ¿En cuánto difieren las áreas de los dos modelos?

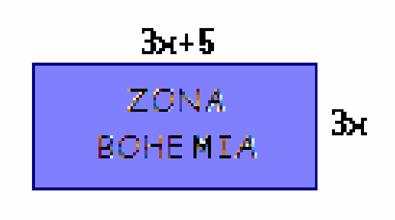
Liliana la socia de Alberto ha conseguido otro tipo de material para la pista de baile, si está tiene como área $A = 9x^2 + 2xy + 4$, y el arquitecto determina que se debe construir otro modelo que mida el triple del área de esté, para poder cubrir toda la pista de baile. ¿Qué área tiene la pista de baile? Dibuja algunas de las posibilidades que tiene el arquitecto, para realizar la distribución de los materiales.



$$A = 9x^2 + 2xy + 4$$

Modelo 3

A Liliana se le ocurrió entapetar y colocar guarda escobas alrededor de la pared de la zona bohemia, para ello es necesario determinar cuanto tapete y metros de baldosa se deben comprar: (si *x* representa una medida de longitud)



Determina la opción que el arquitecto debe tomar, para poder remodelar la zona bohemia.

a)

Tapete que se debe comprar $= 12x + 10$

Baldosa que se debe comprar $= 9x^2 + 15x$

b)

Tapete que se debe comprar $= 9x^2 + 15x$

Baldosa que se debe comprar $= 12x + 10$

c)

Tapete que se debe comprar $= 9x^2 + 15x$

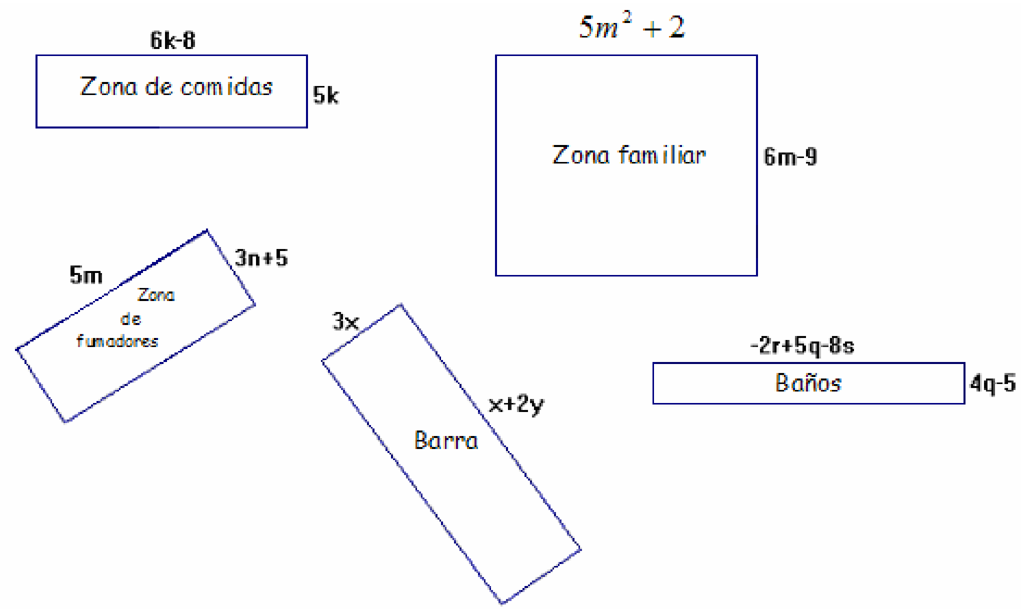
Baldosa que se debe comprar $= 6x + 5$

d)

Tapete que se debe comprar $= 6x + 5$

Baldosa que se debe comprar $= 9x^2 + 15x$

El Club "La Fraguita" está conformado por: la zona bohemia, la pista de baile y las siguientes zonas.

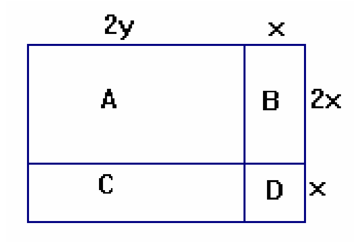


(Donde x, k, m, r, q, s, y, n son medidas de longitud)

- El área del Club “La fraguita” es:

En la barra se encuentran diferentes tipos de bebida dependiendo la zona:

“BARRA”



A es la zona de cerveza
B es la zona de vino caliente
C es la zona de tragos extranjeros
D es la zona de cócteles

- El área de la zona A y la zona B es:

- El área de la zona C y la zona D es:

TALLER # 9

Estándar (Octavo a noveno grado):

- ✓ Usar procesos inductivos y lenguaje algebraico para verificar conjeturas.

Temática: Generalización

Objetivo: Comprender que las matemáticas ofrecen un lenguaje para interpretar las relaciones cuantitativas, expresando enunciados dados de forma verbal a un lenguaje simbólico.

La finca de Don Pablo

El lote de la finca de Don Pablo es de forma rectangular y está dividida en dos partes. La primera parte es de forma cuadrada, donde se encuentra la casa de la finca. En la segunda parte del lote, se encuentra la piscina y los parasoles, está es de forma rectangular y el lado que no comparte con la casa mide 3 metros.

1) Si el área total es de 15 metros cuadrados.
   - El área de la parte donde se encuentra la casa es:
   - El área de la parte donde se encuentra la piscina es:

2) Con la ayuda de la calculadora completa la siguiente tabla teniendo en cuenta el valor que se le asigna al área total de la finca.

Área total	Medida del lado donde se encuentra la casa	Medida del lado más largo de la parte de la piscina,	Área del terreno donde se encuentra la casa	Área del terreno donde se encuentra la piscina
$21m^2$				
$27m^2$				
$39m^2$				
$54m^2$				

3)

- Describe la forma de cálculo de los datos encontrados en la tabla.
- ¿Cuáles de esas cantidades son fijas y cuales varían?

4)

- Escribe una expresión que determine el lado de la parte de la casa.
- Escribe una expresión que determine el lado más largo de la parte de la piscina.

5) Don Pablo contrató al arquitecto López para remodelar su casa, él debe diseñar el plano de la casa en el cual el área de la cocina debe ser de forma cuadrada y el área del baño, que se encuentra enseguida de la cocina, debe ser un área fija de 2 metros cuadrados. Si el lado del lote donde ira la cocina y el baño mide 3 metros, haciendo uso de la calculadora, ayuda al arquitecto a completar la siguiente tabla y a encontrar las posibles medidas del lado de la cocina.

Medidas de los lados del baño		Medida del lado de la cocina	Área del baño	Área de la cocina
			$2m^2$	
			$2m^2$	
			$2m^2$	

6)

- Describe la forma como hallaste cada uno de los datos de la tabla.
- ¿Cuáles de esas cantidades son fijas y cuales varían?

7)

- Escribe una expresión que determine el lado de la parte del baño.
- Escribe una expresión que determine el lado de la parte de la cocina.

TALLER # 10

Estándar (Octavo a noveno grado):

- ✓ Construir expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
- ✓ Usar procesos inductivos y lenguaje algebraico para verificar conjeturas.

Temática: Ecuaciones

Objetivo: Comprender el concepto de ecuación aditiva para aplicarla cuando se requiera.

El día del niño

Se ha celebrado el día del niño en el colegio Burritos Alegres, para el grado séptimo el comité organizador dio 328 dulces que son repartidos entre cierto número de niños, a cada uno le corresponden 5 dulces y sobran 13 dulces. ¿Cuál es el número de estudiantes de grado séptimo?

Realiza la siguiente tabla:

DULCES	DULCES REPARTIDOS POR NIÑO	DULCES SOBRANTES	EXPRESIÓN MATEMÁTICA	NÚMERO DE NIÑOS
328	15	13	$15N+13=328$	
656		5		2
322	6	4		
430	20	10		

Para cada situación escribe una expresión matemática como la encontrada en la tabla anterior y contesta:

Si se tienen 509 dulces para grado octavo y:

- El número de niños aumenta el doble respecto a los de séptimo, y a cada uno le corresponde la misma cantidad, sobrando cinco dulces. ¿Cuántos dulces se reparten por niño?
- Si los dulces se reparten entre la tercera parte de los niños y a cada uno le corresponden 12 dulces. ¿Cuántos dulces quedaron?
- Si sobran 20 dulces al ser repartidos 15 dulces por niño entre 20 niños. ¿Cuántos dulces habrá en total?
- Si al repartir 430 dulces entre los niños, a cada uno le corresponde 20 dulces y sobran 10, ¿Cuántos niños hay?

TALLER # 11

Estándar (Octavo a noveno grado):

- ✓ Construir expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
- ✓ Usar procesos inductivos y lenguaje algebraico para verificar conjeturas.

Temática: Ecuaciones

Objetivo: Comprender el concepto de ecuación aditiva para aplicarla cuando se requiera.

El cumpleaños de Alberto

Tatiana la esposa de Carlos decide hacer una torta para celebrar el cumpleaños de su hijo Alberto, pero solamente tiene en la alacena 15 huevos, 800 gramos de azúcar y 500 gramos de harina; al revisar la receta determinó los ingredientes faltantes y se los encargo a su esposo. Ayuda a Tatiana a encontrar la cantidad exacta que necesita de cada ingrediente.

- La cantidad de harina en gramos es el doble de la cantidad de azúcar, agregándole los $\frac{4}{5}$ de la harina que hay en la alacena.
- Los huevos utilizados son $\frac{7}{5}$ de los que hay en la alacena.
- El azúcar corresponde a los $\frac{2}{3}$ de la diferencia entre la cantidad de harina y el azúcar que hay en la alacena.

- El número de cucharaditas de leche corresponde a la quinta parte de los huevos, cuadruplicando está cantidad.

Si el costo de todos los ingredientes para la torta es de $15000 y se paga en cuatro días: el primer día la tercera parte, el segundo día la quinta parte de lo que falto por pagar, el tercer día los tres cuartos del resto y en el cuarto día el excedente.

¿Cuánto tiene que pagar cada día?

TALLER # 12

Estándar (Octavo a noveno grado):

- ✓ Construir expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
- ✓ Usar procesos inductivos y lenguaje algebraico para verificar conjeturas.

Temática: Ecuaciones

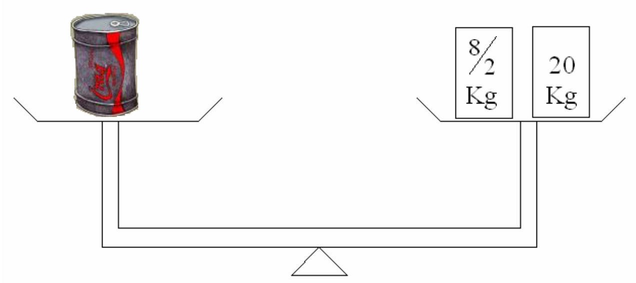
Objetivo: Comprender el concepto de ecuación aditiva para aplicarla cuando se requiera.

La balanza de Pablo

Pablo necesita contestar algunas preguntas sobre el peso de algunos objetos y necesitará la ayuda de una balanza.

Si Pablo observa que los pesos de cada lado son iguales.

¿Cuál es el peso de la caneca?



- Determina la igualdad numérica que expresa la situación de la balanza.

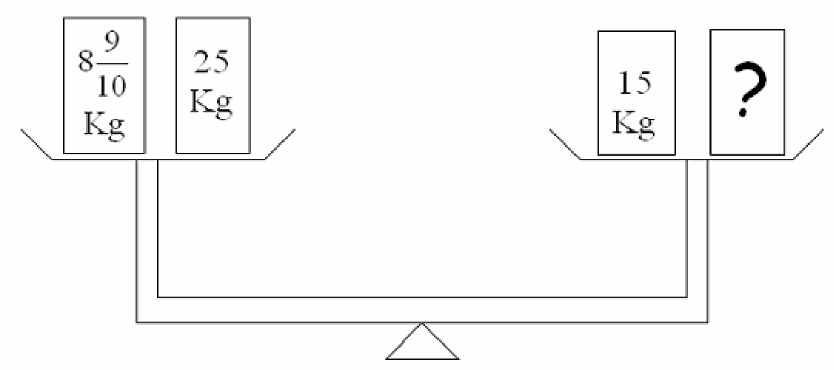
¿Cuáles de los siguientes objetos hacen que la balanza se equilibre con la caneca?

OBJETO	**PESO**	
Pelotas	$\frac{10}{24} kg$	$\frac{283}{12} kg$
Botellas	$5\ kg$	$\frac{225}{15} kg$
Libros	$\frac{2}{4} kg$	$\frac{57}{2} kg$
Ladrillos	$10\ kg$	$\frac{406}{29} kg$
Tabletas	$\frac{12}{2} kg$	$\frac{36}{2} kg$
Bultos de cemento	$\frac{19}{4} kg$	$\frac{73}{4} kg$

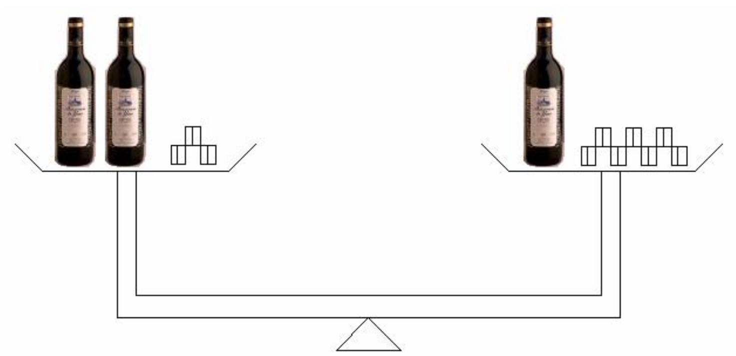
¿Qué pasa con los objetos que no equilibran la balanza?, ¿cómo se pueden equilibrar?

- Dibuja la situación.

Pablo debe buscar un peso que logre equilibrar la balanza.



Pablo debe calcular el peso de cada botella con respecto al peso de los vasos. (Todas las botellas pesan igual)



TALLER # 13

Estándar (Octavo a noveno grado):

- ✓ Construir expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
- ✓ Usar procesos inductivos y lenguaje algebraico para verificar conjeturas.

Temática: Ecuaciones

Objetivo: Comprender el concepto de ecuación aditiva para aplicarla cuando se requiera.

El paseo de Camilo con sus amigos

El día viernes, Juan, el padre de Camilo le compro a su hijo dos camisetas del mismo precio. Además, le dio $5000 a Camilo para una salida al parque con sus amigos. En total gastó $17800.

¿Cuál fue el costo de cada camiseta?

El sábado, Camilo y sus amigos fueron a jugar fútbol al parque. Después de un rato, Camilo decidió invitar a sus amigos a comer helado. Ellos pidieron cono, a excepción de tres personas que quisieron paleta. Camilo pago con un billete de $5000 y le devolvieron $1700. Cada cono costo $450 y cada paleta $500.

¿Cuántos helados entre conos y paletas pago Camilo?

En la tarde, se fueron todos a jugar maquinitas. Allí pagaron $4800. Como Camilo solo tenía lo que le había sobrado de los helados, Alejandro y Cristian pagaron lo que faltaba aportando cada uno la misma cantidad de dinero.

¿Cuánto pago cada uno?

La edad de Juan es cuatro veces más que la edad de Camilo, si la suma de las dos edades es 35 años.

¿Cuál es la edad de Camilo?

¿Cuál es la edad de Juan?

TALLER # 14

Estándar (Octavo a noveno grado):

- ✓ Construir expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
- ✓ Usar procesos inductivos y lenguaje algebraico para verificar conjeturas.

Temática: Adicción y multiplicación de polinomios.

Objetivo: Comprender el algoritmo que se sigue para sumar y multiplicar expresiones algebraicas.

Concierto de Rock

Para asistir a un concierto de Rock, a cada uno de los estudiantes del colegio le dieron una boleta, la cual tenia escrita una clave secreta. Al llegar al concierto se hizo un concurso para ganarse un puesto en la primera fila. Los ganadores fueron: Ana, José, Fredy, Lucy, Andrés, David, Pilar, Jenny, Laura y Miguel.

La idea del concurso era formar parejas "hombre-mujer" de tal forma que al multiplicar sus claves secretas diera como resultado una de las siguientes opciones:

- $16x^2 + 20xy - 2x - y + 6y^2$
- $16x^2 - 20xy + 4x - 2y + 6y^2$
- $30a^2 - 80ab - 30b^2$
- $30a^2 + 32ab - 30b^2$
- $16x^2 - 20xy + 8x - 6y + 6y^2$

Organiza las parejas con ayuda de las boletas de cada uno de los ganadores y escribe con quien tuvo que entrar cada niña al concierto.

- Ana con ______________________
- Pilar con ______________________
- Jenny con ______________________
- Lucy con ______________________
- Laura con ______________________

ANA

$$2x + y$$

JOSÉ

$$4x - 2y$$

DAVID

$$10b + 6a$$

LUCY

$$5a - 3b$$

PILAR

$$2x - y + 1$$

FREDY

$$8x - 6y$$

MIGUEL

$$8x + 6y - 1$$

JENNY

$$4x - 3y + 1$$

LAURA

$$5a - 15b$$

ANDRÉS

$$2b + 6a$$

TALLER # 15

Estándar (Octavo a noveno grado):

- ✓ Construir expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
- ✓ Usar procesos inductivos y lenguaje algebraico para verificar conjeturas.

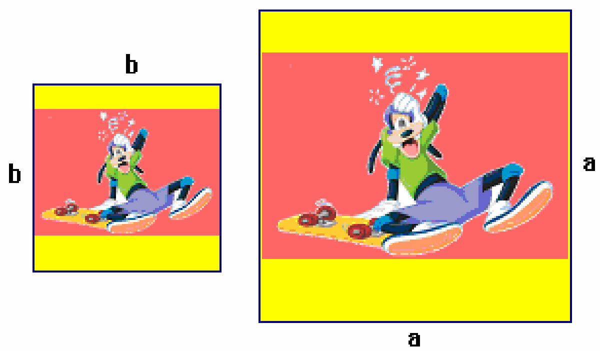
Temática: Factorizacion de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$

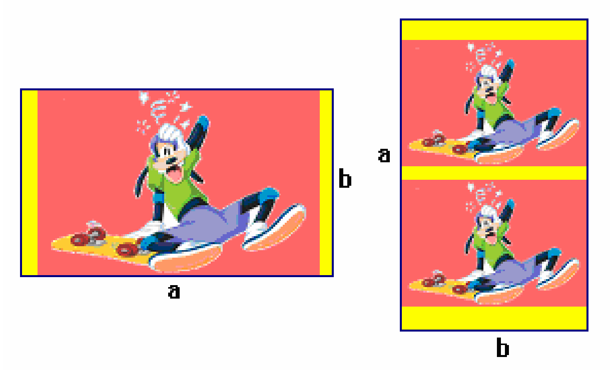
Objetivo: Comprender el proceso para factorizar un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$.

Obsequios de navidad

Carlos Camargo quiere obsequiar a sus hijos algo con el dinero que recibió de la prima navideña y por esto desea realizar los cálculos pertinentes para determinar sus gastos.

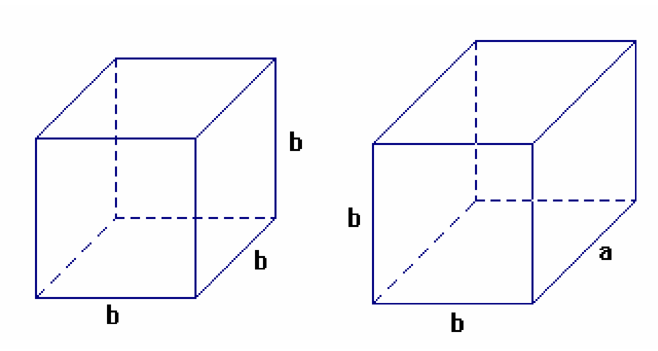
Lorena su hija quiere empapelar las paredes de su cuarto usando el siguiente papel tapiz.

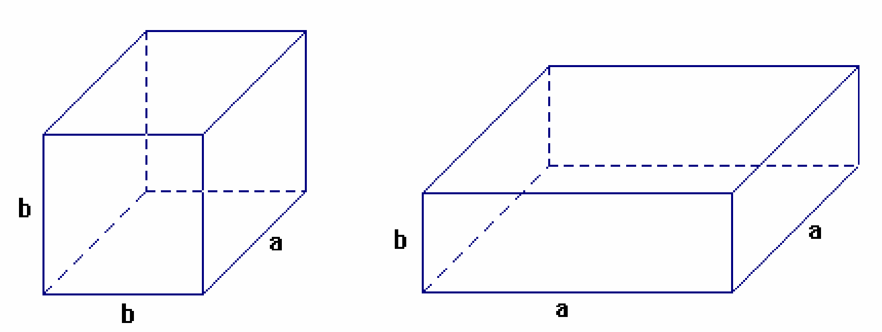




- El área de la pared que quiere tapizar Lorena es:
- Estando la pared tapizada. ¿Cuál es la medida de cada lado?
- Expresa de dos formas distintas el área de la pared. Halla una relación entre ellas.

Santiago quiere una caja para guardar todos sus juguetes, puesto que ya tiene muchas cajas y quiere guardarlas en una sola.





- ¿Cuál es el volumen de la caja de juguetes que quiere Santiago?
- Expresa de dos formas distintas el volumen de la caja. Halla una relación entre ellas.

TALLER # 16

Estándar (Octavo a noveno grado):

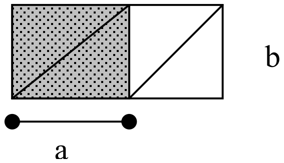
- ✓ Construir expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
- ✓ Usar procesos inductivos y lenguaje algebraico para verificar conjeturas.

Temática: Adicción y multiplicación de polinomios.

Objetivo: Comprender el algoritmo que se sigue para sumar y multiplicar expresiones algebraicas.

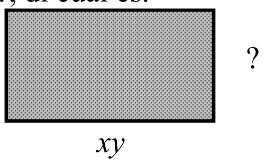
Salida

¿Cuál es el área de la baldosa sombreada?



1

Don José dijo que el área de la siguiente baldosa es $3x^2y$ y que uno de sus lados mide xy ¿Puedes dar el otro lado de la figura?, di cuál es.



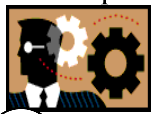
2

Busca el término que hace falta en la siguiente multiplicación.

$$3a(-7\quad)=-21a$$

3

Al preguntarle a Leonor cuanto es el producto de $8a^2b$ y $6ab$, contesto que es $14a^3b^2$. Sustenta si la respuesta es V o F .



6

Escoge cual de las siguientes expresiones se pueden reducir a una sola expresión si se suman, multiplican o dividen.

a) (a), (a)
b) (a), (-3a)
c) (abc), (cd)
d) $(-4m^2)$, $(-5mn^2p)$

5

Debes completar la siguiente tabla para avanzar.

∘	$3x$	$2xy$	3
xy			
y		$2xy^2$	
4			12

4

Ahora piensa un número que multiplicado por $3a^2bx$, nos de $12a^3bxy$. ¿Cuál es el número?

7

Completa los términos que hacen falta en las siguientes multiplicaciones.

$(-x^{b+1})(?)=-ax^{b+1}$

$(2a^?)(a?^?)=2a^{n+1}b^2$

$(?x)\left(-\frac{2}{3}x^2\right)\left(\frac{1}{5}x^?\right)=-\frac{1}{5}x^4$

$(-3a^{n+4}b^{n+1})(4a^2b)=?a^?b^?$

¡Felicidades

Di si es posible reducir las siguientes expresiones.

a) $\left(-\frac{3}{5}x^3y^4\right)\left(\frac{1}{6}a^2by^5\right)=$

b) $(-2x^{n+2}y^m)(3x^{n+1}y^{m+1})=$

10

Por inspección relaciona la columna a con la columna B.

Columna A

1. $\left(\frac{1}{2}a^2\right)\left(\frac{4}{5}a^3b\right)=$

2. $(a^m)(a)$

3. $\left(\frac{1}{3}a\right)\left(\frac{3}{5}a^m\right)=$

Columna B

1. $\frac{1}{5}a^{m+1}$

2. $\frac{2}{5}a^5b$

3. a^{m+1}

9

TALLER # 17

Estándar (Octavo a noveno grado):

- ✓ Identificar relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
- ✓ Modelar situaciones de variación con funciones polinómicas.

Temática: Funciones lineales y gráfica de una función lineal.

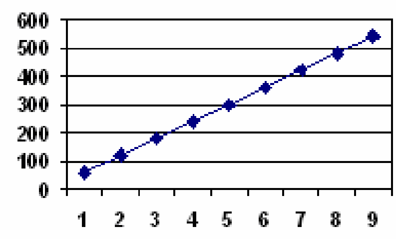
Objetivo: Representar funciones de la forma $y = mx + b$ e interpretar cada una de las variables y sus elementos.

Datos en gráficas

Si un camión tiene, una velocidad constante, realiza un recorrido como el descrito en el siguiente cuadro, ¿qué distancia recorre en 3 horas, en cuatro, etc.?

Tiempo (Horas)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Distancia (Km)	60	120	180	240		360	420		540		

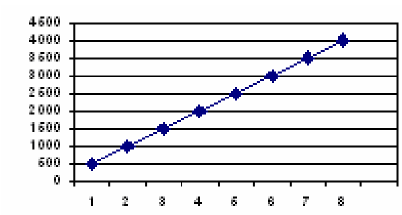
Aquí se relacionan dos cantidades, las cuales una depende de la otra; ¿De qué forma?, revisa los datos anteriores en el siguiente gráfico.



- ¿Cómo varía el tiempo con relación a la distancia?
- ¿Qué significa que se mueve con velocidad constante?
- ¿Cuál era ésta velocidad?
- ¿Cómo varía la distancia con respecto a cada tiempo?
- ¿Cuál sería la distancia que recorre a las 5 horas, a las 8 horas, las 10 horas, las 11 horas?

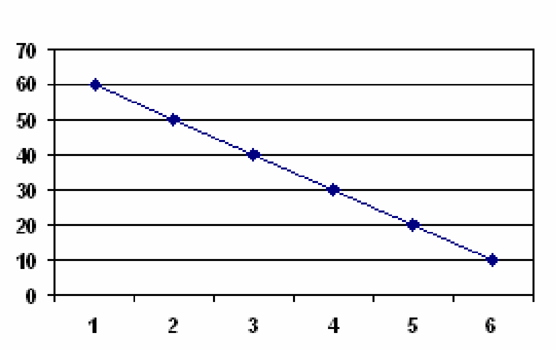
Analiza las siguientes gráficas y contesta las anteriores preguntas, de acuerdo a las magnitudes en cada una de las situaciones planteadas y completa los datos.

- En un almacén ofrecen cuadernos de $ 500



Número de cuadernos	Precio ($)
1	500
2	1000
3	1500
4	
5	2500
6	

El número de trabajadores de una fábrica y la cantidad de días que se demoran en terminar una obra.



Nº de trabajadores	Días empleados
1	60
2	50
3	
4	30
5	20

TALLER # 18

Estándar (Octavo a noveno grado):

- ✓ Identificar relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
- ✓ Modelar situaciones de variación con funciones polinómicas.

Temática: Funciones lineales y gráfica de una función lineal.

Objetivo: Representar funciones de la forma $y = mx + b$ e interpretar cada una de las variables y sus elementos.

Vive Colombia viaja por ella

Como es bien sabido, el país afronta una de las mayores crisis económicas de su historia. Una de las estrategias diseñadas por el presidente Álvaro Uribe para activar e impulsar el turismo colombiano fue la creación "Vive Colombia Viaja por Ella", que consiste en una serie de caravanas que se desplaza a los sitios de interés nacional: Costa Atlántica, costa pacifica, sur del país entre otros lugares.

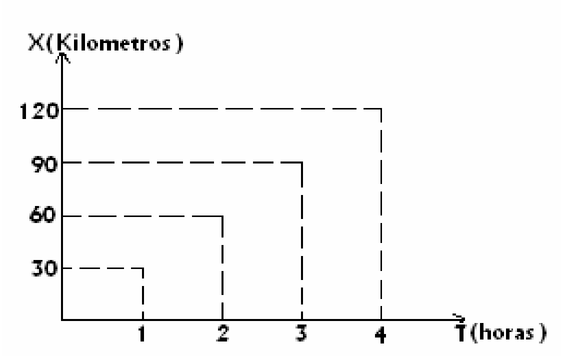
Con esto se busca que el pueblo colombiano transite a través de las principales carreteras del país en conjunto, la colaboración y vigilancia de las fuerzas militares.

El programa ha tenido tanto éxito que el turismo mejoro en un 80% durante las festividades de la semana santa.

Una de las caravanas que se dirigían al sur del país, iba Pablo con su familia en un pequeño automóvil. Habían partido desde la ciudad de Bogotá a las 8:00 a.m. con una velocidad constante. Dos horas mas tarde hacen arribo a una pequeña ciudad y se dan cuenta que han recorrido 120km. Continuaron su trayecto, llegando al sitio destino a las 4:00 p.m. ¿qué distancia recorrió Pablo desde la ciudad de Bogotá?

Más tarde venían Ramiro hermano de Pablo, el cual realizó un registro de las distancias recorridas, pero cada 10 min. Por espacio de una hora ¿cómo haría el registro?

Si su preocupación es hallar la distancia en un tiempo cualquiera ¿que sugerencias le harías?. Cuando la caravana partió de Bogotá hacia el sur del país, no toda la familia siguió a Pablo y a Ramiro uno de sus primos prefirió tomar la caravana que se dirigía a Cartagena y se observó que dicha caravana presentaba el siguiente registro:



1) Elabora una tabla (distancia Vs tiempo) donde registre los datos que se pueden abstraer del grafico.
2) ¿Qué tiempo se utilizará para recorrer una distancia de 10 km, 30 km, 50 km, 60 km y 70 km?.

3) ¿Cuál es la velocidad de la caravana?
4) Si deseamos conocer la distancia en un tiempo cualquiera, ¿cómo lo haríamos? Si la velocidad se reduce a la mitad, ¿cómo se ve alterada la gráfica?
5) Si la velocidad se duplica ¿cómo varía la gráfica?

TALLER # 19

Estándar (Octavo a noveno grado):

- ✓ Identificar relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
- ✓ Modelar situaciones de variación con funciones polinómicas.

Temática: Función cuadrática.

Objetivo: Reconocer cuando una función es cuadrática y como se representa gráficamente.

Vive Colombia viaja por ella II

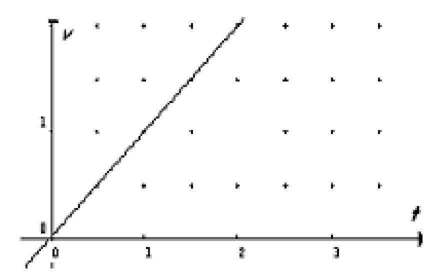
Las inquietudes de Juan Manuel en la caravana "VIVE COLOMBIA VIAJA POR ELLA"

Juan Manuel uno de los primos de Pablo y Ramiro, llevo a cabo las mediciones de la velocidad del automóvil de su padre durante los cinco primeros segundos de recorrido cuando salían de la ciudad de Sogamoso. La intención de Juancho cuando llegue a casa nuevamente, es poder calcular la distancia recorrida en cada uno de los tiempos tomados.

El registro quedo consignado en la siguiente tabla:

T (seg.)	V(m/s)		D(m/s)
0	0		
1	1		
2	2		
3	3		
4	4		
5	5		

Lo primero que hace Juan Manuel es elaborar la gráfica velocidad versus tiempo. El graficó obtenido es como se muestra a continuación.



Esta representación corresponde a una función de la forma y = kx +b

Si el eje horizontal corresponde al tiempo (*t*) y el eje vertical corresponde a la velocidad (*v*).

(*v*) es una ecuación que se puede expresar de la forma *v* = *kt* + *b*, donde *b* puede tomar el valor 0. Como $v = d/t$, donde (*d*) es la distancia, donde la constante k representa lo que conocemos como "aceleración". Que para el caso en mención, esta constante.

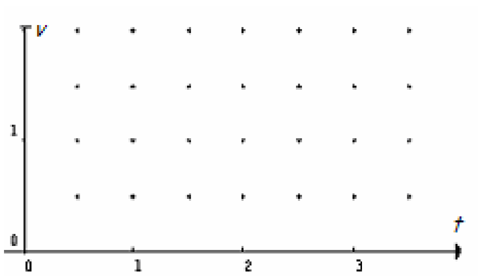
Posteriormente Juan Manuel procede a calcularla para cada segundo y coloca los valores en la tercera columna de la tabla.

Ahora bien, para un movimiento con aceleración constante Juan Manuel sabe que la velocidad final está dada por:

$$v_f = v_i + at$$

Y ya que con esta consideración se calcula el desplazamiento en la formula *d = vt*, el obtiene el resultado dado en la siguiente expresión $d = v_i t + \frac{1}{2}at^2$, para nuestro caso podemos escribir como $d = \frac{1}{2}t^2$.

Juancho al parecer puede responder su pregunta. Pero no contento con esto decide elaborar una gráfica distancia versus tiempo con los resultados obtenidos. Ayudémosle a Juancho.



¿Corresponde este grafico al de una función? ¿Por qué?

¿Cuál es la grafica para el caso en que la velocidad inicial no es cero?

Juan Manuel encontró que esta gráfica no corresponde a una recta.

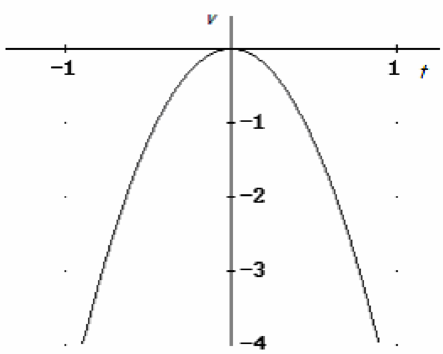
¿En que radica la diferencia de la grafica de una recta a la encontrada por Juancho?

¿De las siguientes expresiones cuál se ajusta más a la encontrada para calcular la distancia o el desplazamiento del automóvil?

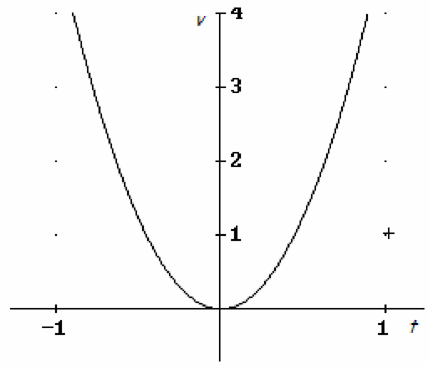
1. $y = x$
2. $y = -x$
3. $y = x^2$
4. $y = \frac{1}{x}$

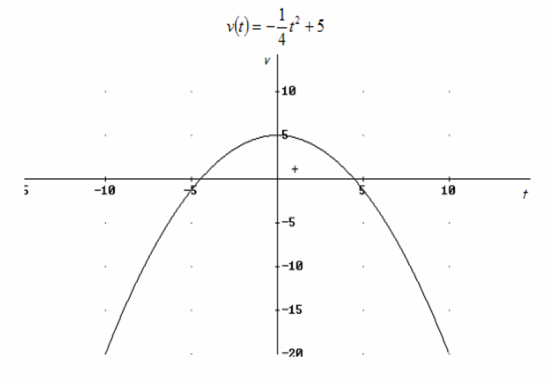
Observa las siguientes gráficas:

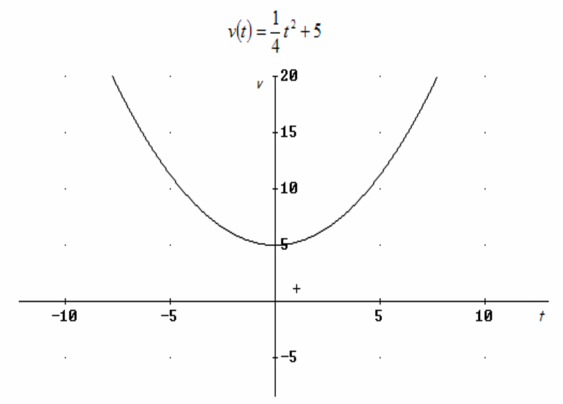
$v(t) = -5t^2$



$v(t) = 5t^2$







¿De qué manera afecta a la gráfica de la función $v(t) = at^2 + bt + c$ la variación del coeficiente de t^2?

¿De qué manera Juan Manuel concluyó que la distancia recorrida por el automóvil con aceleración constante se podía expresar por $d = v_i t + \frac{1}{2}at^2$?

3. CONCLUSIONES

- Registrar las actividades propuestas durante el trabajo realizado en espacios de práctica, fue reconocer los grandes aportes de planeación para el desarrollo educativo de estudiantes de colegios públicos como el "Colegio Distrital Republica de Costa Rica," y mostrar que éste es una herramienta de trabajo escolar que permite brindar a los docentes un esquema que puede ser aplicado en el aula de clase para el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de básica secundaria, un módulo que presente diferentes tipos de actividades que desarrollen el pensamiento variacional, sistemas algebraicos y analíticos por medio de situaciones didácticas.
- Los talleres propuestos por estudiantes de práctica se convirtieron en un apoyo valioso para el proceso desarrollado, ya que éstos, facilitaron la construcción de la propuesta final, que presenta una serie de talleres enfocados a las situaciones problema que pretenden desarrollar temáticas relacionadas con el pensamiento variacional.
- Reconocer la situación problema como herramienta para el aprendizaje brinda la posibilidad de relacionar los intereses curriculares, los del docente y por supuesto los de los estudiantes. El diseño de estas situaciones permite al docente hacer planteamientos flexibles en diversos campos, tanto de lenguaje, de comprensión como de las temáticas matemáticas propuestas. En este caso, el pensamiento variacional, sistemas algebraicos y analíticos, permitieron conocer el trabajo previo a la propuesta ya que muestra la dirección de la clase, teniendo en cuenta el qué se enseña, cómo y el quehacer de los estudiantes para lograr enfocar un aprendizaje.
- Dada la importancia que resaltan los lineamientos curriculares sobre el pensamiento variacional sistemas algebraicos y analíticos, se escogieron aspectos como la proporcionalidad, ecuaciones, expresiones algebraicas, variables y

funciones que en conjunto desarrollan este pensamiento para grados de básica secundaria en el cual se vislumbra que uno de los conceptos centrales que se quiere construir, y en el que todos los conceptos previos van enfocados hacia él, es el de ***función***, el cuál muestra el trasfondo del pensamiento, en donde se requiere trabajar esta temática progresivamente, brindando la oportunidad de ver que los conceptos matemáticos son una unión de ideas progresivas y que lo aprendido en un momento determinado se utilizará en la temática siguiente.

- Organizar las actividades a partir del sustento didáctico referente a las situaciones didácticas a partir de Brousseau, hacia las situaciones problema y el sustento matemático de proporcionalidad, expresiones algebraicas, ecuaciones y funciones permiten obtener la clasificación de cada una de las actividades, con logros, estándares y temáticas especificas.

- Según el módulo propuesto se espera que sea una ayuda practica y organizada referente al pensamiento desarrollado en está monografía enfocando cada una de las actividades a un planteamiento de situación problema, utilizando aspectos numéricos, geométricos y analíticos.

- Las situaciones problema se muestran como una alternativa conceptual y metodológica para la implementación de los estándares básicos de matemáticas. Por supuesto que esto plantea un reto fundamental: ¿cómo lograr el diseño de situaciones problema que sean fuente integradora de redes conceptuales, y por tanto, que permitan el desarrollo e implementación de los estándares de una manera armónica e integrada?. Un intento de respuesta no es simple, ni inmediato, pero si positiva en términos de las posibilidades de desarrollo de la educación matemática del país.

4. BIBLIOGRAFIA

- *MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Lineamientos curriculares, Matemáticas. Bogotá (1998).*
- *MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Estándares Básicos de Calidad para la educación, Área Matemática. Magisterio (2002).*
- *MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL Estándares Básicos de Calidad para la educación. Área Matemática. Magisterio (2003).*
- *BROUSSEAU, G. Los Obstáculos Epistemológicos y los problemas en matemáticas, México (1983).*
- *BROUSSEAU, G. Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas, I Recherches en Didactique des mathématiques Vol7 N° 22. Universidad de Burbeas (1986).*
- *CHEVALLARD YVES; MARIANA BOSCH Y OTROS, estudiar matemáticas el eslabón perdido, la enseñanza y el aprendizaje, Universidad de Barcelona, Horsori (1997).*
- *GODINO JUAN D. Hacia una teoría de la didáctica de la matemática Departamento de matemáticas, Universidad de granada. España (1991).*
- *OBANDO, G. Y Múnera, J. Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización matemática. En: Revista educación y pedagogía. Vol. XV, N°. 35, (Universidad de Antioquia, Facultad de Educación (enero -abril2003).*

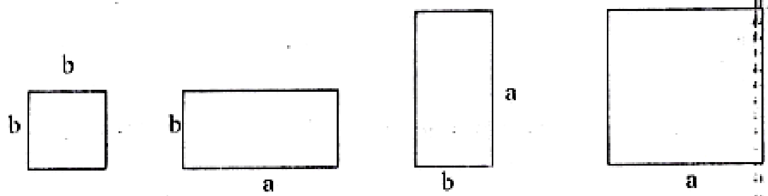
- *AVILA ALICIA (2001), el maestro y el contrato de la teoría Brousseauniana, En: educación matemática .Vol. 13 n° 3 editorial. Iberoamerica.*
- *Leithold Louis Calculo. Séptima edición.*
- *SOCAS, M. Matías M. Y Otros. Iniciación al álgebra. En: matemática cultura y aprendizaje. Vol.23, Madrid, Editorial Síntesis (1989).*
- *RAMíREZ, M. Y OTROS Iniciación al álgebra escolar: situaciones funcionales, de generalización y modelación. Universidad del Valle.*
- *GRUPO AZARQUIEL. Ideas y actividades para enseñar el álgebra. Madrid. Editorial síntesis (1993).*
- *AZCARATE, C. Jordi D. Funciones y graficas. Editorial Síntesis (1996).*
- *GARCÍA, Serrano y otros. Elementos para construir una didáctica de la función Universidad Pedagógica Nacional (1995).*
- *Leithold, L. Calculo 7 edición*
- *MORENO, J. y Walldegg, G. Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas. Cinvestav-IPN, Mexico.*
- *SIERPINSKA, A. y Lerman, S. Epistemologies of mathemathicas and of mathemathicas education. En: A. J. Bishop et al. (eds.), International Handbook of Mathemathicas Education[Traducción de Juan D. Godino] (1996).*

5. ANEXOS
(TALLERES REALIZADOS EN LA PRÁCTICA EDUCATIVA)

INSTITUCION EDUCATIVA REPUBLICA DE COSTA RICA J.M
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
PRODUCTOS Y COCIENTES NOTABLES
TALLER Nº2

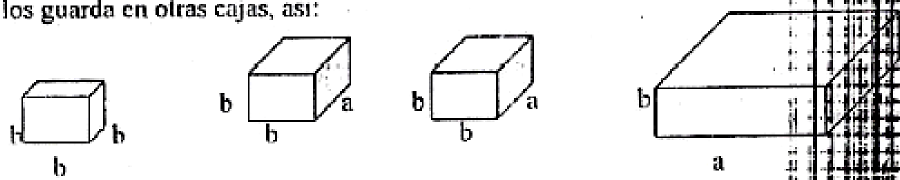
NOMBRE:______________________________FECHA:__________CURSO:

1. Lorena quiere empapelar una de las paredes del cuarto de estudio de su casa usando los siguientes retazos de papel:



a. ¿Cuál es el área de la pared?
b. Estando la pared empapelada. ¿Cuál es la medida de cada lado?
c. Expresa de dos formas distintas el área de la pared.
Halla una relación entre ellas.

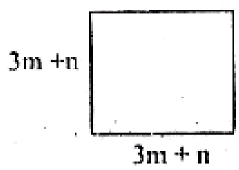
2. Santiago tiene una caja para guardar todos sus juguetes. El clasifica sus juguetes y los guarda en otras cajas, asi:



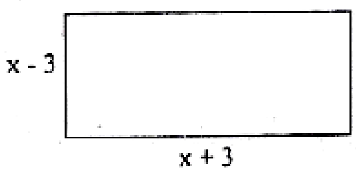
a. ¿Cuál es el volumen de la caja de juguetes de Santiago?
b. Expresa de dos formas distintas el volumen de la caja.
Halla una relación entre ellas.

3. Halla el area de la figura. (

a.

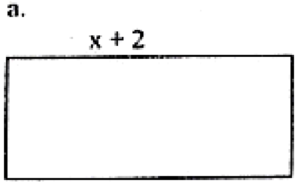


b.



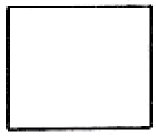
4. Dada el area o el perímetro de las figuras. Halla la dimensiones de la figura.

a.



Perímetro: $(2x + 2m + 10)$ cm

b.

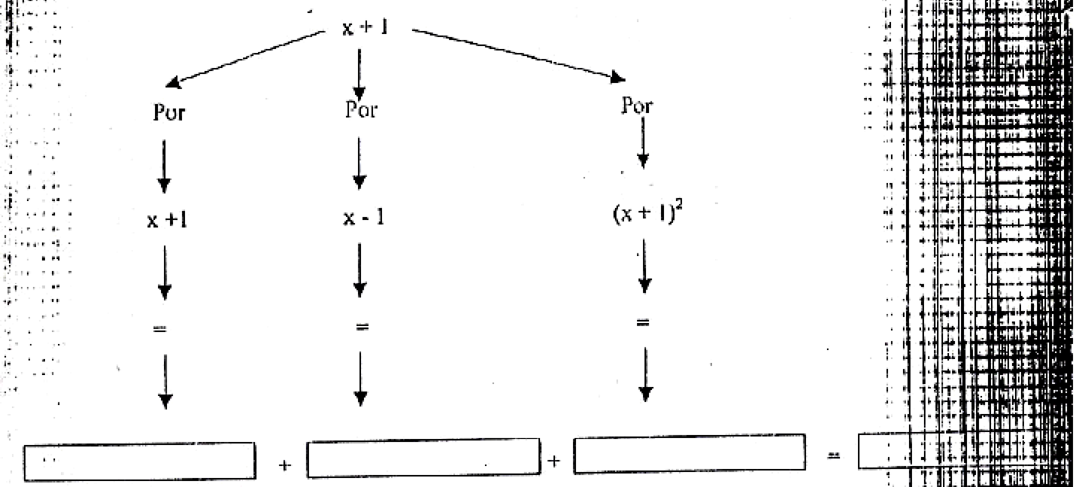


Area: $(2t + 5)$ cm^2

5. Une con una línea las expresiones de la columna A con las expresiones de la columna B, según corresponda.

COLUMNA A	COLUMNA B
1. $(x + t)^2$	a. $x^2 + 2tx + t^2$
2. $(5k - m)^2$	b. $x^4 + 6px^2 + 9p^2$
3. $(1/3\ x - 6)^2$	c. $25k^2 - 10km + m^2$
4. $(1/2\ x^3 - 1/3\ y^2)^2$	d. $\frac{1}{4} x^6 - 1/3\ x^3y^2 + 1/9\ y^2$
5. $(x^2 + 3p)^2$	e. $1/9\ x^2 - 4x + 36$

6. Completa el siguiente esquema.



7. Escribe la expresión algebraica que corresponde.
   a. El cuadrado de la suma de dos números 3j y 5q.
   b. El producto de la suma y la diferencia de dos números 4p y 7m.
   c. El cubo dela diferencia de los números 5r y 2t
   d. La diferencia entre el cuadrado de la suma de X y 2m y el cubo de [illegible] de X y m.

8. Realiza las siguientes divisiones:

a. $x^2 \qquad - y^2 \;\underline{\big|\; \bigcirc - y\quad}$
$\qquad\qquad\qquad\qquad x + \bigcirc$

b. $x^3 \qquad - y^3 \;\underline{\big|\; x - \bigcirc\quad}$
$\quad \underline{-x^3 + x^2y} \qquad\qquad x$
$\qquad\quad x^2y$

c. $x^3 \qquad + y^3 \;\underline{\big|\; x + y\quad}$

9. Teniendo en cuenta el ejercicio anterior.

a. $x^2 - y^2 = (\bigcirc - y)(\qquad)$

b. $x^3 - y^3 = (x - \bigcirc)(\qquad\qquad)$

c. $x^3 + y^3 = (x + y)(\qquad\qquad)$

TALLER 8

Para asistir a un concierto de Rock, a cada uno de los estudiantes le dieron una boleta, la cual tenía escrita una clave secreta. Al llegar al concierto se hizo un concurso para ganarse un puesto en la primera fila.
Los ganadores fueron: Ana, José, Fredy, Lucy, Andres, David, Pilar, Jenny, Laura y Miguel.
La idea del concurso era formar parejas "hombre - mujer" de tal forma que al multiplicar sus claves secretas diera como resultado una de las siguientes opciones:

$-16x^2 + 20xy - 2x - y + 6y^2$ $\qquad$ $-30a^2 + 32ab - 30b^2$

$-16x^2 - 20xy + 4x - 2y + 6y^2$ $\qquad$ $-16x^2 - 20xy + 8x - 6y + 6y^2$

$-30a^2 - 80ab - 30b^2$

1. Organiza las parejas con ayuda de las boletas de cada uno de los ganadores
2. Escribe en tu cuaderno con quien tuvo que entrar cada niña al concierto.

Ejemplo:
Ana con ____________________, porque:

(2x+y) • ( ) = ______________________

2x + y ANA	**10b+6a** DAVID
4x - 2y JOSE	**2x-y+1** PILAR

$8x - 6y$ FREDY	$4x-3y+1$ JENNY

$5a-3b$ Lucy

$5a-15b$ Darwin

$2b+6a$ Andres

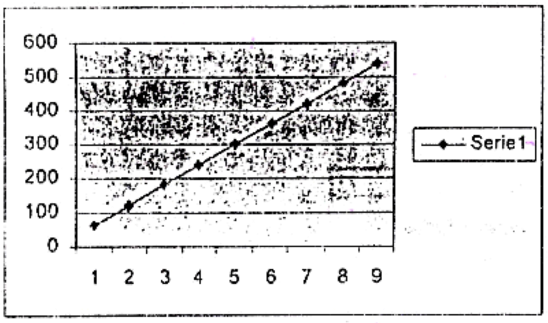
$8x+6y-1$ Miguel

COLEGIO DISTRITAL REPUBLICA DE COSTA RICA

Si un camión lleva una velocidad constante, realiza un recorrido como el descrito en el siguiente cuadro, ¿Qué distancia recorrerá en 3 horas, en cuatro, etc.?

Tiempo(Horas)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Distancia(Km.)	60	120	180	240		360	420		540		

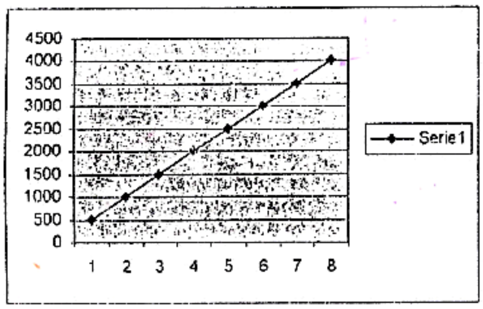
Aquí se relacionan dos cantidades, las cuales una depende de la otra; ¿De qué forma?, revisemos los datos anteriores en el siguiente gráfico:



- ¿Cómo que varía el tiempo con relación a la distancia?
- ¿Qué significa que se movía a velocidad constante?
- ¿Cuál era ésta velocidad?
- ¿Cómo varía la distancia con respecto a cada tiempo?
- ¿Cuál será la distancia que habrá recorrido a las 5 horas, a las 8 horas, las 10 horas, las 11 horas?

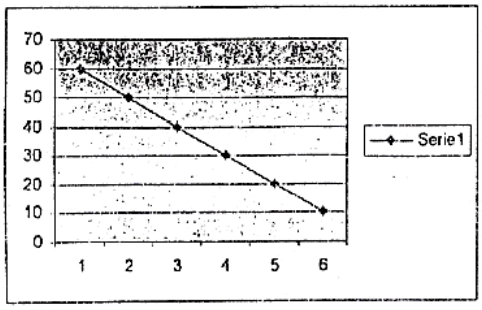
Analiza las siguientes gráficas y contesta las anteriores preguntas, de acuerdo a las magnitudes que se manejan en cada una de las situaciones planteadas y complete los datos.

Analiza las siguientes gráficas y contesta las anteriores preguntas, de acuerdo a las magnitudes que se manejan en cada una de las situaciones planteadas y complete los datos.



En un almacén ofrecen cuadernos de $500

Número de cuadernos	Precio($)
1	500
2	1000
3	1500
4	
5	2500
6	



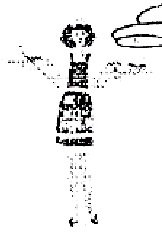
El número de trabajadores de una fábrica y la cantidad de días que se demoran en terminar una obra

No de trabajadores	Días empleados
1	70
2	60
3	
4	40
5	30

INSTITUTO EDUCATIVO DISTRITAL SIMON RODRIGUEZ

Nombre:____________________________________Curso:__________ Fecha:_______________

La novia de Carlos, decide hacer una torta, para 15 niñas y 21 niños, utilizando: harina, huevos, azúcar y polvo para hornear, encuentra la cantidad exacta que utilizo la novia para hacer la torta.



1. La cantidad de harina, en gramos es el doble de la cantidad de niños, agregándole y 2/5 de la cantidad de niñas.
2. Los huevos utilizado para ello son tres veces los 2/16 de la cantidad de harina.
3. El azúcar corresponde a 2/3 de la diferencia entre la cantidad de harina y la cantidad de huevos.
4. El polvo para hornear corresponde a la tercera parte de los huevos, pero cuadruplicando esta cantidad
5. Si el costo de todos los ingredientes para la torta es de $ 15.000, y se paga en cuatro dias así: el primer dia la tercera parte, el segundo día paga la quinta parte de lo que le falta por pagar, el tercer dia paga ¾ del resto, y en el cuarto dia paga el excedente ¿cuanto tiene que pagar diariamente?
6. Completa la siguiente tabla:

A	B	OPERACION
$2\frac{3}{5}$	B	$A + B = -\frac{3}{4}$
$\frac{4}{6}$	$\frac{8}{3}$	$A - B$
A	$-3\frac{3}{4}$	$A \times B = 3\frac{1}{5}$
A	$-2\frac{1}{3}$	$(-B) \div A = -\frac{5}{4}$

COLEGIO DISTRITAL REPUBLICA DE COSTA RICA
ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA
GRADO OCTAVO

El día viernes, Juan, el padre de Camilo le compro a su hijo dos camisetas del mismo precio. Además, le dio \$5000 a Camilo para una salida al parque con sus amigos. En total gastó \$17800. ¿Cuál fue el costo de cada camiseta?.

Para resolver este interrogante, podemos modelar esta situación con una ecuación y para encontrar esta ecuación es necesario usar una variable para representar la cantidad desconocida.
Sea x el costo de cada camiseta, 2x representa el costo de dos camisetas del mismo precio. Como Juan le dio a su hijo \$5000 y en total gasto \$17800, la ecuación que debemos resolver es:

$$2x + 5000 = 17800$$

Ahora bien, a continuación se resuelve esta ecuación paso a paso.

$$2x + 5000 = 17800$$

Restamos 5000 a los dos miembros de la ecuación y se mantiene la igualdad:

$$2x + \cancel{5000} - \cancel{5000} = 17800 - 5000$$

Obtenemos:

$$2x = 12800$$

Multiplicamos por ½ en los dos miembros de la Ecuación y se mantiene la igualdad:

$$\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}x = \frac{1}{2}(12800)$$

$$x = 6400$$

Esto quiere decir que el costo de cada camiseta fue de \$6400.

El sábado, Camilo y sus amigos fueron a jugar fútbol al parque. Después de un rato, Camilo decidió invitar a sus amigos a comer helado. Ellos pidieron cono, a excepción de tres personas que quisieron paleta. Camilo pago con un billete de \$5000 y le devolvieron \$1700. Cada cono costo \$450 y cada paleta \$500. ¿Cuántos helados, entre conos y paletas pago Camilo?
Analiza esta situación. Si n es el número de helados que pago Camilo, cuál crees que es la ecuación que modela la situación anterior?

En la tarde, se fueron todos a jugar maquinitas. Allí pagaron \$4800. Como Camilo solo tenía lo que le había sobrado de los helados, Alejandro y Cristian pagaron lo que faltaba aportando cada uno la misma cantidad de dinero. ¿Cuánto pago cada uno?. Plantea la ecuación y resuélvela.

mayor
La edad de Juan es cuatro veces más grande que la edad de Camilo y la suma de las dos edades es 35 años. Modela la situación con una ecuación y responde:
Cuál es la edad de Camilo?, Cuál es la edad de Juan?

Con base en las situaciones anteriores propón una nueva situación con un interrogante, plantea la ecuación que la modele ~~la situación~~ y resuélvela.

Solucionemos la siguiente ecuación:

$$5(2w - 3) = 2(w + 4) - 7$$

1. eliminamos los signos de agrupación:
   Obtenemos:

$$10w - 15 = 2w + 8 - 7$$
$$10w - 15 = 2w + 1$$

2. Sumamos 15 a los dos miembros de la ecuación y se mantiene la igualdad.
   Obtenemos:

$$10w - \cancel{15} + \cancel{15} = 2w + 1 + 15$$
$$10w = 2w + 16$$

3. Restamos 2w a los dos miembros de la ecuación y se mantiene la igualdad.
   Obtenemos:

$$10w - 2w = \cancel{2w} + 16 - \cancel{2w}$$
$$8w = 16$$

4. Multiplicamos por $1/8$ en los dos miembros de La ecuación y se mantiene la igualdad.
   Obtenemos:

$$\frac{1}{\cancel{8}}\cancel{8}w = \frac{1}{\cancel{8}}\cancel{16}$$
$$w = 2$$

EJERCICIOS

- Soluciona las siguientes ecuaciones:

1. $7x + 4 = 25$
2. $4w - 3 = 11 - 3w$
3. $2(t - 5) = 3 - (4 - t)$
4. $7 = y + 10$
5. $x - 9 = 3x + 3$
6. $1 - 3(2p - 4) = 4(6 - p) - 8$
7. $3(4z + 9) = 7(2 - 5z) - 2z$

- Resuelve los ejercicios 78 y 79 del Álgebra de Baldor.

COLEGIO DISTRITAL SIMON RODRIGUEZ

Nombre:____

LOGRO: Expresar igualdades de cantidades con números y símbolos en una situación Problema.

- Si se reparten 328 dulces entre cierto números de niños, a cada uno le corresponden 5 dulces y le sobran 13 dulces. ¿Cuál es el número de niños?

Realiza una tabla.

DULCES	NUMERO DE NIÑOS	DULCES SOBRANTES	DULCES REPARTIDOS	EXPRESION MATEMATICA
328		13	15	15 N + 13 = 328
656		5		
322		6		
430		10	20	

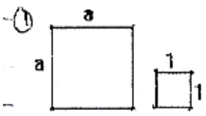
- Si elnúmero de niños aumenta el doble, los niños son los mismos y sobran cinco dulces. ¿Cuántos dulces se reparten?

- Si se reparten 328 dulces entre la tercera parte de los niños y sobran 6 dulces ¿Cuántos dulces se reparten?

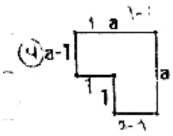
- Si sobran 20 dulces al ser repartidos 15 dulces entre 20 niños. ¿Cuántos dulces habrá en total?

- Si al repartir 430 dulces entre n niños, a cada uno le corresponde 20 dulces y sobran 10, ¿Cuántos niños hay?

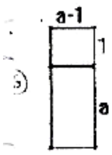
COLEGIO DISTRITAL COSTA RICA
GRADO OCTAVO-J.T.
Caso IV: Diferencia de Cuadrados Perfectos.



Aun cuadrado de lado 1, cuya área es: ________, se le quita un pedazo cuadrado de lado a, cuya área es: ________. Es decir restamos las áreas obtenidas: ___________. Como se muestra en la siguiente figura:



Ahora, si recortamos el rectángulo pequeño y lo ubicamos como lo indica la figura, obtenemos:



Por lo tanto el rectángulo obtenido tiene las siguientes dimensiones _____ y _____, cuya área es ________.

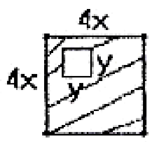
✓ Que relación existe entre la expresión obtenida (el área del rectángulo) y la expresión encontrada al restar las áreas.

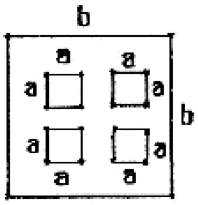
Sabiendo que cada numero expresa la diferencia de dos áreas.

- ✓ ¿Cómo puedes aplicar el procedimiento anterior a la siguiente multiplicación: 99*101?
- ✓ ¿Cuáles serian las áreas?
- ✓ Ilústralo.

Ejercicios.

1. Encuentre las dimensiones de un rectángulo que tenga la misma área de la figura rayada:





✓

*$(4x)^2-y^2 =$ (____+____)(____-____)

*$b^2-4a^2 =$ (___+___)(___-___)

2. Completa:
- ✓ x^2-___ $= (x-8y^4)(x+8y^4)$
- ✓ $81b^2-$___ $= (9b+7)(9b-7)$
- ✓ ___-___ $= (z-x)(z+x)$
- ✓ $25x^4-4 =$ (___+___)(___-___)

3. Factoriza:
- ✓ $-x^2+y^2 =$ ____________
- ✓ $144x^2-4 =$ ____________
- ✓ $100-x^2y^2 =$ ____________
- ✓ $121-9u^6 =$ ____________

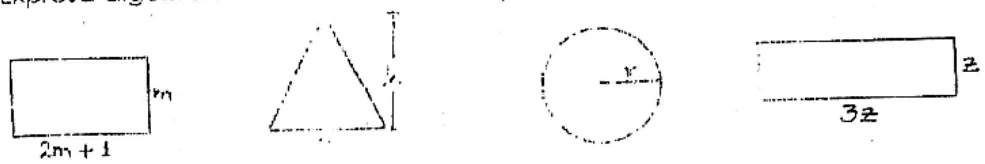
4. Propón tres ejercicios para este caso y justifica tu respuesta.

TALLER

1. Escribe una expresión algebraica para cada expresión matemática.

a. un número par ______
b. un múltiplo de 3 ______
c. un múltiplo de n ______
d. un número impar ______
e. las tres cuartas partes de un número ______
f. la raíz cuadrada de un número ______
g. un número elevado a una potencia par ______

2. Expresa algebraicamente el área de: Arreglar



______ ______ ______ ______

4. Completa la siguiente tabla:

EXPRESION ALGEBRAICA	SIGNO	COEFICIENTE	PARTE LITERAL	GRADO
$-5m^2n$	negativo	5	m^2n	2, 1
$\frac{1}{2}x^3yz$				
$4kl^2$				
$-\frac{3}{4}ab^6$				
$3d^6c^4$				
$-10h^2$				
$\frac{1}{3}x^4y^2z^2$				

5. Expresa cada oración como expresión algebraica

a. La suma de un número con el doble de otro ______
b. El área de un triángulo ______
c. El área de un cuadrado ______
d. El perímetro de un pentágono regular ______

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Camila compró siete (7) cuadernos, tres (3) bolígrafos y cuatro (4) libros. Ella sabe que el valor que debe cancelar depende del precio de cada objeto.

- Si c es el costo de cada cuaderno, como se puede expresar algebraicamente el valor total de los cuadernos? ____________________
- Si b es el costo de cada bolígrafo, como se puede expresar algebraicamente el valor total de los bolígrafos? ____________________
- Si l es el costo de cada libro, como se puede expresar algebraicamente el valor total de los libros? ____________________
- Cual es la expresión algebraica que me indica el valor total que pagó Camila? ____________________

Además de estos útiles, Camila compró la sudadera del colegio, la cual le costo dos veces el precio de los cuadernos. Exprese matemáticamente el precio de la sudadera. ____________________

Camila va a construir una caja con láminas de madera. Supongamos que las siguientes son las láminas que posee:

4 láminas

2 láminas

Si las dimensiones de las láminas son las indicadas en cada lámina:

- Cuál es el perímetro de cada lámina? ____________________
- Cuál es el área de cada lámina? ____________________
- Cuál es el área total de la caja si esta construida por las láminas que se tienen? ____________________
- Cuál es el volumen de la caja? ____________________

COLEGIO DISTRITAL REPUBLICA DE COSTA RICA
TALLER DE ÁLGEBRA
GRADO NOVENO

PRIMERA PARTE

El lote de la finca de don Pablo es de forma rectangular y esta dividido en dos partes. La primera parte es de forma cuadrada y es donde se encuentra la casa de la finca. La segunda parte del lote, que es donde encontramos la piscina y los parasoles, es de forma rectangular y el lado que no comparte con la casa mide 3 metros.

1) Si el área total del lote es de 10 metros cuadrados ¿Cuánto mide el área de la casa? ¿Cuánto mide el área de la parte donde se encuentra la piscina?

- Área de la parte donde se encuentra la casa es _____
- Área de la parte donde se encuentra la piscina es _____
- ¿Cómo expresarías esta situación en forma algebraica teniendo en cuanta que el valor desconocido es la medida del lado de la parte donde se encuentra la casa?

____

2) Con la ayuda de la calculadora completa la siguiente tabla teniendo en cuenta el valor que se da del área total del lote de la finca

Área total	Área de la parte de la casa	Área de la parte de la piscina	Expresión algebraica Incógnita — medida del lado de la parte dela casa	Medida del lado de la parte de la casa
18 m^2				
28 m^2				
40 m^2				
54 m^2				

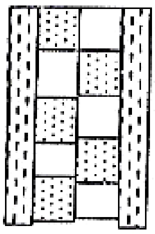
SEGUNDA PARTE

El arquitecto López debe diseñar el plano de un apartamento en el cual el área de la cocina debe ser de forma cuadrada y el área del baño, que se encuentra enseguida de la cocina, debe ser un área fija de 2 metros cuadrados. Si le lado del lote donde ira la cocina y el baño mide 3 metros, haciendo uso de la calculadora, ayuda al arquitecto a completar la siguiente tabla y a encontrar las posibles medidas del lado de la cocina:

Área de la cocina	Área del baño	Área total	Expresión algebraica Incógnita — medida del lado de la parte de la cocina	Medida del lado de la parte de la casa
	2 m^2			
	2 m^2			
	2 m^2			

INSTITUCIÓN EDUCATIVA DISTRITAL COSTA RICA
MATEMÁTICAS
RECUPERACIÓN GRADO OCTAVO

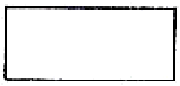
1. El siguiente patrón tiene como área $9x^2 - 6xy + 4$, si un arquitecto desea construir otro patrón que mida el triple del área de este. ¿ Qué área debe tener el patrón que va a construir ? Dibuja algunas de las posibilidades que tiene el arquitecto.



$$A = 9x^2 - 6xy + 4$$

2. Observa la figura y marca cual es el área y el perimetro.

$3x + 5$



$3x$

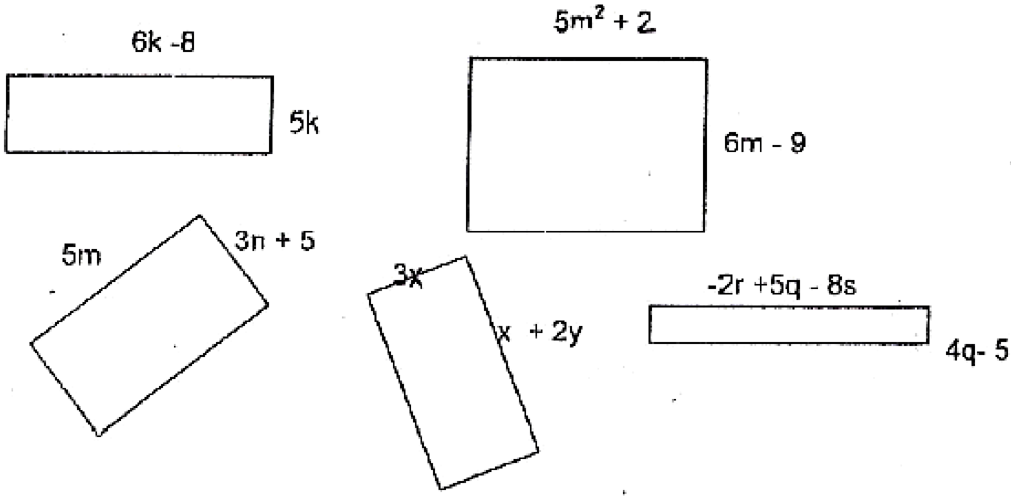
a. $A = 12x + 10$, $P = 9x^2 + 15x$

b. $A = 9x^2 + 15x$, $P = 12x + 10$

c. $A = 10 + 12x$, $P = 9x^2 + 15x$

d. $A = 6x + 5$, $P = 9x^2 + 15x$

3. ¿ Cuál es el área de estos rectángulos ?



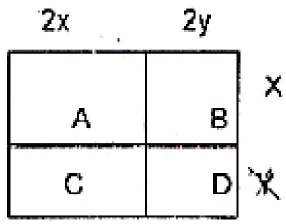
4. Realizar las siguientes multiplicaciones :

a) $(6h - k)(2h + 5)$

b) $(5x^2 - 6x + 2)(-2x^2 + 8x + 16)$

c) $(9a^2 + b^3)(6a - b^2)$

5. Observa la figura y responde :



a) Cual es el área de A +B

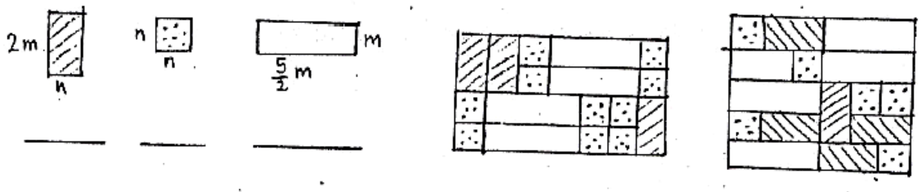
b) Cual es el área de C + D

INSTITUTO EDUCATIVO DISTRITAL SIMÓN RODRÍGUEZ

Matemáticas - Octavo J.M

Nombre: ______________________ Fecha: ____________ Curso: ________

1. En la figura aparecen tres baldosas y dos modelos que se pueden realizar por medio de la distribución de éstas.



Área: ______ ______ ______

a) Cuál es el área de cada modelo?

① ______________________ ② ______________________

b) Si se unen los dos modelos, Cuál es el área resultante?

____

c) En cuánto difieren las áreas de los dos modelos?

2. Inventa dos modelos diferentes y con base en estos desarrolla los incisos a, b y c del punto anterior.

3. Completa los términos que faltan en la suma de polinomios.

a.

$$
\begin{array}{rrrr}
-5a^3 & +\ 3a^2b & +\ ab^2 & -\ b^3 \\
\square & +\ \square & -\ \square & +\ \square \\
\hline
a^3 & +\ 5a^2b & -\ 2ab^2 & -\ b^3
\end{array}
$$

b.

$$
\begin{array}{rrr}
12xy^2 & +\ 3x^2y & -\ \square \\
\square & +\ 3x^2y & -\ x^3 \\
\hline
2xy^2 & +\ \square & -\ 5x^3
\end{array}
$$

c.

$$
\begin{array}{rrr}
\frac{3}{5}x^4 & -\ \frac{1}{2}x^2 & -\ 7 \\
\square & +\ \frac{1}{4}x^2 & +\ \square \\
\hline
-\frac{1}{15}x^4 & -\ \square & -\ 6
\end{array}
$$

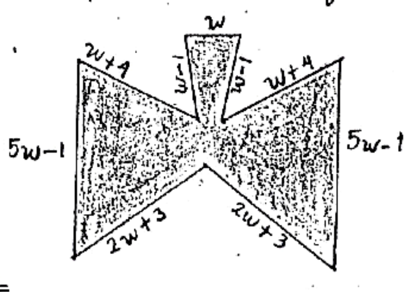
d.

$$
\begin{array}{rrrrr}
\square & +\ 3x^2 & -\ 5x^3 & +\ 7x^4 & -\ \square \\
-2x & +\ x^2 & +\ \square & -\ \square & +\ x^5 \\
\hline
10x & +\ \square & -\ 3x^3 & +\ x^4 & -\ x^5
\end{array}
$$

4 Halla el polinomio que va en el paréntesis:

- $8x^3y - 3x^2y + 5 - (\qquad\qquad) = 3x^3y - 7x^2y + 11$
- $\frac{4}{3}a^2 + \frac{1}{2}a - 7 - (\qquad\qquad) = \frac{1}{3}a^2 - \frac{3}{2}a - 5$
- $-3w^3 + 5w^2 - 2w + 4 - (\qquad\qquad) = -4w^3 + 6w^2 - 5w + 7$

5. Halla el perímetro de la figura:



P= ____________________

6. Suprime paréntesis y reduce:

a. $4a^2b - [-2a + 5a^2b - (4a - 5a^2b) - a]$

b. $-\left(\frac{5}{3}x^2 - \frac{1}{2}x\right) + \left[\frac{2}{3}x - \left(\frac{3}{2}x^2 - x\right) - \frac{1}{3}x^2\right]$

COLFLORES

Grado : Séptimo

Indicadores:

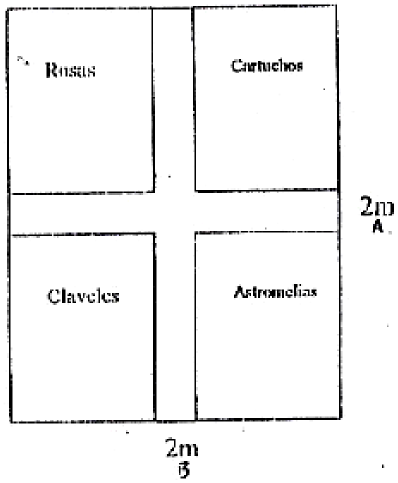
- Realiza operaciones con números enteros
- Resuelve problemas relacionados con área y perímetro
- Interpreta y saca conclusiones a partir de información presentada en diagramas de barras y circulares.
- Lee tablas para contestar preguntas relacionadas con dichas tablas.

La empresa colombiana "Colflores" exporta flores a diferentes países del mundo. Esta empresa fue fundada con el capital de dos hermanos Jorge y Ricardo; cuenta con un centro administrativo ubicado en Bogotá y una hacienda en Funza llamada "Porvenir" donde tienen sus cultivos de flores.

1. Cuando iniciaron la empresa Jorge y Ricardo aportaron cada uno cierta cantidad de dinero. La cuarta parte de lo invertido por Jorge menos 3 750 000 equivale a lo invertido por Ricardo. Si Jorge aportó a la empresa 27 000 000 pesos
   a) ¿Cuánto capital aportó Ricardo?
   b) ¿Con cuánto capital se fundó la empresa?
   c) ¿Si Ricardo decidiera aportar el doble de lo que aportó, pero la empresa se funda con el mismo capital ¿En cuánto se reduciría el capital aportado por Jorge?
   d) A los cuatro años de fundada la empresa se presenta el siguiente informe: en el primer año hubo ganancias por 3 000 000 de pesos, en el segundo año debido a una mala inversión la empresa perdió 5 000 000 de pesos, en el tercer año la empresa tuvo una leve mejoría y ganó 2 000 000 de pesos y en el cuarto año fue un excelente año en ventas y se ganaron 12 000 000 de pesos. ¿Cuánto dinero tiene en este momento la empresa? Representa en una recta numérica los cambios registrados.

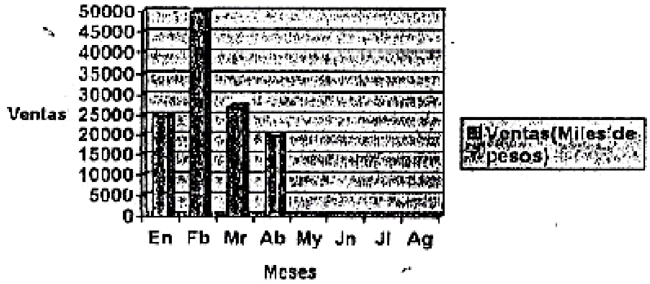
2. El terreno de la hacienda "Porvenir" ubicado en Funza, tiene de largo 750m y 450m de ancho; en una esquina se ha construido una casa de 37 m de largo por 12m de ancho. La zona del cultivo debe repartirse para producir rosas, para producir cartuchos y para producir claveles.
   a) ¿Qué área del terreno no esta construida?
   b) ¿De cuántos m^2 dispone el cultivo para cada tipo de flor?
   c) ¿Cuál de los dos perímetros es mayor el de la casa o el del terreno?, ¿Sabes en cuánto lo excede?
   d) Para colocar el piso de la casa se invirtieron $841380, ¿Cuánto se gastó por m^2?
   e) Si se cerca el terreno dando 3 vueltas con alambre, ¿Cuánto se necesita?

En vista de las buenas ganancias que se han obtenido en la empresa, los dueños de Colflores adquirieron otro terreno. Las nuevas plantaciones están ubicadas en Funza, el terreno tiene forma rectangular y los cultivos son de igual área y forma como se muestra en el dibujo.



a) La mitad del perímetro del terreno es 64 metros . Si el ancho es 26 metros , ¿cuál es el largo del terreno?
b) ¿Cuáles son las dimensiones de cada plantación?
c) ¿Cuál es el área de cada plantación?
d) Se desea colocar una primera fila de ladrillos alrededor de cada plantación .Si un ladrillo mide 25 cm de largo ¿Cuántos ladrillos se necesitan para el borde de cada plantación?
e) Se desea embaldosinar el corredor del terreno. ¿Cuántas baldosas de 50x50 cm se necesitan?

Daniel es el contador de Colflores, debe entregar un informe solicitado por el gerente de la empresa, sobre las ventas de los meses de Enero a Julio de este año, para lo cual utiliza la siguiente gráfica.



3. Daniel no ha terminado todavía, completa la gráfica teniendo en cuenta que:

*En el mes de Mayo se vendieron 15000 cajas mas que en Marzo

*En Junio las ventas son iguales a las de Enero aumentadas en 7000 cajas

*Para el siguiente mes las cajas vendidas fueron el triple de las vendidas en Marzo, disminuidas en lo vendido en Mayo.

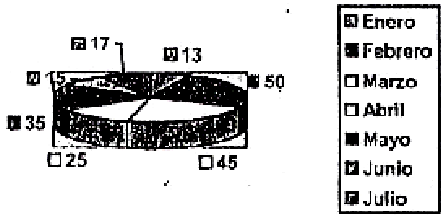
a) ¿Cuál ha sido el mejor mes en la venta de flores?

b) ¿En qué meses la venta ha sido la misma?

c) ¿Qué puede decir Daniel de la venta de flores de Mayo con respecto a Julio?

d) Para Agosto la meta es vender 38600 cajas, ¿Colflores debe vender más cajas o menos que en Junio? ¿Cuántas más o cuántas menos debe vender?

El gerente de mercadeo de Colflores recibió la siguiente gráfica, que contiene los datos de las ventas de otra empresa colombiana de flores llamada "Mercaflores", en lo que va de este año.



c) ¿En qué mes se presentaron la mayores ventas? ¿En cuál las más bajas?

a) En febrero ¿cuál empresa vendió más cajas de flores?

b) ¿En mayo que empresa vendió más? ¿Cuál fue la diferencia?

c) Si el total de las ventas fue de 200000 miles de cajas. ¿Cuál de las dos empresas ha vendido más cajas de flores este año?

4. Sebastián, el administrador de la Hacienda "Porvenir" revisa el trabajo de sus empleados; en la sección de empaques contabiliza el tiempo que demoran dos trabajadores, Arturo y Pedro en empacar las flores. Sebastián registra los datos en la siguientes tablas:

ARTURO

Tiempo(minutos)	5	10	15	20	25
Número de flores	3	6	9	12	15

PEDRO

Tiempo(minutos)	5	10	15	20	25
Número de flores	4	8	12	16	20

Teniendo en cuenta los datos

a) Puedes decir qué cantidad de flores habrá empacado Arturo al cabo de 35 minutos?

b) Después de 15 minutos, ¿quién ha empacado más flores?

c) ¿Cuantas flores de ventaja le lleva Pedro a Arturo en 20 minutos? ¿Es la misma cantidad que a los 10 minutos?

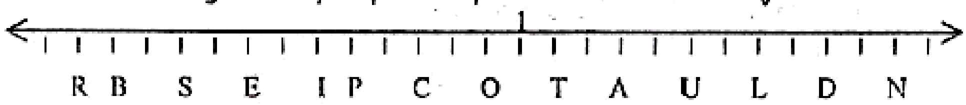
d) La jornada de trabajo comienza a las 8 am, para que entre Arturo y Carlos empaquen 72 flores en una hora, ¿Cuánto tiempo puede descansar cada uno, si deben empacar la misma cantidad?

CENTRO EDUCATIVO DISTRITAL REPUBLICA DE COSTA RICA J.M
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
ACTIVIDADES DE RECUPERACIÓN NÚMEROS ENTEROS
GRADO SÉPTIMO

Nombre:______________________________________ Curso:__________

Santiago en vacaciones fue una ciudad muy extraña y muy animada; los niños que por primera vez la visitaban tenían que pasar una pequeña prueba matemática, la cual es muy fácil. Por eso Santiago pensó en ti y quiere que tu lo ayudes a resuelvas.

1. Usa las letras siguientes y su posición para descifrar el mensaje oculto:

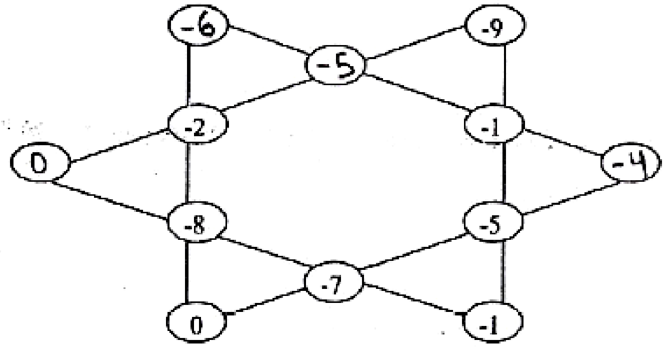


-7 -9 2 6 10 -5 4   -2 0 12   -12 -7 -9 -4 0 12 -9 4 -11 -5 8 -5 10 4 10

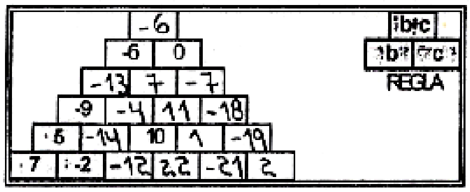
2. Completa la siguiente tabla y justifica la respuesta:

a	b	a+b	a-b	b-a	axb	a^b
9	5					
-15	3					
-9	4					
8	5					
-5	2					
-4	6					

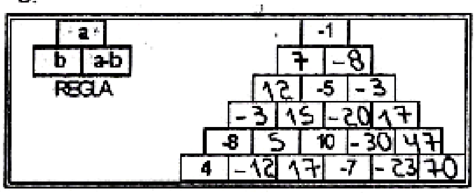
3. Termina la estrella mágica en la que la suma de los cuatro números alineados es siempre la misma:



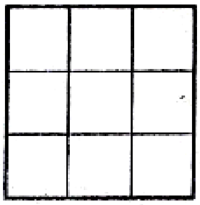
4. Completa estas pirámides con números enteros usando la regla que se indica en cada caso: a.



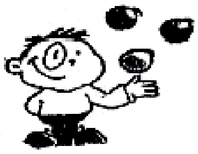
b.

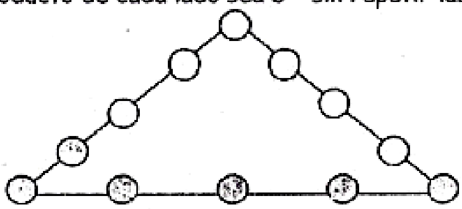


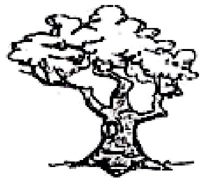
5. Construye un cuadrado mágico con los números: -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2 y -1



6. Realiza un triángulo mágico utilizando doce potencias de 5 ($5, 5^2, 5^3, \ldots, 5^{12}$), de tal manera que el producto de cada lado sea 5^{28} sin repetir las potencias.







7. Ubico las respuestas de los ejercicios en el cuadro cuya suma mágica es 3. Al sumar las filas columnas y diagonales la suma es 3.

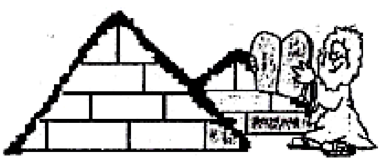
a	b	c
d	e	f
g	h	I

a. $-\sqrt{4}$ b. $\sqrt[3]{27}$ c. $\sqrt[4]{16}$

d $\sqrt{25}$ e. $\sqrt{1}$ f. $\sqrt[3]{(-27)}$

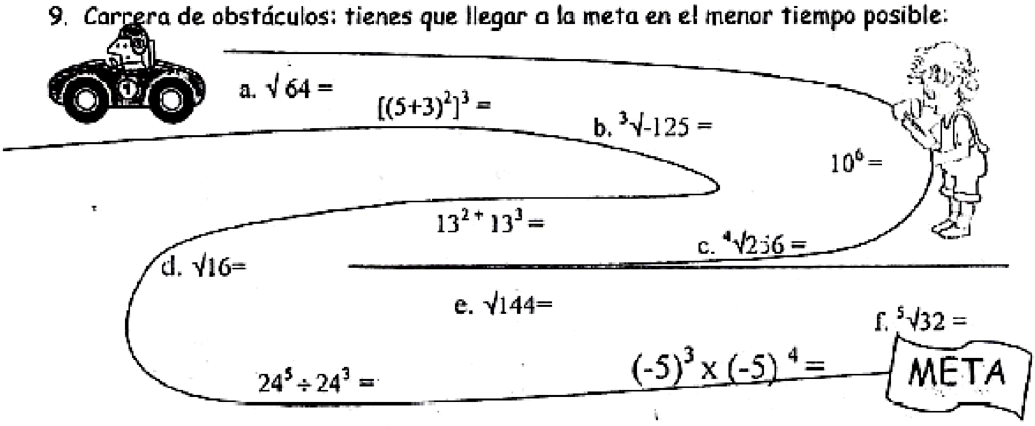
g. $\sqrt[10]{0}$ h. $\sqrt[51]{-1}$ i. $\sqrt{16}$

8. Hasta donde se sabe, la adivinanza más antigua se encontró en Egipto es del año1650 a.C Halla la respuesta a la adivinanza



Mientras iba para st. Ives, me encontré un hombre con 7 esposas; cada esposa llevaba 7 sacos y en cada saco había 7 gatos; cada gato tenia 7 gaticos. ¿Cuántos gaticos, gatos, sacos y esposas iban para el St. Ives?

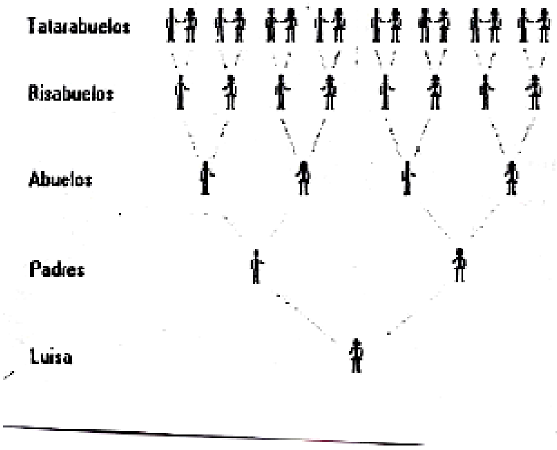
9. Carrera de obstáculos: tienes que llegar a la meta en el menor tiempo posible:



10. Encuentra un camino que atraviese de izquierda a derecha el siguiente cuadro, yendo de una casilla a la otra en sentido horizontal, vertical y diagonal pero conectando siempre raíces que puedan calcularse.

$\sqrt{-4}$	$\sqrt{44}$	$\sqrt{9}$	$\sqrt{-4}$	$\sqrt{-9}$	$\sqrt{100}$
$\sqrt[4]{-1}$	$\sqrt{-4}$	$\sqrt[5]{-1}$	$\sqrt{-16}$	$\sqrt{16}$	$\sqrt[4]{81}$
$\sqrt[5]{32}$	$\sqrt[6]{1}$	$\sqrt{-4}$	$\sqrt{25}$	$\sqrt[6]{64}$	$\sqrt{-81}$
$\sqrt[6]{-1}$	$\sqrt[4]{-1}$	$\sqrt[6]{-5}$	$\sqrt{-1}$	$\sqrt[5]{0}$	$\sqrt{-81}$
$\sqrt{-9}$	$\sqrt{-1}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt[6]{-1}$	$\sqrt[-3]{-8}$	$\sqrt{-16}$
$\sqrt{9}$	$\sqrt[7]{-1}$	$\sqrt{-1}$	$\sqrt[3]{8}$	$\sqrt[4]{81}$	$\sqrt[3]{-64}$

11. Luisa quiere saber cuántos bisabuelos y tatarabuelos ha tenido. Para contarlos dibuja en su cuaderno su árbol genealógico:



	Operación	Resultado
Padres	$2 = 2^1$	2
Abuelos	$2*2 = 2^2$	4
Bisabuelos	$2*2*2 = 2^3$	8

a. cuantos tatarabuelos tiene luisa?.

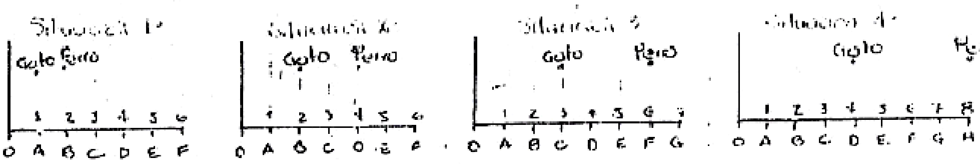
b. ¿Cuántos son los abuelos de todos sus tatarabuelos?

GUIA DE APRENDIZAJE N°2
SEGMENTOS PROPORCIONALES

INDICADORES:

- Determino cuando 2 o mas segmentos son proporcionales
- Formo segmentos proporcionales
- Aplico las propiedades de las proporciones en segmentos

- El perro y el gato son dos animales domesticos, en una competencia que se hizo hemos observado lo siguiente (en intervalos de tiempo iguales):



- Que animal avanzo mas?

Complete el cuadro que aparece a continuación; en las casillas de perro y gato escriba el segmento y la longitud recorrida, segun corresponda el caso

	PERRO	GATO	RAZON 1	RAZON 2
Situación 1	$\overline{OB}$ $m(\overline{OB}) = 2u$	$\overline{OA}$ $m(\overline{OA}) = 1u$	$\frac{m(\overline{OB})}{m(\overline{OA})} = \frac{2u}{1u}$	$\frac{m(\overline{OA})}{m(\overline{OB})} = \frac{1u}{2u}$
Situación 2				
Situación 3				
Situación 4				
Situación 5	$m(\overline{OJ}) = 10u$			
Situación 6			$\frac{m(\overline{OL})}{m(\overline{OF})} = \frac{12u}{6u}$	
Situación 7		$m(\overline{OG}) = 7u$		

RAZON 1: Medida de segmento que recorre el perro, respecto de la medida del segmento que recorre el gato

RAZON 2: Medida del segmento que avanzó el gato, respecto de la medida del segmento que avanzó el perro

Compare la razon 1 en diferentes situaciones; como es?
Como es la razón 2 en diferentes situaciones?

- Complete:

- En la situación 1 el perro avanzo hasto el segmento $\overline{OB}$ que mide ___ y el gato avanzo hasta el segmento ___ que mide 1u, entonces el perro ha recorrido ___ por cada unidad que recorrió el gato.

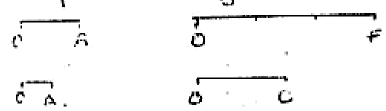
• En la situación 2 el perro avanza hasta el segmento ____ que mide ____ y el gato avanzo hasta el segmento ____ que mide ____ entonces el perro ha recorrido 4u mientras el gato ha recorrido ____

Escriba conclusiones similares para las demás situaciones y responda las siguientes preguntas:

- En la situación 3 hasta donde avanzo el perro y hasta donde avanzo el gato?

- En la situación 3 que segmento le llevo de ventaja el perro al gato y cuanto mide este segmento?
- En la situación 4 hasta donde avanzo el perro, cuanto mide este segmento?
- En la situación 4 hasta donde avanza el gato, cuanto mide este segmento?
- En la situación 4 que relación se puede establecer entre la medida de los segmentos recorridos por el perro y por el gato?
- Cuanto avanzo (segmento y medida) el perro y el gato de una situación a la otra?
- A que razón avanza el perro respecto del gato?
- A que razón avanzo el gato respecto del perro?

* Representando gráficamente estas razones, tenemos:



• Como es la razón entre el segmento $\overline{OB}$ y $\overline{OA}$
• Como es la razón entre el segmento $\overline{OF}$ y $\overline{OC}$
• Compare estas razones

• Como es la razón entre el segmento $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$
• Como es la razón entre el segmento $\overline{OC}$ y $\overline{OF}$
• Compara estas razones

Cuando dos razones son iguales podemos escribir $\frac{m(\overline{OB})}{m(\overline{OA})} = \frac{m(\overline{OF})}{m(\overline{OC})}$ o también $\frac{m(\overline{OA})}{m(\overline{OB})} = \frac{m(\overline{OC})}{m(\overline{OF})}$ formando segmentos proporcionales y decimos que los segmentos $\overline{OB}$ y $\overline{OA}$ son proporcionales a los segmentos $\overline{OF}$ y $\overline{OC}$.

Responde:

- Que es una proporción?
- Forma mas proporciones entre la medida de los segmentos que avanzo el gato respecto al perro.

EJERCICIOS:

1. Dadas las siguientes medidas de segmentos, construir sus respectivos segmentos proporcionales:

a. $m\,\overline{AB} = 3cm$ y $m\,\overline{CD} = 12cm$

b. $m\,\overline{CD} = 3mm$ y $m\,\overline{DH} = 7mm$

c. $m\,\overline{HJ} = 2u$, $m\,\overline{KL} = 4u$ y $m\,\overline{AB} = 10u$

d. $m\,\overline{JK} = 1{,}4\,cm$, $m\,\overline{GH} = 1{,}5cm$ y $m\,\overline{OC} = 2{,}5\,cm$.

2. Dibuja segmentos de longitudes 2, 3, 4 y 6 unidades respectivamente y forma proporciones con estos

3. El segmento AB tiene 5 cm de longitud y P es un punto ubicado a 2cm de B. Encontrar:

a. $\frac{AP}{PB}$ b. $\frac{PB}{AP}$ c. $\frac{AB}{AP}$ d. $\frac{BP}{AB}$

4. AB, BC, CA son proporcionales a XY, YZ, ZX, respectivamente:

Si $\frac{AB}{XY} = \frac{3}{5}$ y $YZ = 27{,}5$ cm , $ZX = 15{,}5$ cm , encontrar

a. BC b. CA.

COLEGIO DISTRITAL REPUBLICA DE COSTA RICA
TALLER DE RAZONES Y PROPORCIONES PARA GRADO SÉPTIMO

NOMBRE:____ FECHA:_______________

Trabajo en grupos de tres personas las cuales deben tener registro de todos los datos que se deban tomar en el taller.

Materiales: metro de costura, hojas de papel en blanco, lápiz, toda su disposición.

1. Tome las siguientes medidas:

- Su estatura (E)
- Medida de los pies hasta el ombligo (O)
- Medida del ombligo a la cima del cráneo (S)
- Medida de la muñeca hasta el codo (I)
- Medida de la cintura (C)
- Medida de la cabeza (Ca)
- Medida de un hombro al otro (P)
- Medida desde los dedos de una mano a los dedos de la otra con los brazos extendidos a los lados (B)

2. Con los datos que tomaron en grupo llene la siguiente tabla y compare estos datos:

E	O	S	I	C	Ca	P	B

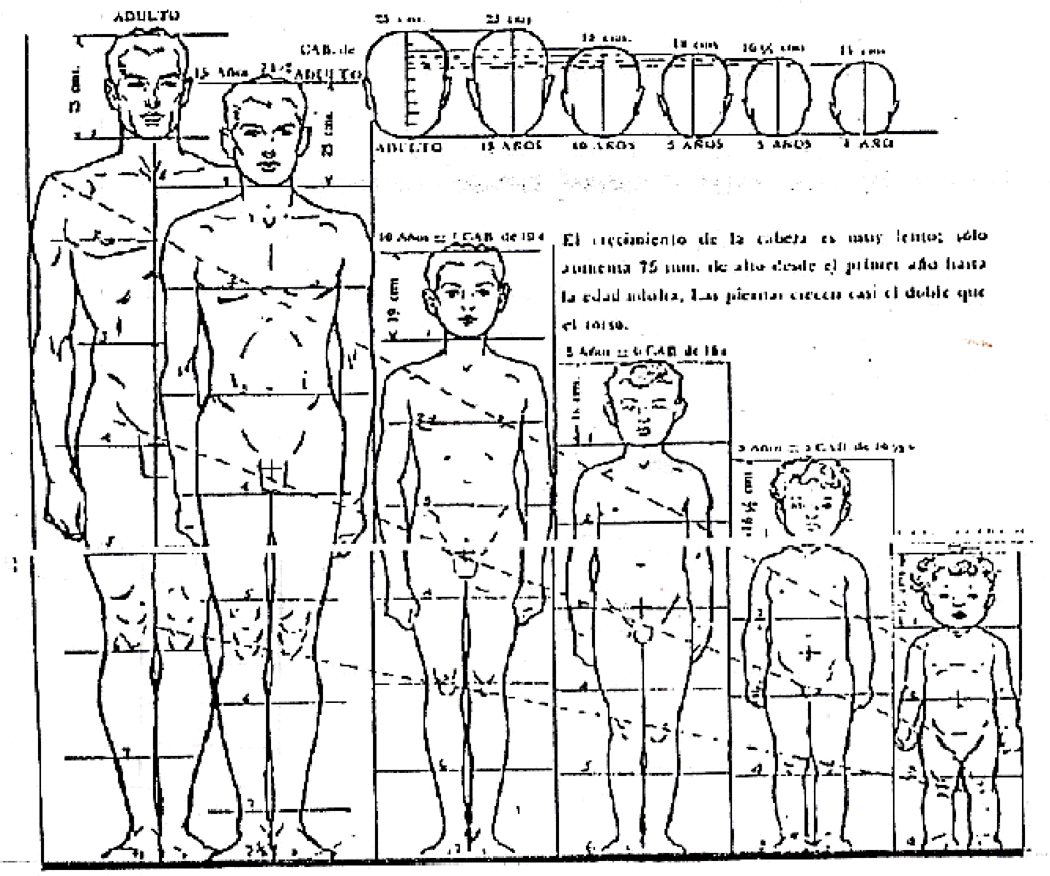
3. Teniendo en cuenta los datos anteriores complete la siguiente tabla.

E/O	E/S	S/O	C/I	I/Ca	C/Ca	E/B	P/Ca

4. escriba las relaciones que encontró en las dos tablas anteriores y escriba el porque cree usted que estas relaciones se tienen.

5. ¿ Sus medidas eran iguales a las de sus compañeros?
6. ¿existe alguna relación similar a las anteriores con las medidas en la cara?
7. Según el trabajo realizado anteriormente.¿ qué es una proporción?
8. investigue en que otras áreas se tienen proporciones. De ejemplos.
   - Geometría
   - Arquitectura
   - Arte
   - Naturaleza

PROPORCIONES IDEALES A VARIAS EDADES



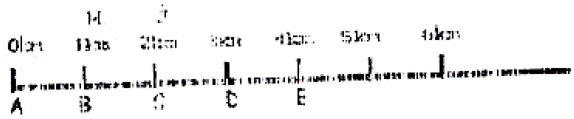
COLEGIO DISTRITAL SIMÓN RODRIGUEZ

Geometría : Razones y proporciones

NOMBRE : ______________________ CURSO : ________ FECHA : ______

1. Julio y Marysol son [illegible] de atletas que entrenan diariamente. La semana que ellos entrenaron juntos, se [illegible] los avances en cad[illegible] ellos, ya que fueron [illegible] sus velocidades.

El lunes Marysol recorrió 1km
y Julio recorrió 2km.



El martes Marysol recorrió 2km
y Julio recorrió 4km.
(represéntelo gráficamente).

El miercoles Marysol recorrió 4km
y Julio recorrió 8km.
(represéntelo gráficamente).

El jueves Marysol recorrió 8km
y Julio recorrió 16km.
(represéntelo gráficamente).

Completa la tabla

	LUNES	MARTES	MIERCOLES	JUEVES
MARYSOL	1km			
JULIO	2km			

¿ cuál es la relación entre los recorridos del día lunes de Marysol y julio ?

¿ cuál es la relación entre los recorridos del día martes de Marysol y julio ?

¿ cual es la relación entre los recorridos del día miércoles de Marysol y julio ?

¿ cuál es la relación entre los recorridos del día jueves de Marysol y julio ?

¿ cual es la relación entre los recorridos de los días lunes y martes de Marysol?

¿ cuál es la relación entre los recorridos de los días lunes y martes de Julio?

¿ cuál es la relación entre los recorridos de los días miércoles y jueves de Marysol?

¿ cuál es la relación entre los recorridos de los días miércoles y jueves de julio?

complete la tabla

	Marysol	Julio	[illegible]	Relación
lunes	1km			julio recorrió el doble de lo que recorrió marysol
martes				
miércoles				
jueves				

de las relaciones que ha encontrado, ¿ puede decir que hay algunas equivalentes ?,¿cuáles ?

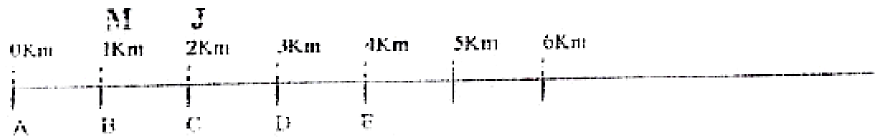
complete la tabla

relación	[illegible]ón	relación	razón	proporción
julio recorrió el doble de lo que recorrió marysol	[illegible]/2			

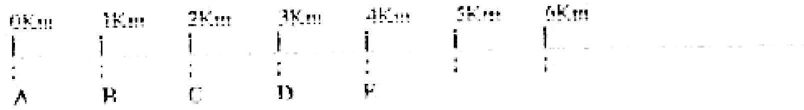
Julio y Marisol son dos grandes atletas que se vienen preparando para la media maratón de Bogotá, ellos entrenan diariamente. La primera semana que entrenaron juntos, se notaron grandes avances en el rendimiento de cada uno, ya que fueron incrementando sus velocidades.

Los recorridos hechos durante la semana fueron:

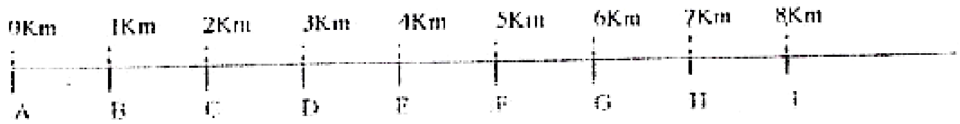
- ✓ El lunes Marisol recorrió 1Km y Julio recorrió 2Km.



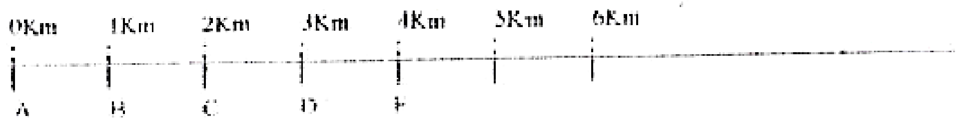
- ✓ El martes Marisol recorrió 2Km y Julio 4Km. Represéntalo gráficamente.



- ✓ El miércoles Marisol recorrió 6Km y Julio recorrió 8Km. Represéntalo gráficamente.



- ✓ El jueves Marisol recorrió 12Km y Julio recorrió 16KM. Represéntalo gráficamente.

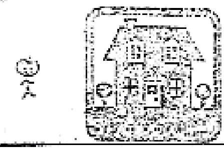


Completa la siguiente tabla

Colegio *República de Costa Rica J.T.*
Departamento de Matemáticas
Taller 2: Multiplicación de Monomios.

Para ir a Homesentry estando en mi casa necesito contestar algunas preguntes, si contesto correctamente puedo avanzar, si no, me atraso y otro llegara.

Salida



¿Cuál es el área de la siguiente baldosa dado sus lados ?

Don José dijo que el área de la siguiente baldosa es $3x^2y$ y que un lado mide xy, ¿podemos ... el otro lado de la figura ?

Complete el término que hace falta en la siguiente multiplicación.

$$3a(-7\square) = -21a^2$$

(6) Para este paso debes elegir tan solo una respuesta y sustentar el porqué la elegí.

El producto de $8a^2b$ y de $6ab$ es:

a) $36a^3b^2$
b) $45a^3b^2$
c) $14a^3b^2$
d) $14a^2b$
e) $48a^3b$

(7) Ahora: Pienso un número que multiplicado por $6a^2bx$ nos de $12a^3bxy$. ¿Cuál es el número?

(5) Reduzca las siguientes expresiones:

$(a)(-3a)(a^2) =$

$(ab^2c)(ca^2) =$

$(-4a^3)(-5am^2p) =$

(8) Complete los términos que hacen falta en las siguientes multiplicaciones.

$(2a)(\ ?\ )(-3a^2) = 6a^5$

$(2a^3b)(-7a^3b^4) = -?\,a^6b^5$

$(-xy^2)(\ ?\ y) = 5xy^3$

(4) Debe completar la siguiente tabla para avanzar.

$\cdot$	3x	2xy	3
xy			
y		$2xy^2$	
4			12

(9)

(13)

(12) Para llegar debo reducir las siguientes expresiones:

$$\left(-\frac{3}{5}x^2y^4\right)\left(\frac{1}{6}a^2by^5\right) =$$

$$(-2x^{m+2}y^n)(3x^{m+1}y^{n+1}) =$$

(11) Complete los términos que hacen falta en las siguientes multiplicaciones.

$(-x^{a+1})(\ ?\ ) = -x^{2a+2}$

$(2a^3b)(a\ ?^2) = 2a^{m+3}b^2$

$(7x)\left(-\frac{2}{3}x^2\right)\left(\frac{1}{5}x^3\right) = -\frac{?}{15}x^6$

$(-3a^{m+1}b^{n+1})(4a^2b) = ?\,a^?b^?$

(12) Ahora, relacione la columna de la izquierda con la columna de la derecha.

$\left(\frac{1}{2}a^3\right)\left(\frac{4}{5}a^3b\right) =$	$\frac{1}{5}a^{m+1}$
$(a^m)(a) =$	$\frac{2}{5}a^6b$
$\left(\frac{1}{3}a\right)\left(\frac{3}{5}a^m\right) =$	a^{m+1}
$\left(-\frac{1}{3}ab\right)\left(\frac{3}{5}b^2\right) =$	$\frac{3}{14}a^2m^2n$
$\left(\frac{7}{14}a^2m^3\right)\left(-\frac{3}{7}m^2n\right) =$	$\frac{1}{5}ab^3$