EJEMPLIFICACIÓN DE LAS DIFERENTES FASES DEL PROCESO DE GENERALIZACIÓN EN ÁLGEBRA EN TAREAS RESUELTAS POR ESTUDIANTES DE ARITMÉTICA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

LEIDY JANETH HERRERA VARGAS

LUZ ANGELA GAITÁN GAITÁN

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C.

2013

EJEMPLIFICACIÓN DE LAS DIFERENTES FASES DEL PROCESO DE GENERALIZACIÓN EN ÁLGEBRA EN TAREAS RESUELTAS POR ESTUDIANTES DE ARITMÉTICA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

LEIDY JANETH HERRERA VARGAS

LUZ ANGELA GAITÁNGAITÁN

Trabajo de grado para obtener el título de Licenciado en Matemáticas

Directora: Lyda Constanza Mora Mendieta

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C.

2013

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Titulo del documento	Ejemplificación de las diferentes fases del proceso de generalización en álgebra en tareas resueltas por estudiantes de aritmética de Licenciatura en Matemáticas.
Autor(es)	HERRERA Leidy, GAITÁN Angela.
Director	MORA Lyda.
Publicación	Bogotá, D.C. Universidad Pedagógica Nacional, 2013, [80páginas]
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Educación, Generalización, formulación de conjeturas, patrón.

2. Descripción
Este trabajo de grado se encuentra en la modalidad de Trabajo de Grado asociado al interés profesional del estudiante. Se pretende identificar y ejemplificar las distintas fases de generalización en el desarrollo de tareas propuestas a estudiantes que cursan Aritmética en la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, en el segundo semestre de 2012, experimentando, de esta manera algunas actividades propias del ejercicio investigativo en Educación como lo es la apropiación de referentes teóricos, el diseño de instrumentos de indagación y la interpretación de resultados.

3. Fuentes
Se consultaron 18 documentos entre libros, tesis de grado y artículos de revistas referentes la noción de patrones y generalización matemática. Las fuentes más destacadas para la realización del trabajo de grado fueron: Mason, J., Graham, A., Pimm, D., & Gowar , N. (1999), García (2011), Grupo Azarquiel (1993) y Trujillo (2008).

4. Contenidos
El trabajo de grado inicia presentando los preliminares, donde se encuentra la introducción que muestra una visión de lo que incluye el documento; la justificación y los objetivos. Seguidamente, se presenta el marco teórico en el que se describe qué se entiende por generalización, sus fases y se presentan dos taxonomías para el proceso de generalización, éstas son útiles ya que con base en ellas se establece una taxonomía alternativa, a partir de la cual se interpretan y organizan los resultados del instrumento utilizado. Luego de ello se encuentra la metodología organizada en seis etapas; además, se presenta el análisis con su respectiva ejemplificación de cada nivel en cada fase de generalización y finalmente las conclusiones respecto a los resultados y a los aprendizajes alcanzados.

5. Metodología
La metodología que se utilizó para elaborar este trabajo de grado, que se encuentra específicamente en el capítulo 3, se organiza en seis etapas distintas, así: 1. Documentación. 2. Primer pilotaje. 3. Determinación de los niveles de las fases de generalización. 4. Diseño del instrumento y pilotaje. 5. Aplicación del instrumento final6. Interpretación de resultados, lo cual se hizo a partir de la taxonomía elegida acerca de los niveles de generalización, eligiendo ejemplos significativos para cada uno de los niveles.

6. Conclusiones
En cuanto a la indagación acerca de fases de generalización, a través del diseño y aplicación de un instrumento se concluye lo siguiente: • Este trabajo permitió ampliar el conocimiento de las autoras en cuanto a los tipos

de tareas y secuencias que se pueden proponer y el tipo de preguntas que se podían formular para evidenciar las distintas fases de generalización.

- También se concluye, en acuerdo con el Grupo Azarquiel (1993) y tras el análisis del instrumento, que las secuencias de figuras geométricas son más fáciles de manipular, pues se observó que se describía fácilmente la regla de formación y lo común entre las figuras. Así mismo, se plantea que de acuerdo como el estudiante *vea* la secuencia, de la misma forma será su "descripción" e inclusive su "expresión simbólica".

Para finalizar en cuanto a la ejemplificacióndе cada nivel de las fases del proceso de generalización de patrones desde el análisis del instrumento, se concluye que:

- La utilización de una representación simbólica para expresar una generalidad puede llevar tiempo en algunos estudiantes; sin embargo, a través de las distintas fases de generalización se puede observar el uso de lenguaje matemático y de objetos matemáticos para hacer descripciones o presentar conjeturas.
- Se puede concluir que algunos estudiantes que encuentran una generalidad, no formulan una conjetura que relacione todas las partes dadas o construidas, como por ejemplo, en la parte del instrumento donde se pedía expresar el número de puntos de la figura en forma de sumatoria y también como una potencia, se formula la conjetura en términos de la sumatoria o de la potencia solamente, sin relacionar los dos objetos incluidos en el problema.

Elaborado por:	HERRERA Leidy, GAITÁN Angela
Revisado por:	MORA Lyda

Fecha de elaboración del Resumen:	07	05	2013

Contenido

Índice de tablas

Índice de anexos

Índice de imágenes

1. PRELIMINARES

1.1 INTRODUCCIÓN

Este trabajo de grado se encuentra en la modalidad de Trabajo de Grado asociado al interés profesional del estudiante. Resulta del interés académico de las autoras en el campo de la Educación Matemática, en particular, en los procesos de generalización en álgebra. Se pretende identificar y ejemplificar las distintas fases de generalización en el desarrollo de tareas propuestas a estudiantes que cursan Aritmética en la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, en el segundo semestre de 2012, experimentando, de esta manera algunas actividades propias del ejercicio investigativo en Educación como lo es la apropiación de referentes teóricos, el diseño de instrumentos de indagación y la interpretación de resultados.

Teniendo la concepción del álgebra no solo como lenguaje meramente simbólico sino como una forma de pensar, como una manera de ver un problema, como un medio para proveer oportunidades para la resolución de problemas (Davis, 1985 citado por Socas, 2011) y ser una dimensión clave de toda actividad matemática como lo expresa el mismo Socas (2011), es entonces la generalización de patrones un proceso específico del pensamiento algebraico yesencial en la actividad matemática.

Con este trabajo se profundiza en esta temática –la generalización en álgebra–,en cuanto a los tipos de tareas y secuencias que se pueden proponer, las distintas fases de generalización y el tipo de preguntas que se pueden formular. También se evidencia en el capítulo 4 lo que los estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas realizan en cada fase de los procesos de generalización respondiendo a las preguntas ¿qué observan?, ¿cómo se comunican?, y ¿cómo verifican?, si es que lo hacen, y así, obtener mayor claridad acerca de las diferencias entre cada fase.

Para el desarrollo de este documento, primero se establecieron unos elementos de análisis, para cada una de las fases de generalización, teniendo como fundamentos la tesis de maestría de García (2011), la taxonomía de Ellis modificada por Trujillo (2008) y otros documentos que se precisan en marco de referencia, lo cual se desarrolla en el capítulo 2.

1.2 JUSTIFICACIÓN

Con este trabajo de grado se pretende cumplir con todos los requisitos para adquirir el título de Licenciado en Matemáticas; además se considera importante en la formación de los futuros profesores ya que se realiza un acercamiento al ejercicio investigativo.

Se pretende realizar la ejemplificación de las fases de generalización, ya que no se cuenta con documentos suficientes que ejemplifiquen estas fases y que muestren las diferencias entre una y otra; por lo tanto, se espera ayudar a los lectores a identificar esas diferencias e incentivar a realizar trabajos con este enfoquen que ayuden a las investigaciones en cuanto a generalización algebraica.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 GENERAL

Identificar las distintas fases de la generalización de patrones y ejemplificar los niveles asociados a cada una de ellas por medio del análisis de un instrumento resuelto por estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, que cursaron Aritmética en el segundo semestre de 2012.

1.3.2 ESPECÍFICOS

Para alcanzar el objetivo general se establecen los siguientes objetivos específicos:

- Apropiación de referentes teóricos respecto a la generalización algebraica y las fases de generalización y, determinación de los niveles asociados a cada fase a partir de propuestas de varios autores.
- Indagación acerca de las fases de generalización que evidencian estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la UPN a través del diseño y aplicación de un instrumento basado en secuencias matemáticas de tipo numérico y geométrico.
- Ejemplificación de cada nivel de las fases del proceso de generalización de patrones desde el análisis del instrumento.

2. MARCO DE REFERENCIA

En este capítulo se presentan los fundamentos conceptuales de este trabajo de grado, se describe qué se entiende por generalización, sus fases y dos taxonomías para tales fases, a partir de las cuales se establece una taxonomía alternativa que se constituye en la base para la organización de los ejemplos que son el centro de este documento.

2.1 GENERALIZACIÓN

La generalización es uno de los procesos más importantes de la actividad matemática y uno de los que más se utiliza al establecer proposiciones y resolver problemas (Azarquiel, 1993); sin embargo, para muchas personas este proceso presenta cierta dificultad y muy posiblemente por ello, en varias ocasiones no alcanza a ser culminado con éxito, tal como se mostrará en el capítulo de análisis.

De acuerdo al Diccionario Real de la Lengua Española, en su vigésima segunda edición (1992), **generalización** viene del verbo generalizar, palabra que significa: "Considerar y tratar de manera general cualquier punto o cuestión. Abstraer lo que es común y esencial a muchas cosas, para formar un concepto general que las comprenda todas." (p. 765)

Esta definición se encuentra relacionada con la idea de generalización que en Educación Matemática algunos autores proponen. Mason et al. (1999),por ejemplo, menciona que la generalización es el proceso que permite dar vida a las matemáticas a través del álgebra, cuyo lenguaje permite expresar cualquier generalidad en matemáticas, de manera que es necesario tener algo que decir y por tanto, es indispensable percibir algún patrón o regularidad, esto significa encontrar lo que es común, para luego tratar de expresar lo que se observa, o dicho en otras palabras comunicarlo a alguien.

El lenguaje algebraico permite, con respecto al natural, expresar lo general a través de símbolos; sin embargo, aunque la expresión simbólica permite manejar las relaciones generales, hay que mencionar que generalizar y simbolizar son dos procesos distintos. Esto significa que, generalizar no es solamente pasar de casos particulares a una expresión en lenguaje algebraico simbólico, por ejemplo, no necesariamente se está generalizando cuando se colige, de $1 + 2 + 3 = 6$, $2 + 3 + 4 = 9$, $3 + 4 + 5 = 12$, que $a + b + c = d$, pues no hay alguna propiedad en común que se esté expresando en lenguaje algebraico a partir de los casos particulares dados. Ni tampoco se generaliza cuando se pretende hacer una definición acerca de una colección de objetos a través de las propiedades de solamente uno de ellos (Grupo Azarquiel, 1993).

El proceso de generalizar es uno de los procesos que ocurren en cualquier nivel del pensamiento matemático y se incluye en el proceso de abstraer, de esta manera "generalizar es inducir de casos particulares, identificar aspectos en común, para expandir dominios de validez" (Dreyfus, 1991, p. 35, traducción libre realizada por Mora, 2012).

Para Sessa, (2005) "generalizar es encontrar características que unifican, reconocer tipos de objetos y problemas" (p 71.), es la consolidación de características comunes de elementos de un conjunto (números, reglas, gráficas, etc.) expresadas de manera sintetizada, la generalización es la idea que unifica muchas características y permite además reconocer tipos de objetos y problemas. En el estudio que realiza esta autora sobre generalización, identifica dos formas de trabajo que involucra lo algebraico desde dos aspectos diferentes estos son:

- La producción de fórmulas para contar colecciones.

- La formulación y la validación de conjeturas sobre los números y las operaciones.

Así mismo, Mason (1989 citado por Esquinas, 2008), alude que el proceso de generalizar significa descubrir alguna ley general que indique: qué parece ser cierto (una conjetura); por qué parece ser cierto (una justificación) y dónde parece que es cierto, esto es, un planteamiento más general del problema. (p. 94). Esta idea de Mason, lleva a establecer algunas etapas o fases presentes en el proceso de generalizar.

2.1.1 FASES DE GENERALIZACIÓN

Según Mason et al. (1999), en la generalización se identifican cuatro etapas *"Ver"* un patrón, *"Decir"* cuál es el patrón ,*"Registrar"* un patrón y *"Probar"* la validez de las fórmulas, la primera se relaciona con la identificación mental de un patrón o relación, que se exterioriza a través de sus acciones o su discurso, es decir identificar algo común que se expresa, por ejemplo, presentando otro objeto particular en una secuencia; la segunda, está directamente relacionada con expresar lo que se *"ve"* por medio del lenguaje escrito mientras que la tercera se refiere a la comunicación de una idea completa o conclusión de lo que se "*dijo*", y como última fase se debe probar la validez de la regla, ésta consiste en dar argumentos del porqué funciona el patrón encontrado.

Para el Grupo Azarquiel (1993) se distinguen dos partes de la generalización, una tiene que ver con el proceso y la otra tiene que ver con su expresión y consideran, con base en ello, tres etapas en el proceso de la generalización: "Ver", "Describir" y "Registrar" (no consideran la "Verificación" como fase).

2.1.1.1 VER

De acuerdo al Diccionario Real de la Lengua Española en su vigésima segunda edición (1992), *Ver* significa “percibir algo con cualquier sentido o con la inteligencia”, para el Grupo Azarquiel (1993), *Ver* significa ir más allá, identificar la característica que hace única una situación, encontrar lo que se mantiene en cada caso para luego llegar a una regla que permita percibir lo general; Mason et al. (1999) menciona que “*Ver”* es la identificación de un patrón o de una relación.

Según el Grupo Azarquiel (1993) existen dos contextos matemáticos en que se pueden presentar situaciones relacionadas con ver regularidades: el geométrico y el numérico. En las actividades con secuencias geométricas o numéricas se debe pedir a los estudiantes la figura o número siguiente, esperando así, que con ello el estudiante manifieste que *ve* un patrón, formulando así preguntas como: ¿Cuál es la siguiente figura o número de la secuencia, dibújela/o? ¿Qué es lo común en estas figuras o números? ¿Cuántos objetos de la figura (puntos, cuadros, etc.) se necesitan para la figura 10, 12 y 30? ¿De qué forma están ubicados los objetos de la figura? ¿Cuál es el número que continúa? Escriba el número de la posición 10, 15, 30. (Mason et al, 1999)

2.1.1.2 DESCRIBIR

Para la segunda fase, *“Describir”*, se espera que los estudiantes manifiesten con palabras o “lenguaje natural” aquello que se *ve*,el patrón que han identificado, sin utilizar necesariamente la sintaxis formal algebraica. *Decir* se desarrolla mediante el lenguaje oral o escrito presentando ideas relacionadas con la propiedad general que se observó con anterioridad; cuando se describe, se mencionan las características que se *ven* de los objetos involucrados y se explica la forma en la que se percibe lo que es igual y lo que es diferente; así, la forma en cómo se describe informa acerca de la manera como se ve el patrón y que más adelante determinará la expresión simbólica, si es que ésta se da. Para lograr que se haga una descripción, se deben incluir dentro de las actividades preguntas que indaguen sobre cómo se encontró el siguiente objeto de la secuencia, descripción de las características comunes y las que no, cómo se pasa de la primera figura a la siguiente, recordando que todas estas respuestas deben ser puestas por escrito para clarificar los pensamientos y evitar o disminuir la ambigüedad.

2.1.1.3 REGISTRAR

La tercera fase, *"Registrar",* tiene como objetivo la expresión escrita en forma completa de las relaciones cuantitativas que se observan llegando a la formulación de una conjetura, esto no implica necesariamente que se escriba el patrón hallado de manera simbólico algebraica, se puede hacer uso de otros elementos como dibujos, palabras o símbolos y palabras que sean útiles al momento de hacer una formulación o hipótesis.

En esta fase se escribe de forma sucinta lo que se encontró en las fases anteriores pero se requiere mayor precisión y completitud en lo que se expresa, respecto a la fase anterior, para lograr esto, el Grupo Azarquiel (1993) afirma que se debe animar a los estudiantes a utilizar todos los elementos necesarios (figuras, dibujos, símbolos propios o generales) para formular expresiones acerca de la relación entre los objetos. Se debe convencer a los estudiantes de que esta expresión quede suficientemente bien y de forma reducida, para luego reemplazar algunas palabras por símbolos y finalmente llegar a la expresión simbólica. Aunque la expresión de la generalidad puede hacerse por medio de palabras, símbolos o palabras y símbolos.

2.1.1.4 VALIDAR

La última fase propuesta por Mason et al. (1999) en el proceso de generalizar tiene que ver con la justificación de la conjetura. Para decir por qué la regla es correcta se debe tener una noción de lo general, ejemplificando lo particular para llegar a ello, reconociendo las características comunes y específicas que continúan en cada ejemplo; en esto, tiene gran importancia lo que se “Ve” porque dependiendo de ello será la declaración general de lo que es común a todos los casos. Para Cañadas (2002), luego de probar si la expresión dada funciona para varios casos se puede hacer una hipótesis si esta se cumple en general, para luego dar las razones que expliquen la conjetura realizando una prueba formal.

Para Mason et al. (1999) algunas de las preguntas que favorecen el trabajo de probar una conjetura son: ¿Cómo crece el patrón?, ¿Por qué la regla funciona?, ¿Qué hay en común?, ¿Cómo se está seguro de que la regla siempre funciona? ¿Por qué se da esa situación? ¿Qué clarificaciones necesita usted para hacer estas expresiones más exactas y precisas?

Para Mora (2012), esta última etapa del proceso de generalizar, que consiste en dar argumentos del porqué funciona el patrón encontrado, en la mayoría de los casos se omite.

Al interior de estas cuatro fases se dan otras, las cuales han sido propuestas por algunos autores como subfases o niveles. Enseguida, tal como se mencionó anteriormente, se presenta un par de taxonomías, que se constituyeron en la base para establecer los niveles de cada una de las fases de generalización que se ejemplifican en este trabajo.

2.2 TAXONOMÍAS PARA EL PROCESO DE GENERALIZAR

García (2011), en su tesis de maestría propone diferentes niveles al interior de cada una de las cuatro fases de generalización antes mencionadas, de esta manera establece estrategias de nivel que le permiten identificar las rutas que siguen los estudiantes en el proceso de generalizar. Las distintas fases propuestas por García (2011) y sus respectivos niveles se muestran en la tabla 1:

<table>
<tr><th rowspan="2">Estra-tegias de nivel</th><th colspan="4">FASES EN LA CONTRUCCIÓN DE UNA GENERALIZACIÓN</th></tr>
<tr><th>VER</th><th>DECIR</th><th>ESCRIBIR</th><th>VERIFICAR</th></tr>
<tr><td rowspan="4">I</td><td rowspan="4">(OI) Observar la imagen como un todo.</td><td rowspan="4">(DIT) Describir características de la imagen como un todo.</td><td>Escribir las propiedades comunes entre los casos</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>(EPCP) Escribir con palabras las características de la imagen</td></tr>
<tr><td>(EPCM) Escribir con palabras y símbolos las características de la imagen.</td></tr>
<tr><td>(EPCS)Escribir con símbolos las características de la imagen.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">II</td><td rowspan="4">(AI) Analizar la imagen (Descompone el todo en sus partes)</td><td rowspan="4">(DPC) Describir las propiedades comunes entre los casos particulares.</td><td>Escribir características de las partes en un todo.</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>(ECPP) Escribir con palabras las propiedades comunes entre los casos particulares</td></tr>
<tr><td>(ECPM) Escribir con palabras y símbolos las propiedades comunes entre los casos particulares.</td></tr>
<tr><td>(ECPS) Escribir con símbolos las propiedades comunes entre los casos particulares.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">III</td><td>Establecer relaciones entre las partes de la imagen</td><td rowspan="2">(DRP) Describir la forma en que se relacionan las partes</td><td>Escribir la forma en que se relacionan las partes.</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>(ERN) Establecer relaciones necesarias.</td><td>(EFRP) Escribir con palabras la forma en que se relacionan las partes.</td></tr>
</table>

	(ERS) Establecer relaciones suficientes		**(EFRM)** Escribir con palabras y símbolos la forma en que se relacionan las partes.	
			(EFRS) Escribir con símbolos la forma en que se relacionan las partes.	
IV	**(CRP)** Conjeturar acerca de las relaciones entre las partes de la imagen.	**(DCR)** Describir la conjetura observada de relaciones entre las partes	Escribir la conjetura observada de las relaciones entre las partes.	**(VCTC)** Verifica su conjetura construyendo un término cercano.
			(ECOP) Escribir con palabras la conjetura observada de las relaciones entre las partes.	**(VCC)** Verifica su conjetura haciendo uso de la calculadora.
			(ECOM) Escribir con palabras y símbolos la conjetura observada de las relaciones entre las partes.	**(VCM)** Verifica su conjetura manualmente.
			(ECOS) Escribir con símbolos la conjetura observada de las relaciones entre las partes.	**(NVC)** No verifica su conjetura.

Tabla 1: Fases en la construcción de una generalización. (García, 2011)

García (2011) organiza la tabla en categorías que se agrupan en cuatro niveles (I, II, III, IV), de acuerdo a las estrategias utilizadas en cada una de las fases de generalización (*ver*, *decir*, *escribir* y *verificar*); el nivel I se refiere a aquellas estrategias que parten de*Ver*y *Describir* la imagen como un todo, en la fase *Escribir* se escriben las características comunes entre los casos; en el nivel II se ubican aquellas estrategias que se fundamentan en observar que se descompone el todo en sus partes; en el nivel III se organizan aquellas acciones que se dan cuando, se relacionanlas partes del todo entre sí. Como último nivel IV, se conjetura acerca de las relaciones entre las partes *(Ver),* permitiendo *describir*la conjetura observada de relaciones entre las partes, *escribiendo*la conjetura observada de las relaciones entre las partes, en este nivel en particularaparece la fase*Verificar*, la cual se divide en cuatro subniveles, de manera que es consecuencia directa de la conjetura que se establece. Esta clasificación, le permite a la autora establecer las *rutas de acceso a la generalización*.

De otra parte,Ellis (2007) también propone diferentes niveles en el proceso de generalización, su taxonomía se basa en la perspectiva orientada al actor, que describe los diferentes tipos de generalización que utilizan los estudiantes cuando razonan algebraicamente, ésta se divide en dos partes, la primera se refiere a la actividad de los estudiantes cuando generalizan y se denomina *acciones para la generalización;* la segunda parte hace referencia a las declaraciones finales de los estudiantes acerca de las generalizaciones que hacen, se denomina *generalizaciones reflejadas.*

Para la primera parte Ellis (2007) establece tres subcategorías o tipos:

- Relación (Tipo I): Los estudiantes asocian entre dos o más problemas, situaciones, ideas u objetos matemáticos.
- Búsqueda (Tipo II): Los estudiantes emplean una acción de repetición matemática para encontrar un patrón.
- Extensión (Tipo III): Implica la expansión de un patrón, relación o regla en una estructura general.

La segunda parte,representa las declaraciones hechas por los estudiantes cuando hacengeneralizaciones, estas seclasifica en tres subcategorías o tipos:

- Identificación (Tipo IV): los estudiantes declaran un patrón general.
- Definición (Tipo V): Los estudiantes incluyen las definiciones claves de los objetos, permitiendo dar la característica fundamental, ya sea del patrón, una relación o elementos comunes.
- Influencia (Tipo VI): Los estudiantes utilizan otros contextos para llegar a la generalización.

La taxonomía utilizada por Trujillo (2008), hace uso de la segunda parte de la taxonomía de Ellis, con algunas modificaciones. Trujillo, en su taxonomía no incluye la subcategoría influencia (tipo VI), pues considera que hace referencia a acciones que los estudiantes realizan para llegar a enunciar la generalización, para Trujillo esta subcategoría se encuentra ubicada en las *acciones para la generalización*.

Como en este trabajo, al igual que en el de Trujillo, se analizarán los productos que los estudiantes registrarán acerca de sus generalizaciones, esto es, las declaraciones que hacen los estudiantes al generalizar, se tendrá en cuenta la taxonomía de Ellis(2007) modificada por Trujillo (2008), la cual se muestra en latabla 2.

<table>
<tr><th colspan="5">TAXONOMÍA MODIFICADA DE GENERALIZACIONES REFLEJADAS</th></tr>
<tr><td rowspan="9">TIPO IV
Identificación o enunciado</td><td colspan="4">Fenómeno continuo: La identificación de una propiedad dinámica que se extiende más allá de un ejemplo específico.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">1. Similitud: Enunciado de una similitud o igualdad.</td><td colspan="3">Propiedad común: La identificación de una propiedad común a varios objetos o situaciones.</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Objetos o representaciones: La identificación de objetos como similares o idénticos.</td><td>Estructura: La identificación de objetos como similares o como idénticos según la estructura.</td></tr>
<tr><td>Resultados: La identificación de objetos como similares o idénticos en función de los resultados, es decir de sus valores numéricos.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Situaciones: La identificación de situaciones como similares o idénticas.</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="4">Principio general: Un enunciado de un fenómeno general.</td><td colspan="2">Regla: La descripción de una fórmula general o hecho.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Patrón: La identificación de un patrón.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Estrategia o procedimiento: La descripción de un método que se extiende más allá de un caso específico.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Regla global: El enunciado del significado de un objeto o idea.</td></tr>
<tr><td>Tipo V:
Definición.</td><td colspan="4">Clases de objetos: La definición de una clase de objetos que satisfacen todos una relación dada, patrón u otro fenómeno.</td></tr>
</table>

Tabla 2:Taxonomía modificada de generalizaciones reflejadas (Trujillo, 2008)

Haciendo uso de las dos taxonomías anteriormente señaladas, se realiza el primer pilotaje para clasificar las respuestas obtenidas por los estudiantes en ellas; sin embargo, se observa que en la segunda taxonomía (es decir la propuesta por Trujillo), a diferencia de la propuesta por García (2011), no se especifican cada una de las fases de generalización, esto dificulta la clasificación de los ejemplos, por lo tanto se vio la necesidad de sintetizar las dos taxonomías en una sola obteniéndose así una taxonomía final que se muestra a continuación, con base en la cual se realizará la interpretación de los resultados encontrados.

Fases de la generalización	Niveles
Ver	VCC: Presenta objetos de la secuencia con algunas características en común (pero no todas**)** a partir de los datos dados.
	VCR: Presenta un objeto de la secuencia con todas las características en común, relevantes para la secuencia, a partir de los datos dados.
Describir	DCBI: Presenta características comunes de poca importancia (innecesarias, imprecisas) entre los casos particulares (dados o construidos).
	DCAI: Presenta características comunes importantes entre los casos particulares, pero no presenta relaciones entre sí.
	DRP: Describe o presenta cómo se relacionan las partes.
Registrar	RFG: Registra una relación particular.
	RPG: Registra un patrón general que relaciona las partes involucradas en el problema.
	RMC: Presenta o describe un método que se extiende más allá de un caso específico, lo cual puede hacerse a través de sólo palabras, mezclando palabras y símbolos o utilizando sólo símbolos matemáticos.
Validar o Verificar	VCT: Verifica su conjetura con un término particular.
	VCE: Justifica su conjetura, intenta explicarla.
	VCM: Verifica su conjetura a través de algún mecanismo matemático.
	VCD: Demuestra su conjetura a través de algún mecanismo matemático.

Tabla 3: Niveles establecidos para cada una de las fases del proceso de generalización

Esta taxonomía estuvo sujeta a cambios a través del análisis del instrumento.

3. METODOLOGÍA

Para la realización de este trabajo se establecieron seis etapas distintas, la primera hace referencia a la revisión de la documentación utilizada, que permitió orientar el trabajo para iniciar con la segunda etapa, en la que se describe el primer pilotaje, con el fin de determinar qué debería tenerse en cuenta en la formulación de las preguntas para que en las respuestas dadas fuese posible identificar fases de la generalización, luego de identificarlas se inicia la tercera etapa, en la que se determinan los niveles de las fases de generalización, teniendo como referencia a García (2011) y Trujillo (2008) tal como se mencionó en el marco de referencia. Ya establecidos los diferentes niveles, se diseña el instrumento, con una versión inicial y su respectivo pilotaje, para corregir los últimos detalles que más adelante se mencionarán; después de obtener el instrumento final se inicia con la quinta etapa que se refiere a la aplicación del mismo; por último, se hace una descripción del análisis que corresponde a la sexta etapa, que aunque se explicará con más detalle en el siguiente capítulo, se describirán aquí brevemente los aspectos que se tuvieron en cuenta para su desarrollo.

3.1 DOCUMENTACIÓN INICIAL

En esta primera etapa, se estudiaron algunos documentos referidos a la generalización, atendiendo a autores como Mason (1999), Grupo Azarquiel (1993), Sessa (2005), Luque, C., Jiménez, H., y Patiño, D. (2007), Trujillo (2008), Mora (2012) Socas (2011) y García (2011), quienes con sus trabajos aportaron ideas para la realización del instrumento como: tipos de secuencias que se utilizan en tareas de generalización, algunas actividades, tipos de preguntas, tipos de representaciones y fases de generalización.

3.2 PRIMER PILOTAJE

Antes del planteamiento de una primera versión del instrumento, se seleccionaron algunas preguntas referidas al proceso de generalizar con el fin de aplicarlas a estudiantes del colegio Ambiental Los Catalanes que cursaban undécimo grado en el año 2012, puesto que una de las autoras se encontraba trabajando en el lugar, el objetivo principal era obtener respuestas que permitieran identificar las diferentes fases de generalización y los elementos que se debían tener en cuenta para la formulación de las preguntas del instrumento final. Estos ejercicios fueron tomados de Mason (1999). (Ver anexo 1).

Luego de este pilotaje se determinó la necesidad de:

- Proponer preguntas más específicas, ya que las dadas presentaban ambigüedad en sus respuestas y no daban evidencia de las diferentes fases de generalización.
- Utilizar distintos tipos de secuencia en las tareas propuestas, ya que sólo se utilizó de un tipo (figurativa o icónica).
- Diseñar el instrumento con pocos numerales, para que tanto su desarrollo como análisis no fuera tedioso.
- Ubicar los ejemplos obtenidos de este pilotaje, según las fases de generalización y la taxonomía modificada de Trujillo (2008) y García (2011), sintetizando estas dos en una nueva taxonomía, estableciendo niveles para cada una de las fases de la generalización que permitieran llevar a cabo un análisis más detallado.

3.3 DETERMINACIÓN DE LOS NIVELES DE LAS FASES DE GENERALIZACIÓN

Para determinar los diferentes niveles de cada una de las fases de generalización se tuvieron en cuenta los establecidos por García (2011) (Tabla 1) y por Trujillo

(2008) (Tabla 2); de esta forma, como ya se expuso en el capítulo anterior, se construyó una taxonomía (Tabla 3), que permitiera el análisis de los resultados.

3.4 DISEÑO DEL INSTRUMENTO – VERSIÓN INICIAL – PILOTAJE

Ya establecidos los niveles en cada fase, para el diseño del instrumento se seleccionaron las tareas que ayudarían a evidenciar cada una de las fases del proceso de generalización teniendo en cuenta que los problemas a proponer fueran, uno de tipo numérico y otro de tipo geométrico (esto es, que las representaciones que se utilizaran fueran de estos tipos), una de estas tareas fue tomada de Luque et al. (2007) y de Mason (1999); de igual importancia se consideró que los problemas no hubiesen sido tratados por los estudiantes del curso sino que hicieran parte de la secuencia del espacio académico, con base en esto se construyó así una primera versión del instrumento (ver Anexo 2).

Con el instrumento elaborado se realizó una prueba piloto a siete estudiantes de la Licenciatura de matemáticas de distintos semestres, para identificar los posibles errores en cuanto a la formulación de las preguntas y de esta manera hacer las correcciones pertinentes. Los cambios se realizaron para las tareas que tenían que ver con la tabla de multiplicar y fueron: cambio de redacción en algunas preguntas haciendo más específicas las instrucciones, separación de la suma de los números de la fila 2, 3 y 4 de la tabla en numerales distintos y finalmente pedir las descripciones de forma general y no para un caso específico.

3.5 DISEÑO DEL INSTRUMENTO

Dentro de las tareas propuestas en el instrumento se utilizaron diferentes secuencias: tabulares, numéricas, y gráfico numéricas, como también distintas representaciones: gráfica y simbólica. Cada una de las preguntas formuladas en el instrumento, tienen propósitos específicos para así poder evidenciar cada una de las fases de la generalización. En la tabla 4 se observan las preguntas realizadas y el propósito para el cual fueron formuladas.

	Tarea	Propósito
Parte 1	Completar la columna y la fila que sigue en la tabla.	Relacionar las filas de la tabla, y "ver" la regularidad.
	Mencionar las características en común de una misma fila.	"Describir" las características vistas en el punto anterior.
Parte 2	De acuerdo con la secuencia construida hasta ahora, completar la secuencia anterior teniendo en cuenta los otros números subrayados. Ubicar los tres números siguientes en la tabla y expresarlos con las adiciones y multiplicaciones correspondientes. Describir la secuencia que observa.	"Ver" la secuencia, "describir" el comportamiento de la secuencia y "registrar" los resultados obtenidos.
Parte 3	Con base en lo anterior, encontrar la suma de los primeros números de la segunda fila. Explicar el procedimiento que realiza.	Utilizar el mismo procedimiento de la parte 2, es decir para los números de la primera fila de la tabla, pero ahora para los números de la segunda y tercera fila, luego "observar" la secuencia obtenida y "describir" lo que *ve* para "registrar" el patrón.
Partes 4 y 5	Encontrar la suma de los primeros números de la tercera fila. Explicar el procedimiento que realiza.	
	Encontrar la suma de los primeros números de la cuarta fila. Explicar el procedimiento que realiza.	
	Encontrar la suma de los primeros números para la fila . Escribir una conjetura y justificar por qué es cierta.	"Registrar" un patrón y "justificar" si la conjetura es cierta o no.
Parte 6	Dibujar la siguiente figura de la secuencia dada.	A través de las imágenes dadas "Ver" la siguiente figura.
	Describir la forma cómo se pasa de la primera figura a la segunda y de la segunda a la tercera. Describa qué es lo común en estas figuras.	"Describir" de forma escrita, las características de la secuencia y sus partes.
	Encontrar el número de puntos necesarios para hacer la figura de la posición 4, 6 y 10. Explicar. (Sugerencia: exprese el total de puntos como la suma de puntos que están unidos por una línea).	"Ver" la regularidad o el patrón.
	Escribir una regla que permita dibujar las figuras de la posición 4, 6 y 10.	"Describir" de forma escrita la regla encontrada.
	Formular una conjetura de acuerdo a las sucesiones encontradas en este problema.	Enunciar la conjetura por medio de símbolos o palabras.
	Argumentar que la conjetura formulada en el punto anterior es cierta.	"Verificar" o "demostrar" la conjetura planteada en el punto anterior.

Tabla 4: Preguntas y propósito de cada pregunta

Con base en lo anterior, la versión final del instrumento es la siguiente:

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Taller

Observar con atención la siguiente tabla:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		⋯
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22		⋯
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33		⋯
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44		⋯
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55		⋯
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66		⋯
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77		⋯
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88		⋯
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99		⋯
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110		⋯
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121		⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

1. Completar la columna y la fila que sigue en la tabla.
2. Mencionar las características en común de una misma fila.

En la tabla hay algunos números subrayados. Estos números naturales representan la suma de los primeros números de la primera fila de la tabla y se pueden escribir como producto de los números que aparecen en la fila y la columna correspondiente, así:

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 = 1 \times 1 \\
1 + 2 &= 3 = 1 \times 3 \\
1 + 2 + 3 &= 6 = 2 \times 3
\end{aligned}
$$

3. De acuerdo con la secuencia construida hasta ahora, completar la secuencia anterior teniendo en cuenta los otros números subrayados. Ubicar los tres números siguientes en la tabla y expresarlos con las adiciones y multiplicaciones correspondientes. Describir la secuencia que observa.

4. Con base en lo anterior, encontrar la suma de los primeros números de la segunda fila. Explicar el procedimiento que realiza.

5. Encontrar la suma de los primeros números de la tercera fila. Explicar el procedimiento que realiza.

6. Encontrar la suma de los primeros números de la cuarta fila. Explicar el procedimiento que realiza.

7. Encontrar la suma de los primeros números para la fila . Escribir una conjetura y justificar por qué es cierta.

De acuerdo a la siguiente secuencia de puntos

1. Dibujar la siguiente figura de la secuencia dada.

2. Describir la forma cómo se pasa de la primera figura a la segunda y de la segunda a la tercera. Describa qué es lo común en estas figuras.

3. Encontrar el número de puntos necesarios para hacer la figura de la posición 4, 6 y 10. Explicar. (Sugerencia: exprese el total de puntos como la suma de puntos que están unidos por una línea).

4. Escribir una regla que permita dibujar las figuras de la posición 4, 6 y 10.

5. Formular una conjetura de acuerdo a las sucesiones encontradas en este problema.

6. Argumentar que la conjetura formulada en el punto anterior es cierta.

3.6 ANÁLISIS

Para realizar el análisis se tuvo en cuenta la descripción de los niveles de cada fase de generalización que se realizó en la Tabla 3, también se consideraron los tipos de respuesta que dieron los estudiantes y así realizar la clasificación dentro de los niveles establecidos. Cabe resaltar que antes de agrupar los tipos de respuesta en cada nivel, se descartaron las respuestas ambiguas, las que no seguían las instrucciones del enunciado y los instrumentos en lo que no se encontraba alguna respuesta. En el siguiente capítulo se hará una descripción detallada del análisis.

4. ANÁLISIS

Luego de aplicar el instrumento a 38 estudiantes de Licenciatura en matemáticas de la UPN que cursaban Aritmética en el segundo semestre de 2012, se procedió a su revisión para la selección de ejemplos que permitieran evidenciar las diferentes fases del proceso de generalización en las tareas resueltas por ellos. Así, en este capítulo se encuentran los ejemplos seleccionados, discriminados no sólo por las fases sino por los diferentes niveles que se establecieron para cada una de ellasen el marco de referencia.

Para hacer el análisis y la ejemplificación se divide el instrumento en 6 partes que corresponden a:

Parte 1: Completar una tabla dada y mencionar las características en común.
Parte 2: Relacionar las sumas con los productos de la fila 1 de la tabla.
Parte 3: Relacionar las sumas con los productos de la fila 2 de la tabla.
Parte 4 y 5: Relacionar las sumas con los productos de la fila 3, 4 y de la tabla.
Parte 6: Tercera tarea. Secuencia de puntos.

Luego, al hacer la clasificación dentro de los niveles establecidos se tuvieron en cuenta varios aspectos:

1º. Del conjunto de pruebas (38), se descartan algunas porque no siguen la instrucción dada, no incluyen respuesta a la pregunta planteada, se encuentran respuestas incompletas u operaciones o argumentos erróneos (Anexo 3), este ejercicio se realiza para cada fase por separado (es decir, el número de pruebas descartadas en cada fase es distinto), teniendo en cuenta las 6 partes del instrumento.

2º. Con las pruebas resultantes a partir del ejercicio anterior, se organizan conjuntos de pruebas con respuestas similares (Anexo 4), para cada parte del instrumento.

3º. Se revisan las respuestas dadas en cada conjunto de pruebas y se ubican en los niveles establecidos para cada fase.

4º. Se seleccionan los ejemplos más significativos de cada conjunto de pruebas, a partir de los niveles establecidos.

A continuación se presentan los ejemplos de respuestas, seleccionados para cada nivel, atendiendo a cada una de las fases de generalización; luego, finalizando el capítulo se encuentra una tabla en donde se muestra el número de pruebas y el promedio aproximado que dan evidencia de cada uno de los niveles.

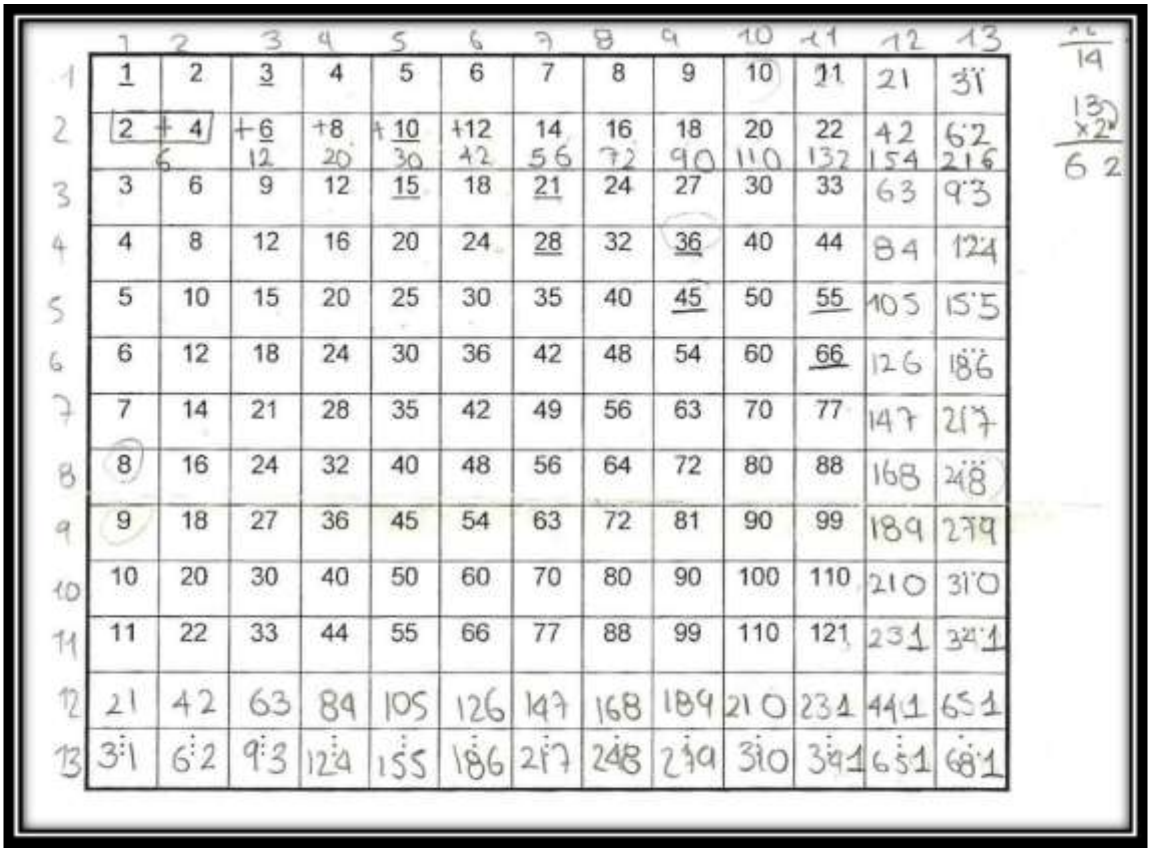
4.1 EJEMPLOS DE RESPUESTA PARA LA FASE "VER"

Como se estableció en el marco de referencia, esta fase se subdividió en dos niveles, así:

4.1.1 VCC. Presenta objetos de la secuencia con algunas características en común (pero no todas) a partir de los datos dados.

4.1.1.1 Parte 1

Uno de los ejemplos para este nivel se observa en la siguiente imagen. El estudiante completa la tabla; sin embargo, al no tener en cuenta todas las características en común entre los números de cada una de las filas, no nota que es una tabla de multiplicar y por ello escribe para la primera fila 21 y 31 en vez de 11 y 12; 42 y 62 en la segunda, en lugar de 24 y 26 (como era lo esperado), y así sucesivamente, pues, al parecer, sólo tiene en cuenta la cifra de las unidades en el último número dado en cada fila para proponer los nuevos números de cada sucesión. (Imagen 1)



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	21	31
2	2 +	4 6	+6 12	+8 20	+10 30	+12 42	14 56	16 72	18 90	20 110	22 132	42 154	62 216
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	63	93
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	84	124
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	105	155
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	126	186
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	147	217
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	168	248
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	189	279
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	210	310
11	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	231	341
12	21	42	63	84	105	126	147	168	189	210	231	441	651
13	31	62	93	124	155	186	217	248	279	310	341	651	681

Imagen 1. Parte 1 Fase Ver. Nivel VCC

4.1.1.2 Parte 2

Un ejemplo seleccionado del segundo numeral, en el cual se solicita completar la secuencia dada para la suma de los números de la primera fila de la tabla, se encuentra en la imagen 2 en donde se evidencia que, muy posiblemente, el estudiante *ve* algunas características comunes como por ejemplo, que la suma de los términos de cada fila debe escribirse como producto; sin embargo, no tiene en cuenta que los factores que componen el producto corresponden con la fila y columna de donde provienen las sumas, esto no le permite encontrar la relación esperada para 36;es decir, el número 36 está en la columna 9 y en la fila 4, así, el producto esperado no es 6×6, como escribe el estudiante, sino 9×4.

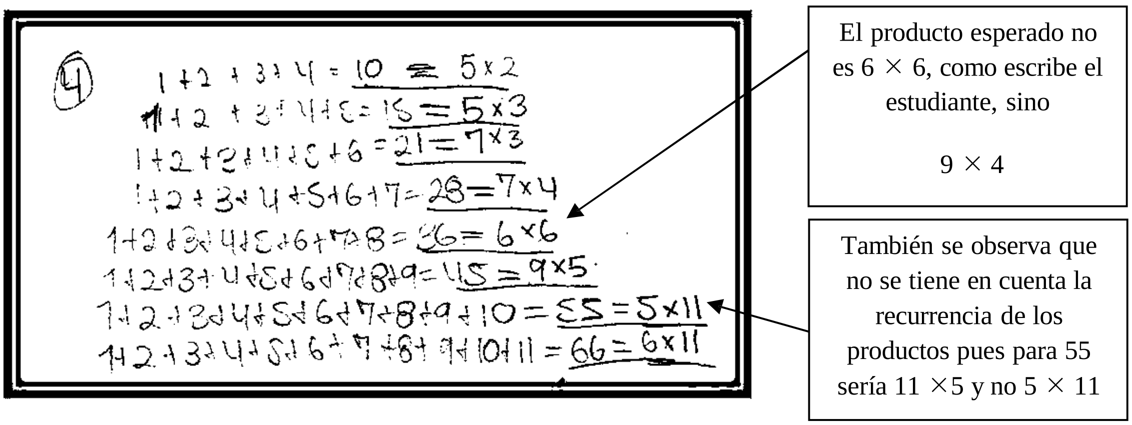


Imagen 2. Parte 2a. Fase Ver. Nivel VCC

Otro ejemplo para este nivel, que también corresponde a la parte 2, se presenta en la imagen 3, en donde se observa que el estudiante *ve* una regularidad entre los primeros factores de cada producto relacionado con la suma, pues observa que el primer número es un múltiplo de 2 y que éste se repite dos veces verticalmente, pero no relaciona lo que encontró con lo hallado en el numeral anterior, es decir, la sumatoria de los primeros números de la primera fila. Por ende no *ve* todas las características de la secuencia.

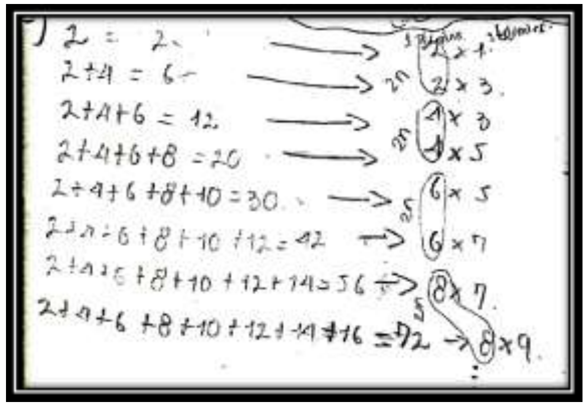


Imagen 3.Parte 2b. Fase Ver. Nivel VCC

4.1.1.3 Parte 4 y 5

El ejemplo para esta parte se encuentra en la imagen 4 y es similar al ejemplo anterior, pero se realiza para las filas 3 y 4 de la tabla, encontrando así que el primer factor del producto es múltiplo de 3 y 4 respectivamente y que se repite dos veces.

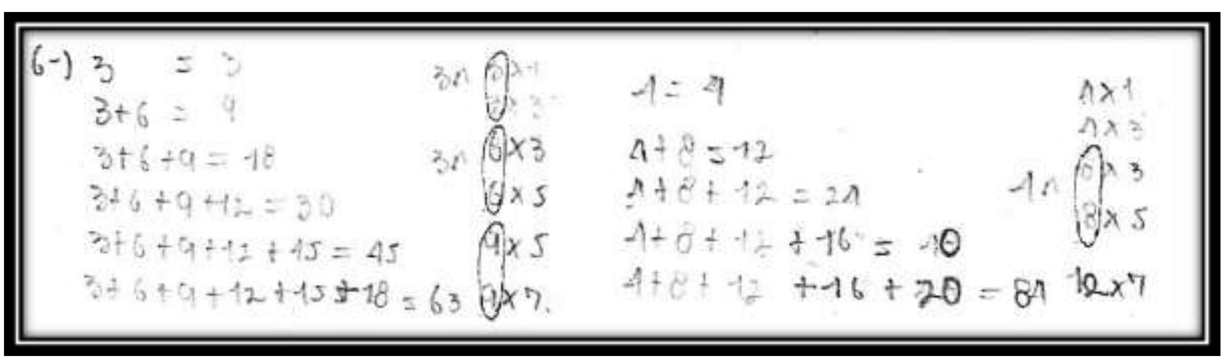
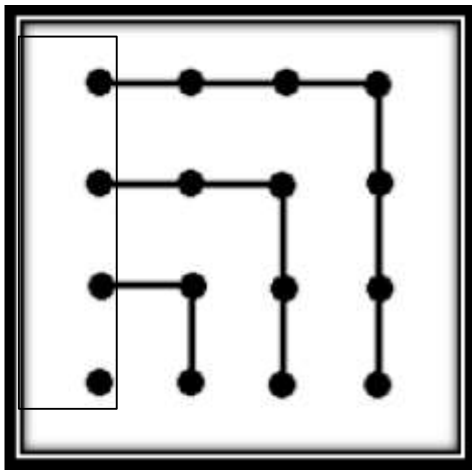


Imagen 4.Parte 4 y 5. Fase Ver. Nivel VCC

4.1.1.4 Parte 6

Otro ejemplo para el nivel VCC, y que para este ocasión se encuentra en la parte 6, es en donde se solicita dibujar la siguiente figura de la secuencia de puntos dada; se evidencia que no se tienen en cuenta todas las características en común, de las figuras anteriores pues aunque el estudiante ve la forma (ver imagen 6), no observa la ubicación correcta de los puntos y esto no le permite al estudiante *ver* la siguiente figura con todas las características,que es la que se muestra en la imagen 5.



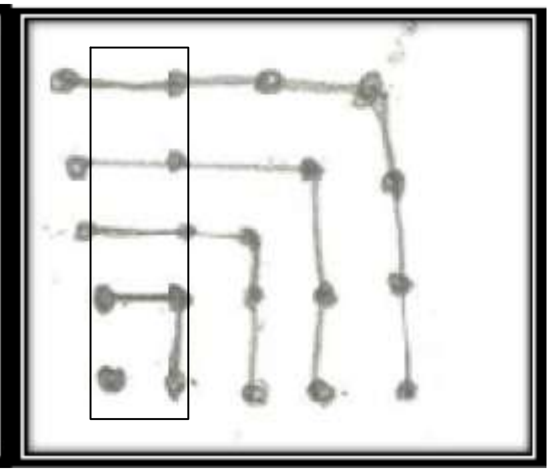


Imagen 5. Siguiente figura esperada

Imagen 6. Figura dibujada por el estudiante

4.1.2 VCR. Presenta un objeto de la secuencia con todas las características en común, relevantes para la secuencia, a partir de los datos dados

Los estudiantes que llegan a este nivel, tienen más posibilidad de llegar a formular una conjetura, puesto que ven todas las características comunes relevantes para la secuencia.

4.1.2.1 Parte 1

Para este nivel, tal como se muestra en la imagen 7, se presentan todas las características en común, pues se completa la secuencia tanto para la fila como para la columna, evidenciándose así que el estudiante *ve* la tabla de multiplicar.

F1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…
F2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	…
F3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	…
F4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	…
F5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	…
F6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	…
F7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	…
F8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	…
F9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	…
F10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	…
F11	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	…
	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Imagen 7. Parte 1. Fase Ver. Nivel VCR

4.1.2.2 Parte 2

En este caso se pide completar la secuencia dada para la suma de los números de la primera fila de la tabla. Como se observa en la imagen 8, se completa la secuencia de la suma de los números de la primera fila para luego expresarla como un producto, teniendo en cuenta que los factores del producto indican la fila y la columna en que se encuentra el resultado, presentando así todas las características en común.

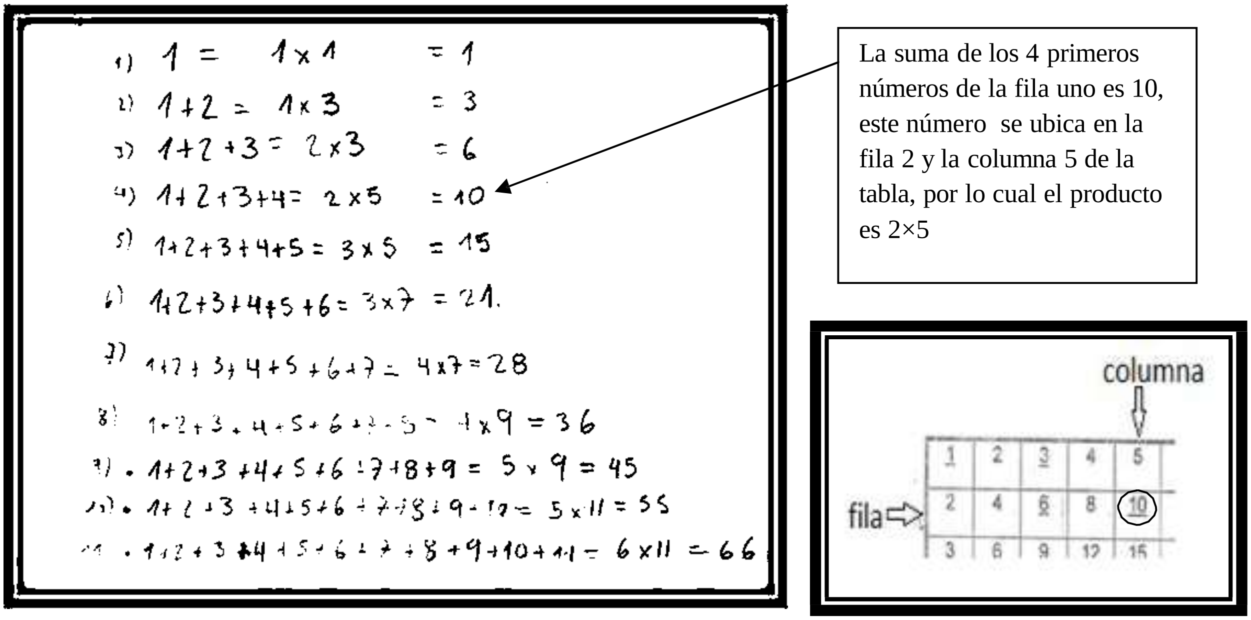


Imagen 8. Parte 2. Fase Ver. Nivel VCR

4.1.2.3 Parte 4 y 5

En la imagen 9, se presentan todas las características en común relevantes para la secuencia, puesto que el resultado de la suma de los números de la tercera fila se expresa mediante un producto tal que los factores dados corresponden a la fila y la columna en que se encuentra el resultado (igual que en el ejemplo anterior); además, presenta otra característica: el número 3 es factor común de la sumatoria de los números de la primera fila, siendo este resultado significativo para llegar a una generalización, pues no sólo se cumple para la fila 3 sino, de manera similar, para las demás filas (lo único que cambia es el factor en cada fila).

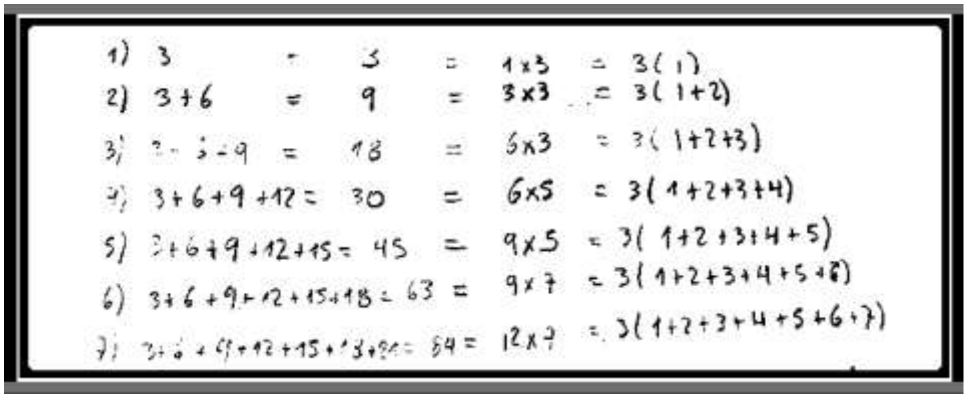


Imagen 9. Parte 4. Fase Ver. Nivel VCR

4.1.2.4 Parte 6

Como se puede observar en la imagen 10, en la última figura, que es la que se pide dibujar, se hace una configuración puntual en forma de cuadrado y se unen los puntos de la misma forma que se muestra en las figuras anteriores dadas, evidenciándose así que el estudiante *ve* todas las características comunes de la secuencia.

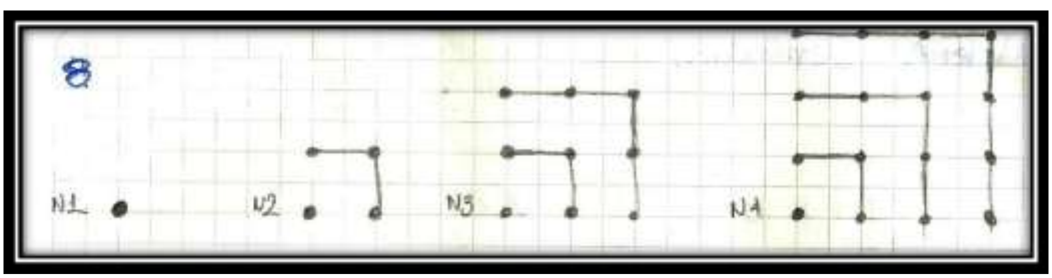


Imagen 10. Parte 6. Fase Ver. Nivel VCR.

4.2 EJEMPLOS DE RESPUESTAS PARA LA FASE “DESCRIBIR”

Según Mason (1999), el paso de la fase *Ver* a la fase *Describir* resulta muy difícil, comprobándose esta idea en algunas de las pruebas analizadas. Por ejemplo, se observa que al pedir una descripción por escrito del procedimiento que se realiza para completar una secuencia, se evidencia que en algunos casos el procedimiento no tiene nada en común con esta descripción (Anexo 5), en otras pruebas se encuentran ideas incompletas o poco específicas haciendo difícil su interpretación y finalmente, en otras ocasiones, los estudiantes se saltan esta fase ysimplemente pasan al *Registro.* De las 38 pruebas analizadas se descartan en promedio 7 pruebas pues no se evidencia una descripción ya que solo llegaban a la fase Ver, otras 3 porque su descripción era confusa y finalmente en 4 pruebas se salta la fase Describir a la fase Registrar.

Para el análisis respectivo, la fase *Describir* se subdivide en tres niveles ejemplificados de la siguiente forma.

4.2.1 DCBI. Presenta características comunes de poca importancia (innecesarias, imprecisas) entre los casos particulares (dados o construidos)

4.2.1.1 Parte 2

Para este caso se pide realizar una descripción de la secuencia de la suma de los números de la primera fila y su relación con el producto, así en el ejemplo de la imagen 11 se hace esa *descripción* solo para el producto (no se refiere a los sumandos ni a la relación entre éstos y los productos de la suma) y el estudiante se refiere a los factores y como productos; además, expresa que el factor

aumenta de 1 en 1 y el aumenta de la forma $2 \quad - 1$, lo cual no es cierto, pues el factor*b,* cuando aumenta, lo hace en 2 unidades (tal vez el estudiante se refería a que los factores *b* son números impares) pero no menciona que esos factores se repiten 2 veces, haciéndose así una descripción imprecisa.

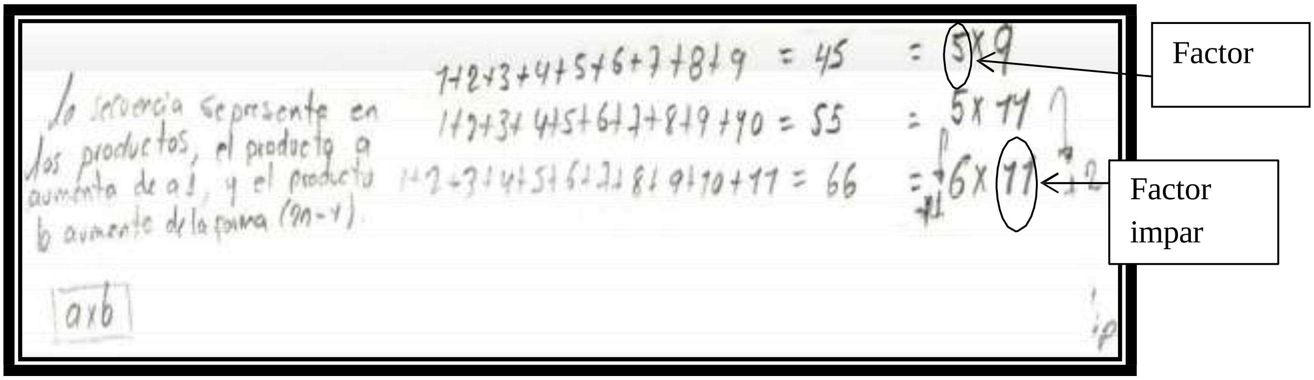


Imagen 11. Parte 2. Fase Describir. Nivel DCBI

4.2.1.2 Parte 3

En la imagen 12 se menciona una característica común entre los factores del producto relacionados con la suma de los números de la segunda fila, mencionando que esos factores aumentan de uno en uno a medida que se aumenta un sumando, siendo éste un elemento insuficiente para llegar a la generalización.

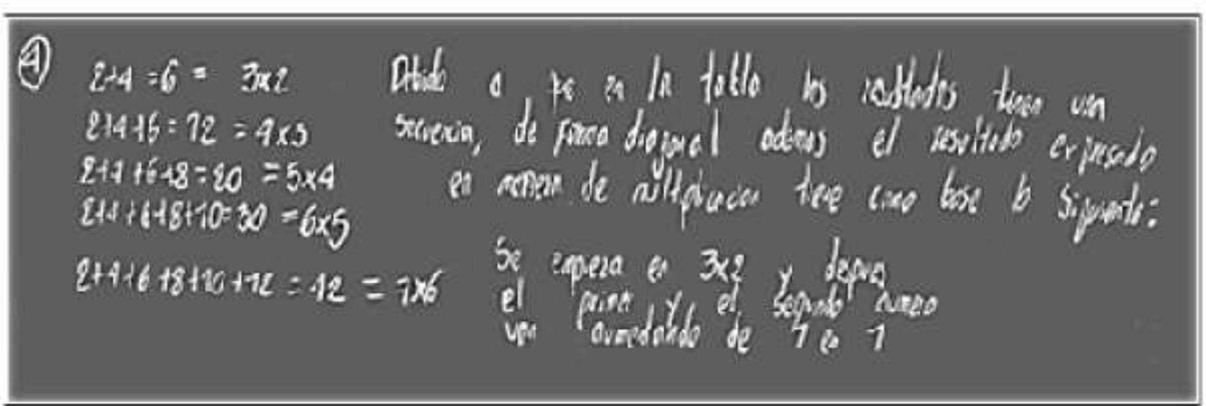


Imagen 12. Parte 3. Fase Describir. Nivel DCBI

4.2.1.3 Parte 6

En este caso se pide realizar la descripción de la secuencia de figuras dada, de modo que se explique cómo pasar de una figura a la otra y lo común entre ellas. En la Imagen 13 se encuentra una *descripción* para este nivel, pues se hace una caracterización imprecisa al mencionar que para la siguiente figurase debe aumentar dos círculos más que en la figura anterior, pero no se indican las instrucciones explícitas y necesarias para colocar esos dos círculos, ni se menciona cómo es la figura aunque hace una representación gráfica.

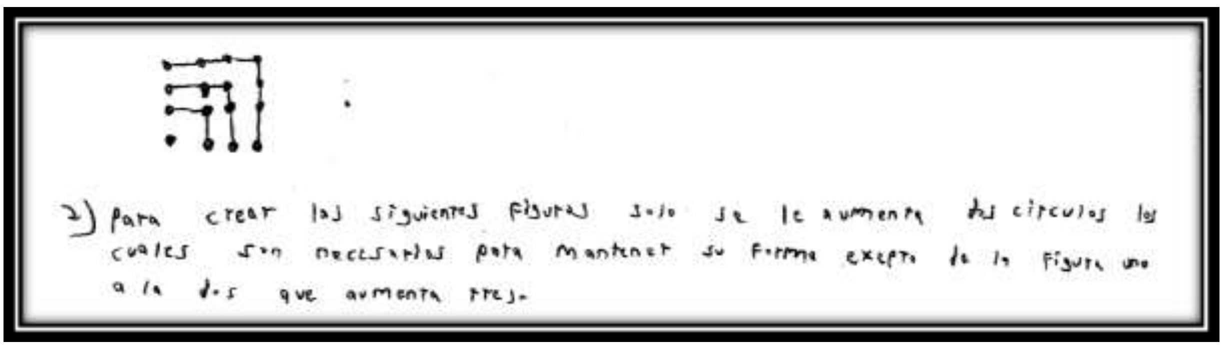


Imagen 13. Parte 6. Fase Describir. Nivel DCBI

4.2.2 DCAI. Presenta características comunes importantes entre los casos particulares, pero no presenta relaciones entre sí

4.2.2.1 Parte 1

Para esta parte se pide hacer una descripción de los números de la tabla y como se observa en la imagen 14 se *describe* una característica importante común a las filas sin hacer mención alguna a las columnas de la tabla.

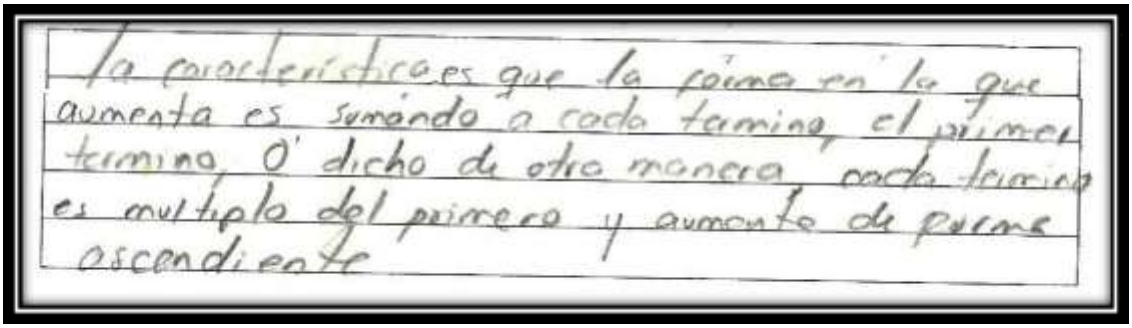
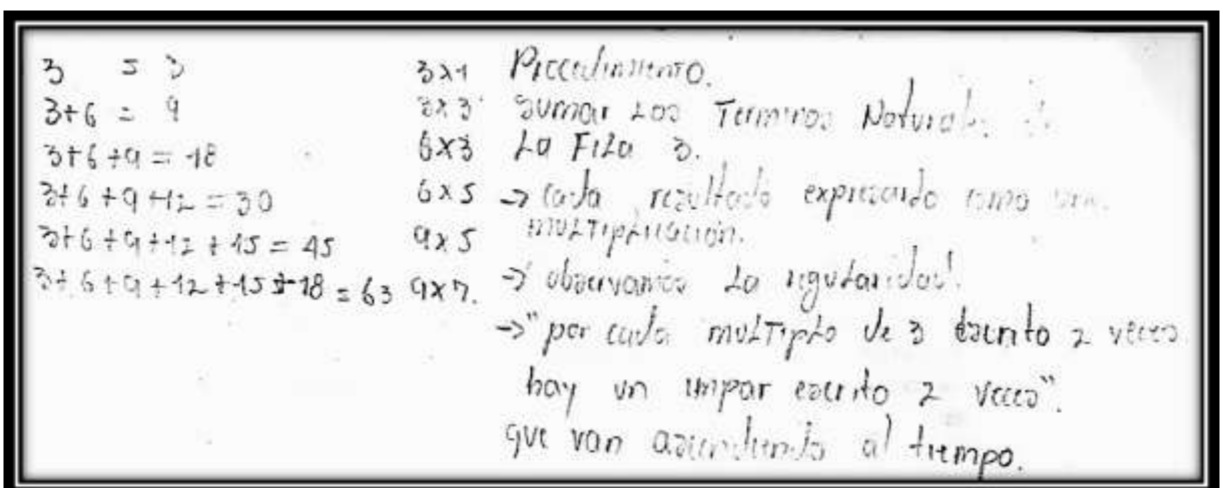

la características es que la suma en la que aumenta es sumando a cada termino, el primer termino, O dicho de otra manera, cada termino es multiplo del primero y aumenta de forma ascendiente

Imagen 14. Parte 1. Fase Describir. Nivel DCAI

4.2.2.2 Parte 4 y 5

En la imagen 15, se *describen* algunas características importantes de los factores del producto relacionado con la suma de los números de la fila tres, al indicar que cada factor se repite dos veces a medida que se aumenta un sumando; además, se menciona que un factor es múltiplo de 3 y el otro es impar, pero no se hace la relación con la suma.


$3 = 3$ 3×1
$3+6 = 9$ 3×3
$3+6+9 = 18$ 6×3
$3+6+9+12 = 30$ 6×5
$3+6+9+12+15 = 45$ 9×5
$3+6+9+12+15+18 = 63$ 9×7.

Procedimiento.
Sumar los Terminos Naturales de La Fila 3.
→ cada resultado expresado como una multiplicación.
→ observando la regularidad.
→ "por cada multiplo de 3 escrito 2 veces hay un impar escrito 2 veces". que van aumentando al tiempo.

Imagen 15. Parte 4. Fase Describir. Nivel DCBI

4.2.2.3 Parte 6

En la imagen 16 se presenta un ejemplo en donde se describe una característica importante de la figura: “es un cuadrado”, pero no se presenta ninguna relación con respecto al número de la posición y cantidad de puntos del lado de la figura, como tampoco se relacionan con la cantidad de números impares.

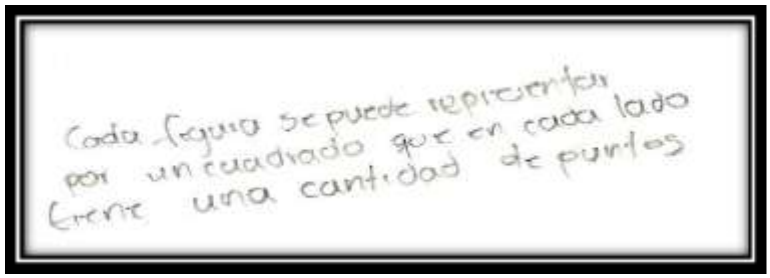

Cada figura se puede representar por un cuadrado que en cada lado frente una cantidad de puntos

Imagen 16. Parte 6. Fase Describir. Nivel DCBI

4.2.3 DRP. Describe o presenta cómo se relacionan las partes

De las pruebas analizadas se encuentra que los estudiantes que relacionan las partes involucradas en una secuencia, poseen más herramientas para hacer el *Registro*.

4.2.3.1 Parte 1

Para la descripción de los números de la tabla de multiplicar, la imagen 17 presenta una *descripción* en donde se relacionan las filas con las columnas por medio de la multiplicación, por ende este ejemplo pertenece a este nivel.

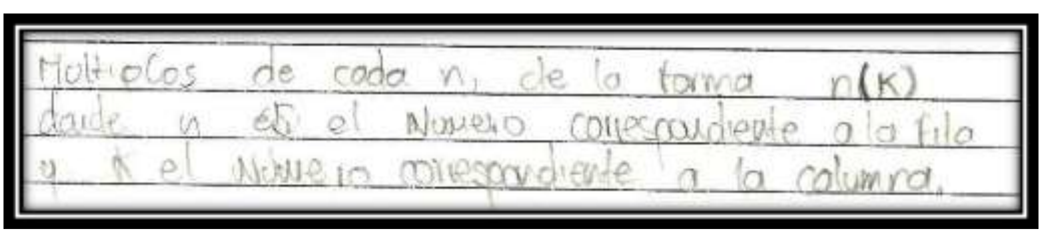

Multiplos de cada n, de la forma n(K) donde n es el Numero correspondiente a la fila y K el Numero correspondiente a la columna.

Imagen 17. Parte 1. Fase Describir. Nivel DRP

4.2.3.2 Parte 2

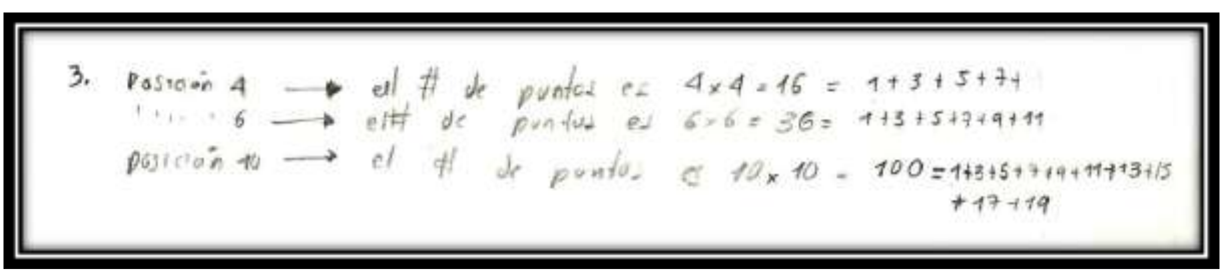
En esta parte se pide describir la secuencia de las sumas y productos de los números de la primera fila. En la imagen 18 se *describe* la relación entre la suma de los primeros números naturales y el producto, mencionando así que los factores del producto corresponden con la fila y la columna de donde se encuentra el resultado.

2) Los números se construyen a partir de la suma de los n primeros números naturales, y el factor es el número de la fila y la columna correspondiente a dicho número

Imagen 18. Parte 2. Fase Describir. Nivel DRP

4.2.3.3 Parte 6

Al hacer la descripción de las figuras de la secuencia de la parte 6, se evidencia que se menciona el número total de puntos de dos formas distintas: como suma de números impares y como producto, teniendo en cuenta todas las características de la figura y que además estas características se relacionan entre sí como se observa en la imagen 19.



3. Posición 4 → el # de puntos es $4 \times 4 = 16 = 1+3+5+7$
" " 6 → el # de puntos es $6 \times 6 = 36 = 1+3+5+7+9+11$
posición 10 → el # de puntos es $10 \times 10 = 100 = 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19$

Imagen 19. Parte 6. Fase Describir. Nivel DRP

4.3 EJEMPLOS DE RESPUESTAS PARA LA FASE "REGISTRAR"

La fase *Registrar* se dividió en cuatro niveles, así:

4.3.1 RFG. Registra una relación particular

4.3.1.1 Parte 2

En esta parte se pide encontrar la suma de los números de la primera fila de la tabla dada y describir lo que se observa. En la imagen 20 se hace un *Registro* de un hecho particular al escribir que la suma de los números de la primera fila son de la forma ——.


Estos números son de la forma n(n+1)/2.

Imagen 20. Parte 2. Fase Registrar. Nivel RFG

4.3.1.2 Parte 3

En el ejemplo de la imagen 21 se puede observar que se escribe una expresión para hacer la suma de los números de la segunda fila hasta el -ésimo número haciendo la relación con el número de la columna.

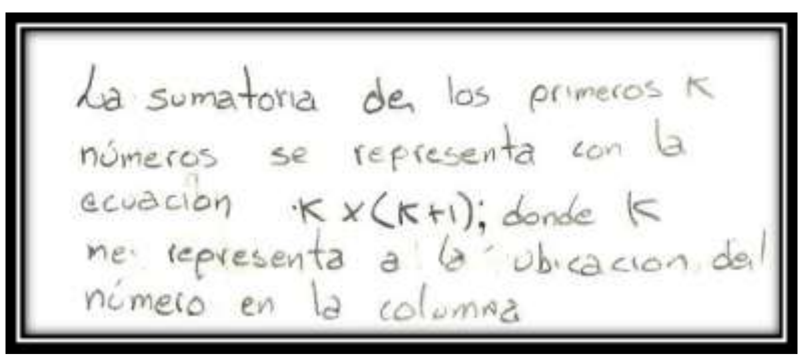

La sumatoria de los primeros K
números se representa con la
ecuación K x (K+1); donde K
me representa a la ubicación del
número en la columna

Imagen 21. Parte 3. Fase Registrar. Nivel RFG

4.3.1.3 Partes 4 y 5

Un ejemplo de esta parte se encuentra en la imagen 22 donde se evidencia que el estudiante registra un hallazgo acerca de las sumas parciales de los términos en cada fila; así, según interpretación de las autoras de este documento, el estudiante, muy posiblemente, observa que:

Para las sumas parciales de la fila 1, se tiene:

$1 = 1 \cdot 1$

$1 + 2 = 3 = 1 \cdot 3$

$1 + 2 + 3 = 6 = 2 \cdot 1 \cdot 3$

$1 + 2 + 3 + 4 = 10 = 2 \cdot 1 \cdot 5$

De manera similar, para las sumas parciales en la fila 2:

$2 = 2 \cdot 1$

$2 + 4 = 6 = 2 \cdot 3$

$2 + 4 + 6 = 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$

$2 + 4 + 6 + 8 = 20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$

Y asignando a la fila (se cree que es así, pues no se expresa qué indica k), las sumas parciales de los términos de la fila son los múltiplos de k y de números impares, pero el estudiante sólo presenta estos productos, en términos de k, sin relacionarlos con la adición entre los términos dados.

Imagen 22. Parte 5. Fase Registrar. Nivel RFG

Es de destacar que esta observación es original, pero en términos del registro, vale enfatizar en que está incompleto, y de hecho, es impreciso. Presenta, tácitamente, un conjunto de casos particulares en términos de k pero no presenta el hecho general de sus observaciones; escrito correctamente, el estudiante encuentra que:

$k = k \times 1$

$k + 2k = k \times 3$

$k + 2k + 3k = 2k \times 3$

$k + 2k + 3k + 4k = 2k \times 5$

$k + 2k + 3k + 4k + 5k = 3k \times 5$

$k + 2k + 3k + 4k + 5k + 6k = 3k \times 7$

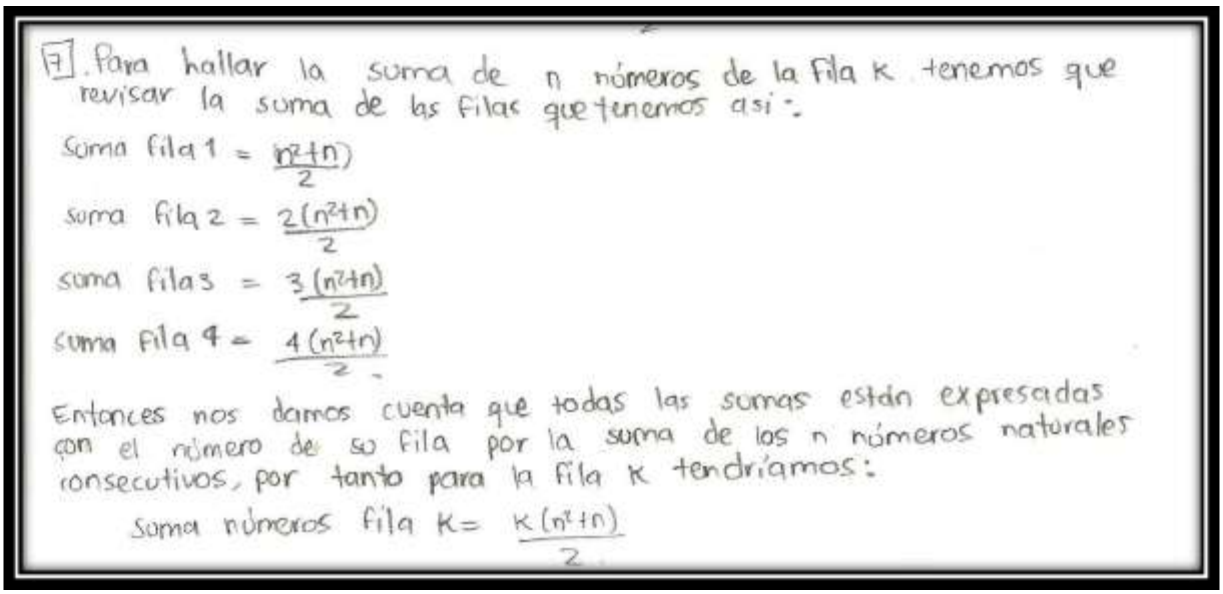
Pero no presenta cuál es el producto para la n-ésima suma; esto es:

$$k + 2k + \ldots + nk = ?$$

4.3.2 RPG. Registra un patrón general que relaciona las partes involucradas en el problema

4.3.2.1 Parte 4 y 5

Un ejemplo para esta parte se observa en la imagen 23 en donde se encuentra la secuencia de expresiones de la suma de los números de la fila 1 hasta la fila 4, para luego concluir cómo es la sumatoria de los números de la fila , relacionando así estas expresiones para llegar a la presentación de una conjetura.


$\boxed{7}$. Para hallar la suma de n números de la Fila K tenemos que revisar la suma de las filas que tenemos así:

Suma fila 1 = $\frac{n^2+n)}{2}$

suma fila 2 = $\frac{2(n^2+n)}{2}$

suma fila 3 = $\frac{3(n^2+n)}{2}$

suma fila 4 = $\frac{4(n^2+n)}{2}$.

Entonces nos damos cuenta que todas las sumas están expresadas con el número de su fila por la suma de los n números naturales consecutivos, por tanto para la fila K tendríamos:

Suma números fila K = $\frac{K(n^2+n)}{2}$.

Imagen 23. Parte 5. Fase Registrar. Nivel RPG

4.3.2.2 Parte 6

Este ejemplo responde a la pregunta que busca determinar si se halla la relación entre el número de posición de la figura con la cantidad de puntos, pues se observa en la imagen 24 que se expresa el número total de puntos como para la posición relacionando así el número de posición de la figura con el número total de puntos, luego de dar varios ejemplos.

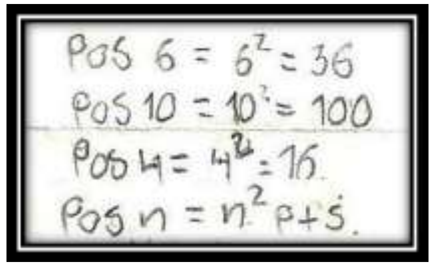


Imagen 24. Parte 6. Fase Registrar. Nivel RPG

4.3.3 RCM. Presenta o describe un método que se extiende más allá de un caso específico

Para este nivel, solo se encuentra un ejemplo que da evidencia del mismo.

4.3.3.1 Partes 4 y 5

En el ejemplo de la imagen 25 se muestra una secuencia para la suma de los números de las filas 3, 4 y expresando cada sumando como el producto de por 1, 2, 3,…; luego de ello, se factoriza el número concluyendo que la sumatoria de los números de la fila es el producto de por la sumatoria de los números de la primera fila siendo expresada esta última como——, presentando así el método que se llevó a cabo para la conclusión o generalización.

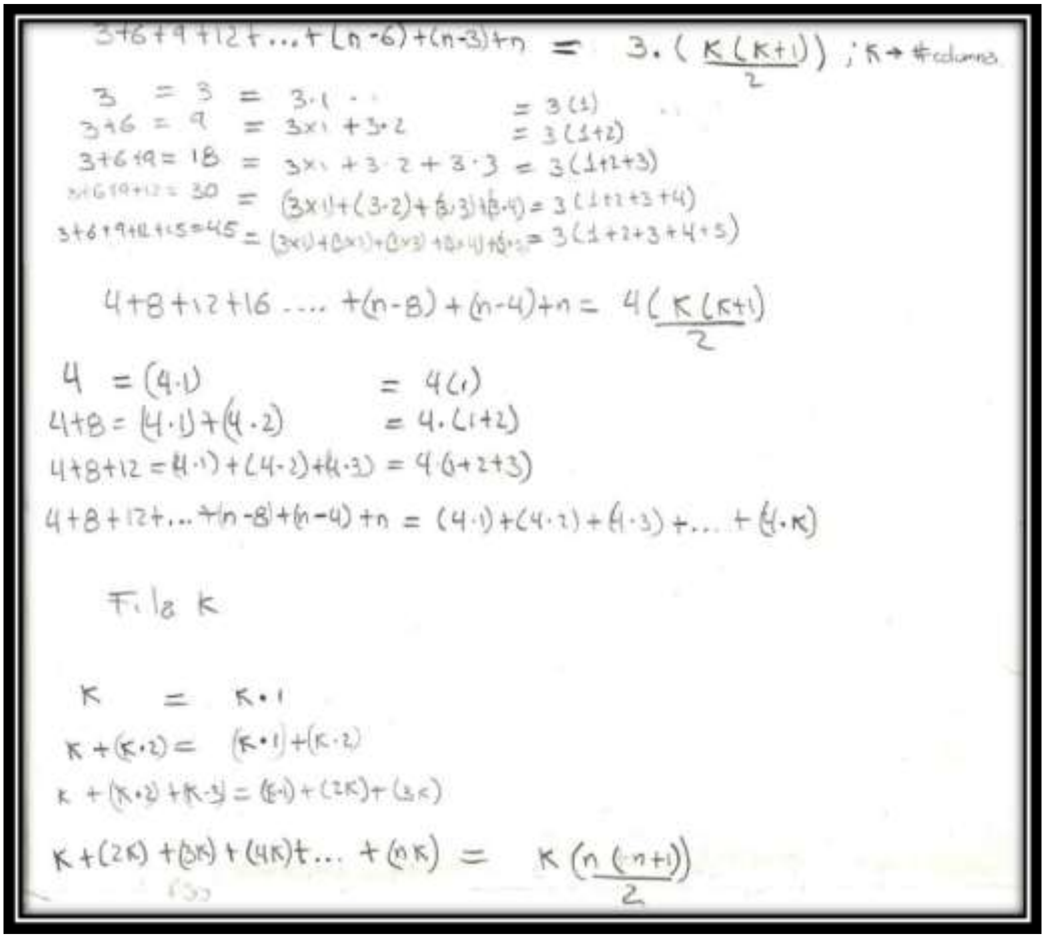


Imagen 25. Parte 4 y 5. Fase Registrar. Nivel RCM

4.3.4 Algunas consideraciones acerca del lenguaje utilizado en el registro

Cuando se registra una conjetura, se evidencia diferentes tipos de lenguaje, algunos presentan su conjetura utilizando palabras (lenguaje retórico), otros combinan las palabras con los símbolos (análogo esto al lenguaje sincopado) y otros lo hacen de manera simbólico-algebraica. Enseguida se muestran algunos ejemplos donde se evidencian estas diferencias.

4.3.4.1 Con palabras

En la imagen 26 se puede observar que se expresa un enunciado que indica el número total de puntos de la figura *n*-ésima en términos de la posición de la figura.

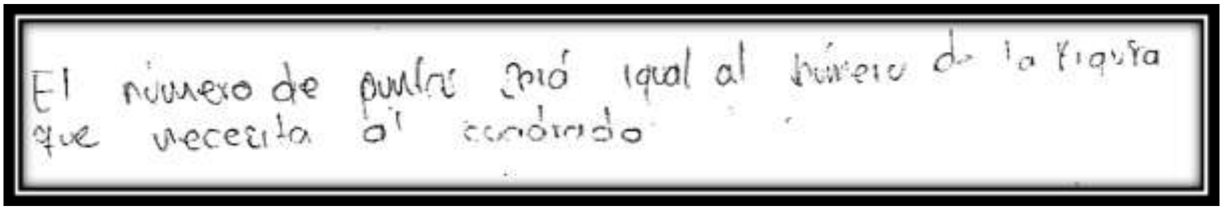


Imagen 26. Ejemplo de registro con palabras

4.3.4.2 Palabras y símbolos

En el ejemplo de la imagen 27 se observa que se expresa una idea de cómo es la suma de los números de la segunda fila, este enunciado se hace de forma poco rigorosa ya que en el lado derecho de la imagen se encuentra la relación de la sumatoria de los números de la primera fila hasta con la expresión simbólica para esa suma; luego, al lado izquierdo de la imagen se encuentra la expresión para la suma de los números de la segunda fila, haciendo una explicación escrita del porqué esa expresión.

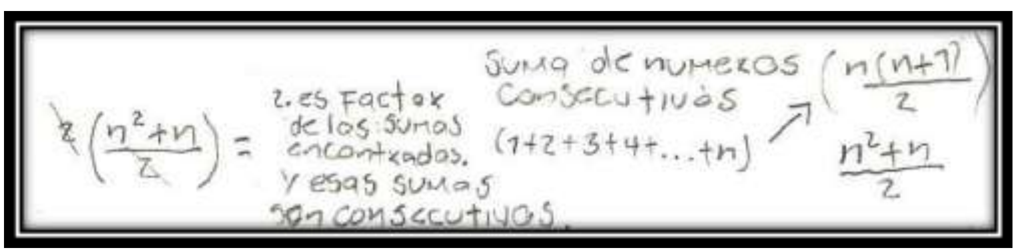


Imagen 27. Ejemplo 1 de registro con palabras y símbolos

Otro ejemplo se observa en la imagen 28 donde se hace el registro de cómo es la suma de los *n* números de la primera fila, ya sea *n* par o *n* impar. Como se puede apreciar, se utilizan símbolos y a la vez palabras para el enunciado de la conjetura.

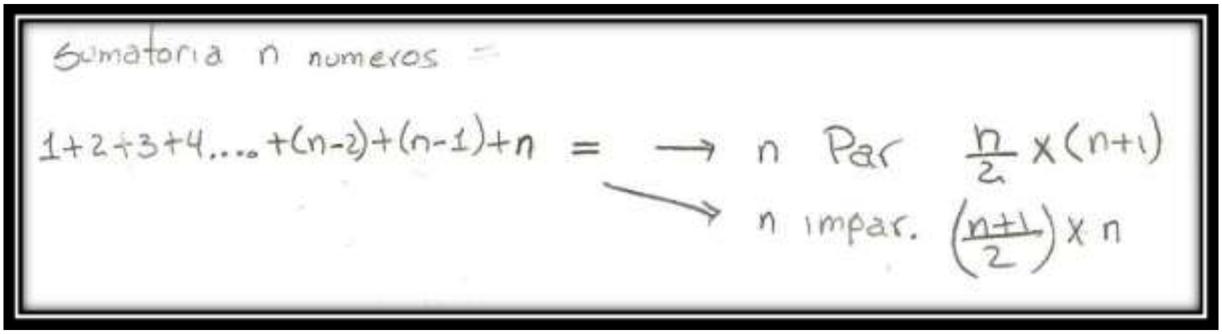


Imagen 28. Ejemplo 2 de registro con palabras y símbolos

A continuación se presenta en la imagen 29 el registro de un enunciado utilizando la expresión general para la sumatoria de los números de la segunda, tercera y cuarta fila, después se hace la conjetura utilizando símbolos matemáticos y palabras, mencionando qué valores pueden tomar las variables incluidas en la expresión.

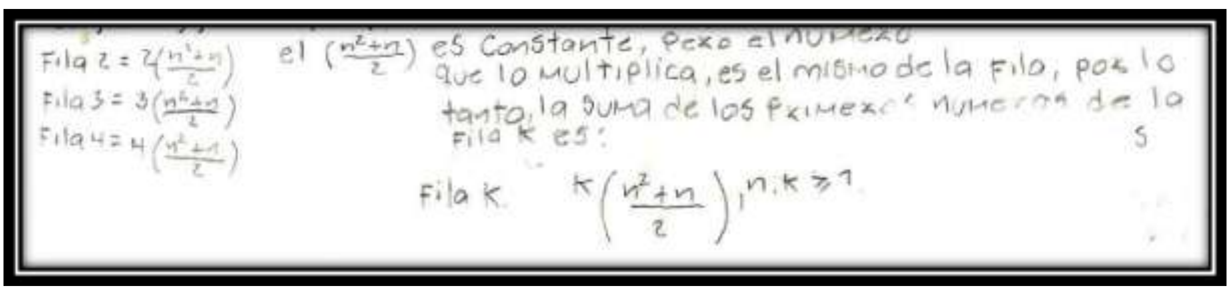


Imagen 29. Ejemplo 3 de registro con palabras y símbolos

Un último ejemplo se encuentra en la imagen 30 en donde se muestra una conjetura acerca del número total de puntos de la imagen dada en la parte 6 del instrumento, se observa que se relaciona el número de la posición de la figura con el total de puntos expresado como una potencia y con la enésima suma de los números impares, utilizando así, símbolos y palabras resumidas (abreviaturas).

Imagen 30.Ejemplo 4 de registro con palabras y símbolos

4.3.4.3 Con símbolos

Como se observa en la imagen 31, se hace uso de sólo símbolos para expresar que en la sumatoria de los números de la segunda fila es igual al producto de por su consecutivo.

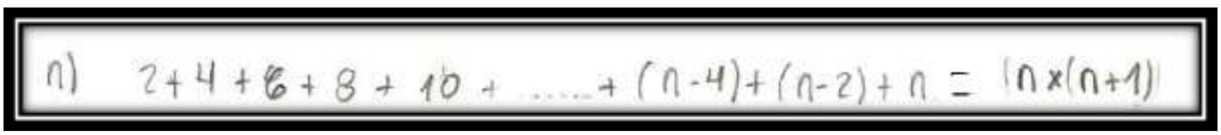


Imagen 31. Ejemplo 1 de registro con símbolos

En la imagen 32 se encuentra otro ejemplo en donde se utilizan símbolos únicamente para escribir una conjetura acerca de la sumatoria de los números de la fila *k.*

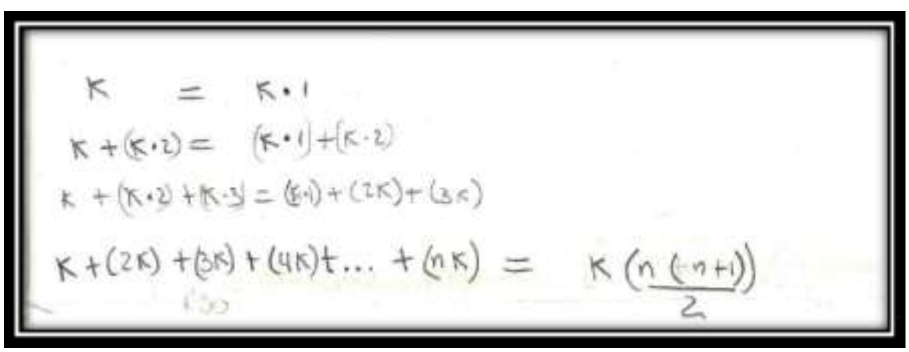


Imagen 32. Ejemplo 2 de registro con símbolos

4.4 EJEMPLOS DE RESPUESTAS PARA LA FASE “VALIDAR O VERIFICAR”

La fase *Verificar* es la menos alcanzada por los estudiantes, puesto que, luego de hacer una conjetura no tienen en cuenta si ésta es válida o no, para todos los casos, al parecer, para los estudiantes es suficiente el proceso de inducción hecho, es decir, los casos específicos a partir de los cuales hicieron la conjetura los consideran suficientes para darle veracidad a sus planteamientos. Algunos pocos estudiantes verifican sus conjeturas luego de establecerlas.

Aunque para esta fase se tienen cuatro niveles, al observar las 38 pruebas tan solo se encuentran ejemplos de los dos primeros y la mayoría pertenece a la parte 6 del instrumento. Muy posiblemente la razón de esto se debe a que sólo se solicita argumentar la conjetura hallada en un numeral específico en la parte 6, pues, si bien en las partes 2 y 4 y 5 del instrumento también se solicita explicar, argumentar o demostrar las conjeturas halladas, esta tarea no es la única sugerida en el numeral donde aparece.

4.4.1 VCT. Verifica su conjetura con un término particular.

Los ejemplos se muestran enseguida.

4.4.1.1 Parte 6

En esta parte del instrumento se pide argumentar la conjetura dada acerca de cómo encontrar el número total de puntos para la figura de la posición *n*. A continuación se muestra la conjetura realizada por un estudiante:

: ó y : ú

$$=$$

En la imagen 33 se observa que el estudiante *Verifica* la conjetura que realiza con cinco términos en particular.

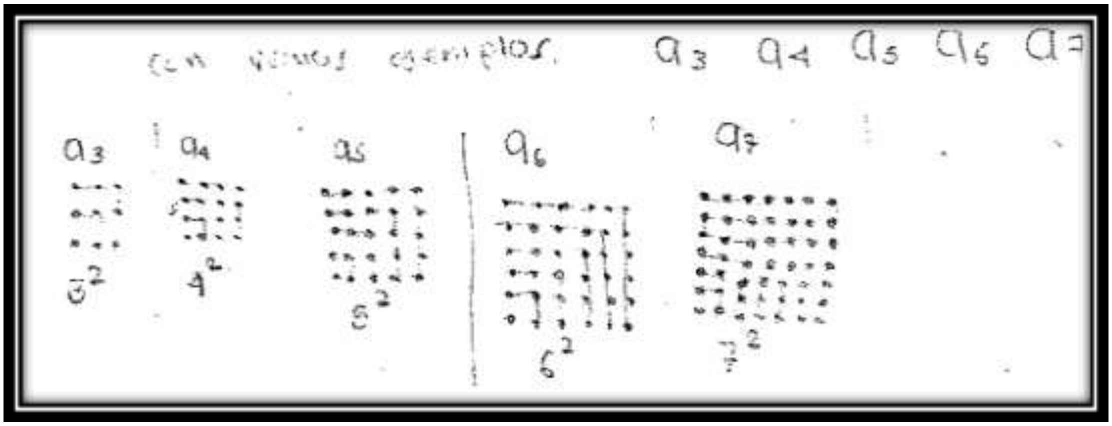


Imagen 33.Parte 6. Fase Verificar. Nivel VCT

Otro ejemplo para esta parte se evidencia en la imagen 34, en donde la forma de argumentar la conjetura "*La suma de los n primeros números impares es* n^2" es *Verificándola* con cinco casos en particular, pero en esta oportunidad, contrario a la anterior, el estudiante sólo hace uso de representaciones numéricas.

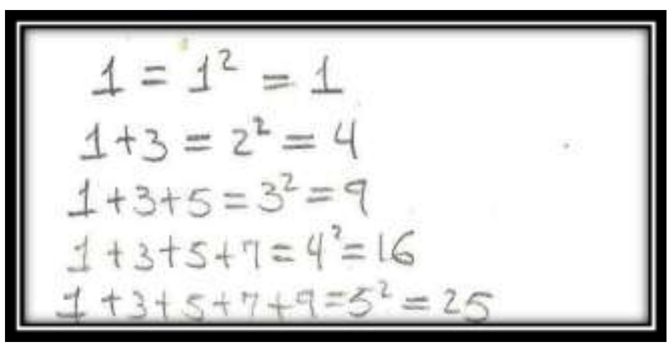


Imagen 34.Parte 6(a). Fase Verificar. Nivel VCT

4.4.2 VCE. Justifica su conjetura, intenta explicarla.

4.4.2.1 Parte 3

En la imagen 35 se puede observar que un estudiante presenta una conjetura no formal para la suma de los números de la segunda fila de la tabla, al dar la expresión de esta suma como:

Luego da una explicación del porqué llega a esta expresión, mencionando que como el número 2 es factor de la suma de los números de la primera fila y como la suma de los números de la primera fila se halla mediante la expresión ——, cancela el factor 2 con el 2 del denominador de la expresión y luego multiplica, como se observa.

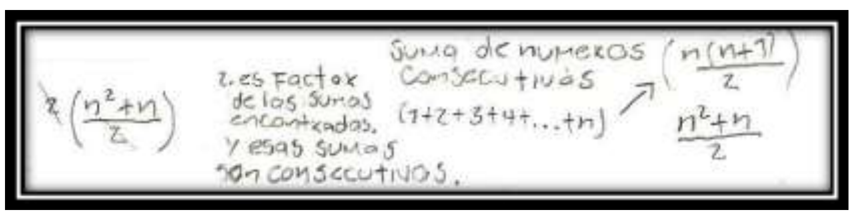
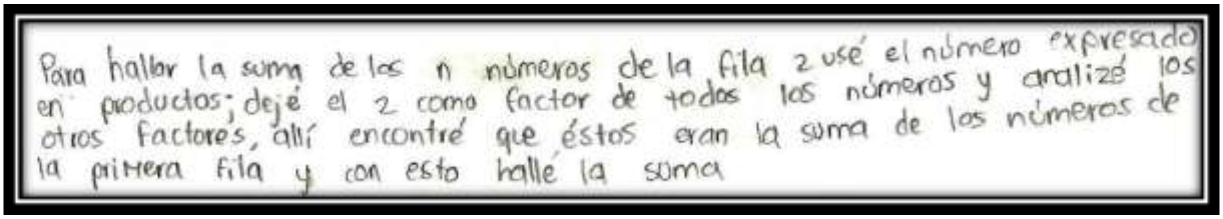


Imagen 35.Parte 3. Fase Verificar. Nivel VCE

Otro ejemplo a considerar se encuentra en la imagen 36, pues se explica la forma en cómo se encontró la suma de los números de la segunda fila utilizando la factorización.

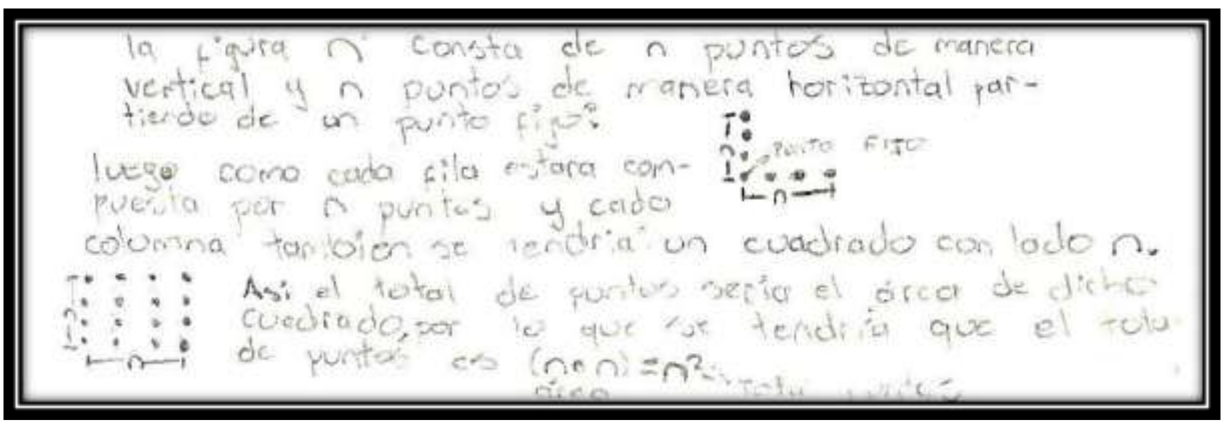


Para hallar la suma de los n números de la fila 2 usé el número expresado en productos; dejé el 2 como factor de todos los números y analizé los otros factores, allí encontré que éstos eran la suma de los números de la primera fila y con esto hallé la suma

Imagen 36. Parte 3(a). Fase Verificar. Nivel VCE

4.4.2.2 Parte 4

En esta parte, un estudiante da una explicación del porqué el número total de puntos de la figura *n* es n^2, haciendo uso de términos como área y cuadrado, como se muestra en la imagen 37.



la figura n consta de n puntos de manera vertical y n puntos de manera horizontal partiendo de un punto fijo.

luego como cada fila estara compuesta por n puntos y cada columna también se tendría un cuadrado con lado n.

Así el total de puntos sería el área de dicho cuadrado, por lo que se tendría que el total de puntos es $(n \cdot n) = n^2$

Imagen 37.Parte 4. Fase Verificar. Nivel VCE

Para los demás niveles VCM y VCD no se encuentra ejemplificación, aunque se encuentra evidencia de ideas asociadas a una posible demostración de una conjetura planteada para el número de puntos de un cuadrado cualquiera a través de un mecanismo matemático conocido como lo es el principio de inducción matemática, realizado por un estudiante en la parte 6 del instrumento, esta idea se puede ver en la imagen 38.

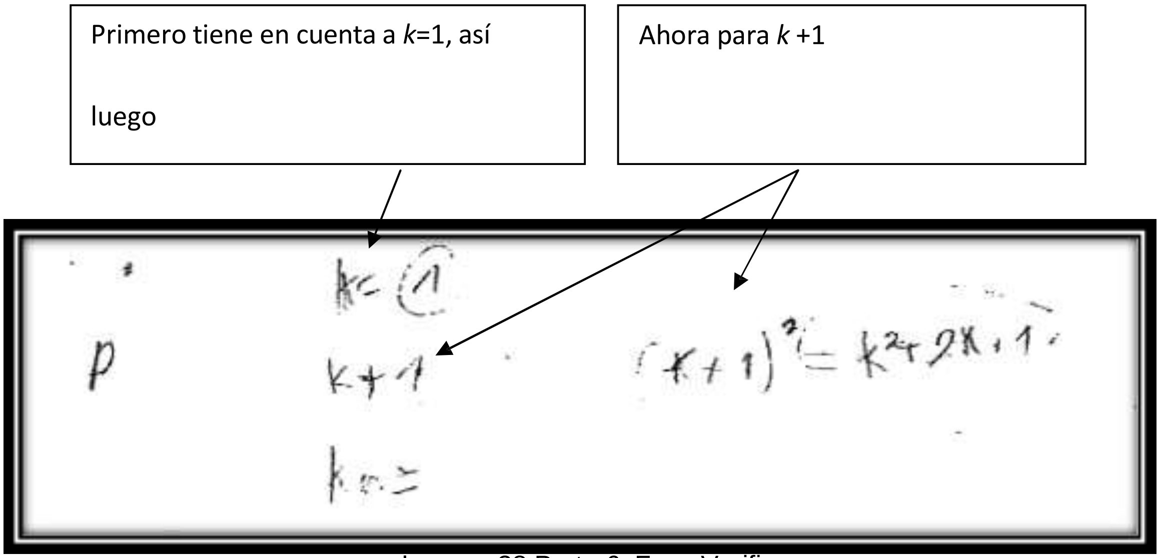


Imagen 38.Parte 6. Fase Verificar

Se cree que la conjetura expresada no permite concluir la demostración, pues la conjetura que realiza el estudiante es .

Finalmente se organiza en la Tabla 5 el número de pruebas que se encuentra en cada nivel para cada parte del instrumento y su promedio aproximado. Como se puede observar, aunque la mayoría de pruebas analizadas, al parecer, se*ven* todas las características en común relevantes para la secuencia, pero al describir en la mayoría de las pruebas se observa que se describen características importantes pero sin relacionar todas las partes de la secuencia y al no hacer esta relación, el registro de la conjetura no se hace de forma rigurosa y no presenta la relación que se observaron en la primera fase.

Fase	Nivel	Parte 1	Parte 2	Parte 3	Parte 4 y 5	Parte 6	Promedio
VER	VCC	1	5	5	6	4	4
	VCR	36	28	13	9	32	23
DESCRIBIR	DCBI	1	8	5	4	4	4
	DCAI	14	9	3	4	26	11

	DRP	17	1	2	3	4	5
REGISTRAR	RFG	7	3	4	3	12	6
	RPG	10	4	5	5	13	7
	RCM	0	0	0	8	0	1
VERIFICAR	VCT	0	0	0	0	4	1
	VCE	0	0	4	2	3	1

Tabla 5: Cantidad de pruebas en cada nivel

5. CONCLUSIONES

La utilización de una representación simbólica para expresar una generalidad puede llevar tiempo en algunos estudiantes; sin embargo, a través de las distintas fases de generalización se puede observar el uso de lenguaje matemático o de objetos matemáticos para hacer descripciones o presentar conjeturas; no obstante, como se puede observar en los ejemplos presentados, la utilización de lenguaje matemático es frecuentemente impreciso, lo que puede calificarse como natural por cuanto los estudiantes cursan hasta ahora primer semestre de la Licenciatura en matemáticas y desde la experiencia de las autoras, en la educación secundaria y media no se hace énfasis en el uso correcto del lenguaje matemático.

En las secuencias de sumas de números de las primeras partes del instrumento se observa, en la mayoría de loscasos, que no se relacionan los objetos del problema–la suma con la multiplicación sugerida–, pues solo se evidencia que tienen en cuenta la secuencia de factores del producto, pero se deja de lado la sumatoria de los números de las fila, evidenciándose así que la forma en cómo los estudiantes ven el problema es de “forma vertical” y el planteamiento de una conjetura útil requiere establecer relaciones entre el lado izquierdo de la igualdad y el lado derecho; es decir, es importante ver el problema de “forma horizontal” sin dejar de lado, las relaciones que hay entre una fila y la siguiente; esto es, la “forma vertical”.

Para la fase *Describir* se observa que algunos estudiantes presentan dificultades para escribir de forma concisa lo que observan de la secuencia, sea gráfica o numérica, pues su descripción no es clara y por lo tanto no lesera posible predecir cómo era el siguiente término de la sucesión (figura, número o igualdad).

Se puede concluir que algunos estudiantes que encuentran una generalidad, no formulan una conjetura que relacione todos los elementos dados o construidos, como por ejemplo, en la parte del instrumento donde se pedía expresar el número de puntos de la figura en forma de sumatoria y también como una potencia, se formula la conjetura en términos de la sumatoria o de la potencia solamente, sin relacionar los dos objetos incluidos en el problema.

También se observa que para la expresión de una conjetura usualmente se utiliza el lenguaje natural y en otros casos, se hace uso de expresiones trabajadas en sesiones anteriores de la clase de Aritmética, como por ejemplo, para expresar la suma de los números de la primera fila de la tabla de multiplicar como producto, no se realizaban las sumas sugeridas, sino que, se utilizaba el método de Gauss para encontrar esa suma.

De igual importancia, para la fase *Verificar* se observa que en las primeras partes del instrumento (las que tenían que ver con la sumatoria de números de la tabla) no se evidencia de forma común la verificación de las conjeturas, esto puede estar asociado a que no se realizó ninguna pregunta acerca de una fila particular; en cambio, para la última parte, en donde se presentaba la secuencia de figuras en forma de cuadrado, sí se hace una verificación, posiblemente porque si se pregunta por una figura en particular (las de la posición 4, 6 y 10); por otro lado, también se cree que la verificación se encuentra más en la secuencia de puntos que en las secuencia numérica, muy posiblemente, porque para las primeras partes del instrumento se pide justificar la conjetura dentro de las instrucciones dadas en cada numeral, en cambio, para la última se dedica un numeral específico para solicitar la verificación o justificación.

Otro aspecto a resaltar, que no tiene que ver con las fases de la generalización directamente pero que sí afectan los resultados, se debe a la comprensión de las instrucciones dadas en el instrumento, por ende se realizó un primer pilotaje para que en el instrumento final las instrucciones fueran claras. Sin embargo se observa que algunos estudiantes plantearon secuencias que no atendían a las instrucciones dadas en el enunciado de la tarea, esto lleva a pensar que probablemente tales instrucciones no fueron leídas o que la comprensión lectora de los estudiantes no es la mejor (Anexo 6).

También se concluye, en acuerdo conel Grupo Azarquiel(1993) y tras el análisis del instrumento, que las secuencias de figuras geométricas son más fáciles de manipular que las secuencia numéricas, pues se observó quelos estudiantes, en general, describían fácilmente la regla de formación y lo común entre las figuras, pero para la secuencia de números se presentó mas dificultades para encontrar la regularidad.

Así mismo, se plantea que de acuerdo como el estudiante *vea* la secuencia, de la misma forma será su “descripción” e inclusive su “expresión simbólica”; por tanto, es necesario, como futuras docentes, al fomentar actividades de generalización de patrones, dedicar tiempo suficiente a la fase “Ver” ya que esta determina el desarrollo efectivo de las fases posteriores; además, es necesario asegurarse que el estudiante se centre en distintas maneras de ver las secuencias que se propongan.

También es necesario, dentro de la actividad docente, incentivar a los estudiantes a “Describir” todas las características encontradas en una secuencia pues se concluye, desde la tabla en donde se encuentra el número de pruebas en cada nivel, que al describir lo que se ve, se pierde información importante en cuanto a la relación de las partes de la secuencia. También se pudo evidenciar que algunos estudiantes se saltan la fase de describir a la fase de registro.

Por otro lado, la ubicación de los resultados por niveles de cada fase facilitó la ejemplificación y la interpretación de la forma en cómo se llega a una generalización -o no-.

A nivel profesional este trabajo nos brindó un acercamiento a acciones propias dela investigación en Educación Matemática como: diseño de preguntas con un fin específico, interpretación de resultados de manera detallada siguiendo un marco conceptual específico (taxonomía de los niveles de generalización, para este caso) y apropiación de los elementos teóricos que sustentan el trabajo; lo cual, será de provecho ya que en la redacción de las preguntas se tuvo en cuenta que debían ser claras y específicas para que los estudiantes lograran mayor comprensión, además debían ir formuladas de acuerdo a que las respuestas permitieran evidenciar cada una de las fases de generalización; en cuanto a la interpretación de resultados, se realizó una apreciación cualitativa de elementos utilizados en el proceso de generalizar como: objetos matemáticos, procedimientos, definiciones, sistema axiomático, etc. También en esta actividad se pueden detectar posibles dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas, que poseen los estudiantes y así, reorientar el quehacer en el aula de clase.

Del mismo modo en el campo de la generalización algebraica se poseen herramientas para incentivar a los estudiantes a desarrollar actividades de reconocimiento de patrones teniendo en cuenta los tipos de secuencias y representaciones que en su manejo son de mayor complejidad para fomentar el acercamiento a estas y así desarrollar en los estudiantes la capacidad de identificación de aspectos generales.

Este trabajo permitió ampliar el conocimiento de las autoras en cuanto a los tipos de tareas que se pueden proponer y el tipo de preguntas que se podían formular para evidenciar las distintas fases de generalización.

BIBLIOGRAFÍA

Agudelo, C. (2002). *Promoción del pensamiento algebraico en la escuela primaria.* Aula Urbana.

Cañadas, M. y Castro, E. (2002). *A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning.* España: Universidad de Zaragoza.

Cañadas, M. C., Castro E. y Castro, E. (2008). *Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas*. PNA, 2(3), pp. 137-151.

Dreyfus, T. (1991). *Advanced mathematical thinking processes*. En D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking (pp. 25 41). Dordrecht: Kluwer

Esquinas , A. (2008). Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico: del símbolo a la formalización algebraica. Aplicación a la práctica docente. Tesis doctoral. Madrid: Universidad Complutense de Madrid

Ellis, A. (2007). *Connections Between Generalizing and Justifying: Students' Reasoning with Linear Relationships.* Journal for Research in Mathematics Education.

García, S. (2011). *Rutas de acceso a la generalización como estrategia de resolución de problemas utilizadas por estudiantes de 13 años.* Tesis de Maestria. Bogotá : Universidad Pedagógica Nacional.

Grupo Azarquiel. (1993). *Ideas y actividades para enseñar Algebra.* Madrid: Sintesis.

Luque, C., Jiménez, H., y Patiño, D. (2007). *Algunas sumas en la tabla pitagórica de multiplicar.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D., & Gowar , N. (1999). *Rutas y raíces hacia el Álgebra.* Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia .

Mora, L. (2012). Álgebra en Primaria. Documento no publicado, elaborado en el marco del Programa Todos a Aprender del *Ministerio de Educación Nacional.* República de Colombia .

Real Academia Española. (2001). Diccionario de la lengua española [Dictionary of the Spanish Language] (22nd ed.). Madrid, Spain: Author.

Radford, L. (2010). *Layers of generality and types of generalization in pattern activities.*PNA, 4(2), 37-62.

Sanchez, L., García, O., & Mora, L. (s.f.). Ver, describir y simbolizar en el club de matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. *Asocolme* .

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didactico del Álgebra.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Socas, M. (2011). *La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación.* Números.

Trujillo, P. (2008). Proceso de generalización que realizan futuros maestros. Granada: Universidad de Granada.

Trujillo, P., Castro, E., & Molina, M. (2009). *Un estudio de casos sobre el proceso de generalización.*. En Investigación en Educación Matemática XIII. Santander: SEIEM. pp. 511-521.

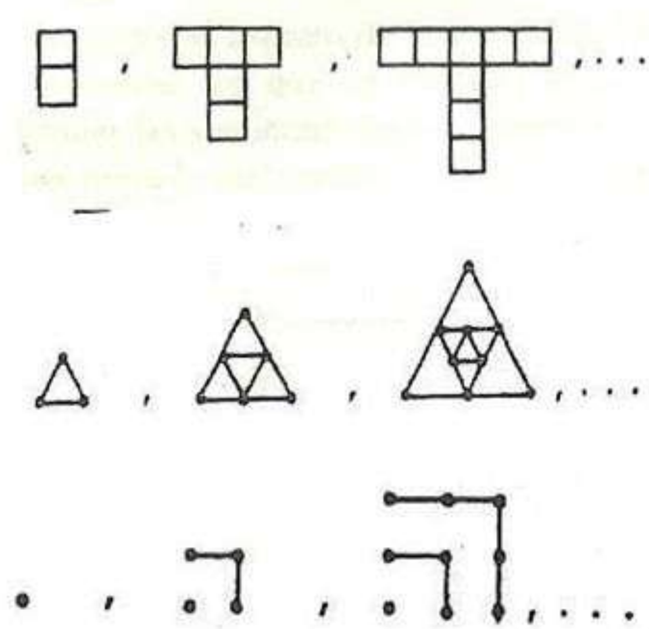
ANEXOS

ANEXO 1

Taller

Para cada una de las secuencias de figuras, responda las siguientes preguntas

1. Dibuje la figura que sigue la secuencia
2. Describa las figuras como si lo hiciera para alguien del mismo salón pero que no las ha visto.
3. Escriba una regla que ayude en la producción de una secuencia que crece, y que tiene las figuras dadas como los primeros términos de la secuencia.
4. Cuantos cuadros y cuantos puntos se necesitan para la figura número 10 y 37?



ANEXO 2

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Taller

Observar con atención la siguiente tabla:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		⋯
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22		⋯
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33		⋯
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44		⋯
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55		⋯
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66		⋯
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77		⋯
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88		⋯
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99		⋯
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110		⋯
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121		⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

1. Completar la columna y la fila que sigue en la tabla.
2. Describir cómo son los números de cada fila.

3. Observar los números subrayados en la tabla. Estos números naturales representan la suma de los primeros n números de la primera fila de la tabla. Estos números, se pueden escribir como producto de los números que aparecen en la fila y la columna correspondiente, así:

1	=	1	=	1×1
1 + 2	=	3	=	1×3
1 + 2 + 3	=	6	=	2×3
	=	10	=	
	=	15	=	
	=	21	=	

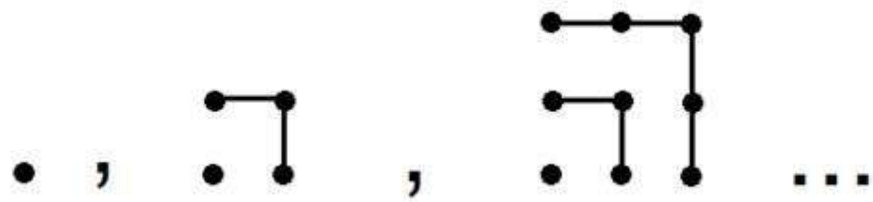
Completar la secuencia anterior dada y ubicar los números en la tabla. Explicar que sucede.

4. Suponga ahora que tiene 25 números en la primera fila y desea encontrar la suma de estos números ¿Cuánto suman estos números? Encontrar una expresión que permita sumar los primeros n números. Justificar.

5. Realizar el anterior procedimiento, pero ahora encuentra la suma de los primeros n números naturales de la segunda, tercera y cuarta fila.

6. Encontrar la suma de los primeros n números naturales para k filas. Escribir una conjetura y demostrar que es cierta.

De acuerdo a la siguiente secuencia de puntos



1. Dibujar la siguiente figura de la secuencia dada

2. Describir la forma cómo se pasa de la primera figura a la segunda y de la segunda a la tercera. Describa qué es lo común en estas figuras

3. Encontrar el número de puntos necesarios para hacer la figura de la posición 4, 6 y 10. Explicar. (Sugerencia: exprese el total de puntos como la suma de puntos que están unidos por una línea).

4. Escribir una regla que permita dibujar las figuras de la posición 4, 6 y 10.

5. Formular una conjetura de acuerdo a las sucesiones encontradas en este problema.

6. Argumentar que la conjetura formulada en el punto anterior es cierta.

ANEXO 3

Tal como se menciona en el capítulo 4, los ejemplos que fueron descartados, se muestran a continuación. La Imagen 39 muestra el uso de un método ya conocido, el de Gauss, para encontrar la suma de los cinco primeros números de la fila 3, pero no se encuentra la suma de los primeros números de la tercera fila con el procedimiento planteado en los numerales anteriores.

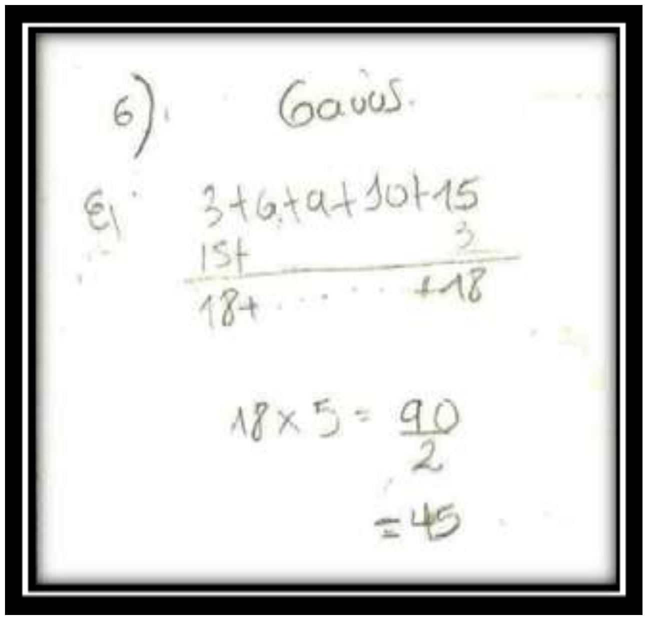
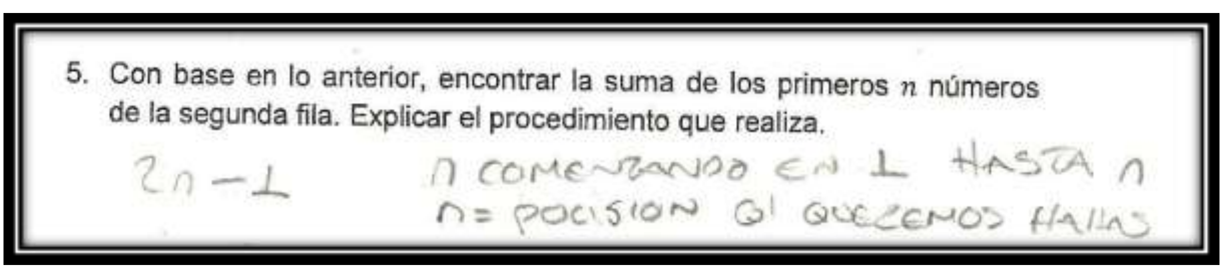


Imagen 39. Ejemplo 1 descartado

En la imagen 40 se observa que el estudiante da una respuesta incompleta, pues no se observa ningún procedimiento, sino que hace uso de una fórmula que es errónea, pues de esta forma no se encuentra la suma de los números de la segunda fila, ya que da como resultado números impares.



5. Con base en lo anterior, encontrar la suma de los primeros n números de la segunda fila. Explicar el procedimiento que realiza.

$2n-1$ n COMENZANDO EN 1 HASTA n
n = POCISION Q' QUEREMOS HALLAR

Imagen 40. Ejemplo 2 descartado

En la imagen 41 se observa una respuesta incompleta, pues no se hace descripción del procedimiento realizado para sumar los números de la primera fila y por lo tanto no hay explicación del por qué le suma el 1 al producto. Además no realiza nada más para los demás numerales.

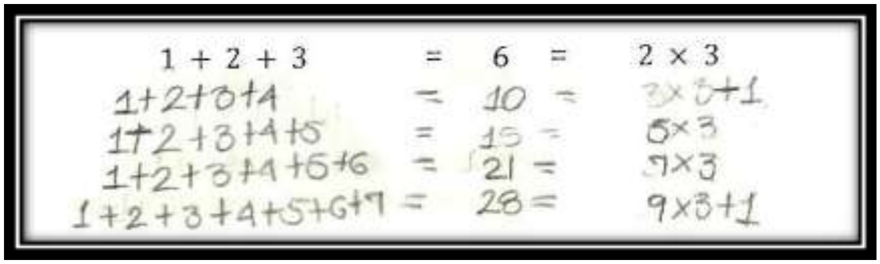


Imagen 41. Ejemplo 4 descartado

ANEXO 4

Como se observa en la imagen 42, se tienen tres respuestas similares, pues en los tres casos se observa que uno factores en que se expresa la sumatoria de los números de la segunda fila es de la forma y el segundo es impar.

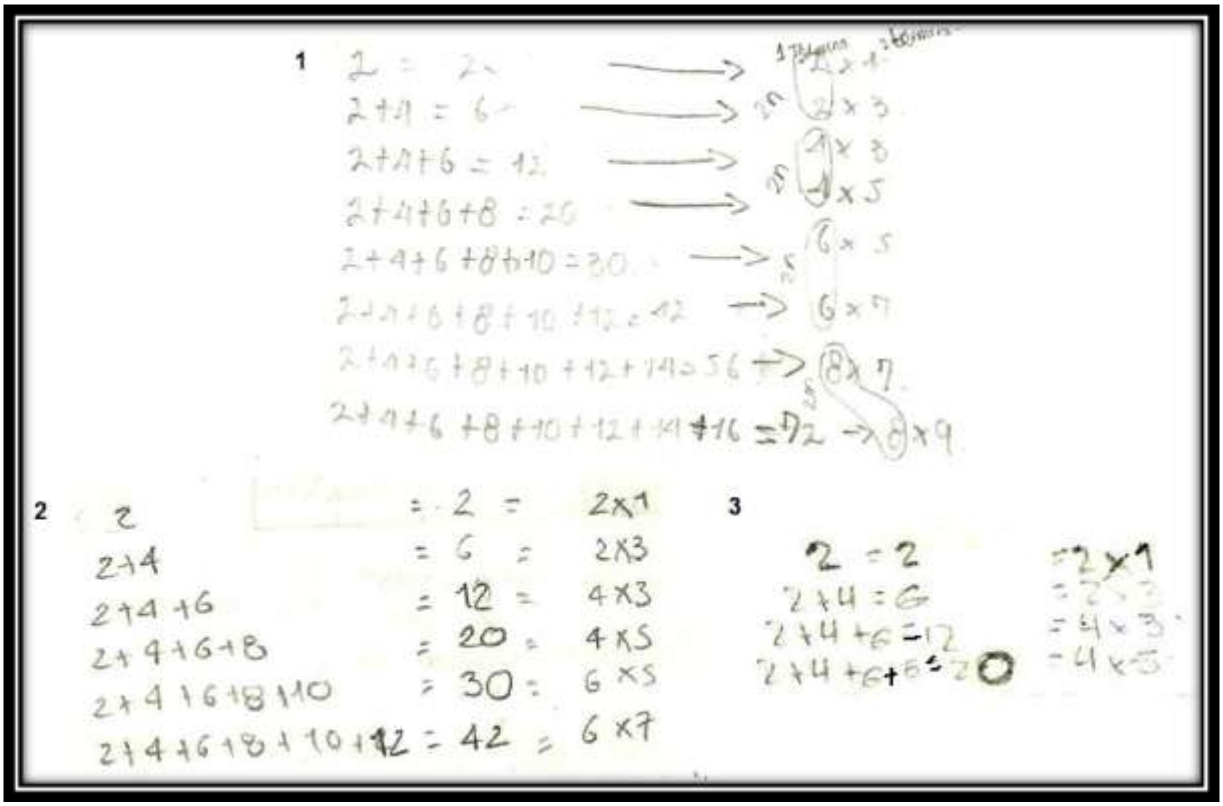


Imagen 42. Ejemplo de respuestas similares 1

En la imagen 43 se observa otro ejemplo de respuestas similares, ya que la forma en que los dos estudiantes ven la secuencia de puntos es como una potencia.

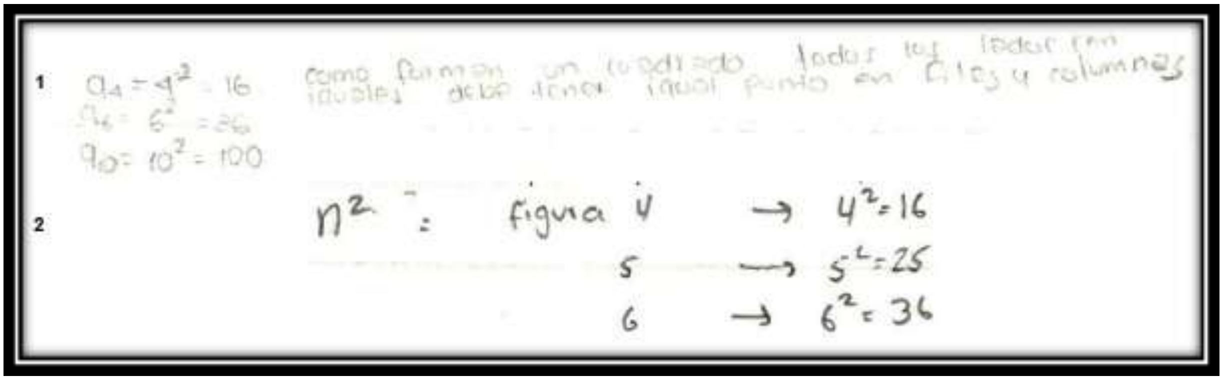


Imagen 43. Ejemplo de respuestas similares 2

En la imagen 44 se observa que la conjetura es similar en los tres casos, pues se concluye lo mismo.

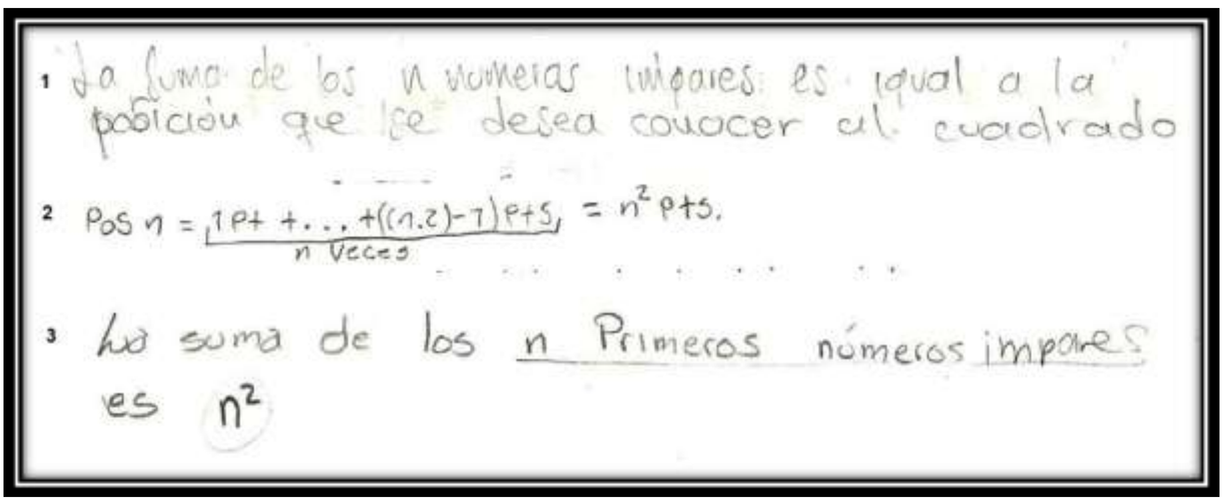


Imagen 44. Ejemplo de respuestas similares 3

ANEXO 5

En la imagen 45 (lado izquierdo) se observa que se realizó la secuencia de sumas de los primeros números de la primera fila de la tabla de multiplicar, pero al realizar la descripción de lo elaborado (lado derecho de la imagen 44) se menciona que “los números son extremos de una L” sin explicar correctamente a lo que realmente se refería.

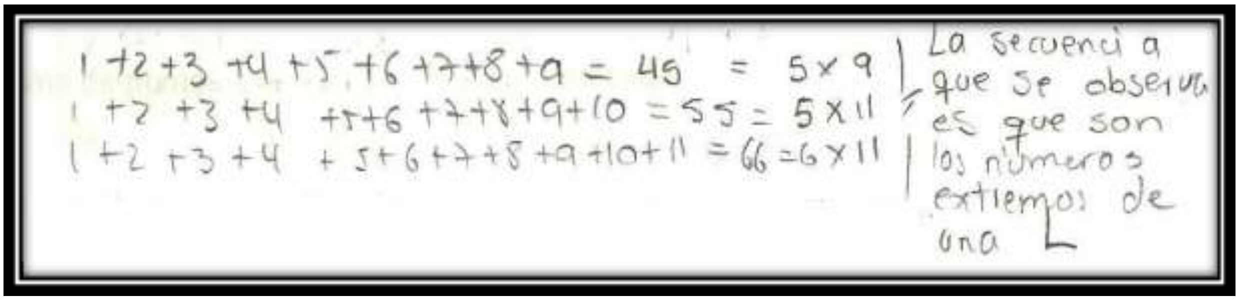


Imagen 45. Descripción diferente de procedimiento hecho

ANEXO 6

En la imagen 46 se observa uno de los ejemplos en que el estudiante no sigue las instrucciones dadas, ya que al pedir que se realice la suma de los números de la segunda y tercera fila de la tabla, se suman los números de la fila uno en todos los casos.

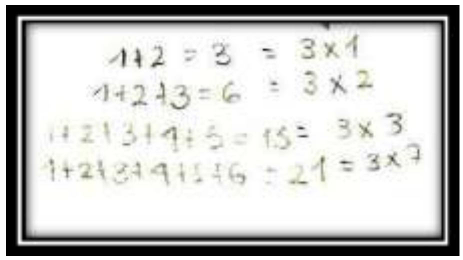


Imagen 46. Ejemplo mala comprensión lectora