MATEMÁTICAS Y MÚSICA: UNA MIRADA A LA ARMONÍA DESDE LA TEORÍA DE GRUPOS

Modalidad de Trabajo de Grado:
Asociada al estudio de un tema específico

Anderson Stiven Pachón Casas
C.C. 1’013.643.889
COD. 2010240049

Asesor:
Yeison Alexander Sánchez Rubio

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Bogotá D.C.
Noviembre de 2015

A mis padres quienes con su amor, esfuerzo

y dedicación hicieron de este sueño

una realidad.

Agradecimientos

Agradezco primero a Dios en quien constantemente me apoyo para realizar la gran mayoría de mis actividades, tanto personales como académicas, sin Él nada de esto sería posible.

También agradezco a mis padres, Mario Pachón y Amanda Casas, quienes me ofrecieron su apoyo de todas las maneras en las que les fue posible, dedicaron años en mi formación académica y personal, me orientaron, me protegieron e hicieron de mi la persona que ahora soy; espero poder retribuir algún día y de la mejor manera el esfuerzo tan grande que hicieron por mí.

Quiero también agradecer a todos aquellos que me enamoraron de los dos campos que se encuentran en este trabajo: la Música y las Matemáticas; son muchas las personas que me mostraron lo bello de ambos mundos y han forjado en mí las suficientes bases y el deseo por continuar adelante en el estudio de ambos campos.

De igual manera agradezco a aquellos que con sus palabras me alentaron a no desfallecer, a seguir aun en los momentos en que lo daba todo por vencido, incluso cuando no tuviesen una solución (gracias Ls).

Finalmente agradezco a mi asesor Yeison Sánchez en quien veo un gran ejemplo a seguir y quien ha dedicado su tiempo, esfuerzo y dedicación por entender el contenido de este trabajo para así darme una luz en la elaboración del mismo, espero haber contribuido un poco dentro de su ya vasto conocimiento.

Resumen Analítico de Educación - RAE

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado.
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central.
Título del documento	Matemáticas y Música: Una mirada a la Armonía desde la Teoría de Grupos.
Autor(es)	Pachón Casas, Anderson Stiven.
Director	Sánchez Rubio, Yeison Alexander.
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2015. 90 p.
Palabras Claves	ARMONÍA; GRUPO; SERIALISMO; ACORDES Y MELODÍAS.

2. Descripción
El siguiente trabajo de grado se presenta para optar por el título de Licenciado en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. En este se pretende mostrar un enlace no tan conocido entre técnicas de composición musical y la Teoría de Grupos. Específicamente, se presentan algunas ideas básicas sobre música, a saber, la estructuración actual de las notas musicales, escritura básica en partitura y la composición de acordes; así como algunos conceptos, definiciones y teoremas de la Teoría de Grupos para dar lugar a reinterpretaciones de conceptos musicales por medio de conceptos matemáticos.

3. Fuentes

Agustín, O., du Plessis, J., Lluis, E., & Montiel, M. (2009). Una introducción a la Teoría de Grupos con aplicaciones en la Teoría Matemática de la Música. Sociedad Matemática Mexicana.

Blázquez, R. M. (2012). Música y Matemáticas. Ávila.

Borrero, F. D. (Diciembre de 2008). Recuperado el 2 de Septiembre de 2015, de http://www.csi-csif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_13/FCO_DANIEL_BORRERO_

2.pdf

García, R., & Martínez, T. (s.f.). Recuperado el 6 de Septiembre de 2015, de http://www-ma4.upc.edu/~xgracia/musmat/treballs/GarMar.armonia.pdf

Lárez, V. (2010). Armonía I. Caracas: Universidad Nacional Experimental.

Lluis, E. (2006). Teoría de Grupos, un primer curso. Ciudad de México: Sociedad Matemática Mexicana.

Pérez, É. (2008). Estructuras Algebraicas. Bogotá D.C.: Universidad Pedagógica Nacional.

Romero, R. (s.f.). Música y Matemáticas. Recuperado el 22 de Abril de 2015, de https://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/historia/Musica%20y%20Matematicas.pdf

Schoenberg, A. (1974). Tratado de Armonía. Madrid: Real Musical.

4. Contenidos

En el siguiente trabajo de grado se han organizado los contenidos de la siguiente manera:

En el **capítulo 1** se hace necesario una primer mirada a conceptos básicos tanto en Música como en la Teoría de Grupos, estos conceptos traen consigo definiciones, notación, proposiciones, entre otros aspectos que son claves para el establecimiento de la relación que se presenta en el documento entre ambos campos; también se hace un recuento sobre algunos de los momentos históricos en los que las Matemáticas y la Música se han relacionado, donde dicha relación, en la mayoría de casos, nace de consideraciones físicas sobre fenómenos acústicos.

El **capítulo 2** da inicio a la redefinición de conceptos musicales bajo un lenguaje matemático, además de mostrar cómo las mismas matemáticas actúan desde un principio en en el conjunto de las notas musicales, ambos procesos permiten reinterpretar ideas en música como la composición de escalas y el aumento o disminución de semitonos a partir de una nota base, todo bajo operaciones en un grupo: $\mathbb{Z}_{12}$.

En el **capítulo 3** se registra una consulta a diferentes definiciones de Armonía buscando una definición que permita orientar el desarrollo de este trabajo. Además presenta dos elementos importantes en la música: Acordes y Melodías, se definen desde la música y a partir de tales definiciones y el lenguaje músico-matemático establecido en el capítulo anterior, se redefinen desde un lenguaje matemático, asentando también definiciones necesarias para el desarrollo de los siguientes capítulos.

El **capítulo 4** se basa en el desarrollo de ideas musicales bajo una mirada matemática acerca de la armonía clásica o funcional la cual se basa en la transformación de acordes mayores y menores (los cuales fueron seleccionados para el desarrollo de este documento). Dichas transformaciones, junto con la composición, resultan obedecer a la estructura de grupo.

El **capítulo 5** también desarrolla ideas musicales con una mirada matemática pero para otra corriente de composición: el Serialismo. Aquí, al igual que en el capítulo anterior, se definen y aplican transformaciones, pero ya no sobre acordes sino sobre melodías. Estas nuevas transformaciones resultan ser una representación, desde la música, del grupo cuarto de Klein.

Finalmente se presentan algunas conclusiones, reflexiones y definiciones fruto del estudio y elaboración de este trabajo.

5. Metodología

Para la realización de este trabajo primero se consultó bibliografía referente a la relación Música-Matemáticas y se tomó el texto *Una introducción a la Teoría de Grupos con aplicaciones en la Teoría Matemática de la Música* de Agustín y otros (2009), para el inicio del estudio sobre el tema de interés (sin dejar de lado los demás textos encontrados), de allí se remitió a documentos especializados tanto en teoría de grupos como en conceptos básicos de armonía musical. Bajo una mirada crítica y reinterpretación del documento de Agustín y otros (2009).

Luego con base en el estudio realizado frente a los demás documentos seleccionados, se estableció el enlace Música-Matemáticas que se presenta en el Trabajo de Grado. Con esta idea se inició el trabajo escrito para registrar los resultados obtenidos por el estudio de los textos seleccionados y la reinterpretación de los mismos.

A medida que se realizaba el ejercicio de escritura esta misma actividad dio lugar a consideraciones nuevas sobre las ideas expuestas en el texto de Agustín, esto permitió el surgimiento de ideas propias del estudiante y del asesor planteando así preguntas nuevas que dieron lugar a resultados inéditos.

6. Conclusiones

Son pocos los textos que contemplan una relación directa entre Matemáticas y Música, por lo general la Física es un puente de comunicación entre ambos campos.

Dado que dos notas reciben el mismo nombre cuando el cociente entre sus frecuencias corresponde a una potencia de dos las notas musicales obedecen a un modelo cíclico bajo el aumento o disminución de semitonos en las mismas, por ellos es posible determinar una relación entre el conjunto de notas y el grupo $(\mathbb{Z}_{12},+)$.

El comportamiento del conjunto de las notas musicales permite generar una acción del grupo $(\mathbb{Z}_{12},+)$ sobre este conjunto.

Los métodos de composición obedecen a transformaciones de los objetos base en la música: las notas y acordes. Dichas trasformaciones pueden verse como funciones por lo cual los diferentes métodos son susceptibles a re interpretaciones Matemáticas.

Definir un vocabulario matemático para hablar sobre conceptos musicales no garantiza una correspondencia entre resultados y propiedades de cada campo por separado.

Elaborado por:	Pachón Casas, Anderson Stiven
Revisado por:	Sánchez Rubio, Yeison Alexander

Fecha de elaboración del Resumen:	05	11	2015

Tabla de contenido

Lista de Figuras

Lista de Tablas

Introducción

Las Matemáticas, deben gran parte de su desarrollo a intentar resolver problemas sobre los que la humanidad se ha cuestionado a través de la historia, muchas veces, estos problemas no nacen dentro de las Matemáticas, sino en otras áreas o campos del conocimiento como la Física, la Economía, entre otros. Pero además las Matemáticas también han encontrado desarrollo dentro de ellas mismas, al abordar y resolver problemas dentro de si mismas. Son casi incontables los resultados obtenidos por personajes tan famosos como Euler, Arquímedes, Euclides, Pitágoras, Fermat, Gilbert, Cantor, etc., y a varios de ellos se les acredita la creación de nuevas ramas como Descartes y la Geometría Analítica, o Newton y Leibniz con los Cálculos Integral y Diferencial. Entre las últimas teorías matemáticas se encuentra la Teoría de Grupos la cual nace, entre otros factores, con el hallazgo de soluciones a ecuaciones de grado mayor a cuatro por radicales, los trabajos de Abel y Galois dieron respuesta a esta búsqueda (Pérez, 2008).

A partir de esta nueva teoría se encontraron comportamientos similares en conjuntos dotados de operaciones como los enteros con la suma y los reales con esta misma operación; y no solo conjuntos numéricos, se tienen ejemplos con transformaciones geométricas sobre polígonos y poliedros regulares. En muchas ramas y partes de las Matemáticas se encontraron ejemplos para la Teoría de Grupos, sin embargo es posible traspasar los límites de este campo de las Matemáticas encontrando nuevos ejemplos de grupos en otras áreas de conocimiento. Bajo esta idea en este trabajo se presenta una relación entre esta Teoría y otro campo: la Música.

El gusto por diferentes géneros musicales es en muchas ocasiones un buen tema para dialogar, intercambiar ideas, expresar sentimientos y llevar mensajes explícitos o implícitos; en algunas personas dicho gusto las lleva a estudiar la Teoría que se esconde tras la composición de temas musicales, y por tanto, conocer diferentes notaciones que permitan interpretar o comunicar ideas; de manera casi increíble estas personas están estudiando simultáneamente algunos conceptos de la Teoría de Grupos.

Para el desarrollo de este trabajo se hace necesario una primer mirada a conceptos básicos tanto en música como en teoría de grupos, por esto, el primer capítulo (Marco Conceptual) presenta definiciones, notación, proposiciones, entre otros aspectos que son claves para la posterior relación que se mostrará entre ambos campos; además de esto se da una mirada a la relación histórica que las Matemáticas y la Música han mantenido, la cual, en su mayoría, nace de consideraciones físicas sobre fenómenos acústicos.

En el capítulo 2 se da paso a establecer un vocabulario musical con términos matemáticos lo cual redefinirá conceptos tales como tonalidad, acordes y melodías (vistos en el capítulo anterior), además de dar lugar a algunos teoremas y resultados. Dicho vocabulario se basa en el comportamiento de las notas, que resultan ser similares a una de las estructuras más nombradas en la Teoría de Grupos: los $\mathbb{Z}_n$. También se pueden realizar tratamientos musicales únicamente con operaciones matemáticas, donde algunos de los resultados obtenidos se corresponden con los tratamientos y resultados musicales.

Luego de esto, en el capítulo 3 (Armonía), se hace necesario indagar y definir uno de los conceptos base de este documento y que precisamente da el título a esta sección: la Armonía. Esto conlleva a estudiar los Acordes y las Melodías, que son parte importante en la Armonía, primero desde un lenguaje meramente musical y, posteriormente, con un tinte matemático basado en dicho estudio y el lenguaje establecido en el capítulo anterior. Al final, se presentan las dos corrientes principales de composición: armonía tonal y armonía atonal; esta última idea divide en dos el trabajo y sustenta la necesidad desarrollar ideas de ambas corrientes en capítulos independientes.

El capítulo 4 inicia bajo ideas básicas en la armonía tonal, también conocida como armonía funcional o clásica, lo que conlleva a conocer y, posteriormente, redefinir transformaciones de acordes que son los objetos principales en este capítulo. Estas transformaciones, vistas desde las matemáticas, presentan una estructura de grupo no abeliano bajo la operación de composición (pues dichas transformaciones se definen como funciones). Bajo este hecho se intentan establecer nuevas correspondencias entre ideas de la Teoría de Grupos y Música.

De manera similar a la sección anterior, el capítulo 5 inicia con el estudio del Serialismo, corriente perteneciente a la armonía atonal, donde también se presentan transformaciones pero ya no sobre acordes sino sobre melodías, y aquí se encuentra una representación musical del grupo cuarto de Klein.

Objetivo General

Estudiar ideas y resultados presentados en el texto *Una introducción a la Teoría de Grupos con aplicaciones en la Teoría Matemática de la Música*, y elaborar una monografía que dé cuenta del estudio realizado y sirva como texto de consulta para personas con interés en el tema.

Objetivos específicos.

a. Realizar un estudio, básico sobre armonía musical.
b. Identificar elementos propios de la teoría de grupos como son la estructura de grupo, transformaciones, isometrías, operaciones, entre otros, presentes en la teoría musical.
c. Determinar si existe una correspondencia entre los resultados obtenidos a partir del estudio teoría de grupo y los resultados establecidos en la teoría musical.
d. Contrastar los resultados obtenidos con el texto principal de apoyo (Una introducción a la Teoría de Grupos con aplicaciones en la Teoría Matemática de la Música), para determinar si se consiguieron resultados diferentes, iguales o nuevos.
e. Elaborar la monografía.

1. Marco Teórico

Pensar en establecer una relación entre parte de la Teoría Musical con elementos de la Teoría de Grupos conlleva a conocer algunos conceptos básicos necesarios para entender la naturaleza de tal relación, es por esto que el marco de este trabajo se divide en tres partes principales: la primera trata de ideas musicales que posiblemente muchos conocen y se profundiza un poco más sobre algunas nociones y notación (necesario para la interpretación de resultados próximos), luego viene un marco matemático que expone conceptos importantes de la teoría de grupos, nombrando algunos teoremas y ejemplos muy conocidos, y otros no tan comunes, así como definiciones de los conceptos base para el desarrollo de los próximos capítulos; finalmente se presentan unos antecedentes históricos sobre la relación entre Música y Matemáticas nacidos principalmente por la necesidad de responder a la naturaleza de fenómenos físicos dentro del campo de la Acústica. Estos elementos serán importantes en la interpretación de resultados y exposición de definiciones próximas en este documento.

1.1. Marco Musical

La música, además de escucharse, puede escribirse permitiendo "comunicar" diferentes piezas; así un tema, sonata o canción pueda ser interpretada por diferentes músicos de la forma en la que un compositor espera, sin importar la distancia espacial o temporal, esta escritura trasciende las fronteras de la cultura y el idioma. La escritura musical actual proviene de una serie de cambios ocurridos a través de la historia, cambios que buscan la mayor simplicidad y precisión posibles. A continuación se presenta algunos elementos de esta escritura musical necesarios para la interpretación de algunos resultados posteriores en este trabajo.

Las notas musicales (DO, RE, MI, FA, SOL, LA y SI) obedecen a un ciclo como los días de la semana: una vez se llega al último el ciclo comienza nuevamente.

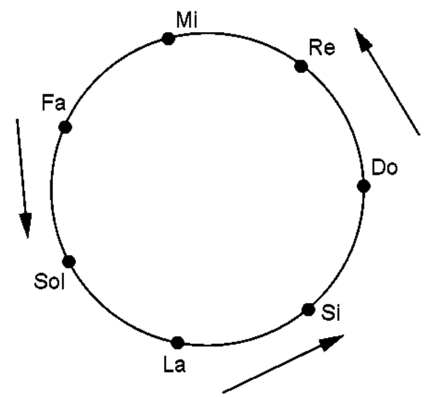


Figura 1. Ciclo de las notas musicales.

Un ciclo, independiente de la nota en la que se empiece, se le conoce en música como “octava”; básicamente es el recorrido desde una nota hasta la siguiente (o la anterior dependiendo de si se avanza o retrocede), con el mismo nombre[1].

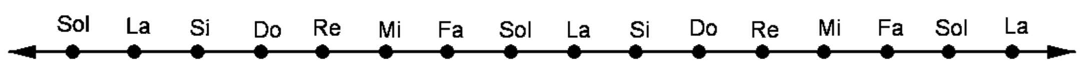


Figura 2. Ciclo lineal de las notas.

Pero al igual que cada día de la semana tiene una fecha asignada que lo diferencia de otros días con el mismo nombre en cada semana, las notas también son diferenciables entre sí por la altura de su sonido (lo grave o aguda que es la nota), es decir que cada nota tiene una frecuencia única (más adelante se tratará esta idea con mayor profundidad).

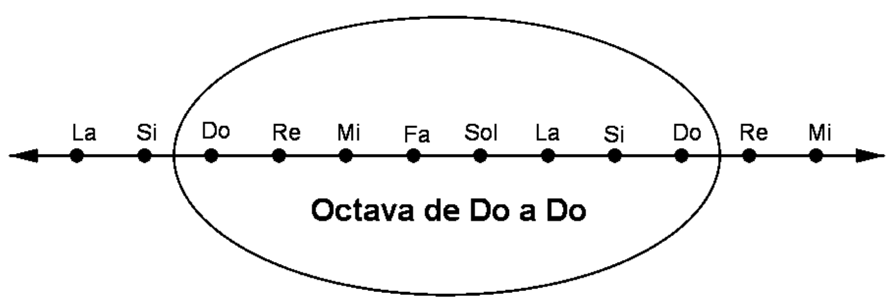


Figura 3. Ejemplo de una octava.

[1] Una octava contempla ocho notas, es decir que la primer nota es la única que se repite en una octava.

En la escala *temperada*[2], también conocida como *equitemperada*[3]existen notas intermedias entre las conocidas comúnmente (figura 1), esto debido a la *distancia tonal* entre las notas (más adelante se ampliará dicho concepto pues este es base para la relación fundamental expuesta en este trabajo), la distancia mínima entre cada par de notas es un *semitono*, que equivale a medio *tono*. Entre cada par de notas hay una distancia de un tono, excepto entre MI y FA, y entre SI y DO, cuya distancia es de un semitono. Para nombrar las otras cinco notas existentes se usan las alteraciones "sostenido" (♯) y "bemol" (♭) que acompañan el nombre de alguna nota[4]. Una nota con sostenido es medio tono más de la original mientras que una con bemol es medio tono menos que la original.

Nota alterada		**Nota original**
DO♯		DO
RE♯		RE
FA♯	Es medio tono por encima de →	FA
SOL♯		SOL
LA♯		LA

Tabla 1. Notas con sostenido.

Nota alterada		**Nota original**
RE ♭		RE
MI ♭		MI
SOL ♭	Es medio tono por debajo de →	SOL
LA ♭		LA
SI ♭		SI

Tabla 2[5]*. Notas con bemol.*

[2] Existen otras escalas con más notas, el estudio de asignación de notas a una frecuencia específica se le conoce como "teoría microtonal".

[3] En la antigüedad los intervalos tonales no guardaban una relación entre si; más adelante, en la indagación de algunos antecedentes sobre la relación Música-Matemáticas, se hace un recuento sobre esta idea con más detalle.

[4] Además de estas dos existen otras tres alteraciones: el "doble sostenido", el "doble bemol" y el "becuadro" (sobre este último se hablará más adelante).

[5] Las notas naturales más las alteraciones presentadas en las dos tablas suman diecisiete notas y no doce como se mencionaba anteriormente.

En la escala temperada existe una correspondencia entre alteraciones llamada *enarmonía*; la *enarmonía* es la igualdad entre algunas alteraciones a partir de las distancias tonales entre las notas. Al mirar por ejemplo las notas DO y RE se sabe que existe una distancia de un tono, como las distancia mínima entre dos notas es un semitono implica que existe una nota entre estas dos; en las tablas anteriores se mencionan dos alteraciones relacionadas con DO y RE, estas son DO♯ y RE ♭ ; el DO♯ se encuentra medio tono por delante de DO lo que implica que la nota existente entre DO y RE es DO♯, pero RE ♭ se encuentra medio tono detrás de RE, y por tanto también medio tono delante de DO. La *enarmonía* compensa esto dando una igualdad entre estas dos notas. Este mismo análisis también se puede hacer con las otras cinco parejas de notas separadas por un tono.

DO♯ = RE ♭
RE♯ = MI ♭
FA♯ = SOL ♭
SOL♯ = LA ♭
LA♯ = SI ♭

Tabla 3. Enarmonía.

Las notas alteradas o simplemente alteraciones cumplen las mismas propiedades mencionadas anteriormente para las notas naturales. Finalmente la escala temperada es:

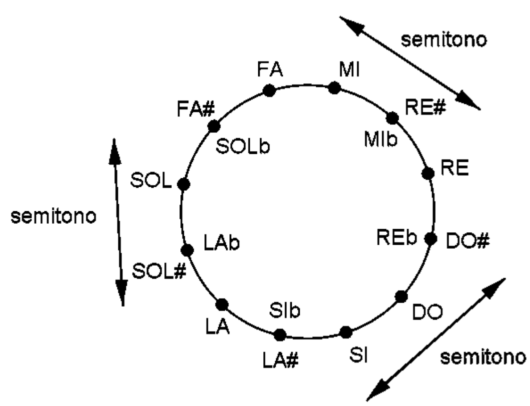


Figura 4. Escala cromática[6] temperada.

[6] En música el término cromático(a) hace referencia a todas las notas existentes entre un par de notas de diferente frecuencia.

Cuando se avanza de una nota a otra pasando por todas las que se encuentran entre estas dos se llama *cromatismo*.

Buscando diferentes formas de comunicar ideas que involucren las notas musicales (puede ser una canción, una melodía, la composición de un acorde), se han desarrollado diferentes notaciones que suplan esta necesidad, algunas más complejas que otras, pero todas ellas buscan sintetizar de la mejor manera posible las ideas a comunicar sin perder precisión. Entre estas se encuentra la notación “americana” o “universal” que asigna una letra (de la A a la G), a cada nota o conjunto de notas (es más común para los conjuntos), de la siguiente manera[7]:

Nota	DO	RE	MI	FA	SOL	LA	SI
Letra	C	D	E	F	G	A	B

Tabla 4. Notación Americana.

También se tiene otra notación, más compleja, que se basa en configuraciones figurales para denotar la altura y la duración de cada nota: la *partitura*. Consiste en un conjunto de símbolos musicales que en conjunto permiten comunicar una misma idea musical a diferentes intérpretes. El elemento base en este conjunto de símbolos es el *pentagrama* que consiste en cinco líneas paralelas y equidistantes, donde tanto las líneas como los espacios entre ellas cuentan al momento de escribir las notas; su función principal es definir la altura de cada nota.

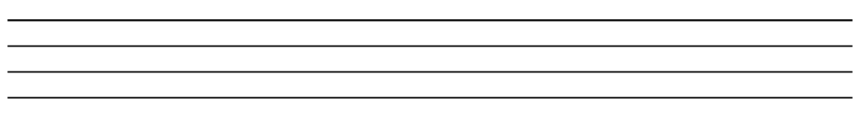


Figura 5. Pentagrama.

Las notas se ubican por medio de figuras que definen su altura (frecuencia) y su longitud (duración en el tiempo). Todas las notas que se ubiquen en una misma línea o espacio simbolizan la misma nota, tanto en nombre como en altura. Para determinar la posición que

[7] Posiblemente se inicia la asignación en A para LA pues una de las frecuencias de esta nota es el referente en la asignación de frecuencias para las demás notas, sin embargo es solo una observación pues no se encontró literatura que refute o confirme esta hipótesis.

debe ocupar cada nota se toma un referente conocido como la *clave* de la cual se tiene tres tipos: clave de SOL, clave de DO y clave de FA. La clave de FA se usa para registro de notas de altura baja o grave, la clave de DO se usa para registros intermedios y la clave de SOL para registros altos. Entre las tres la clave de DO no se encuentra en tantas partituras como las otras dos. Ellas también hacen parte del conjunto de símbolos necesarios para una partitura.

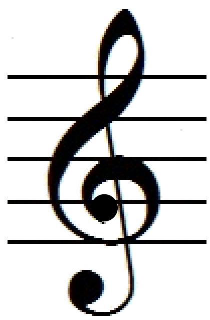


Figura 6. Clave de SOL.

Figura 7. Clave de FA.

La clave de SOL se ubica en la segunda línea del pentagrama, mientras que la de FA se ubica en la cuarta (ambos casos de abajo hacia arriba). Las notas se ubican tanto en los espacios como en las líneas, dadas dos notas escritas en el pentagrama se tiene siempre que la que esté escrita más arriba debe tener un sonido más agudo que la otra. Para el caso de la clave de SOL toda nota que se ubique sobre la segunda línea será un SOL, ya sea natural o alterado, el espacio anterior a esta línea es para las notas que sean FA, la primer línea es para las notas MI, y el espacio anterior a la primer línea se ubican las notas que sean RE; en el espacio que le sigue a la segunda línea se escriben las notas que sean LA, sobre la tercer línea se encuentran las notas que sean SI, esta manera de asignar las notas sigue hasta que en el espacio que le sigue a la quinta línea se encuentran las notas SOL que están una octava por encima de las que se escriben en la segunda línea. Esta asignación para las notas naturales en clave de SOL se presenta en la figura 7.

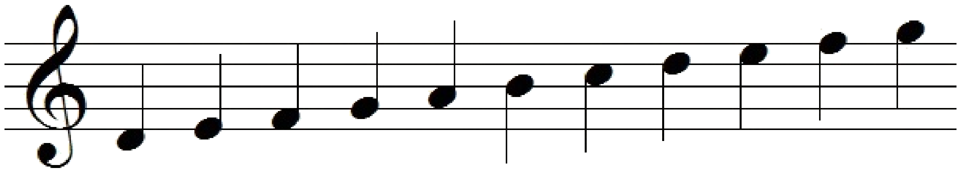


Figura 8. Notas naturales en clave de SOL.

El RE que está más a la derecha en la figura 8 se encuentra una octava por enciama del RE que está a la izquierda, esto mismo ocurre con las notas que se repiten (MI, FA y SOL). De manera análoga se ubican las notas naturales en clave de FA partiendo de que las notas que se escriben en la cuarta línea son FA.

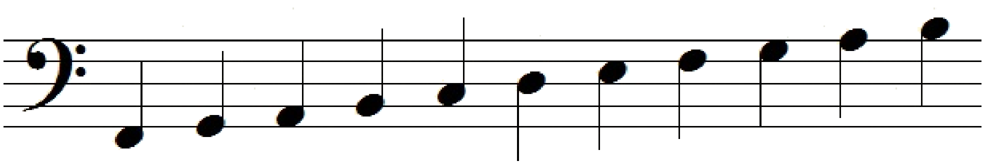


Figura 9. Notas naturales en clave de FA.

Al igual que en la clave de SOL las cuatro últimas notas (FA, SOL, LA y SI) se diferencian de las cuatro primeras por estar una octava superior respecto a las primeras. En adelante solo se trabajará con la clave de SOL.

En la partitura, indiferente de la clave, se puede hacer uso de líneas adicionales para ubicar notas que no pueden ser escritas dentro de las cinco líneas iniciales. Por ejemplo si se desea escribir el DO anterior al RE de la izquierda en la figura 8, cuyo sonido es más bajo que el del RE, se hace una línea pequeña, también paralela y equidistante a la primera, lo suficientemente extensa para escribir allí la nota, en este caso un DO. Con esta misma herramienta es posible escribir el LA que le sigue al último SOL de la figura 8, cuyo sonido es más alto que ese SOL, con una pequeña línea paralela y equidistante a la cuarta en donde se ubicará la nota que se desea.

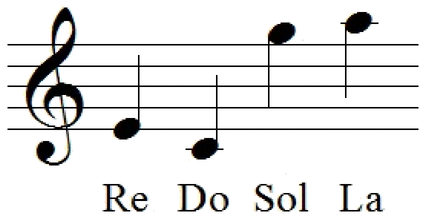


Figura 10. Uso de líneas externas.

Se pueden usar tantas líneas adicionales como se desee, todas deben ser de la misma longitud y equidistantes (como en las cinco líneas originales), de esta forma se puede hacer referencia de las notas que se pueden ejecutar en un instrumento. Por ejemplo, en el siguiente pentagrama se ubican las notas de las seis cuerdas de una guitarra en afinación estándar.

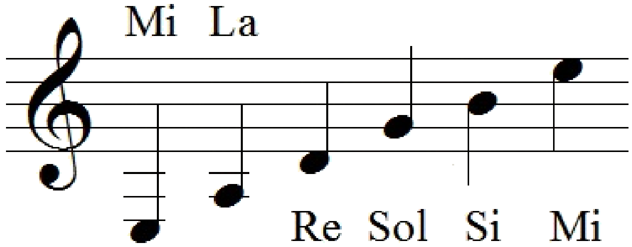


Figura 11. Afinación estándar de una guitarra en el pentagrama.

Como se muestra en la figura 11 la primer nota, de izquierda a derecha, requiere de tres líneas auxiliares para escribirse, esta nota difiere de las otras dos que pueden ser escritas dentro de las cinco líneas iniciales por estar una octava por debajo del MI de la primer línea y dos octavas por debajo del MI que se encuentra en el espacio que le sigue a la cuarta línea. La segunda nota de la figura 10 (LA) también necesita de líneas adicionales.

Además de las notas naturales es posible escribir las alteraciones de estas (sostenidos y bemoles), el símbolo de la alteración se antepone a la figura. Por ejemplo, si se desea ubicar un SOL sostenido (SOL♯) se ubica la nota en la segunda línea (o sobre la quinta línea dependiendo de la frecuencia del SOL que se desee), precedida por la alteración que le corresponde, en este caso ♯.

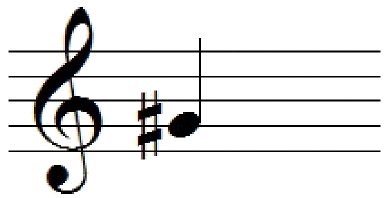


Figura 12. SOL sostenido en el pentagrama.

Además de la altura las notas en una partitura se rigen por su duración en el tiempo, también conocido como longitud. Cuando se habla del tiempo en música primero es necesario conocer el *pulso*; el *pulso* es una sucesión de golpes separados por un mismo lapso de tiempo, uno del otro. Normalmente se mide en *bits por minuto* (bpm), es decir la cantidad de golpes, pulsos o *bits* que se encuentran en un minuto, por ejemplo si el pulso es 60 bpm se emite un bit en cada segundo.

Las diferentes figuras posibles de encontrar en un pentagrama, para efectos de su durabilidad temporal, pueden ser: la *redonda,* la *blanca,* la *negra,* la *corchea,* la *semicorchea,* la *fusa,* y la *semifusa*. La *redonda* se toma como unidad, en el orden anterior cada figura corresponde a la mitad de la que le precede, es decir que una *blanca* es media *redonda*, una *negra* en media *blanca*, y así sucesivamente. Comparando con la *redonda*, que es la unidad, la longitud de cada figura es:

1 blanca es $1/2$ de redonda.
1 negra es $1/4$ de redonda.
1 corchea es $1/8$ de redonda.
1 semicorchea es $1/16$ de redonda.
1 fusa es $1/32$ de redonda.
1 semifusa es $1/64$ de redonda.

Estas equivalencias temporales se tienen también en cuenta para la asignación de los símbolos que representan las notas musicales. A continuación se presentan las figuras de duración para la nota SOL de la segunda línea del pentagrama en clave de SOL por medio de la siguiente tabla.

Redonda	Blanca	Negra	Corchea
			
Semicorchea	Fusa	Semifusa	
			

Tabla 5. Figuras de duración.

La *negra* es asociada a los bits en el *pulso* y cada nota que corresponda a una *negra* debe durar tanto como la separación temporal entre dos *bits;* por ejemplo si un tema se debe ejecutar a 120 bpm una redonda debe durar dos segundos, una blanca dura un segundo, una negra dura medio segundo (lo que completa los 120 bits o golpes que deben darse en un minuto), y así sucesivamente.

Con ayuda del pulso se puede definir el *compás*. Un *compás* es una agrupación de bits la cual es de la misma cantidad durante toda la pieza hasta que se indique que la forma de agrupación debe cambiar (en caso que se deba cambiar). En el pentagrama los compases se dividen entre sí por medio de barras verticales, llamadas *barras de compás*[8], que unen la primer y última línea, gráficamente el compás es el espacio de pentagrama entre dos barras verticales consecutivas.

[8] Existen diferentes tipos de barras de compas, están las barras simples, barras dobles, barra doble final, de inicio de repetición y de final de repetición.

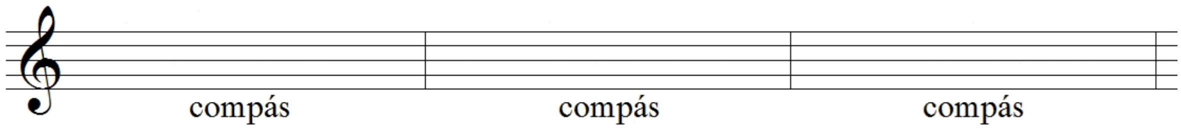


Figura 13. Compás en el pentagrama.

La longitud temporal del compás lo define la *firma de tiempo*, la cual es una fracción donde el denominador determina la figura temporal (redonda, blanca, negra, etc.), que regirá sobre el compás, y el numerador indica el tiempo que deberán sumar las notas dentro del compás a partir de las que se tomaron como unidad de medida en el denominador, por ejemplo si la firma de tiempo es 3/2, la figura que regirá sobre el compás será la blanca (el dos en el denominador hace referencia a "medios"), y en total se debe sumar la duración de tres blancas, es decir seis bits en total en todos los compases. La firma de tiempo más usada en la música actual es el 4/4, es decir que las duraciones de las figuras en el compás debe sumar exactamente 4/4 de redonda. La firma de tiempo se escribe justo después de la clave.

Figura 14. Cuatro cuartos en DO mayor.

Si dentro de un compás una nota tiene una alteración (bemol o sostenido), esta se mantiene durante todo el compás para todas las notas que se escriban sobre el espacio o línea donde se escribió la alteración, o hasta que la misma nota reciba otra alteración dentro del mismo compás, como ejemplo se tiene en la figura 15 parte de la voz principal de un saxofón alto (en clave de SOL), para el famoso tema de jazz *Take Five*, del célebre compositor de este género Charlie Parker, allí se observa que el FA de la quinta línea recibe dos alteraciones en el compás intermedio, primero un sostenido y luego un becuadro (más adelante se hablará de este), por tanto al final del compás el FA queda natural.

Figura 15. Take Five para saxofón alto.

En la mayoría de casos la música se escribe a partir de una *escala*, que corresponde a una *tonalidad* o estructura musical, compuesta de ocho notas[9] provenientes de la escala temperada. Esta escala o estructura se determina mediante distancias tonales entre las notas. Para el desarrollo de los próximos capítulos, es necesario conocer la escala *mayor*; la estructura tonal de esta se determina a partir de una nota que cumple la función de *tonalidad* en la escala (primer nota), la segunda se encuentra un tono por delante de la tonalidad, la tercera también está un tono por delante de la segunda, la cuarta se encuentra a solo medio tono o un semitono de la tercera, la quinta está a un tono de la cuarta, la sexta a un tono de la quinta, la séptima a un tono de la sexta, y la octava nota está un semitono por delante de la séptima.

$$nota_1 \xleftrightarrow{1\ tono} nota_2 \xleftrightarrow{1\ tono} nota_3 \xleftrightarrow{1/2\ tono} nota_4 \xleftrightarrow{1\ tono} nota_5 \xleftrightarrow{1\ tono} nota_6 \xleftrightarrow{1\ tono} notat_7 \xleftrightarrow{1/2\ tono} nota_8$$

Las notas naturales (DO, RE, MI, FA, SOL, LA y SI) obedecen a una escala mayor. Las escalas mayores se nombran a partir de su tonalidad, por ejemplo el conjunto de las notas naturales conforman la escala de *DO mayor*. Una escala mayor está bien determinada si la octava nota y la primera coinciden, es decir son la misma nota pero la última se encuentra una octava por delante de la primer nota de la escala; esto se debe a la forma en que se dan las distancias tonales, en total son doce semitonos (cinco tonos y dos semitonos), lo que coincide con la distancia necesaria para alcanzar la octava superior o inferior de una nota cualquiera. Es posible verificar que las notas naturales obedecen a una escala mayor:

$$C \xleftrightarrow{1\ tono} D \xleftrightarrow{1\ tono} E \xleftrightarrow{1/2\ tono} F \xleftrightarrow{1\ tono} G \xleftrightarrow{1\ tono} A \xleftrightarrow{1\ tono} B \xleftrightarrow{1/2\ tono} C$$

[9] La primera y la última son la misma nota pero de diferentes octavas, una superior a la otra.

A continuación se presentan las escalas mayores cuyas tonalidades son notas naturales.

Tonalidad	Estructura de la escala
Do mayor	$C \xleftrightarrow{1\ tono} D \xleftrightarrow{1\ tono} E \xleftrightarrow{1/2\ tono} F \xleftrightarrow{1\ tono} G \xleftrightarrow{1\ tono} A \xleftrightarrow{1\ tono} B \xleftrightarrow{1/2\ tono} C$
Re mayor	$D \xleftrightarrow{1\ tono} E \xleftrightarrow{1\ tono} F\# \xleftrightarrow{1/2\ tono} G \xleftrightarrow{1\ tono} A \xleftrightarrow{1\ tono} B \xleftrightarrow{1\ tono} C\# \xleftrightarrow{1/2\ tono} D$
Mi mayor	$E \xleftrightarrow{1\ tono} F\# \xleftrightarrow{1\ tono} G\# \xleftrightarrow{1/2\ tono} A \xleftrightarrow{1\ tono} B \xleftrightarrow{1\ tono} C\# \xleftrightarrow{1\ tono} D\# \xleftrightarrow{1/2\ tono} E$
Fa mayor	$F \xleftrightarrow{1\ tono} G \xleftrightarrow{1\ tono} A \xleftrightarrow{1/2\ tono} Bb \xleftrightarrow{1\ tono} C \xleftrightarrow{1\ tono} D \xleftrightarrow{1\ tono} E \xleftrightarrow{1/2\ tono} F$
Sol mayor	$G \xleftrightarrow{1\ tono} A \xleftrightarrow{1\ tono} B \xleftrightarrow{1/2\ tono} C \xleftrightarrow{1\ tono} D \xleftrightarrow{1\ tono} E \xleftrightarrow{1\ tono} F\# \xleftrightarrow{1/2\ tono} G$
La mayor	$A \xleftrightarrow{1\ tono} B \xleftrightarrow{1\ tono} C\# \xleftrightarrow{1/2\ tono} D \xleftrightarrow{1\ tono} E \xleftrightarrow{1\ tono} F\# \xleftrightarrow{1\ tono} G\# \xleftrightarrow{1/2\ tono} A$
Si mayor	$B \xleftrightarrow{1\ tono} C\# \xleftrightarrow{1\ tono} D\# \xleftrightarrow{1/2\ tono} E \xleftrightarrow{1\ tono} F\# \xleftrightarrow{1\ tono} G\# \xleftrightarrow{1\ tono} A\# \xleftrightarrow{1/2\ tono} B$

Tabla 6. Escalas mayores de tonalidad natural.

Las alteraciones que aparecen en estas escalas deben tomarse como sostenidos y no bemoles para que nominalmente aparezcan todas las notas. En música es posible determinar las alteraciones sostenidas que aparecen en estas escalas de tonalidad natural, esto se hace mediante una herramienta conocida como el *círculo de quintas.* Esta regla no aplica para las escalas de DO y FA. Como se puede notar en la tabla 6 cada escala tiene un número único de alteraciones, es decir solo una escala tiene una alteración sostenida (SOL), dos alteraciones (RE), tres (LA), cuatro (MI) y cinco alteraciones (SI); además estas alteraciones se relacionan mediante su "aparición".

Tonalidad	Alteraciones
SOL mayor	$F\#$
RE mayor	$F\# - C\#$
LA mayor	$F\# - C\# - G\#$
MI mayor	$F\# - C\# - G\# - D\#$
SI mayor	$F\# - C\# - G\# - D\# - A\#$

Tabla 7. Alteraciones en las escalas de tonalidad natural.

Como se puede ver cada tonalidad "posterior" (en el orden de la tabla), contiene las alteraciones de la escala "anterior". Las tonalidades conservan una relación posicional: si se busca la posición de la tonalidad siguiente en la escala que se esté mirando se puede ver que siempre es la quinta ($nota_5$); por ejemplo al mirar la tonalidad de SOL mayor se puede ver que RE (tonalidad siguiente), es su quinta nota, de forma análoga al ver la tonalidad de RE mayor se puede ver que LA (tonalidad siguiente), es la quinta de RE, en LA mayor se tiene que MI (tonalidad siguiente), es su quinta, y que en MI mayor la siguiente tonalidad, SI, es también su quinta.

Además de las tonalidades, las alteraciones conservan una relación similar, también por quintas, esto se mira a partir del orden de aparición en las alteraciones: La primera alteración que aparece es FA sostenido (en SOL mayor), luego parece el sostenido de DO (en RE mayor), donde se tiene que es quinta posición de FA, posteriormente aparece el sostenido de SOL (en LA mayor), el cual es la quinta de DO, el siguiente es el sostenido de RE (en MI mayor), que es la quinta de SOL, y finalmente aparece el sostenido de LA (en SI mayor), que resulta quinta de RE.

$$LA \xrightarrow{quinta\ de} RE \xrightarrow{quinta\ de} SOL \xrightarrow{quinta\ de} DO \xrightarrow{quinta\ de} FA$$

Las notas naturales faltantes son MI y SI. Coincidencialmente MI es la quinta nota de LA mayor, y SI es quinta de MI mayor, esto permite que estas dos notas puedan ser integradas en la línea de quintas que conservan las notas naturales de las alteraciones que aparecen en las diferentes escalas mayores de tonalidad natural.

$$SI \xrightarrow{quinta\ de} MI \xrightarrow{quinta\ de} LA \xrightarrow{quinta\ de} RE \xrightarrow{quinta\ de} SOL \xrightarrow{quinta\ de} DO \xrightarrow{quinta\ de} FA \ (*)$$

Cuando se desea conocer las alteraciones de una escala mayor de tonalidad natural se hace uso de la línea de quintas anterior de la siguiente forma: para una tonalidad t se busca la nota anterior a ella según el orden común de las notas (DO, RE, MI, FA, SOL, LA y SI), esta es la primer alteración sostenida en la escala de *t mayor*, las otras se encuentran de manera lineal, de izquierda a derecha, según la línea de quintas $(*)$. Por ejemplo si se quiere conocer rápidamente las alteraciones de la escala de MI *mayor* se busca su nota anterior según el orden común de las notas, es decir RE, luego se busca esta nota en la línea de quintas $(*)$ y a partir de RE, hacia la derecha, todas las notas que se encuentran deben ser sostenidas, incluyendo a RE, en este caso las notas sostenidas en la escala de MI *mayor* son RE, SOL, DO y FA; esto se puede verificar en la tabla 6 que registra las notas que componen las escalas mayores de tonalidad natural (como en este caso), o en la tabla 7 que registra las alteraciones sostenidas que aparecen en algunas de las escalas mayores de tonalidad natural. Esta regla no aplica para las escalas mayores de DO y FA pues en estas escalas no hay alteraciones sostenidas.

Cuando se desea hablar de una escala mayor con tonalidad alterada comúnmente se hace uso de las alteraciones *bemoles* en lugar de los *sotenidos*, por ejemplo no se habla de la escala de *Sol sostenido mayor* sino de la escala de *La bemol mayor* (que según la enarmonía son la misma nota). Estas escalas mayores se conforman de la misma manera que las escalas mayores de tonalidad natural, partiendo de una nota, en este caso *bemol*, que será la *raíz* o *fundamental* de la escala. A continuación se presentan las escalas mayores de tonalidad bemol.

Tonalidad	**Estructura de la escala**
RE bemol	$Db \xleftrightarrow{1\ tono} Eb \xleftrightarrow{1\ tono} F \xleftrightarrow{1/2\ tono} Gb \xleftrightarrow{1\ tono} Ab \xleftrightarrow{1\ tono} Bb \xleftrightarrow{1\ tono} C \xleftrightarrow{1/2\ tono} Db$
MI bemol	$Eb \xleftrightarrow{1\ tono} F \xleftrightarrow{1\ tono} G \xleftrightarrow{1/2\ tono} Ab \xleftrightarrow{1\ tono} Bb \xleftrightarrow{1\ tono} C \xleftrightarrow{1\ tono} D \xleftrightarrow{1/2\ tono} Eb$
SOL bemol	$Gb \xleftrightarrow{1\ tono} Ab \xleftrightarrow{1\ tono} Bb \xleftrightarrow{1/2\ tono} Cb \xleftrightarrow{1\ tono} Db \xleftrightarrow{1\ tono} Eb \xleftrightarrow{1\ tono} F \xleftrightarrow{1/2\ tono} Gb$
LA bemol	$Ab \xleftrightarrow{1\ tono} Bb \xleftrightarrow{1\ tono} C \xleftrightarrow{1/2\ tono} Db \xleftrightarrow{1\ tono} Eb \xleftrightarrow{1\ tono} F \xleftrightarrow{1\ tono} G \xleftrightarrow{1/2\ tono} Ab$
SI bemol	$Bb \xleftrightarrow{1\ tono} C \xleftrightarrow{1\ tono} D \xleftrightarrow{1/2\ tono} Eb \xleftrightarrow{1\ tono} F \xleftrightarrow{1\ tono} G \xleftrightarrow{1\ tono} A \xleftrightarrow{1/2\ tono} Bb$

Tabla 8. Escalas mayores de tonalidad bemol.

Las alteraciones que aparecen en estas escalas se toman como *bemoles* y no *sostenidas* para que todas las notas aparezcan nominalmente. Como se puede ver en la tabla 8 la escala de SOL bemol mayor tiene la alteración Do bemol (Do ♭), según la escala temperada esta nota es inexistente pues Do ♭ corresponde a una nota que se encuentra medio tono por detrás de DO, y según las distancias tonales entre las notas aquella que está medio tono por detrás de DO es SI, nota natural, es decir Do ♭ = SI. También es posible encontrar una relación entre estas escalas y las alteraciones de las mismas, según su aparición, como se hizo en las escalas de tonalidad natural. Además en cada escala también hay una cantidad única de alteraciones, es decir solo una escala tiene dos alteraciones, tres alteraciones, cuatro y cinco.

Tonalidad	**Alteraciones**
SI bemol	$Bb - Eb$
MI bemol	$Bb - Eb - Ab$
LA bemol	$Bb - Eb - Ab - Db$
RE bemol	$Bb - Eb - Ab - Db - Gb$
SOL bemol	$Bb - Eb - Ab - Db - Gb - Cb$

Tabla 9. Alteraciones en las escalas de tonalidad bemol.

Como con las alteraciones en las escalas de tonalidad natural cada tonalidad "posterior" contiene las alteraciones de la escala "anterior" según el orden de la tabla. También se conserva la distancia de "quintas" entre estas tonalidades así como en las tonalidades naturales: SI bemol es quinta nota en la escala de MI bemol, MI bemol es quinta en LA bemol, LA bemol es quinta en RE bemol y RE bemol es quinta en SOL bemol. Así mismo las alteraciones conservan esta distancia de "quintas", esto permite generar una línea de quintas similar a como se hizo con las alteraciones en las escalas de tonalidad natural.

$$SIb \xrightarrow{quinta\ de} MIb \xrightarrow{quinta\ de} LAb \xrightarrow{quinta\ de} REb \xrightarrow{quinta\ de} SOLb$$

Las notas naturales, es decir sin la alteración *bemol*, también conservan esta distancia de "quintas".

$$SI \xrightarrow{quinta\ de} MI \xrightarrow{quinta\ de} LA \xrightarrow{quinta\ de} RE \xrightarrow{quinta\ de} SOL$$

Y añadiendo las notas naturales faltantes (DO y FA) se obtiene la línea de quintas $(*)$.

$$SI \xrightarrow{quinta\ de} MI \xrightarrow{quinta\ de} LA \xrightarrow{quinta\ de} RE \xrightarrow{quinta\ de} SOL \xrightarrow{quinta\ de} DO \xrightarrow{quinta\ de} FA \ (*)$$

Para conocer rápidamente las alteraciones *bemol* en una escala mayor de tonalidad bemol también se hace uso de la línea $(*)$ de la siguiente manera: para una tonalidad t *mayor*, donde *t* es una nota *bemol*, las alteraciones de su escala van desde SI hasta la nota siguiente a t según la línea $(*)$ de izquierda a derecha, por ejemplo si se quiere saber las alteraciones de RE bemol mayor se recorre, de izquierda a derecha la línea $(*)$ (desde el SI hasta SOL que es la nota que le sigue a RE en la línea de quintas), por tanto en la escala de RE bemol mayor deben estar las alteraciones SI ♭, MI ♭, LA ♭, RE ♭ y SOL ♭; este resultado puede verificarse en las tablas 8 y 9.

La relación distancial en quintas de todas las doce tonalidades permite una organización circular de las mismas como se muestra a continuación.

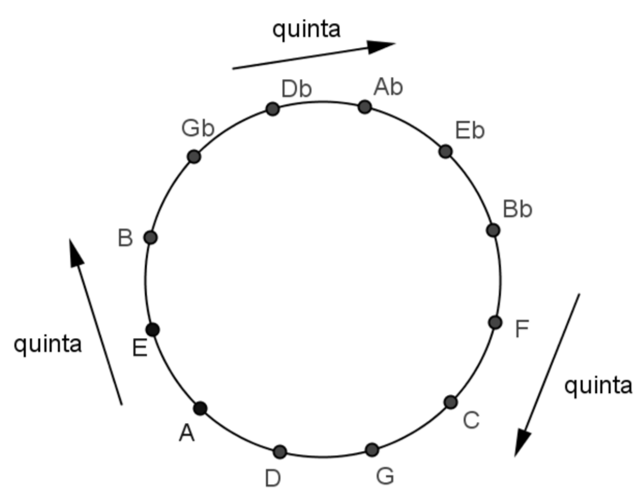


Figura 16. Círculo de quintas.

Hay que recordar que DO ♭ = SI y que SOL ♭ es quinta de Do ♭.

Al escribir una pieza musical en el pentagrama bajo una tonalidad diferente de DO mayor se convierte en todo un trabajo denotar todas las alteraciones que aparecen según la escala, para evitar esto en la escritura musical se encuentra la *armadura*. La *armadura* es el conjunto de alteraciones que se pueden encontrar en un pentagrama, durante toda la pieza; esta armadura se encuentra justo después de la clave que se trabaje (en este caso clave de SOL). Estas alteraciones se ubican en las líneas y espacios de las notas que deben ser alteradas y deben escribirse en el orden de aparición según las tablas 6 y 8, justo después de la clave y antes de la firma de tiempo. En la tabla 9 se presentan las armaduras correspondientes a cada tonalidad mayor. Dependiendo del lugar en el que se encuentre cada alteración (línea o espacio) todas las notas en el pentagrama cuyo nombre es igual a las notas que se escriban sobre ese lugar deben ser alteradas como indica la armadura.

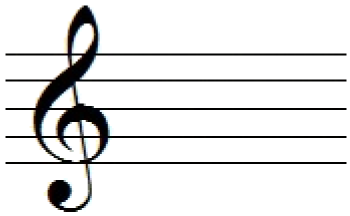
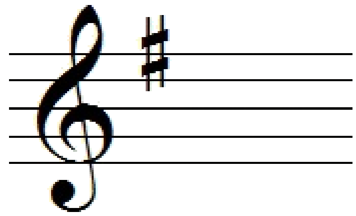
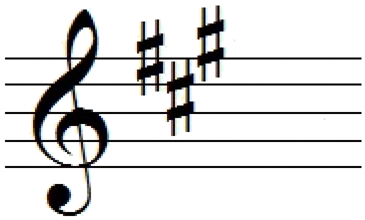
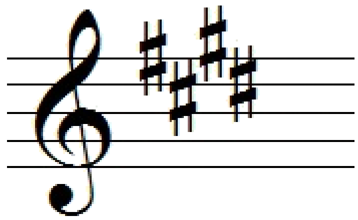
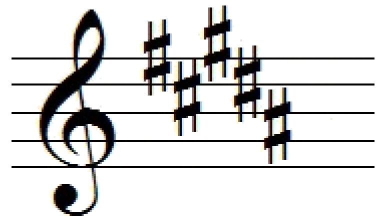
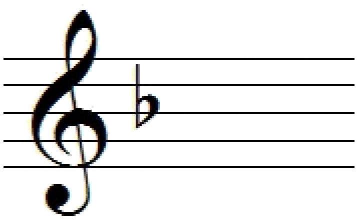
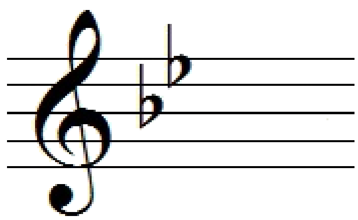
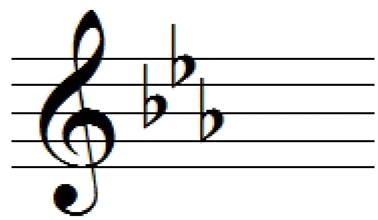
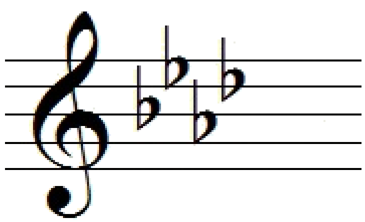
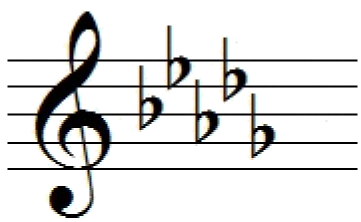
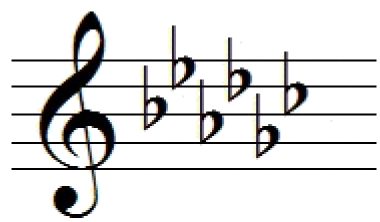
 DO mayor	 SOL mayor	 RE mayor
 LA mayor	 MI mayor	 SI mayor
 FA mayor	 SI bemol mayor	 MI bemol mayor
 LA bemol mayor	 RE bemol mayor	 SOL bemol mayor

Tabla 10. Armaduras de las escalas mayores.

Por ejemplo si una partitura está escrita bajo la tonalidad de MI bemol mayor, y la firma de tiempo es cinco medios, dicha partitura deberá empezar de la siguiente manera.

Figura 17. Cinco medios en MI bemol mayor.

El uso práctico de las armaduras se encuentra en temas donde la tonalidad exige escribir constantemente alguna(s) alteración(es). La siguiente es un ejemplo de partitura sin armadura (o en armadura de DO mayor) con alteraciones.

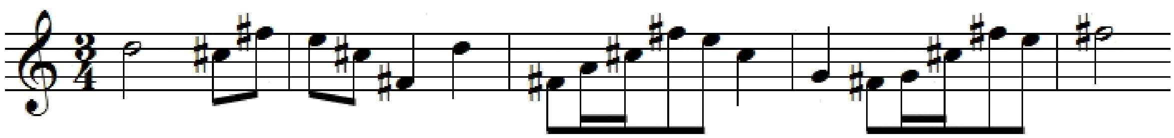


Figura 18. Partitura sin armadura.

Nótese que las alteraciones son siempre FA y DO sostenidos, lo que corresponde a la tonalidad de RE mayor. Esta partitura puede simplificar su escritura si se usa la armadura de la tonalidad correspondiente.

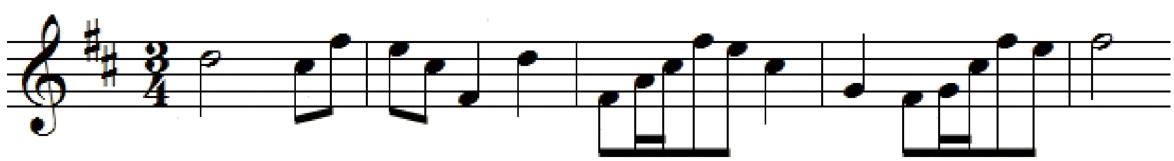


Figura 19. Partitura con armadura.

Además de las alteraciones *bemol* y *sostenido* se cuenta con una herramienta que permite dejar una nota alterada en su sonido natural, esta herramienta es el *becuadro*. Si en un pentagrama adaptado a una tonalidad definida en la cual aparece una alteración permanente es posible que se ejecute la nota natural de la alteración en un momento determinado. Por ejemplo, si se tiene que un pentagrama está en la tonalidad de LA mayor, en donde se tienen las alteraciones G, C y F sostenidos, y se desea en un momento tocar un C, pero natural, se puede escribir la nota con el símbolo del becuadro, como se muestra en la figura.

Figura 20. DO becuadro en el pentagrama.

Igualmente con los sostenidos y bemoles, el becuadro actúa durante todo el compás en el espacio o línea en el que se haya escrito.

1.2. Marco Matemático

Desde la escuela los estudiantes asocian la idea de operar a procedimientos reglados a partir de dos cantidades base de las cuales se obtiene una tercer cantidad que debe ser única. Cada conjunto numérico, bajo una operación específica, trae consigo interpretaciones diferentes, por ejemplo en los números naturales con la suma $5+3$ puede interpretarse como tomar dos conjuntos disyuntos de cinco y tres elementos respectivamente, hacer su unión y determinar el cardinal de este nuevo conjunto, dicho cardinal es el resultado de la operación $5+3$, en los racionales positivos con la multiplicación $\frac{5}{2}\times\frac{3}{4}$ puede interpretarse como tomar cinco medios de una unidad, y a lo obtenido calcularle sus tres cuartas partes consiguiendo así la cantidad que representa el resultado de la operación deseada, sin embargo la idea de operación puede llevarse a una interpretación mucho más amplia. Lluis (2006) hace un recuento histórico de los resultados de abstraer el concepto de operación binaria, también conocida como *ley de composición*; finalmente se puede definir una operación binaria como.

Definición 1.1. Dado un conjunto A, una *operación binaria* (o simplemente operación) en el conjunto es una función $*$ que va del producto cartesia $A \times A$ al conjunto A.

$$*: A \times A \rightarrow A$$

Teniendo presente las definiciones de producto cartesiano (usual) y de función se puede entender que una operación binaria no es más que la *asignación de un único elemento a cada par ordenado de elementos del mismo conjunto*. Esto permite modificar ligeramente la notación de $*(a,b)=c$ a $a*b=c$, con $a,b,c \in A$, y además este c es único (por ser $*$ una función).

En las operaciones es común encontrar el conjunto de propiedades que ella cumple, este es el fundamento de lo que se conoce actualmente como *estructuras algebraicas*. Existe un gran número de propiedades que puede cumplir una operación, entre ellas se destacan la *asociativa, existencia de elemento neutro, existencia de inversos* y la *conmutativa*; las tres primeras son necesarias para la definición de una de las estructuras más nombradas en el álgebra moderna: la estructura de *grupo*. Sus propiedades se mencionan a continuación.

- *Asociativa:* $(\forall a,b,c \in A)\big((a*b)*c = a*(b*c)\big)$
- *Existencia del elemento neutro:* $(\exists e \in A)(\forall a \in A)(a*e = e*a = a)$
- *Existencia de inversos:* $(\forall a \in A)(\exists b \in A)(a*b = b*a = e)$

La propiedad de los inversos solo tiene sentido si la estructura tiene un elemento neutro, por lo tanto la primera depende de la segunda. El elemento b de la propiedad de los inversos puede escribirse como $-a$ cuando se usa notación aditiva y a^{-1} cuando se usa notación multiplicativa. Otra propiedad que se destaca es la conmutativa.

- *Conmutativa:* $(\forall a,b \in A)(a*b = b*a)$

Definición 1.2. Un *grupo* es una dupla $(G,*)$ donde G es un conjunto no vacío, y $*$ es una operación binaria en el conjunto que cumple las propiedades *asociativa*, *existencia de elemento neutro* y *existencia de inversos*; si además la operación es *conmutativa* se dice que $(G,*)$ es un *grupo abeliano* o *conmutativo*.

Bajo este concepto se desarrollaron nuevos estudios a comienzos del siglo XIX en lógica (Boole), vectores y cuaternios (Hamilton), matrices (Cayley), entre otros. Este nuevo enfoque dio lugar a tres corrientes principales:

1. La *Teoría de Números* desarrollada por Dirichlet, Kummer, Kronecker, Dedekind y Hilbert, a partir del estudio de Gauss.

2. El surgimiento del *Álgebra Lineal* en diferentes lugares del mundo como Inglaterra por Sylvester y Clifford, en Estados Unidos por Pierce, Dickson y Wedderburn, o Alemania y Francia por Weirstrass , Dedekind, Frobenius, Molien, Laguerre y Cartan.
3. La *Teoría de Grupos*. Aun cuando su surgimiento es atribuido principalmente a Galois, fue Jordan quien, a partir del estudio de Galois y otros, desarrolló gran parte de la teoría, introdujo la idea de *homomorfismo* e inició con el estudio de grupos infinitos (más adelante Klein, Lie y Poincaré profundizaron en este estudio). Como resultado de todo esto se "reenfocó" el interés de la teoría hacia la operación binaria y no a la naturaleza de los elementos de la estructura.

Entre algunos de los teoremas más renombrados en grupos están.

Teorema 1.1. El elemento neutro de un grupo es único.

Teorema 1.2. El inverso de todo elemento de un grupo es único.

Teorema 1.3. Dados $(G,*)$ un grupo y $a, b, c \in G$, si $a = b$ entonces $a * c = b * c$ y $c * a = c * b$.

Teorema 1.4. Dados $(G,*)$ un grupo y $a, b, c \in G$, si $a * b = a * c$ o si $b * a = c * a$ entonces $b = c$.

Teorema 1.5. Dados $(G,*)$ un grupo y $a \in G$, si $a^{-1} \in G$ es el inverso de a entonces $(a^{-1})^{-1} = a$.

Teorema 1.6. Dados $(G,*)$ un grupo y $a, b \in G$, $a = b$ si y solo si $a^{-1} = b^{-1}$.

Teorema 1.7. Dado $(G,*)$ un grupo, si $a, b \in G$ entonces $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

Como ejemplos de *grupos* muy conocidos se tiene $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{Q}^*,\times)$, $(\mathbb{R}^*,\times)$, $(\mathbb{C}^*,\times)$, $(\mathbb{Q}^+,\times)$, $(\mathbb{R}^+,\times)$. Además de estos Pérez (2008) presenta otro ejemplo no tan conocido, el *grupo de Bool* que parte de un conjunto A no vacío, la dupla $(\wp(A),\triangle)$ es un grupo, en particular abeliano, donde $\wp(A)$ es el conjunto de los subconjuntos de A y $\triangle$ es la diferencia simétrica.

Dado un grupo $(G,*)$ se define el conjunto $M_{m\times n}G$ que es el conjunto de matrices de dimensión $m\times n$ con entrada en el conjunto G, se define la operación $*'$ en este nuevo conjunto como

$$*' : M_{m\times n}G \times M_{m\times n}G \longrightarrow M_{m\times n}G$$
$$(A,B) \longrightarrow C = A *' B$$

tal que para todo $a_{ij}\in A$, $b_{ij}\in B$ y $c_{ij}\in C$ se tiene que $c_{ij}=a_{ij}*b_{ij}$, con $1\leq i\leq m$ y $1\leq j\leq n$; se puede demostrar que $(M_{m\times n}G,*')$ es un grupo; en particular si $(G,*)$ es un grupo abeliano $(M_{m\times n}G,*')$ también lo es.

Otro ejemplo no tan familiar para la mayoría es el conjunto de matrices cuadradas con entrada en los reales tales que el determinante de toda matriz es diferente de cero y la operación en este conjunto es la multiplicación usual de matrices.

Uno de los ejemplos más estudiados en la *Teoría de Grupos*, y que son fundamentales en el desarrollo de este trabajo, son los $\mathbb{Z}_n$ conocidos como los *enteros módulo n*. Estos se pueden construir mediante la congruencia de enteros módulo n donde dado un $a\in\mathbb{Z}$.

$$[a]=\{z\in Z|a\equiv z\; mod\; n\}.$$

Definición 1.3. El conjunto de *congruencias módulo n,* notado como $\mathbb{Z}_n$ es el conjunto de $[a]$ como se definió anteriormente con $a\in\mathbb{Z}$.

Por ejemplo si $n=2$, $[0]$ es el conjunto de los enteros pares y $[1]$ es el conjunto de los impares. De los $\mathbb{Z}_n$ se tienen resultados importantes, a continuación se presentan algunos de estos.

Teorema 1.8. $[a]=[b]$ si y solo si $a\equiv b\; mod\; n$.

Teorema 1.9. $\mathbb{Z}_n$ tiene exactamente n elementos.

Teorema 1.10. Si $a \in \mathbb{Z}$ entonces $[a] = [b]$ para algún b tal que $0 \leq b < n$.

Teorema 1.11. Si $0 \leq a < b < n$ entonces en $\mathbb{Z}_n$ se tiene que $[a] \neq [b]$.

A estos conjuntos se les dota de una operación $\oplus$ proveniente de la suma de enteros definida como

$$\oplus : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n$$
$$([a],[b]) \longrightarrow [a+b]$$

Atendiendo a la notación de operación se tiene que $[a] \oplus [b] = [a+b]$; se puede demostrar fácilmente que $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ es un grupo abeliano.

Una vez entendido que los elementos de los $\mathbb{Z}_n$ son conjuntos se cambia la notación de tales elementos como

$$[a] \approx a$$

De allí si se tiene que $a, b \in \mathbb{Z}_n$ la operación $a \oplus b$ se denota como $a + b$, donde $+ \approx \oplus$. Los elementos de $\mathbb{Z}_n$ se representan por el menor entero positivo de cada conjunto a excepción del conjunto de elementos congruentes con cero que se representa justamente por 0.

Estos grupos son también el ejemplo más común al hablar de *grupos cíclicos*. Dado $(G,*)$ un grupo y $a \in G$, se define el conjunto $\langle a \rangle$ como

$$\langle a \rangle = \{b \in G | b = a^n, n \in \mathbb{Z}\}$$

Donde a^n es $a * a * \ldots * a$ donde a aparece n veces. A partir de este conjunto se define lo que es un *grupo cíclico*.

Definición 1.4. Se dice que $(G,*)$ es un *grupo cíclico* si existe un $g \in G$ tal que $\langle g \rangle = G$, g se conoce como *generador* del grupo.

Para todo $(\mathbb{Z}_n, +)$ se puede ver que 1 es generador del grupo, pero no necesariamente es el único, esto lleva al siguiente teorema.

Teorema 1.12. En $(\mathbb{Z}_n, +)$ si $(k, n) = 1$ entonces $\langle k \rangle = \mathbb{Z}_n$.

Aun cuando el estudio sobre los grupos abelianos es fuerte también se cuentan con ejemplos de grupos no conmutativos bastante importantes, entre los más destacados está el *grupo de isometrías* también conocido como *grupo diedro* o *diédrico.* El nombre de *isometrías* proviene precisamente de la transformación geométrica en el plano que lleva este nombre, más exactamente aplicado a polígonos regulares.

Supóngase que se tiene un triángulo equilátero ABC, sus isometrías son seis: la rotación de $120°$, la de $240°$, la de $360°$ (que finalmente es la identidad, también denotada por la rotación de $0°$), la reflexión por la recta que pasa por el vértice A y el punto medio del lado BC (llámese $l1$), otra por la recta que pasa por el vértice B y el putno medio del lado AC (llámese $l2$), y finalmente la que se hace por la recta que pasa por el vértice C y pasa por el punto medio de AB (llámese $l3$).

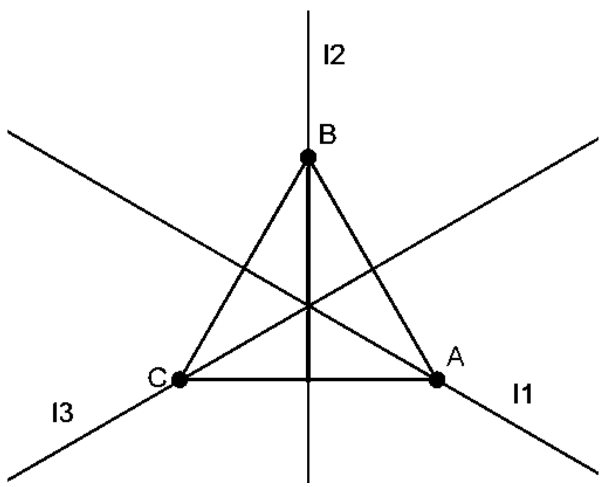


Figura 21. Isometrías del triángulo equilátero.

La dupla conformada por el conjunto de permutaciones de los vértices bajo las isometrías y la composición de las mismas conforman el grupo de *isometrías del triángulo*. Este grupo también puede definirse sin necesidad de figuras geométricas o funciones, (Pérez, 2008) define el grupo diedro a partir de dos elementos que cumplen ciertas condiciones especiales.

Definición 1.5. Se llama *grupo diedro*, denotado D_n, al grupo donde existe un elemento a de orden n, un b de orden 2 y se tiene que $bab = a^{-1}$.

Teorema 1.13. El grupo diedro D_n es de orden $2n$.

Demostración. El decir que el orden de D_n es $2n$ es simplemente decir que tiene esa cantidad de elementos. Por definición existen n elementos correspondientes a las potencias de a

$$a, a^2, a^3, \dots, a^n = e$$

Además de estos elementos se tienen otros de la forma $a^k b$, para todo $0 < k < n$, si este elemento coincide con alguna de las potencias de a se tendría que $a^k b = a^m$, para algún $0 < m < n$, de esto último se tiene

$$\begin{gathered} a^k b = a^m \\ a^{n-k}(a^k b) = a^{n-k} a^m \\ (a^{n-k} a^k) b = a^{n+m-k} \\ a^n b = a^n a^{m-k} \\ b = a^{m-k} \end{gathered}$$

como m y k son números entre 0 y n, por la tricotomía se pueden dar tres casos: el primero es que $m = k$, de esto se llegaría a que b es el elemento neutro lo cual es erróneo, el segundo es que $m > k$ de donde el exponente de a sería un número positivo diferente de cero, como b es de orden dos a^{m-k} también debe serlo, es decir que $a^{2(m-k)} = e$, si este nuevo exponente excede o no a n se llega a una contradicción porque el elemento a tendría dos órdenes distintos donde uno no es múltiplo del otro, si el nuevo exponente es igual a n se tendría otro contradicción pues n puede ser un número impar; para el caso en que $m < k$ existe un $r \in \mathbb{Z}^+$ tal que $m - k = -r$, lo que permite modificar la última igualdad a

$$\begin{gathered} b = a^{-r} \\ b = (a^{-1})^r \\ b = (a^{n-1})^r \end{gathered}$$

$$b = a^{r(n-1)}$$

de esto último se tiene que a es de orden $2r(n-1)$ lo que implicaría que esta última expresión es un múltiplo de n, en particular cuando $n = 7$ y $r = 1$ esto no es cierto, por tanto se debe tener que $a^k b \neq a^m$ para todo $0 < k < n$ y $0 < m < n$, de esto se tienen otros $n - 1$ elementos, y con el elemento b son es total $2n$ elementos en D_n.

■

La idea de observar el comportamiento de una operación binaria más que los elementos del conjunto donde se definió dicha operación conllevó a determinar una manera de "ensamblar" estructuras cuyas operaciones tenían precisamente el mismo comportamiento, en respuesta de esto nace la idea de *isomorfismo* de grupos.

Definición 1.6. Un *isomorfismo* entre dos grupos $(G,*)$ y $(G',*')$ es una función $f: A \to B$ tal que

a. f es biyectiva.
b. Para todo par de elementos $a, b \in G$ se cumple que $f(a * b) = f(a) *' f(b)$.

Si existe un *isomorfismo* entre dos grupos se dice que dichas estructuras son *isomorfas*, esto se denota como $G \cong G'$. Un ejemplo de *isomorfismos* entre grupo se encuentra en el conjunto de las raíces cuartas de la unidad en los complejos $U_4 = \{1, -1, i, -i\}$ que forman un grupo con la multiplicación usual de complejos y el grupo $(\mathbb{Z}_4, +)$ bajo el función

$$\begin{aligned} f: U_4 &\longrightarrow \mathbb{Z}_4 \\ 1 &\longrightarrow 0 \\ i &\longrightarrow 1 \\ -1 &\longrightarrow 2 \\ -i &\longrightarrow 3 \end{aligned}$$

Los *isomorfismos* no solo permiten "clasificar" los grupos sino que además permite dotar de una estructura a un grupo cualquiera, esta idea se aplicará más adelante.

Los grupos también pueden actuar sobre un conjunto no vacío que no necesariamente cuenta con una operación propia, esta idea da lugar a la siguiente definición.

Definición 1.7. Dados $(G,*)$ un grupo y X un conjunto no vacío, una *acción del grupo sobre el conjunto* es una función $\circledast$ definida como

$$\circledast : G \times X \to X$$

Tal que

i. $(\forall g, h, \in G)(\forall x \in X)(g \circledast (h \circledast x) = (g * h) \circledast x)$
ii. $(\forall x \in X)(e \circledast x = x)$

En la segunda condición el elemento e es el elemento neutro del grupo. Para efecto de tratamientos posteriores se modificará ligeramente la definición al dejar los elementos del grupo a la derecha y no a la izquierda como se tiene en esta definición, las condiciones se conservan.

1.3. Música y Matemáticas, algunos antecedentes

La teoría musical expuesta anteriormente se expuso a numerosos cambios regidos por consideraciones físicas (fenómenos del sonido), esta ha sido la relación más conocida entre Matemáticas y Música. A continuación se presenta algunas de estas consideraciones a través de la historia, desde los Mesopotámicos, pasando por Pitágoras, Descartes, La familia Bernoulli, entre otros célebres personajes de las Matemáticas, quienes se interesaron por explicar la sonoridad de ciertas frecuencias, mejorar el sistema de las escalas, entender el comportamiento de los cuerpos usados en Música (cuerdas, tubos y placas), y técnicas de composición.

Romero (s.f.) contempla la posibilidad de que alrededor del siglo VI a.C. ya los Mesopotámicos conocían la relación entre el sonido de una cuerda tensada y las proporciones al modificar su longitud; sin embargo esta primera relación histórica entre Matemáticas y Música ha sido más atribuida a Pitágoras. Según se relata Pitágoras inició su trabajo sobre el sonido y las proporciones al pasar cerca de una herrería donde escuchó una relación sonora en los golpes de ciertos martillos sobre un yunque, se fijó en su peso y encontró que el más pequeño era de seis unidades de peso, el más grande era del doble de peso del más pequeño (doce), y que los otros dos eran de pesos ocho y nueve, que resultaban siendo la media armónica y la media aritmética respectivamente de los martillos de pesos seis y doce. Trasladó esta situación a cuerdas y notó que la relación existente entre los pesos de los martillos puede "recrearse" al modificar la longitud de la cuerda con las mismas proporciones que guardaban los martillos: reducir la longitud a la mitad (martillo de seis), a dos tercios (martillo de ocho) y tres cuartos (martillo de nueve); los sonidos que se producían en estas longitudes eran agradables al ejecutarse dos simultáneamente. Los sonidos de las cuerdas de una unidad de longitud y la de media unidad se relacionaban porque el sonido en la segunda era una octava por encima del sonido de la cuerda de una unidad, el sonido de la cuerda de tres cuartos de unidad es la quinta de la de una unidad y la de dos tercios es la cuarta de la de una unidad[10].

A partir de la proporción de quinta (dos tercios) se generó la escala musical natural (DO, RE, MI, FA SOL, LA y SI). Partiendo de una cuerda tensada se buscaba la ubicación de su quinta, a esta nueva nota se buscaba su quinta y así sucesivamente; en caso de que la proporción obtenida superase la octava, es decir quede a una proporción menor a un medio, la cuerda se duplicaba de longitud, o dicho de otra manera la proporción obtenida que fuese menor a un medio era multiplicada por dos. Con este método las proporciones para las notas naturales en una cuerda queda así:

DO	RE	MI	FA	SOL	LA	SI	DO
1:1	8:9	64:81	3:4	2:3	16:27	128:243	1:2

Donde el primer DO es el sonido de la cuerda. La razón entre dos notas consecutivas, de izquierda a derecha, es de 9:8, lo que se definió como el *tono*, pero esta razón no es la misma para las parejas MI – FA y SI – DO, en donde la razón es de 256:243, llamado *hemitono*, a diferencia de la escala actual avanzar dos *hemitonos* no es equivalente a

[10] Anteriormente (en el tiempo de Pitágoras), las distancias sonoras de octava, quinta y cuarta se conocían como *diapasón*, *diapente* y *diatesarón*.

avanzar un tono, y a medida que se avanza de octavas esta desviación se acumula. Este problema fue resuelto hasta el siglo XVII.

La vibración de la cuerda tocada es el fundamento de la *serie armónica* (de ahí su nombre), pues cuando una cuerda de longitud l vibra genera, además de una onda de esta longitud, ondas de longitud $l/2$, $l/3$, $l/4$, etc., sin embargo la onda de mayor longitud es la que domina en volumen sobre las otras vibraciones las cuales se conocen como *armónicos*; para el oído humano los *armónicos* son casi imperceptibles, pero estos son los que permiten diferenciar una misma nota tocada por dos instrumentos diferentes, como un piano y una trompeta por ejemplo.

A partir de esto Descartes escribió *El Compendio de Música* aproximadamente en 1618, a petición de Isaac Beeckman quién retó a Descartes a dar una explicación sobre las proporciones armónicas de las vibraciones en una cuerda. En este trabajo se explica con mayor detenimiento la naturaleza de los armónicos y con esto dio base para posteriores trabajos sobre lo que se conoce en física como *resonancia* que es básicamente la superposición de vibraciones.

Años más tarde el fraile Mersenne se basa en la progresión geométrica de razón $\sqrt[12]{2}$, usada por el príncipe Zhu Zaiyu de la dinastía Ming, para escribir nuevas reglas de afinación en busca de evitar la modificación de esta en los instrumentos para ejecutar piezas de diferente tonalidad (según el conocimiento musical pitagórico que regía en aquel entonces), a Mersenne se le atribuye, entre otras, las leyes de la cuerda vibrante y la composición de su obra *Armonía Universal*. Esta razón ($\sqrt[12]{2}$) determinaría la nueva medida del *semitono* o nuevo *hemitono*, y así permitir que el tono equivalga a dos semitonos lo que desaparecería la desviación que se encontraba en las razones de tono y *hemitono*, propuestas en tiempos de Pitágoras, partiendo la octava en doce partes iguales. Aunque ninguno de estos dos personajes popularizó esta nueva *escala musical*, el encargado de esto fue el célebre compositor Bach mediante su obra *El Clave Bien Temperado.*

Con esta nueva distribución de la escala se perdían las proporciones justas de cuarta y quinta determinadas por Pitágoras.

Nota	**Frecuencia**
DO	f
DO♯	$f * 2^{\frac{1}{12}}$
RE	$f * 2^{\frac{2}{12}}$
RE♯	$f * 2^{\frac{3}{12}}$
MI	$f * 2^{\frac{4}{12}}$
FA	$f * 2^{\frac{5}{12}}$
FA♯	$f * 2^{\frac{6}{12}}$
SOL	$f * 2^{\frac{7}{12}}$
SOL♯	$f * 2^{\frac{8}{12}}$
LA	$f * 2^{\frac{9}{12}}$
LA♯	$f * 2^{\frac{10}{12}}$
SI	$f * 2^{\frac{11}{12}}$
DO	$2f$

Tabla 11. Frecuencias en la escala temperada.

El trabajo de Mersenne y el de Galileo, ambos sobre cuerdas vibrantes, determinaron las leyes de frecuencia para cuerdas, donde básicamente se tiene que la frecuencia está en relación directa con la tensión e inversa con la longitud y la densidad lineal. Más adelante estas leyes desembocaron en la expresión:

$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Donde L es la longitud de cuerda, T la tensión y μ la densidad lineal (masa por unidad de longitud). En adelante muchos físicos y matemáticos se dieron a la tarea de explicar el movimiento de la cuerda vibrante. El primero en dar una solución formal fue Taylor quien propuso un modelo que se apoyaba en la idea de que todo punto en la cuerda alcanzaba el reposo en tiempos iguales, sin embargo su modelo no era del todo correcto, este solo tiene validez cuando se tiene un peso fijo en el punto medio de la cuerda. Este problema llegó hasta la familia Bernoulli, más exactamente a Johann y a su hijo Daniel, quienes con su trabajo concluyen que el movimiento de una cuerda vibratoria se logra mediante la superposición de infinitas vibraciones producidas por movimientos armónicos simples, logrando la expresión

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \sin(ix)\cos(it)$$

Donde $y = y(x,t)$ es la posición vertical de la partícula y se encuentra en función del tiempo t y de la posición de reposo x. Sin embargo no se pudo demostrar este hecho, lo cual fue logrado por el matemático Jean le Rond D'Alembert en 1746. Por medio del trabajo de Taylor y la segunda ley de Newton, D'Alembert dedujo la ecuación

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = k^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Donde la constante k depende de las características físicas de la cuerda. Esta ecuación se sujeta a unas condiciones de contorno: $y(0,t) = y(L,t) = 0$, o en otras palabras los extremos de la cuerda se fijan en el origen del sistema de referencia y en el punto $(L,0)$. Además se supone que la trayectoria inicial de la cuerda, antes de ser liberada es $y = f(x)$, con lo que D'Alembert determinó que el movimiento de una cuerda vibrante está determinado por la ecuación

$$y(x,t) = \frac{1}{k}\left(f\left(x + \frac{t}{k}\right) + f\left(x - \frac{t}{k}\right)\right)$$

Euler aportó a este hecho diciendo que a partir de la periodicidad de $f(x)$ se tiene que $y(x,t)$ debía ser de periodo $2L\sqrt{\mu/T}$.

Posteriormente Jean Baptiste Joseph Fourier, mediante su famosa serie trigonométrica propone en 1822 una nueva solución al movimiento de la cuerda vibrante, dada por:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left(P_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + Q_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\right)$$

De aquí se puede demostrar que la frecuencia y periodo de la vibración en una cuerda es

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{\tau}{d\pi r^2}}$$

Con L la longitud de cuerda, τ tensión, d densidad y r el radio. Esto permite encontrar que el movimiento es una suma de submovimientos vibratorios de periodos $T, \frac{T}{2}, \frac{T}{3}, \ldots$, y frecuencias $f, 2f, 3f, \ldots$

Además de buscar un modelo para comprender la naturaleza del sonido, la relación entre Música y Matemáticas se ha afianzado con el uso de cuentas para crear formas de composición, como ejemplo de esto se encuentra el *Dodecafonismo* el cual es una forma de composición atonal, es decir que no se tiene una nota o escala fundamental sino que las doce notas son tratadas con la misma importancia. Su creador fue el compositor Arnold Schönberg quien presentó esta idea de composición durante una conferencia dictada en 1923, en Los Ángeles.

La relación entre Matemáticas y este método de composición se encuentra mediante las cuatro posiciones que puede tomar una serie dodecafónica que es básicamente la escala temperada en un orden aleatorio; estas cuatro posiciones son: la *fundamental* que es básicamente respetar el orden preestablecido al momento de componer la obra, la *retrogradación* que es la serie en orden contrario (de atrás hacia adelante), la *inversión* que es el cambio de distancia tonal tomando como referencia la primer nota, a partir de la segunda se mira la distancia tonal de cada nota en la serie respecto a la primer nota y se invierte su sentido, si la distancia es ascendente hacia la segunda nota en la *inversión* de la serie la distancia se toma como descendente para encontrar la nueva nota en la serie invertida; y finalmente la *retrogradación invertida*, *inversión retrógrada* o *retrogradación con inversión*, que es básicamente la retrogradación de la serie invertida (aunque el orden de ambas posiciones para conseguir la *inversión retrógrada* no interviene en el resultado, como se verá más adelante).

Como ejemplo se presenta la serie

SOL – RE♯ – FA♯ - LA – LA♯ - DO – SOL♯ - RE – MI – DO♯ - FA – SI

De la cual se pretende crear una pieza, por lo tanto esta será su posición *fundamental*. Para la *retrogradación* se escribe la serie de atrás hacia adelante, es decir

SI – FA – DO♯ - Mi – RE – SOL♯ - DO – LA♯ - LA – FA♯ - RE♯ - SOL

Para la *inversión* se parte de la primera nota de la *fundamental* (SOL), se mira su distancia tonal respecto a cada una de las demás notas y se invierte el sentido de esta distancia[11]. La primera inversión se aplica a la segunda nota (RE♯), la cual tiene una distancia de dos tonos hacia atrás respecto a la primer nota, por tanto partiendo de SOL, e invirtiendo el sentido de la distancia, se avanza dos tonos lo que resulta en la nota SI. Este mismo procedimiento aplicado a las 10 notas restantes genera la serie *invertida*

SOL – SI – SOL♯ - FA – MI – RE – FA♯ - DO – LA♯ - DO♯ - LA – RE♯

Finalmente la *inversión retrógrada* se obtiene mediante la retrogradación de la serie invertida, obteniendo

RE♯ - LA – DO♯ - LA♯ - DO – FA♯ - RE – MI – FA – SOL♯ - SI – SOL

Estas series se determinan por medio de una asignación numérica a cada nota, renombrando las doce notas de la escala temperada, en orden, con los números del 0 al 11 en el orden

[11] Para dos notas se puede determinar dos distancias tonales teniendo en cuenta el comportamiento cíclico de las notas. Para la *inversión* se toma la menor distancia y así se puede determinar si la distancia es ascendente (que se debe avanzar cierta cantidad de semitonos), o descendente (bajar semitonos).

natural, es decir que DO es 0, DO$\sharp$ es 1, y así hasta SI con 11. Numéricamente la serie *fundamental* quedaría

$$7 - 3 - 6 - 9 - 10 - 0 - 8 - 2 - 4 - 1 - 5 - 11$$

Para la retrogradación el trabajar con las notas originales o con su asignación numérica no facilita o dificulta el proceso, finalmente es un simple cambio de orden. Esta asignación es práctica para la *inversión* y por consiguiente para la *inversión con retrogradación*, partiendo del orden numérico en $\mathbb{N}$ para la serie renombrada se mira la distancia del primer elemento de la serie con respecto a las otras once notas, la distancia usual en este conjunto numérico, además de determinar el sentido de la distancia, si el número asignado a la nota que se desea invertir es anterior al número asignado a la primer nota de la serie la distancia es descendente, si por el contrario el número asignado a la nota que se invierte está por delante del número de la primer nota de la serie la distancia es ascendente. En el ejemplo la distancia de 7 a 3 es 4, además como $7 > 3$ la distancia es descendente, por tanto la inversión de 3 en esta serie es $7 + 4 = 11$. Cuando se realizan las operaciones, para evitar que se salgan de los doce números usados se debe operar como si los números fuesen horas. La sexta nota de la serie tiene una distancia descendente de 7 respecto a la primera, si se asciende esta distancia numéricamente el resultado es 14, lo que en horas es 2.

Otro método de composición que permite encontrar un enlace entre la Música y las Matemáticas es el *Serialismo Integral.* En este método, basado en el *dodecafonismo* y sus transformaciones seriales, pretende no sólo alterar las notas sino su intensión (dinámicas en la ejecución de las notas), y sus figuras (duración en el tiempo). El método se apoya principalmente en la generación de una matriz de 12×12 en donde la primer fila corresponde a la serie fundamental de la cual partirá la obra, las demás filas se obtienen añadiendo una cantidad fija y única, por fila, de semitonos a cada nota, se encuentra además que las columnas, de arriba hacia abajo son las inversiones de las filas, las filas de derecha a izquierda son las retrogradaciones de las filas de izquierda a derecha y las columnas, de abajo hacia arriba, son las inversiones retrógradas de las filas de izquierda a derecha. En estas matrices se usan las abreviaciones Oi, donde O significa la serie original e i el número asignado a la primer nota de cada serie, I significa la inversión (acompañado también por el número de la fila la cual se ha invertido), R para la retrogradación y RI para la retrogradación con inversión. La siguiente es un ejemplo de matriz a parir de la serie tomada como ejemplo en el Dodecafonismo.

	I7	I3	I6	I9	I10	I0	I8	I2	I4	I1	I5	I11	
O7	SOL	RE♯	FA♯	LA	LA♯	DO	SOL♯	RE	MI	DO♯	FA	SI	R7
O3	SI	SOL	LA♯	DO♯	RE	MI	DO	FA♯	SOL	FA	LA	RE♯	R3
O6	SOL♯	MI	SOL	LA♯	SI	DO♯	LA	RE♯	FA	RE	FA♯	DO	R6
O9	FA	DO♯	MI	SOL	SOL♯	LA♯	FA♯	DO	RE	SI	RE♯	LA	R9
O10	MI	DO	RE♯	FA♯	SOL	LA	FA♯	SI	DO♯	LA♯	RE	SOL♯	R10
O0	RE	LA♯	DO♯	MI	FA	SOL	RE♯	LA	SI	SOL♯	DO	FA♯	R0
O8	FA♯	RE	FA	SOL♯	LA	SI	SOL	DO♯	RE♯	DO	MI	LA♯	R8
O2	DO	SOL♯	SI	RE	RE♯	FA	DO♯	SOL	LA	FA♯	LA♯	MI	R2
O4	LA♯	FA♯	LA	DO	DO♯	RE♯	SI	FA	SOL	MI	SOL♯	RE	R4
O1	DO♯	LA	DO	RE♯	MI	FA♯	RE	SOL♯	LA♯	SOL	SI	FA	R1
O5	LA	FA	SOL♯	SI	DO	RE	LA♯	MI	FA♯	RE♯	SOL	DO♯	R5
O11	RE♯	SI	RE	FA	FA♯	SOL♯	MI	LA♯	DO	LA	DO♯	SOL	R11
	RI7	RI3	RI6	RI9	RI10	RI0	RI8	RI2	RI4	RI1	RI5	RI11	

Tabla 12. Matriz aplicada en el Serialismo Integral.

Para las inversiones de la segunda columna en adelante se sigue tomando la primer nota de la serie fundamental como referente, es decir que en esos casos no se parte de la primer nota de cada serie para la inversión sino que siempre se maneja la misma nota. A parir de la asignación numérica de las notas se hace otra asignación a figuras de tiempo y a dinámicas (que básicamente rigen el volumen con el que debe sonar cada nota), mediante lecturas de filas y columnas de manera aleatoria se obtiene la serie a ejecutar, sus duraciones y dinámicas. Con esta técnica se compuso la obra *Estructuras para dos pianos IA* de Pierre Boulez.

Otra técnica de composición que permite ver la relación entre estas dos campos del conocimiento es la *Música Estocástica*, desarrollada por el compositor, arquitecto y matemático Iannis Xenakis, quien no encontraba una finalidad en la corriente que dominó en el siglo XX, el *serialismo*. Compartía la idea de que los sonidos en su totalidad debían poderse encontrar en la música, sin embargo en las obras que se componían debía encontrarse una finalidad; intentando dar solución al movimiento en el *serialismo* introduce técnicas de probabilidad en sus obras, de las cuales la más famosa sin duda es la primera, Metástasis. Según (Blázquez, 2012), la definición de su corriente de composición se basa principalmente en la "Ley de los grandes números", propuesta por el matemático Jacques Bernoulli, de la célebre familia de matemáticos, en donde se dice que cuanto más se dé un hecho aleatorio la probabilidad de que este hecho se encamine a una finalidad aumenta. Por tanto la *Música Estocástica* es aquella que no determina un sentido de manera local, pero que se encamina a una finalidad. Diferentes seguidores de esta corriente aplican diferentes resultados de algunas leyes en probabilidad y otras ramas de las Matemáticas en la composición de sus obras (provenientes de esta técnica de composición).

Como se observa en esta indagación las relaciones establecidas entre Música y Matemáticas a través de la historia han encontrado en la Física un importante mediador, aunque los métodos de composición modernos parecen ya tener un enlace un poco más directo. Sin dejar la naturaleza de la Música la cual parte de fenómenos acústicos (esto no se puede dejar de lado), se establecerá una relación que "esconde" el enlace que se da a través de la Física dando lugar a interpretaciones y tratamientos musicales desde las Matemáticas.

2. Escala Temperada y el grupo $(\mathbb{Z}_{12}, +)$

La escala temperada asigna frecuencias a las notas musicales a partir de una frecuencia base o universal (actualmente es LA a 440 Hz), la cual es multiplicada o dividida por potencias enteras de $\sqrt[12]{2}$. Aun cuando esto determina una frecuencia única para cada nota, varias de ellas se nombran de la misma manera, esto siempre y cuando la frecuencia de una de ellas sea igual a la frecuencia de la otra multiplicada por una potencia de dos, es decir que el conjunto de notas con frecuencias $x, 2x, 4x, \dots, \frac{x}{2}, \frac{x}{4}, \dots$, tienen el mismo nombre, por este hecho se puede afirmar que las notas musicales en la escala temperada, por lo menos en cuenta a su nombre, tienen un comportamiento cíclico. Lo anterior hace que la escala temperada este conformada por solo 12 notas en cuanto a lo nominal, esta son:

DO, DO♯, RE, RE♯ MI, FA, FA♯, SOL, SOL♯, LA, LA♯, SI

Dependiendo de la forma de la frecuencia en cada nota se asigna un nombre a la misma.

Frecuencia (Hz)	***Nota***
$440 \times 2^n\left(\sqrt[12]{2}\right)^{12m}$	LA
$440 \times 2^n\left(\sqrt[12]{2}\right)^{12m+1}$	LA♯
$440 \times 2^n\left(\sqrt[12]{2}\right)^{12m+2}$	SI
$440 \times 2^n\left(\sqrt[12]{2}\right)^{12m+3}$	DO
$440 \times 2^n\left(\sqrt[12]{2}\right)^{12m+4}$	DO♯
$440 \times 2^n\left(\sqrt[12]{2}\right)^{12m+5}$	RE
$440 \times 2^n\left(\sqrt[12]{2}\right)^{12m+6}$	RE♯
$440 \times 2^n\left(\sqrt[12]{2}\right)^{12m+7}$	MI
$440 \times 2^n\left(\sqrt[12]{2}\right)^{12m+8}$	FA
$440 \times 2^n\left(\sqrt[12]{2}\right)^{12m+9}$	FA♯
$440 \times 2^n\left(\sqrt[12]{2}\right)^{12m+10}$	SOL

$440 \times 2^n\left(\sqrt[12]{2}\right)^{12m+11}$	SOL♯

Tabla 13. Nombre y frecuencia de las notas.

Donde $n, m \in \mathbb{Z}$. Por ejemplo, las notas con una frecuencia de 440 Hz o 880 Hz o 1760 Hz o 220 Hz o 110 Hz reciben el nombre de LA. Las notas con frecuencia $440\sqrt{2}$ Hz o $880\sqrt{2}$ Hz o $1760\sqrt{2}$ Hz o $220\sqrt{2}$ Hz o $110\sqrt{2}$ Hz, reciben el nombre de RE sostenido (RE♯).

Nótese que los cocientes entre las frecuencias de dos notas cualesquiera, siempre se pueden expresar de la forma:

$$2^k\left(\sqrt[12]{2}\right)^{\pm t}$$

donde $k \in \mathbb{Z}^+$ y $t \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$, el máximo valor que puede tomar t es 11, mientras que el mínimo es 0 para que la expresión no pueda ser simplificada. A partir de la forma del cociente entre las frecuencias de dos notas cuales quiera se genera una distancia entre ellas que se conoce como la "distancia tonal" que mide la cantidad de *tonos* y *semitonos* entre un par de notas de la escala temperada, la distancia puede reducirse a la cantidad de semitonos teniendo en cuenta que un tono equivale a dos semitonos; se dirá que dos notas se distancian a t "semitonos" nominalmente (respecto a sus nombres) si el cociente entre sus frecuencias se expresa precisamente como $2^k\left(\sqrt[12]{2}\right)^{\pm t}$. Es decir que entre un par de notas, solo de manera nominal, existe una distancia máxima de 11 semitonos.

Por ejemplo, si se toma un LA de 220 Hz y se desea conocer su distancia tonal a un RE♯ de $1760\sqrt{2}$ Hz se realiza el cociente de sus frecuencias

$$\frac{220}{1760\sqrt{2}} = 8^{-1}\left(\sqrt{2}\right)^{-1} = 8^{-1}\left(\sqrt[12]{2}\right)^{-6}$$

Entonces la distancia entre LA y RE♯ es de 6 semitonos. Ahora, si se toma una frecuencia de $220\left(\sqrt[12]{2}\right)^5$ Hz, que corresponde a un RE, y otra frecuencia de $880\left(\sqrt[12]{2}\right)^8$ Hz, que es un FA, al medir la distancia tonal tomando cada nota como numerador, se obtiene

Distancia de RE a FA	**Distancia de FA a RE**
$\dfrac{220\left(\sqrt[12]{2}\right)^5}{880\left(\sqrt[12]{2}\right)^8} = \dfrac{1}{4}\left(\sqrt[12]{2}\right)^{-3}$	$\dfrac{880\left(\sqrt[12]{2}\right)^8}{220\left(\sqrt[12]{2}\right)^5} = 4\left(\sqrt[12]{2}\right)^3$

Lo primero que hay que observar es que la distancia entre notas parece igual independiente de la frecuencia que actúe como numerador y la que actúe como denominador. Sin embargo, contrario a lo que se observa en los ejemplos dados, la distancia no es única, ya que se puede obtener otra distancia, al cambiar la representación del cociente:

$$\frac{1}{4}\left(\sqrt[12]{2}\right)^{-3} = \frac{1}{4}\left(\sqrt[12]{2}\right)^{9-12} = \frac{1}{4}\left(\frac{\left(\sqrt[12]{2}\right)^9}{\left(\sqrt[12]{2}\right)^{12}}\right) = \frac{1}{8}\left(\sqrt[12]{2}\right)^9$$

$$4\left(\sqrt[12]{2}\right)^3 = 4\left(\sqrt[12]{2}\right)^{12-9} = 4\left(\frac{\left(\sqrt[12]{2}\right)^{12}}{\left(\sqrt[12]{2}\right)^9}\right) = 4\left(\frac{2}{\left(\sqrt[12]{2}\right)^9}\right) = 8\left(\sqrt[12]{2}\right)^{-9}$$

Y la distancia entre las notas es también 9 semitonos, esto se debe a que no se toma en cuenta el signo de t y la forma que debe tener el cociente entre las frecuencias de dos notas, pues si corresponde a la forma

$$2^k\left(\sqrt[12]{2}\right)^{\pm t}$$

Esta puede transformarse para obtener una expresión análoga. Cuando $t < 0$

$$\begin{aligned} 2^k\left(\sqrt[12]{2}\right)^t &= 2^k\left(\sqrt[12]{2}\right)^{(12+t)-12} \\ &= 2^k\left(\frac{\left(\sqrt[12]{2}\right)^{(12+t)}}{\left(\sqrt[12]{2}\right)^{12}}\right) \\ &= 2^{k-1}\left(\sqrt[12]{2}\right)^{(12+t)} \end{aligned}$$

De manera similar se puede ver que cuando $t > 0$

$$2^k\left(\sqrt[12]{2}\right)^t = 2^{k+1}\left(\sqrt[12]{2}\right)^{(t-12)}$$

Si se condiciona la forma del cociente entre las frecuencias la distancia tonal de una nota x_1 a otra x_2, esta pasa a tomar un único valor.

Definición 2.1. Dadas dos notas x_1 y x_2 de la escala temperada, cuyas frecuencias son f_1 y f_2 respectivamente, la *distancia tonal* de x_1 a x_2 nominalmente es el valor de t en la expresión

$$2^k\left(\sqrt[12]{2}\right)^t$$

proveniente del cociente f_2/f_1 tal que $t \geq 0$ y la expresión es irreducible, es decir que t toma el mínimo valor positivo posible (o en su defecto cero). Se denotará la distancia de x_1 a x_2 como $d(x_1 \to x_2)$ y esta se medirá en *semitonos*.

Así, las distancias (anteriormente vistas) $d(RE \to FA)$ y $d(FA \to RE)$ son 3 semitonos y 9 semitonos respectivamente, y estas distancias son ahora únicas. El hacer que la expresión sea irreducible hace que $t \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$, por ejemplo si se toma un DO de frecuencia $220\left(\sqrt[12]{2}\right)^{15}$ y un RE de frecuencia $880\left(\sqrt[12]{2}\right)^{-7}$ el valor de $d(DO \to RE)$ será:

$$\begin{aligned}\frac{880\left(\sqrt[12]{2}\right)^{-7}}{220\left(\sqrt[12]{2}\right)^{15}} &= 4\left(\sqrt[12]{2}\right)^{-22} \\ &= 4 \times 2^{-1}\left(\sqrt[12]{2}\right)^{-10} \\ &= 2\left(\sqrt[12]{2}\right)^{2-12} \\ &= \left(\sqrt[12]{2}\right)^{2}\end{aligned}$$

Es decir que $d(DO \to RE) = 2$, mientras que $d(RE \to DO) = 10$.

Al tomar la frecuencia de una nota cualquiera, multiplicar dicha frecuencia por $\sqrt[12]{2}$ obteniendo así la frecuencia de una nueva nota, y medir la distancia tonal entre esta dos notas se obtendrá que hay un semitono de la primer nota a la segunda, es decir que si se multiplica la frecuencia de una nota por $\left(\sqrt[12]{2}\right)^t$, con $t \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$, para obtener la frecuencia de otra nota, y medir la distancia de la nota original a la nueva, la distancia será t semitonos. Multiplicar una frecuencia por $\sqrt[12]{2}$ de manera consecutiva permite obtener la frecuencia de las demás notas, independiente de donde se comience, esta idea lleva a pensar en la acción de $(\mathbb{Z}_{12},+)$ en el conjunto de notas (llámese N) pues finalmente el aumento de semitonos (visto como la multiplicación consecutiva por el factor $\sqrt[12]{2}$), se comporta de manera cíclica, luego se puede definir una función $\oplus$ como operación externa

$$\oplus: N \times \mathbb{Z}_{12} \longrightarrow N$$

La interpretación de esta acción se da como el aumento de un número de semitonos a partir de una nota dada, por ejemplo $MI \oplus 3$ equivale a tomar la nota MI y aumentarle 3 semitonos, de esto se obtiene la nota SOL. Esta función efectivamente cumple las condiciones de acción, para la primera condición se garantiza por el orden que se da a las notas, es decir, siempre que se aumente una cantidad de semitonos a una nota cualquiera el resultado siempre será el mismo, y además por la cantidad de notas (esta consideración es la que hace casi natural que el $\mathbb{Z}_n$ que podía realizar la acción en el conjunto de notas sea precisamente $\mathbb{Z}_{12}$); la segunda condición se garantiza por la interpretación de la acción, el tomar una nota y operarla con el elemento 0 es simplemente no aumentar semitonos, por lo cual es natural que el resultado sea la misma nota.

Por la manera en que se mide la distancia tonal el pensar en construir un modelo que permita visualizar su orden debe considerar que para cada par de notas, la distancia de una a la otra sea t y de la segunda a la primera sea $12-t$, con $t>0$, esta consideración sugiere un modelo circular para las notas (figura 22) donde todo par de notas diferentes puede tener dos distancias diferentes al medirse en el sentido de las manecillas del reloj y en sentido contrario. Esto además dota al conjunto de notas de un comportamiento cíclico bajo la idea de aumentar semitonos, esto último permite considerar una nueva relación entre ellas y los conjuntos $\mathbb{Z}_n$ a los cuales también se les asocian dicho comportamiento cíclico, ya que ambos conjuntos se comportan de la misma manera bajo su "operación" respectiva por lo que parece casi natural el pensar en un *isomorfismo* entre ellos. Para esto es importante fijar el n en $\mathbb{Z}_n$, pero esto resulta casi inmediato al buscar que las estructuras sean isomorfas pues la función biyectiva que se pretende construir depende del número de elementos en ambos conjuntos, por la cantidad de notas musicales el $\mathbb{Z}_n$ apropiado para eso resulta ser nuevamente $\mathbb{Z}_{12}$.

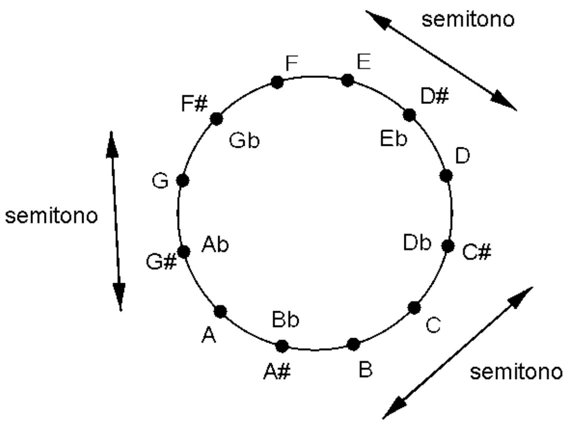


Figura 22. Ciclo de las notas.

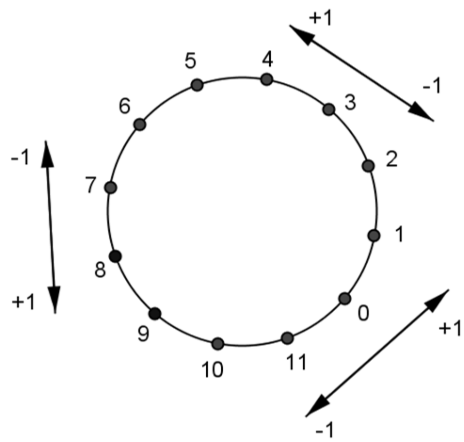


Figura 23. Ciclo de $\mathbb{Z}_{12}$.

Una vez resuelto la cuestión con la cantidad de elementos hay que pensar en que se cumpla la segunda condición (el homomorfismo de la función), pues a pesar que se tienen $12!$ funciones biyectivas entre ambos conjuntos no todas satisfacen la idea de isomorfismo. Tomando el conjunto de notas como dominio el primer paso es tomar una nota arbitraria cuya imagen por el isomorfismo sea 0, de las doce se tomará a DO, para las demás notas su imagen corresponderá a la distancia que hay de DO a cada nota, por ejemplo para designar la imagen de LA se calcula $d(DO \to LA)$ que es 9,esta será la imagen de LA por el isomorfismo. La siguiente tabla registra la función que asigna a cada nota musical un elemento de $\mathbb{Z}_{12}$[12].

Nota	Elemento de $\mathbb{Z}_{12}$
DO	0

[12] Por la manera arbitraria en que se escogió el primer elemento se pueden dar en total 12 isomorfismos válidos. Los resultados expuestos en los próximos capítulos no dependen de del isomorfismo seleccionado, se puede tomar cualquiera de los 12, siempre y cuando la imagen de las demás notas se base en la distancia de la primer nota a cada una de las otra 11.

DO♯ = RE♭	1
RE	2
RE♯ = MI♭	3
MI	4
FA	5
FA♯ = SOL♭	6
SOL	7
SOL♯ = LA♭	8
LA	9
LA♯=SI♭	10
SI	11

Tabla 14. Notas y $\mathbb{Z}_{12}$.

En esta tabla, como en las imágenes 22 y 23, si se toma cualquier elemento a del grupo y se le suma 1 se puede ver que musicalmente (en la columna de la izquierda) que la suma permitió aumentar un semitono a la nota que le corresponde al elemento $a+1$, entonces el sumar o restar uno en el grupo $\mathbb{Z}_{12}$ equivale musicalmente a aumentar o disminuir respectivamente un semitono en la escala temperada. El comportamiento cíclico en ambas estructuras se ve al momento de sumar 1 a 11 en $\mathbb{Z}_{12}$ obteniendo el primer elemento del grupo (0), y al aumentar un semitono a SI obteniendo la primer nota de la escala temperada (DO), esto garantiza que se cumple la segunda condición del isomorfismo.

Bajo esta función (llámese f), y a partir de la operación suma de $\mathbb{Z}_{12}$ resultaría casi inmediato pensar en dotar al conjunto de notas de la escala temperada (nómbrese N), de una operación $\oplus$ proveniente de la suma en $\mathbb{Z}_{12}$, es decir

$$\begin{aligned} \circledcirc : N \times N &\longrightarrow N \\ (a,b) &\longrightarrow f^{-1}\big(f(a)+f(b)\big) \end{aligned}$$

Donde f es la asignación de elementos de $\mathbb{Z}_{12}$ a cada nota de la escala temperada (tabla 14), sin embargo esta operación no es pertinente en el desarrollo del trabajo. Sin embargo esto permite dar una mirada más “numérica” a la acción de $\mathbb{Z}_{12}$ sobre el conjunto de notas ya que finalmente por el isomorfismo anterior las notas musicales pueden ser vistas como elementos del grupo y la acción pasaría simplemente a ser la operación del mismo, en otra palabras, el aumento de semitonos puede verse como sumas en $\mathbb{Z}_{12}$.

Bajo esta última consideración es posible reinterpretar algunos de los conceptos musicales vistos hasta el momento, por ejemplo la escala mayor, la cual se determina a partir de una nota que toma el papel de tónica o fundamental de la escala, puede obtenerse por medio del aumento de semitonos $\oplus$, es decir, al tomar una nota t de la escalar temperada su escala mayor puede determinarse haciendo:

$$\{t, t \oplus 2, t \oplus 4\,, t \oplus 5, t \oplus 7, t \oplus 9, t \oplus 11\}$$

Los cuales corresponden a los elementos de la escala de t mayor, luego de esto se busca $f(t)$ para realizar el aumento de semitonos como sumas en $\mathbb{Z}_{12}$, es decir

$$\{f(t), f(t)+2, f(t)+4, f(t)+5, f(t)+7, f(t)+9, f(t)+11\}$$

Teniendo en cuenta que sumar 1 a un elemento de $\mathbb{Z}_{12}$ equivale a aumentar un semitono a la nota correspondiente a dicho elemento, sumar 2 debe corresponder musicalmente a aumentar un tono, lo que permite ver las distancias tonales entre dos notas consecutivas en la escala mayor como:

$$f(t) \xleftrightarrow{+1\ tono} f(t)+2$$

$$f(t)+2 \xleftrightarrow{+1\ tono} (f(t)+2)+2 = f(t)+4$$

$$f(t)+4 \xleftrightarrow{+\frac{1}{2} tono} (f(t)+4)+1 = f(t)+5$$

$$f(t)+5 \xleftrightarrow{+1\ tono} (f(t)+5)+2 = f(t)+7$$

$$f(t)+7 \xleftrightarrow{+1\ tono} (f(t)+7)+2 = f(t)+9$$

$$f(t)+9 \xleftrightarrow{+1\ tono} (f(t)+9)+2 = f(t)+11$$

$$f(t)+11 \xleftrightarrow{+\frac{1}{2}tono} (f(t)+11)+1=f(t)$$

Por ejemplo si $t=MI$ entonces para determinar la escala de MI mayor se hace $f(MI)=4$, y se remplaza $f(t)$ por 4:

$$\{4,4+2,4+4,4+5,4+7,4+9,4+11\}=\{4,6,8,9,11,1,3\}$$

Al buscar las notas correspondientes a cada elemento de $\mathbb{Z}_{12}$ en el conjunto que se obtuvo, es decir evaluar la función f^{-1} en cada uno de los elementos del subconjunto de $\mathbb{Z}_{12}$ determinado en el último paso, se tiene que las escala de MI mayor se compone por las notas MI, FA♯, SOL♯, LA, SI, DO♯ y RE♯, se puede verificar fácilmente que estas notas efectivamente corresponden a la escala que se deseaba encontrar mirando las distancias tonales entre ellas (o también se puede verificar directamente en la tabla 6).

Además de esto, a partir de los elementos de una escala mayor es posible determinar los de otra escala, es decir, si se conoce los elementos de la escala de t mayor se puede determinar las escalas mayores de notas que estén cierto número de semitonos por encima o por debajo de t como $t \oplus 4$ o $t \oplus 9$, esto se realiza sumando (o restando) el mismo número de semitonos que a la imagen por f de la tonalidad de la escala. En el resultado anterior donde se encontraron los elementos de la escala de MI mayor se puede determinar, por ejemplo, los elementos de la escala de LA mayor, teniendo en cuenta que LA está cinco semitonos por delante de MI ($MI \oplus 5 = LA$), por tanto se aumentará la misma cantidad de semitonos a todas las notas que componen la escala de MI mayor o simplemente se sumará 5 a todas las imágenes por f de los elementos del conjunto:

$$\{4+5,6+5,8+5,9+5,11+5,1+5,3+5\}=\{9,11,1,2,4,6,8\}$$

Por tanto la escala de LA mayor se compone de las notas LA, SI, DO♯, RE, MI, FA♯ y SOL♯. Así mismo si se desea ver a LA como la nota que está siete semitonos por detrás de MI se restará 7 a todos las imágenes por f de los elementos del conjunto, matemáticamente se obtendrá lo mismo pues en $\mathbb{Z}_{12}$ sumar 5 es igual a "restar" 7.

3. Armonía

Al hablar de música es común referirse a varios de sus componentes o técnicas básicas, ya sea de composición o ejecución de algún instrumento en especial. Uno de los términos más nombrados, y que es base fundamental en el desarrollo de este trabajo, es el concepto de *armonía*.

Diferentes textos, ya sean métodos[13] para un instrumento, o referidos a la pedagogía de la música, presentan definiciones similares. Lárez (2010) define armonía como "la parte de la teoría musical que se encarga de estudiar los acordes, las relaciones y fenómenos que ocurren entre ellos, la forma de enlazarlos, así como su uso de manera lógica y natural". Cabe precisar que un ***acorde*** puede ser entendido como *la combinación de por lo menos, tres sonidos de diferentes nombres y alturas ejecutados simultáneamente*.

García & Martinez (s.f.) definen de manera inicial la armonía como el enlace y ejecución de notas de manera simultánea, y más adelante complementan esta idea al asegurar que la armonía, además de estudiar la sonoridad de notas ejecutadas de manera simultánea, hace referencia a la manera en que ese conjunto de notas se relaciona con otros, es decir, la armonía también estudia la sonoridad que tienen la ejecución de estos diferentes conjuntos seguidos de otros.

De manera similar Borrero (2008) habla de la armonía como "la parte dedicada al estudio de los acordes, de su formación y empleo en la música tradicional".

En su *Tratado de Armonía*[14] (el cual refleja un enfoque bastante pedagógico), Schoenberg (1974) se refiere a la armonía como la "enseñanza de los sonidos simultáneos (acordes) y de sus posibilidades de encadenamiento, teniendo en cuenta sus valores arquitectónicos, melódicos y rítmicos, y sus relaciones de equilibrio". De este documento cabe resaltar que

[13] Son textos destinados a proponer diferentes ejercicios para la ejecución y desarrollo de técnicas de un instrumento en especial.
[14] La primera aparición de esta obra fue en 1911 con el título *Harmonielehre.*

Schoenberg concibe la armonía como un constructo en función del tiempo, es decir cada época trae consigo reglas e ideas diferentes sobre armonía, es una idea fluctuante por lo que no pueden determinarse reglas universales.

En este trabajo se respetará la idea común en estas definiciones al hablar de armonía como el estudio de la conformación de acordes (entendidos como la ejecución simultánea de varias notas, diferentes en frecuencia) y el enlace de varios de estos conjuntos de notas. En el desarrollo del trabajo se encontrará como esta concepción divide en dos este documento (justamente por consideraciones temporales en los métodos de composición).

La consecución de acordes se dio, entre otras circunstancias, por búsqueda de maneras que dieran “más vida” a la otra parte importante de la armonía: la *melodía*. Una melodía es una secuencia de notas pertenecientes a una escala. Como registran García & Martinez (s.f.) hacia el siglo IX los cantos religiosos se empezaron a ejecutar con dos voces, una principal y otra que se armaba con las cuartas o quintas de cada nota en la melodía principal. Como ejemplo se presenta un fragmento de la melodía del tema *Gloria aleluya*, canción religiosa norteamericana.

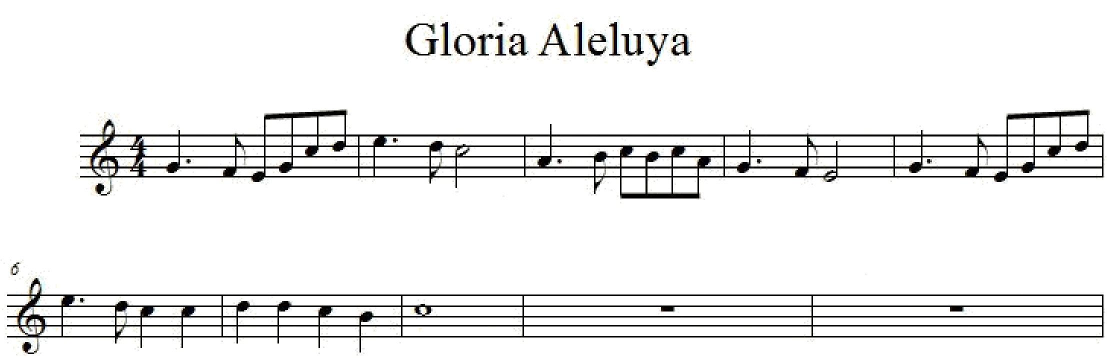


Figura 24. Gloria Aleluya a una voz.

La melodía inicia con la nota SOL (segunda línea de abajo hacia arriba en clave de SOL), partiendo de esta como primer nota la quinta es RE, esto mismo se puede hacer para cada nota de la melodía, determinar su altura, es decir, identificar la nota y así determinar su quinta para que cada una sea interpretada a la vez con su quinta, y así obtener una melodía a dos voces como se muestra en la siguiente figura.

Figura 25. Gloria Aleluya a dos voces.

Esto mismo se solía realizar con las cuartas de cada nota o con las octavas superiores (o inferiores si la melodía original era alta en frecuencia). Luego de esto se permitió generar una segunda voz que pudiese variar entre quintas, cuartas u octavas según el criterio del compositor. Ya en la época del renacimiento los arreglos armónicos para las series melódicas se vieron enriquecidas con el uso de las terceras y sextas de cada nota, estas nuevas voces dotaban a la melodía de un poco más de "dulzura". Es también en esta época en donde los músicos tomaron conciencia de la importancia que tiene la sonoridad simultánea de notas, dando paso al estudio de encadenamiento de acordes.

Para algunos instrumentos las partituras de una pieza pueden contener partes melódicas como armónicas pues pueden producir diferentes notas simultáneamente, como por ejemplo el piano o la guitarra, a este tipo de instrumentos se les llama *polifónicos* o armónicos y en ellos, como su nombre lo indica, se pueden ejecutar acordes o melodías. Otros instrumentos como la flauta, el saxofón o la trompeta no pueden producir más de un sonido al ejecutarse, es decir que sus partituras solo pueden llevar contenido melódico, a estos instrumentos se les conoce como *melódicos* o *monofónicos*. En la composición para orquestas, filarmónicas o grupos con instrumentos de viento se hace que la composición reparta la ejecución de las notas que componen un acorde a cada instrumento monofónico, así si se desea armar DO mayor con la ayuda de flautas, por ejemplo, vasta que una de ellas ejecute un DO, otra un MI y otra un SOL, que son las notas que componen el acorde deseado.

Por lo general los acordes y las melodías son componentes de la música que no se separan, por ejemplo en canciones en las que un cantante es acompañado de un único instrumento como un piano o una guitarra la melodía y los acordes se encuentran, la melodía viene del canto y los acordes se ejecutan en el instrumento que acompaña. Bajo la asignación de elementos de $\mathbb{Z}_{12}$ a las notas musicales es posible definir estos conceptos de manera matemática.

A continuación se presentarán estos componentes de manera independiente bajo una mirada matemática.

3.1. Acordes en $\wp(\mathbb{Z}_{12})$

En la armonía clásica la conformación de acordes respeta la conformación de las escalas. Los acordes tienen diferentes clasificaciones dependiendo de la distancia tonal que hay entre las notas que lo componen, para los acordes de tres notas o *triadas* (en los cuales se basa este trabajo), se tiene cuatro tipos: acordes *mayores, menores, aumentados* y *disminuidos.*

a. **Acordes mayores**: Son aquellos en los que la distancia entre la primera nota del acorde y la segunda es de dos tonos mientras que entre la segunda y la tercer nota hay un tono y medio. Por ejemplo $DO - MI - SOL$ conforman el acorde de DO mayor pues entre DO (primer nota) y MI (segunda) hay dos tonos y entre MI y SOL (tercera nota) hay un tono y medio. Otros ejemplos de acordes mayores son $FA - LA - DO$, $LA - DO\# - MI$ y $SIb - RE - FA$.
b. **Acordes menores**: Son en los cuales la distancia entre la primer nota y la segunda es de tono y medio mientras que entre la segunda y la tercera hay dos tonos. Por ejemplo $LA - DO - MI$ conforman el acorde de LA menor pues la distancia entre LA y DO es de un tono y medio, y la distancia entre DO y MI es de dos tonos. Otros ejemplos de acordes menores son $SI - RE - FA\#$, $MI - SOL - SI$ y $FA\# - LA - DO\#$.

   Acordes aumentados: Son aumentados los acordes en los que la distancia entre la primera nota y la segunda al igual que entre la segunda y la tercera es de dos tonos.

Por ejemplo $FA - LA - DO\#$ es el acorde aumentado de FA pues entre FA y LA hay dos tonos al igual que entre LA y DO♯. Otros ejemplos de acordes aumentados son $SOLb - SIb - RE$ y $REb - FA - LA$.

c. **Acordes disminuidos**: Son los acordes en los cuales la distancia entre la primera nota y la segunda al igual que entre la segunda y la tercera es de un tono y medio. Por ejemplo $SI - RE - FA$ es SI disminuido pues entre SI y RE al igual que entre RE y FA hay una distancia de tono y medio. Otros ejemplos de acordes disminuidos son $FA\# - LA - DO$, $SOL\# - SI - RE$ y $LA\# - DO\# - MI$.

Los compositores clásicos buscaron formas de dar cuerpo o mayor sonoridad a las melodías generando secuencias de acordes (más adelante se comentará esto con mayor detalle). Gracias a la asignación anteriormente definida entre las notas musicales y $\mathbb{Z}_{12}$ es posible dar una "definición matemática" de lo que son los acordes.

Definición 3.1. Un *acorde* X es un conjunto finito de elementos de $\mathbb{Z}_{12}$, o simplemente un elemento del conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12})$, tal que su cardinal sea mayor o igual a dos, esto es:

$$X\ es\ un\ acorde \text{ si y solo si } X \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12}), |X| \geq 2$$

Haciendo que el número de elementos del acorde sea mayor o igual a dos se garantiza que hay varios elementos en el conjunto descartando que una nota sola pueda ser tomada como un acorde. Otra consideración a tener en cuenta desde la parte musical es que no todo conjunto de notas o acordes es tomado en cuenta, solo algunos son ejecutados, uno de los factores a tener en cuenta para elegir los acordes con "mayor sonoridad" es el número de notas que lo componen. En la armonía clásica, como se mencionó anteriormente, los acordes más usados son los acordes triada o de tres elementos

Definición 3.2. Una triada es un acorde X tal que su cardinal es 3 ($|X| = 3$).

Las triadas o acordes de tres notas más usados en armonía clásica, como se mencionó anteriormente, son: *mayores*, *menores*, *aumentados* y *disminuidos*. En el desarrollo de este trabajo solo se trabajarán con acordes *mayores* y *menores*. Estos acordes también pueden ser definidos desde las Matemáticas de la siguiente manera.

Definición 3.3. Una triada $\{x_1, x_2, x_3\} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12})$ se dice un *acorde mayor de* x_1 si $x_2 = x_1 + 4$ y $x_3 = x_1 + 7$[15]. Al elemento a se conoce como *fundamental* o *raíz* del acorde.

Esta definición matemática de acorde mayor se corresponde con la definición musical pues la distancia de la primer nota del acorde x_1 a la segunda x_2 es precisamente 2 tonos (4 semitonos), y de la segunda a la tercer nota x_3 hay un tono y medio (3 semitonos). Por ejemplo el conjunto $\{G, B, D\} \approx \{7, 11, 2\}$ es el acorde de SOL mayor, pues $11 = 7 + 4$ y $2 = 7 + 7$. Esta triada define un único acorde mayor, es decir que este conjunto no puede definir el acorde de Re mayor o de Si mayor, basta con tomar cada nota como la raíz o fundamental del acorde y ver que los otros dos elementos de la triada no se ajustan a la definición. De manera similar se definen los *acordes menores*.

Definición 3.4. Una triada $\{x_1, x_2, x_3\} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12})$ se dice un *acorde menor de* x_1 si $x_2 = x_1 + 3$ y $x_3 = x_1 + 7$.

La triada $\{D, F, A\} \approx \{2, 5, 9\}$ corresponde al acorde de RE menor, pues $5 = 2 + 3$ y $9 = 2 + 7$. De manera análoga a los acordes mayores esta triada corresponde únicamente al acorde de RE menor, es decir que el mismo conjunto de tres notas no se ajusta a la definición de acorde menor tomando $x_1 = 5$ o $x_1 = 9$.

Para efectos de notación musical los acordes mayores son nombrados únicamente con su letra respectiva en la notación americana, por ejemplo si se desea hablar del acorde de LA mayor se escribe A, esto facilita bastante la escritura de acordes sobre los versos de una canción de manera que un músico puede cantar e interpretar los acordes del tema en algún instrumento. Si el acorde es menor la letra del acorde es acompañada con la letra m, por ejemplo si se desea hablar de RE menor su respectiva notación es Dm. Ahora, si el acorde tiene como fundamental una alteración, ya sea sostenida o bemol, se escribe la letra correspondiente al acorde, seguido de la alteración, y en caso de ser menor se añade la letra m, por ejemplo al hablar del acorde de FA sostenido menor se denota $F\#m$.

---

[15] Estas sumas se realizan en $\mathbb{Z}_{12}$.

Aclarando que las triadas de acordes mayores y menores son únicas para cada nota se obtienen 24 acordes, 12 mayores y 12 menores. La notación de triadas como conjuntos se corresponde con la composición de los acordes en música, mientras que se estén ejecutando las tres notas que componen el acorde, indiferentemente de la octava en la que se ubique cada nota, se está ejecutando el mismo acorde. Así mismo cuando se escribe un acorde, mayor o menor, como conjunto de tres notas no importa el orden de las notas, se sigue hablando del mismo acorde.

Definición 3.5. Sea $\mathbb{A}$ el conjunto de los acordes mayores y menores, esto es:

$$\mathbb{A} = \left\{\{x, x+4, x+7\}, \{y, y+3, y+7\} | x, y \in \mathbb{Z}_{12}\right\}$$

La manera en que se define $\mathbb{A}$ permite definir dos subconjuntos disyuntos para separar acordes mayores de menores.

Definición 3.6. Sea $\mathbb{A}^+$ el conjunto de los acordes mayores y $\mathbb{A}^-$ el de los acordes menores:

$$\mathbb{A}^+ = \left\{\{x, x+4, x+7\} \middle| x \in \mathbb{Z}_{12}\right\}$$

$$\mathbb{A}^- = \left\{\{y, y+3, y+7\} \middle| y \in \mathbb{Z}_{12}\right\}$$

Es fácil ver que $\mathbb{A} = \mathbb{A}^+ \cup \mathbb{A}^-$, por la forma en que se definen los conjuntos. Además se puede demostrar que son conjuntos disyuntos.

Teorema 3.1. $\mathbb{A}^+ \cap \mathbb{A}^- = \emptyset$.

Demostración. Suponga que $\mathbb{A}^+ \cap \mathbb{A}^- \neq \emptyset$, es decir que existe $X \in \mathbb{A}$ tal que $X \in \mathbb{A}^+$ y $X \in \mathbb{A}^-$. Como $X \in \mathbb{A}^+$ entonces existe $x^+ \in \mathbb{Z}_{12}$ tal que

$$X = \{x^+, x^+ + 4, x^+ + 7\}$$

De manera similar como $X \in \mathbb{A}^-$ debe existir un $x^- \in \mathbb{Z}_{12}$ tal que

$$X = \{x^-, x^- + 3, x^- + 7\}$$

Por tanto

$$\{x^+, x^+ + 4, x^+ + 7\} = \{x^-, x^- + 3, x^- + 7\}$$

Esto lleva a considerar que $x^+ = x^-$ ó $x^+ = x^- + 3$ ó $x^+ = x^- + 7$. Si $x^+ = x^-$ entonces $x^+ + 7 = x^- + 7$ y $x^+ + 4 = x^- + 3$, por la primera y última igualdad de este primer caso $x^+ + 4 = x^+ + 3$ y de esto $4 = 3$!!!, lo cual es una contradicción. Procediendo de manera similar se llegan a contradicciones cuando se consideran los otros dos casos.

■

3.2. Melodías en $(\mathbb{Z}_{12})^n$

Por otro lado, una melodía es una sucesión de notas que normalmente se enmarca en una tonalidad, es decir sus notas hacen parte de una escala en especial, aunque esto no siempre es así, más adelante se verá como en el dodecafonismo la melodía no se encuentra en alguna tonalidad. A diferencia de los acordes las notas en una melodía se pueden repetir y además la ejecución de cada nota en ella debe ser de manera secuencial, es decir una tras otra, lo cual define un orden. El pensar en llevar estas dos características a una definición matemática, que hasta el momento solo cuenta con la asignación de elementos de $\mathbb{Z}_{12}$ a cada nota, conlleva casi de manera natural a pensar en *n-uplas* de elementos de $\mathbb{Z}_{12}$

Definición 3.7. Una *melodía* es elemento de $(\mathbb{Z}_{12})^n$

$$\alpha_n = (a_1, a_2, \dots, a_n), a_i \in (\mathbb{Z}_{12})^n$$

Con letras griegas se denotará a cualquier elemento de $(\mathbb{Z}_{12})^n$ el cual se acompañará de un subíndice que corresponda al número de elementos de la *n-upla*, con ello si se tiene una melodía β_8 se cumple que este es un elemento de $(\mathbb{Z}_{12})^8$, además, como no se da ninguna restricción a la aparición de elementos del grupo en ella se puede tener que

$$\beta_8 = (5,5,5,5,5,5,5,5)$$

que correspondería a una melodía en la que se repite la nota FA, o también

$$\beta_8 = (0,7,7,0,7,0,0,7)$$

Donde la melodía se compone únicamente de las notas DO y SOL, además la ejecución de la misma debe ser en el orden DO, SOL, SOL, DO, SOL, DO, DO, SOL. A diferencia de los acordes, las melodías no se separan por tipos. En diferentes canciones, ya sean cantadas o instrumentales, es común ver la repetición de una misma melodía que permita identificar las diferentes partes del tema, asi, por ejemplo, el oyente es capaz de identificar los momentos previos al coro, o incluso el final.

El desarrollo histórico de las técnicas usadas en armonía se pueden dividir en dos momentos o corrientes principales: la *armonía tonal* y la *armonía atonal*, bajo estas dos corrientes se presentan los siguientes dos capítulos.

4. Armonía Clásica

La armonía tonal, también conocida como *armonía clásica* o *armonía funcional* se basa en la estructuración de acordes y melodías a partir de un conjunto de notas específicos, también conocido como escala. Cada escala se escoge en función de una nota fundamental y a su vez define una *tonalidad*. Las escalas más conocidas en la armonía clásica son la *escala mayor* y la *escala menor*. Como se mencionó anteriormente en el marco teórico las escalas mayores se determinan bajo la siguiente disposición tonal entra las notas que la componen

$$nota_1 \xleftrightarrow{1\ tono} nota_2 \xleftrightarrow{1\ tono} nota_3 \xleftrightarrow{1/2\ tono} nota_4 \xleftrightarrow{1\ tono} nota_5 \xleftrightarrow{1\ tono} nota_6 \xleftrightarrow{1\ tono} nota_7 \xleftrightarrow{1/2\ tono} nota_8$$

Donde $nota_1$ es la fundamental de la escala y $nota_8$ es la misma fundamental pero una octava por encima, esto permite que las escalas tengan un comportamiento cíclico como el que se muestra en la figura 1. La escala menor, al igual que la mayor, se compone de siete notas distintas pero con una disposición tonal diferente que en la escala mayor

$$nota_1 \xleftrightarrow{1\ tono} nota_2 \xleftrightarrow{1/2\ tono} nota_3 \xleftrightarrow{1\ tono} nota_4 \xleftrightarrow{1\ tono} nota_5 \xleftrightarrow{1/2\ tono} nota_6 \xleftrightarrow{1\ tono} nota_7 \xleftrightarrow{1\ tono} nota_8$$

Partiendo de que se tiene doce notas en total (según la escala temperada), se tiene pues doce escalas mayores y doce menores. Sin embargo al mirar la estructuración de las dos escalas es posible ver que ambas son idénticas pero parten de notas distintas, en otras palabras si en la escala mayor se parte de la sexta nota ($nota_6$), respetando las distancias tonales establecidas y teniendo en cuenta que $nota_8 = nota_1$, se obtiene la escala menor de $nota_6$, por esto se tiene que toda escala mayor tiene una escala menor asociada, además única. Cada par de notas que se encuentras separadas por un tono y medio se conocen como *relativas*

$$x_1 \xleftrightarrow{1^1/_2\ tonos} x_2$$

La nota por delante (x_2) se dice ser la relativa *mayor* de la nota anterior (x_1), y la nota de atrás (x_1) se dice ser la relativa *menor* de la nota siguiente (x_2). De esta manera una escala mayor tiene asociada la escala menor de la relativa menor de la fundamental y una escala menor tiene asociada la escala mayor de la relativa mayor de la fundamental.

Escala mayor		**Escala menor**
Do		La
Do sostenido - Re bemol		La sostenido – Si bemol
Re		Si
Re sostenido – Mi bemol		Do
Mi		Do sostenido - Re bemol
Fa	$\xrightarrow{\text{Se asocia con}}$	Re
Fa sostenido – Sol bemol		Re sostenido – Mi bemol
Sol		Mi
Sol sostenido – La bemol		Fa
La		Fa sostenido – Sol bemol
La sostenido – Si bemol		Sol
Si		Sol sostenido – La bemol

Tabla 15. Asociación de escalas mayores y menores.

En una escala, ya sea mayor o menor, para conformar sus acordes triada correspondientes se toma una de las notas de la escala (x_i) como primer nota del acorde, luego la nota que le sigue dos posiciones por delante (x_{i+2}) para la segunda y la que le sigue cuatro posiciones (x_{i+4}) para la tercera, por ejemplo en la escala de LA mayor (LA, SI, DO♯, RE, MI, FA♯, SOL♯), si se desea conocer el acorde cuya fundamental es RE, bajo esa tonalidad, se toma esta nota, la que le sigue dos posiciones según la escala, es decir FA♯, y la que está cuatro posiciones por delante, que es LA, según la distancia tonal entre las notas el acorde que resulta es el de RE mayor.

Cada acorde proveniente de una escala, mayor o menor, también recibe el nombre de *grado*, es decir el acorde que se forma a partir de la primer nota de la escala es el primer grado (I), el acorde formado a partir de la segunda nota es el segundo grado (II) y así sucesivamente. En la escala mayor, independiente de la nota sobre la cual se genere, se tiene que su primer grado es mayor, el segundo y el tercero son menores, el cuarto y el quinto son mayores, el sexto es menor y el séptimo es disminuido, por ejemplo en la escala de SOL mayor su primer acorde, SOL, es mayor, los dos siguientes son LA y SI menores, después están DO y RE mayor, luego MI menor y finalmente FA♯ disminuido. Los grados reciben otros nombres: el primer grado es la *tónica*, el segundo la *supertónica*, el tercero la *mediante*, el cuarto la *subdominante*, el quinto la *dominante*, el sexto la *superdominante* y el séptimo la *sensible*. Un conjunto de acordes provenientes de una escala se les conoce como *progresión.* Una de las progresiones más conocidas es $I - IV - V$, es decir tónica, subdominante y dominante. Esta progresión es la base del *blues*, popular género musical nacido a inicios del siglo pasado en Estados Unidos; un ejemplo tanto de esta progresión como del género es el tema *The Thrill Is Gone* del célebre guitarrista y cantante de blues B.B. King, otro ejemplo del uso de esta progresión se encuentra en la conocida canción popular *Pueblito Viejo*.

Bajo estas ideas básicas en la armonía funcional se tiene un "centro de gravedad" que es quien rige la forma de la pieza musical, este centro es la nota sobre la cual se determina una escala ya sea mayor o menor, los acordes y melodías giran en torno a esta nota, aunque se puede ceder en la misma escala el papel principal a otras notas. En la progresión $I - IV - V$ es común llevar la tónica a la subdominante y la dominante a la tónica pero no necesariamente tiene que ser así. Los acordes de una escala mayor se pueden clasificar en estos tres grados permitiendo generar progresiones variadas:

Tónicas	**Subdominantes**	**Dominantes**
I	IV	V
VI	II	III
		VII

Tabla 16. Clasificación de los grados.

En una escala mayor el primer grado puede ceder su puesto como centro de gravedad al sexto grado (su relativo menor). Casi cualquier progresión *tónica – subdominante – dominante* es consonante, es decir agradable al oído, a partir de la clasificación anterior (tabla 16), incluso algunas disonancias o tensiones se usan de manera predeterminada para poder llevar la pieza a un estado de “descanso” en la tónica.

Las diferentes progresiones musicales (sucesión de acordes), puede verse como transformaciones de un acorde a otro, es decir que el paso entre acordes puede verse como una función que lleve un acorde a otro. Entre las diferentes transformaciones posibles de realizar sobre un acorde se encuentran la *trasposición* y la *inversión* (Agustín, du Plessis, Lluis, & Montiel, 2009).

Definición 4.1. Sea $X \in \mathbb{A}$ y $t \in \mathbb{Z}_{12}$, una *Transposición* es una función

$$\begin{aligned} T_t \colon \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{A} \\ X &\longrightarrow X + t \end{aligned}$$

donde

$$X + t = \{y \in \mathbb{Z}_{12} | y = x + t, x \in X\}$$

Básicamente una transposición es un movimiento de acordes, es decir que se hace un cambio de una triada a otra. Dado que solo se tienen 12 notas así mismo el cambio de un acorde a otro solo tiene 11 posibilidades distintas nominalmente. Es posible encontrar acordes compuestos por las mismas notas pero con un sonido más agudo o más grave, por tanto en diferentes octavas, esto ya interviene sobre las frecuencias de las notas.

Teorema 4.1. $T_m = T_n$ si y solo si $n = m$.

Demostración. Si se tiene la igualdad $n = m$, $T_n = T_m$ es evidente. Ahora supongamos que $T_m = T_n$. Si $X \in \mathbb{A}$ es un acorde mayor ($X \in \mathbb{A}^+$), entonces para algún $x_1 \in X$ se tiene que $x_2 = x_1 + 4$ y $x_3 = x_1 + 7$, con $x_2, x_3 \in X$. Luego

$$\{x_1 + n, (x_1 + 4) + n, (x_1 + 7) + n\} = \{x_1 + m, (x_1 + 4) + m, (x_1 + 7) + m\}$$

Suponga que $x_1 + n = (x_1 + 4) + m$, es decir $n = 4 + m$, luego

$$(x_1 + 4) + n = x_1 + m \text{ ó } (x_1 + 4) + n = (x_1 + 7) + m$$

Pero cualquiera de estas dos suposiciones lleva a contradicciones. Ahora suponga que $x_1 + n = (x_1 + 7) + m$, entonces $n = 7 + m$, luego

$$(x_1 + 4) + n = x_1 + m \text{ ó } (x_1 + 4) + n = (x_1 + 4) + m$$

Pero igualmente estas dos nuevas suposiciones llevan a contradicciones, por tanto se debe cumplir que $x_1 + n = x_1 + m$, y de esto se obtiene que $n = m$. Si el acorde es menor ($X \in \mathbb{A}^-$), las consideraciones son similares y se puede obtener el mismo resultado.

$\blacksquare$

Ahora se da paso a la *inversión.*

Definición 4.2. Sea $X \in \mathbb{A}$ y $t \in \mathbb{Z}_{12}$, una *Inversión* es una función

$$\begin{aligned} I_t \colon \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{A} \\ X &\longrightarrow t - X \end{aligned}$$

donde

$$t - X = \{y \in \mathbb{Z}_{12} | y = t - x, x \in X\}$$

La inversión puede ser vista como una transposición sobre la triada de los opuestos aditivos del acorde al que se le aplica esta transformación. A diferencia de la transposición, la inversión cuenta con 12 posibilidades distintas, visto desde grupos (ya que se realiza la inversión con el grupo $\mathbb{Z}_{12}$, de 12 elementos), o desde la música (con 12 notas en la escala temperada).

Teorema 4.2. $I_m = I_n$ **si** y solo si $n = m$.

Previamente a la demostración es importante recordar una propiedad de los $\mathbb{Z}_n$: para todo $a, b \in \mathbb{Z}_n$ se tiene que $-(a + b) = (-a) + (-b)$.

Demostración. Como en la demostración anterior, el suponer que $n = m$ permite deducir de manera inmediata que $I_n = I_m$. Ahora suponga que $I_m = I_n$. Si $X \in \mathbb{A}^+$ entonces para algún $x_1 \in A$ se tiene que $x_2 = x_1 + 4$ y $x_3 = x_1 + 7$, donde $x_2, x_3 \in X$. Luego

$$\{-x_1+n, -(x_1+4)+n, -(x_1+7)+n\} = \{-x_1+m, -(x_1+4)+m, -(x_1+7)+m\}$$

Suponga que $-x_1+n = -(x_1+4)+m$, entonces

$$-x_1+n = -x_1+8+m$$

$$n = 8+m$$

Nuevamente, como en la demostración anterior esto lleva a dos casos: $-(x_1+4)+n = -x_1+m$ o que $(x_1+4)+n = -(x_1+7)+m$. Para ambos casos tomar la igualdad $n = 8+m$ lleva a contradicciones, por lo que la suposición es errónea; de igual forma suponer que $-x_1+n = -(x_1+7)+m$ lleva a contradicciones para los dos casos emergentes, el único caso posible para respetar la igualdad entre los acordes es que

$$-x_1+n = -x_1+m$$
$$n = m$$

Como en la demostración anterior los razonamientos son análogos para cuando $X \in \mathbb{A}^-$; con esto queda demostrado.

■

Estas transformaciones de acordes permiten definir relaciones entre los dos tipos existentes (mayores y menores), como se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 4.3. Sean $X \in \mathbb{A}$ y $n \in \mathbb{Z}_{12}$.

Si $X \in \mathbb{A}^+$ entonces $T_n(X) \in \mathbb{A}^+$
Si $X \in \mathbb{A}^-$ entonces $T_n(X) \in \mathbb{A}^-$
Si $X \in \mathbb{A}^+$ entonces $I_n(X) \in \mathbb{A}^-$
Si $X \in \mathbb{A}^-$ entonces $I_n(X) \in \mathbb{A}^+$

Es decir que la *trasposición* de un acorde mayor es un acorde mayor y la de un acorde menor es un acorde menor, la *inversión* de un acorde mayor es un acorde menor y la *inversión* de un acorde menor es un acorde mayor.

Demostración. Para la relación existente entre los acordes mayores por la *transposición* se comparan dos acordes: uno proveniente de la transposición de un acorde mayor y otro arbitrario.

Sea $X = \{x, x + 4, x + 7\}$ un acorde mayor. Su transposición será

$$T_n(\{x, x + 4, x + 7\}) = \{x + n, (x + 4) + n, (x + 7) + n\}$$

Si la transposición es un acorde mayor es otro mayor debe ser de la forma $\{y, y + 4, y + 7\}, b \in \mathbb{Z}_{12}$, de otra forma

$$\{x + n, (x + 4) + n, (x + 7) + n\} = \{y, y + 4, y + 7\}$$

La raíz de la trasposición es x+n, es decir

$$y = x + n$$

De esto se obtiene que

$$y + 4 = (x + n) + 4 = x + (n + 4) = x + (4 + n) = (x + 4) + n$$

$$y + 7 = (x + n) + 7 = x + (n + 7) = x + (7 + n) = (x + 7) + n$$

De manera similar se puede probar que la transposición de un acorde menor es otro menor. Sobre el mismo acorde mayor, su inversión será

$$I_n(X) = \{-x + n, -(x + 4) + n, -(x + 7) + n\}$$

Como la inversión de un acorde mayor es uno menor este debe ser de la forma $\{y, y + 3, y + 7\}, b \in \mathbb{Z}_{12}$, de otra forma

$$\{-x + n, -(x + 4) + n, -(x + 7) + n\} = \{y, y + 3, y + 7\}$$

La raíz de la inversión es $-(x + 7) + n$, es decir

$$y = -(x + 7) + n$$

De esto se obtiene que

$$
\begin{aligned}
y+3 &= (-(x+7)+n)+3 \\
&= -(x+7)+(n+3) \\
&= -x+5+(3+n) \\
&= -x+8+n \\
&= -(x+4)+n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y+7 &= (-(x+7)+n)+7 \\
&= -(x+7)+(n+7) \\
&= -x+5+(7+n) \\
&= -x+n
\end{aligned}
$$

Ahora sea $X=\{x, x+3, x+7\}$ un acorde menor, su inversión será

$$I_n(X)=\{-x+n, -(x+3)+n, -(x+7)+n\}$$

Se puede demostrar que esta inversión es un acorde mayor, es decir que es de la forma $\{y, y+4, y+7\}$ si se toma como raíz del acorde a $-(x+7)+n$, es decir

$$y=-(x+7)+n$$

■

Estas transformaciones también se relacionan entre sí mediante la composición. Esta consideración tiene sentido pues la *transposición* y la *inversión* son funciones.

Teorema 4.4. Para todo $n, m \in \mathbb{Z}_{12}$ se tiene que

$$T_n \circ T_m = T_{n+m}$$

$$T_n \circ I_m = I_{n+m}$$

$$I_n \circ T_m = I_{n-m}$$

$$I_n \circ I_m = T_{n-m}$$

Demostración. Sea $X \in \mathbb{A}$ (mayor o menor), se tiene que

$$
\begin{aligned}
(T_n \circ T_m)(X) &= T_n\big(T_m(X)\big) \\
&= T_n(\{x_1 + m, x_2 + m, x_3 + m\}) \\
&= \{(x_1 + m) + n, (x_2 + m) + n, (x_3 + m) + n\} \\
&= \{x_1 + (n + m), x_2 + (n + m), x_3 + (n + m)\} \\
&= T_{n+m}(X)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(T_n \circ I_m)(X) &= T_n\big(I_m(X)\big) \\
&= T_n(\{m - x_1, m - x_2, m - x_3\}) \\
&= \{(m - x_1) + n, (m - x_2) + n, (m - x_3) + n\} \\
&= \{(n + m) - x_1, (n + m) - x_2, (n + m) - x_3\} \\
&= I_{n+m}(X)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(I_n \circ T_m)(X) &= I_n\big(T_m(X)\big) \\
&= I_n(\{x_1 + m, b + m, x_3 + m\}) \\
&= \{n - (x_1 + m), n - (x_2 + m), n - (x_3 + m)\} \\
&= \{(n - m) - x_1, (n - m) - x_2, (n - m) - x_3\} \\
&= I_{n-m}(X)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(I_n \circ I_m)(X) &= I_n\big(I_m(X)\big) \\
&= I_n(\{m - x_1, m - x_2, m - x_3\}) \\
&= \{n - (m - x_1), n - (m - x_2), n - (m - x_3)\} \\
&= \{x_1 + (n - m), x_2 + (n - m), x_3 + (n - m)\} \\
&= T_{n-m}(X)
\end{aligned}
$$

■

Nótese que la composición de *transposiciones* es conmutativa, heredado de la conmutatividad de la suma en $\mathbb{Z}_{12}$, componer dos *transposiciones* o dos *inversiones* da una *transposición*, mientras que la composición de una *transposición* y una *inversión*, indiferente de su orden, da una *inversión* (similar a la multiplicación de enteros). Además se puede ver que si en la operación la primer transformación es una *transposición* los subíndices de las transformaciones a operar se suman en el subíndice del resultado, contrario a que si la primera trasformación es una *inversión* en donde los subíndices de las transformaciones se restan.

Estas 24 funciones pueden formar un conjunto de transformaciones denominado Ψ el cual presenta una estructura de grupo con la composición.

Teorema 4.5. La estructura $(\Psi,\circ)$ es un grupo.

Demostración. Del teorema anterior se tiene que la operación, en este caso la composición, es cerrada, además la operación composición es asociativa.

El elemento neutro es la *transposición* por 0 (T_0), pues

$$(T_n \circ T_0)(X) = T_{n+0}(X) = T_{0+n}(X) = (T_0 \circ T_n)(X) = T_n(X)$$

$$(T_0 \circ I_n)(X) = I_{0+n}(X) = I_n(X)$$

$$(I_n \circ T_0)(X) = I_{n-0}(X) = I_n(X)$$

Cada transformación tiene un inverso. Para el caso de las *transposiciones* $-(T_n) = T_{-n}$, y para las *inversiones* $-(I_n) = I_n$, pues

$$(T_n \circ T_{-n})(X) = T_{n+(-n)}(X) = T_{-n+n}(X) = (T_{-n} \circ T_n)(X) = T_0(X)$$

$$(I_n \circ I_n)(X) = T_{n-n}(X) = T_0(X)$$

■

Con estos resultados es posible generar la tabla del grupo $(\Psi,\circ)$, de 24×24 (dado el número de transformaciones), donde se muestren los resultados de operar cada pareja del grupo.

$\circ$	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}
T_0	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}

T_1	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_0
T_2	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_0	I_1
T_3	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_0	I_1	I_2
T_4	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3
T_5	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4
T_6	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5
T_7	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
T_8	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7
T_9	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8
T_{10}	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	I_{10}	I_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9
T_{11}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	I_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}
I_0	I_0	I_{11}	I_{10}	I_9	I_8	I_7	I_6	I_5	I_4	I_3	I_2	I_1	T_0	T_{11}	T_{10}	T_9	T_8	T_7	T_6	T_5	T_4	T_3	T_2	T_1
I_1	I_1	I_0	I_{11}	I_{10}	I_9	I_8	I_7	I_6	I_5	I_4	I_3	I_2	T_1	T_0	T_{11}	T_{10}	T_9	T_8	T_7	T_6	T_5	T_4	T_3	T_2
I_2	I_2	I_1	I_0	I_{11}	I_{10}	I_9	I_8	I_7	I_6	I_5	I_4	I_3	T_2	T_1	T_0	T_{11}	T_{10}	T_9	T_8	T_7	T_6	T_5	T_4	T_3
I_3	I_3	I_2	I_1	I_0	I_{11}	I_{10}	I_9	I_8	I_7	I_6	I_5	I_4	T_3	T_2	T_1	T_0	T_{11}	T_{10}	T_9	T_8	T_7	T_6	T_5	T_4
I_4	I_4	I_3	I_2	I_1	I_0	I_{11}	I_{10}	I_9	I_8	I_7	I_6	I_5	T_4	T_3	T_2	T_1	T_0	T_{11}	T_{10}	T_9	T_8	T_7	T_6	T_5
I_5	I_5	I_4	I_3	I_2	I_1	I_0	I_{11}	I_{10}	I_9	I_8	I_7	I_6	T_5	T_4	T_3	T_2	T_1	T_0	T_{11}	T_{10}	T_9	T_8	T_7	T_6
I_6	I_6	I_5	I_4	I_3	I_2	I_1	I_0	I_{11}	I_{10}	I_9	I_8	I_7	T_6	T_5	T_4	T_3	T_2	T_1	T_0	T_{11}	T_{10}	T_9	T_8	T_7
I_7	I_7	I_6	I_5	I_4	I_3	I_2	I_1	I_0	I_{11}	I_{10}	I_9	I_8	T_7	T_6	T_5	T_4	T_3	T_2	T_1	T_0	T_{11}	T_{10}	T_9	T_8
I_8	I_8	I_7	I_6	I_5	I_4	I_3	I_2	I_1	I_0	I_{11}	I_{10}	I_9	T_8	T_7	T_6	T_5	T_4	T_3	T_2	T_1	T_0	T_{11}	T_{10}	T_9
I_9	I_9	I_8	I_7	I_6	I_5	I_4	I_3	I_2	I_1	I_0	I_{11}	I_{10}	T_9	T_8	T_7	T_6	T_5	T_4	T_3	T_2	T_1	T_0	T_{11}	T_{10}
I_{10}	I_{10}	I_9	I_8	I_7	I_6	I_5	I_4	I_3	I_2	I_1	I_0	I_{11}	T_{10}	T_9	T_8	T_7	T_6	T_5	T_4	T_3	T_2	T_1	T_0	T_{11}
I_{11}	I_{11}	I_{10}	I_9	I_8	I_7	I_6	I_5	I_4	I_3	I_2	I_1	I_0	T_{11}	T_{10}	T_9	T_8	T_7	T_6	T_5	T_4	T_3	T_2	T_1	T_0

Tabla 17. Operación de $(\Psi,\circ)$.

Por la manera en que se comporta la composición de *transposiciones* se puede determinar un isomorfismo con $\mathbb{Z}_{12}$, en donde a cada *transposición* se le asigna su subíndice, es decir que el isomorfismo se obtiene con la función

$$\begin{aligned} I\colon \{T_n \mid n \in \mathbb{Z}_{12}\} &\longrightarrow \mathbb{Z}_{12} \\ T_n &\longrightarrow n \end{aligned}$$

Intentar estudiar este grupo, de 24 elementos, es una tarea tediosa dado su orden (es un total de 24^2 resultados). Para facilitar el estudio de una estructura en general el Departamento de

Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, desde la línea de Álgebra, desarrolló el programa *Álgebra Finita*, en el cual a partir de la tabla de una operación, permite conocer las propiedades que dicha operación cumple. Sin embargo al querer realizar esto con la operación en $(\Psi,\circ)$ se encontró un gran limitante, el orden del grupo; el programa admite estructuras de máximo 15 elementos.

En un intento por realizar el análisis de $(\Psi,\circ)$ en el programa se buscó una "caracterización" del grupo intentando generar otro de un orden menor que pudiera ser ingresado al software. Dando una primer mirada a la tabla 17 es posible ver que este se divide en cuatro cuadrantes de igual área a partir del tipo de resultados (*transposiciones* o *inversiones*); en adelante se distinguirá el cuadrante superior izquierdo como el primer cuadrante, el superior derecho como el segundo, el inferior izquierdo como el tercero y el inferior derecho como el cuarto. Los cuadrantes uno y cuatro corresponden a *transposiciones* mientras que dos y tres son de *inversiones*. El pensar en una estructura más pequeña con esta característica obliga a que tal estructura sea de un número par de elementos, de manera que la tabla de su operación pueda ser dividida en cuatro partes iguales.

La forma del primer cuadrante, como se mencionó anteriormente, corresponde a uno de los $\mathbb{Z}_n$, más exactamente si la estructura que se busca es de un número par de elementos $2k, k \in \mathbb{Z}^+$, el primer cuadrante corresponde a $\mathbb{Z}_k$. Para el segundo, al fijarse en los subíndices de las *inversiones*, es posible ver que también corresponde al $\mathbb{Z}_k$ anterior, haciendo la salvedad que se trata de los resultados para la composición de *transposiciones* e *inversiones* ($T_n \circ I_m$ con $n, m \in \mathbb{Z}_{12}$), o visto de otra manera la acción de las *transposiciones* sobre las *inversiones.* El tercer y cuarto cuadrante también resultan ser similares, pues en ellos el lugar que ocupa una *inversión* (I_n) del tercer cuadrante lo ocupa su *transposición* "correspondiente" (T_n) en el cuarto cuadrante; la diagonal principal en estas dos secciones (que va de la parte superior izquierda a la inferior derecha) corresponde a las transformaciones de subíndice 0, la primer columna en ambos casos es la misma que en los otros dos cuadrantes, y para obtener cada fila, a diferencia de los $\mathbb{Z}_n$, en lugar de sumar 1, se "resta", es decir se suma -1 a los subíndices.

Buscando generar el grupo de características similares a los de $(\Psi,\circ)$, pero con un número menor de elementos de manera que pueda ser estudiado por Álgebra Finita, se hizo la asignación de las transformaciones a los términos que usa el programa, en donde las estructuras a estudiar se deben ingresar usando los símbolos indu-arábigos. La asignación se hizo de la siguiente manera.

$T_0 \to 0$	$T_3 \to 3$	$T_6 \to 6$	$T_9 \to 9$	$I_0 \to 12$	$I_3 \to 15$	$I_6 \to 18$	$I_9 \to 21$
$T_1 \to 1$	$T_4 \to 4$	$T_7 \to 7$	$T_{10} \to 10$	$I_1 \to 13$	$I_4 \to 16$	$I_7 \to 19$	$I_{10} \to 22$
$T_2 \to 2$	$T_5 \to 5$	$T_8 \to 8$	$T_{11} \to 11$	$I_2 \to 14$	$I_5 \to 17$	$I_8 \to 20$	$I_{11} \to 23$

Tabla 18. Asignación de símbolos indu-arábigos a las transformaciones.

Así el grupo $(\Psi,\circ)$ se presenta como se muestra a continuación.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	12
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	12	13
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	15	16	17	18	19	20	21	22	23	12	13	14
4	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	16	17	18	19	20	21	22	23	12	13	14	15
5	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	17	18	19	20	21	22	23	12	13	14	15	16
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	18	19	20	21	22	23	12	13	14	15	16	17
7	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	19	20	21	22	23	12	13	14	15	16	17	18
8	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	20	21	22	23	12	13	14	15	16	17	18	19
9	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	21	22	23	12	13	14	15	16	17	18	19	20
10	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	22	23	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
11	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	23	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
12	12	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	0	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
13	13	12	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	1	0	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
14	14	13	12	23	22	21	20	19	18	17	16	15	2	1	0	11	10	9	8	7	6	5	4	3
15	15	14	13	12	23	22	21	20	19	18	17	16	3	2	1	0	11	10	9	8	7	6	5	4
16	16	15	14	13	12	23	22	21	20	19	18	17	4	3	2	1	0	11	10	9	8	7	6	5
17	17	16	15	14	13	12	23	22	21	20	19	18	5	4	3	2	1	0	11	10	9	8	7	6
18	18	17	16	15	14	13	12	23	22	21	20	19	6	5	4	3	2	1	0	11	10	9	8	7
19	19	18	17	16	15	14	13	12	23	22	21	20	7	6	5	4	3	2	1	0	11	10	9	8

20	20	19	18	17	16	15	14	13	12	23	22	21	8	7	6	5	4	3	2	1	0	11	10	9
21	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	23	22	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	11	10
22	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	23	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	11
23	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Tabla 19. Operación de $(\Psi,\circ)$ *con los símbolos indu-arábigos.*

Una vez realizada esta nueva asignación, permitiendo ver otra cara de $(\Psi,\circ)$, se pasó a generar estructuras con menos elementos pero generadas de la misma manera. Nótese que los cuadrantes uno y cuatro usan la primera mitad de los elementos y los cuadrantes dos y tres usan la segunda mitad, es decir, si las estructuras que se generarás tienes $2k$ elementos ($k \in \mathbb{Z}^+$) los cuadrantes uno y cuatro se conforman por los elementos de 0 a k mientras que los otros dos cuadrantes usan los elementos desde $k+1$ hasta $2k$ (visto esto desde el orden usual de $\mathbb{Z}$).

Primero se intentó con una estructura de seis elementos usando igualmente los símbolos indu-arábigos $(0,1,2,3,4,5)$. En los diferentes cuadrantes se identificaron diferentes ordenaciones de los elementos en la forma

a	b	c
b	c	a
c	a	b

donde, en el primer cuadrante $a = 0, b = 1, c = 2$, en el segundo $a = 3, b = 4, c = 5$, y en la forma

a	b	c
c	a	b
b	c	a

donde, en el tercer cuadrante $a = 3, b = 5, c = 4$ y en el cuarto cuadrante $a = 0, b = 2, c = 1$. Con esto la estructura análoga a $(\Psi,\circ)$ de seis elementos tendría la siguiente forma.

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	0	4	5	3
2	2	0	1	5	3	4
3	3	5	4	0	2	1
4	4	3	5	1	0	2
5	5	4	3	2	1	0

Tabla 20. $(\Psi,\circ)$ *de seis elementos.*

Una vez generada esta tabla es ingresada al programa para verificar que efectivamente se trata de un grupo e identificar qué otras propiedades cumple, con esto tratar de realizar el estudio de $(\Psi,\circ)$ de manera "indirecta". Es importante verificar que esta nueva estructura es no conmutativa al igual que el grupo de 24 elementos, como se puede verificar en las tablas 17 y 19.

Efectivamente al ingresar la tabla en *Álgebra Finita* la estructura que se generó es un grupo no conmutativo pues la operación resulta ser asociativa, existe 0 que es elemento neutro, el inverso de 1 es 2, el de 2 es 1 y los inversos de 3,4 y 5 son ellos mismos; además de estas propiedades cumple la propiedad *elástica* $\big((a+b)+a=a+(b+a)\big)$. A manera de verificar que el método para generar grupos aparentemente de características similares a $(\Psi,\circ)$ se realizó el procedimiento anterior para estructuras con 8,10,12 y 14 elementos (teniendo en cuenta que el programa acepta estructuras de máximo 15 elementos). A continuación se presentan las tablas de tales estructuras.

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	0	5	6	7	4
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	0	1	2	7	4	5	6
4	4	7	6	5	0	3	2	1
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	5	4	7	2	1	0	3
7	7	6	5	4	3	2	1	0

Tabla 21. (Ψ,∘) *de ocho elementos.*

En el programa esta nueva estructura también tiene un elemento neutro (0), es asociativa y cada elemento tiene su inverso $(1^{-1} = 3; 2^{-1} = 2; 3^{-1} = 1; 4^{-1} = 4; 5^{-1} = 5; 6^{-1} = 6$ y $7^{-1} = 7)$, tampoco es conmutativa y además cumple la propiedad *elástica*.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	0	6	7	8	9	5
2	2	3	4	0	1	7	8	9	5	6
3	3	4	0	1	2	8	9	5	6	7
4	4	0	1	2	3	9	5	6	7	8
5	5	9	8	7	6	0	4	3	2	1
6	6	5	9	8	7	1	0	4	3	2
7	7	6	5	9	8	2	1	0	4	3
8	8	7	6	5	9	3	2	1	0	4
9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Tabla 22. (Ψ,∘) *de diez elementos.*

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	0	7	8	9	10	11	6
2	2	3	4	5	0	1	8	9	10	11	6	7
3	3	4	5	0	1	2	9	10	11	6	7	8
4	4	5	0	1	2	3	10	11	6	7	8	9
5	5	0	1	2	3	4	11	6	7	8	9	10
6	6	11	10	9	8	7	0	5	4	3	2	1
7	7	6	11	10	9	8	1	0	5	4	3	2
8	8	7	6	11	10	9	2	1	0	5	4	3
9	9	8	7	6	11	10	3	2	1	0	5	4
10	10	9	8	7	6	11	4	3	2	1	0	5
11	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Tabla 23. (Ψ,∘) *de doce elementos.*

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

1	1	2	3	4	5	6	0	8	9	10	11	12	13	7
2	2	3	4	5	6	0	1	9	10	11	12	13	7	8
3	3	4	5	6	0	1	2	10	11	12	13	7	8	9
4	4	5	6	0	1	2	3	11	12	13	7	8	9	10
5	5	6	0	1	2	3	4	12	13	7	8	9	10	11
6	6	0	1	2	3	4	5	13	7	8	9	10	11	12
7	7	13	12	11	10	9	8	0	6	5	4	3	2	1
8	8	7	13	12	11	10	9	1	0	6	5	4	3	2
9	9	8	7	13	12	11	10	2	1	0	6	5	4	3
10	10	9	8	7	13	12	11	3	2	1	0	6	5	4
11	11	10	9	8	7	13	12	4	3	2	1	0	6	5
12	12	11	10	9	8	7	13	5	4	3	2	1	0	6
13	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Tabla 24. $(\Psi,\circ)$ *de catorce elementos.*

Estas nuevas estructuras, al igual que la generada con seis elementos, resulta ser un grupo y cumplen también con la propiedad *elástica*. Al realizar este procedimiento intentando generar un grupo "análogo" a $(\Psi,\circ)$ con cuatro elementos se obtiene el grupo cuarto de Klein. Del estudio de estas nuevas estructuras se puede ver que aparentemente $(\Psi,\circ)$ puede caracterizarse a partir de la forma de la tabla generando infinitos grupos no conmutativos de un número par de elementos. El grupo de las *transposiciones* y las *inversiones* cumplen con la propiedad *elástica* gracias a la asociatividad de la composición de funciones.

Esta caracterización no determina un nuevo grupo, es una estructura ya conocida entre los ejemplos más conocidos de grupos no conmutativos: el *grupo diedro*. Una de las formas más comunes de presentar esta estructura se encuentra en las isometrías de polígonos regulares, más exactamente rotaciones y reflexiones, las *trasposiciones* realizan el papel de las rotaciones y las *inversiones* el de las reflexiones.

Los grupos diedros son un ejemplo clásico de grupos no conmutativos (es posible verificar esto en las tablas 21 al 24 al verificar que en ninguna de ellas se tiene una simetría por la diagonal de los elementos x^2), sin embargo es posible encontrar un resultado similar a la conmutatividad.

Teorema 4.6. $T_n \circ I_m = I_m \circ T_{-n}$.

Demostración.

$$T_n \circ I_m = I_{n+m} = I_{-(-n)+m} = I_{m-(-n)} = I_m \circ T_{-n}.$$

■

Una vez identificada la estructura que obedece $(\Psi,\circ)$ se pasó a mirar sus subgrupos y posibles resultados a través de ellos. En la tabla 18 es posible ver que el cuadrante superior izquierdo termina siendo $(\mathbb{Z}_{12},+)$, esto resulta ser casi natural pues este cuadrante corresponde a la composición de *transposiciones* en las cuales se cumple la propiedad conmutativa y la composición es otra *transposición* suma de las *transposiciones* compuestas; por tanto ya se tienen identificados los subgrupos isomorfos a $(\mathbb{Z}_2,+)$, $(\mathbb{Z}_3,+)$, $(\mathbb{Z}_4,+)$ y $(\mathbb{Z}_6,+)$.

Al tomar un acorde cualquiera, ya sea mayor o menor, al aplicar las *transposiciones* correspondientes a cada uno de los primeros subgrupos encontrados el conjunto de acordes obtenidos no se encierra en ninguna tonalidad. Por ejemplo si se toma el acorde de DO mayor y se le aplican las *transposiciones* del subgrupo isomorfo a $(\mathbb{Z}_3,+)$ los acordes obtenidos no se encierran en ninguna tonalidad. Las *transposiciones* que bajo la composición son isomorfos a $(\mathbb{Z}_3,+)$ son T_0 (cuya presencia es obligatoria en todo subgrupo por ser el elemento neutro), T_4 y T_8, ahora

$$T_0(C) = C \qquad\qquad T_4(C) = E \qquad\qquad T_8(C) = G\#$$

En ninguna tonalidad se tiene DO mayor (C) junto con MI mayor (E) y SOL sostenido mayor $(G\#)$. Si por el contrario no se parte de los subgrupos sino de los acordes, el acorde de DO mayor puede estar en su tonalidad, en la tonalidad de SOL mayor o de FA mayor (según la paridad de los grados en las escalas mayores). Esto mismo puede concluirse en un acorde menor, si se toma por ejemplo MI menor (E) y el conjunto de *transposiciones* que con la composición es isomorfo a $(\mathbb{Z}_4,+)$, es decir $\{T_0, T_3, T_6, T_9\}$, al aplicar estas *transposiciones* a MI menor se tiene

$$T_0(Em) = Em \qquad T_3(Em) = Gm \qquad T_6(Em) = A\#m \qquad T_9(Em) = C\#m$$

Se descarta que los acordes obtenidos se encuentren en alguna escala pues las fundamentales de los acordes (MI, SOL, LA♯ y DO♯) son notas que no están en ninguna escala mayor de manera simultánea, además se tiene que en los grados de una tonalidad hay máximo tres acordes menores. De lo anterior no es posible encontrar un subgrupo de $(\Psi,\circ)$ que tenga únicamente transposiciones y que permita transformar un acorde para obtener nuevos acordes que se enmarquen en una misma tonalidad.

Además de los subconjuntos anteriores es posible determinar otros a partir del generado por $\{T_n, I_m\}$, lo primero a tener en cuenta es que como $(\Psi,\circ)$ es otra cara del grupo diedro de 24 elementos aquellas *transposiciones* de orden 12 con cualquier *inversión* generarán todo Ψ.

Teorema 4.7. Si $(n, 12) = 1$ entonces $\langle\{T_n, I_m\}\rangle = \Psi$.

Demostración. Por la manera en que se define el grupo diedro D_{2n} el conjunto generado por el elemento de orden n es isomorfo a $\mathbb{Z}_n$, basta con definir una función en la que $g(a) = 1$, donde a es el elemento del grupo diedro con orden n y 1 es elemento de $\mathbb{Z}_n$. Ahora cuando $(k, n) = 1$ se tiene que $\langle k\rangle = \mathbb{Z}_n$. Por estos dos teoremas el generado por T_n es el conjunto de todas las *transposiciones*, es decir

$$\langle T_n\rangle = \{T_0, T_1, \dots, T_{10}, T_{11}\}$$

Además al operar cada *transposición* con la *inversión* dada se obtiene alguna de las otras once *inversiones*, pues si

$$T_i \circ I_n = T_j \circ I_n$$
$$(T_i \circ I_n) \circ I_{-n} = \left(T_j \circ I_n\right) \circ I_{-n}$$
$$T_i \circ (I_n \circ I_{-n}) = T_j \circ (I_n \circ I_{-n})$$
$$T_i = T_j$$

y por el teorema 4.1. se tiene que $i = j$.

$\blacksquare$

Sin embargo, por el argumento anterior, estos nuevos subconjuntos no generarán acordes que se enmarquen en una misma tonalidad al mismo tiempo pues finalmente es tomar en consideración los generados por la *transposición* dada. Otra opción es partir de los grados en una escala y verificar si las transformaciones del acorde de la tonalidad para determinar cada acorde en la escala forman o no un subgrupo.

Si por ejemplo se toma DO mayor los acordes mayores y menores que hacen parte de esta tonalidad son RE menor, MI menor, FA mayor, SOL mayor y LA menor. Tomando DO mayor como el acorde fundamental de las transformaciones se debe aplicar *transposiciones* para obtener los acordes de FA y SOL, pues estos también son mayores, e *inversiones* para conseguir RE, MI y LA que son acordes menores en esta tonalidad. Las trasformaciones son:

$$I_9(C) = Dm \qquad I_{11}(C) = Em \qquad T_5(C) = F \qquad T_7(C) = G \qquad I_4(C) = Am$$

Por el teorema anterior el generado por este conjunto de transformaciones es todo Ψ pues tanto 7 como 5 son primos relativos con 12, y con cualquiera de las *inversiones* obtenidas se obtienen las 24 transformaciones. En general en toda escala mayor la fundamental del cuarto grado se encuentra a 5 semitonos de la tonalidad por tanto T_5 será una transformación que se encontrará al buscar las transformaciones necesarias para determinar todos los grados en una escala mayor.

Aun cuando la armonía clásica se muestra de una manera organizada se ve cómo la correspondencia entre notas y elementos del grupo $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ no garantiza la obtención de una estructura organizada en las diferentes progresiones. Se pasará a buscar si en el Serialismo ocurre algo similar.

5. Serialismo

Ya a comienzos del siglo XX la armonía rompe con la idea de funcionalidad hacia una nota central proponiendo permitir el protagonismo a todas las notas de la escala temperada, esto se denominó *armonía atonal.* Entre las diferentes corrientes que siguieron esta idea se encuentra el *dodecafonismo* propuesto por Schoenberg en donde a partir de una serie fundamental que incluye las doce notas musicales sin repetición, se efectúan transformaciones sobre dicha serie generando otras, las cuales se encadenaban y formaban la melodía en una pieza musical. Para el acompañamiento armónico se escoge la nota a la cual se le desea dar fuerza o protagonismo y se ejecuta alguno de sus acordes (mayor, menor aumentado o disminuido), según la intensión que el compositor desea expresar. Bajo este fundamento el Serialismo no da el protagonismo a los acordes sino a las melodías, claro está, sin dejar de lado la composición de acordes, pues, como se mencionó anteriormente, acordes y melodías son componentes que casi siempre van de la mano. La siguiente figura muestra un ejemplo de pieza musical basado en esta corriente de composición.

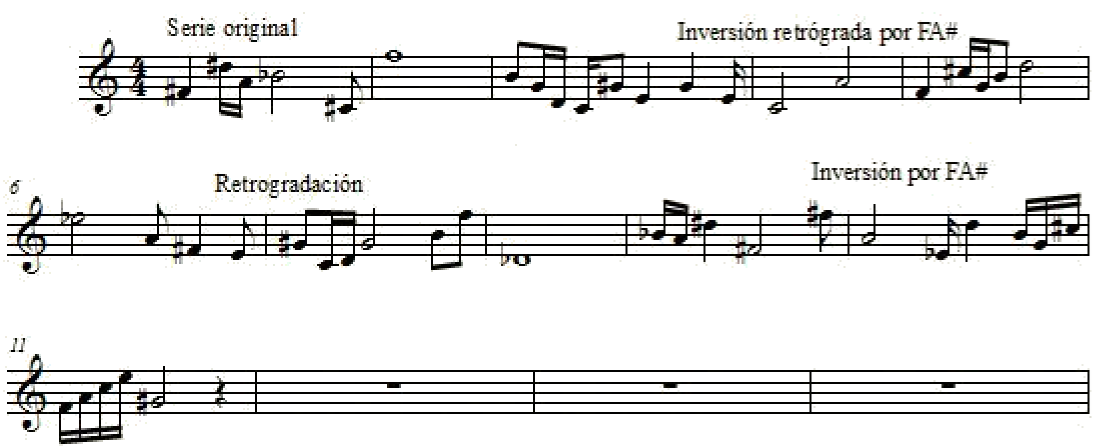


Figura 26. Ejemplo de compocisión dodecafónica.

Bajo la idea del protagonismo de la melodía la traducción a un lenguaje matemático enmarcado en esta corriente de composición se basa en la definición de melodía dada en el tercer capítulo. Es importante recordar que aquí no es válida la repetición de notas en la melodía, esto da lugar a la siguiente definición.

Definición 5.1. Una *n-serie* es una melodía α_n tal que si $a_i = a_j$ entonces $i = j$.

A partir de la condición dada en la definición las *n-series* pueden tener un máximo de 12 notas $(n \leq 12)$. Ahora, a partir de las transformaciones presentadas anteriormente en esta corriente de composición se re definen dichas transformaciones desde un enfoque matemático.

Definición 5.2. Dada una *n-serie* $\alpha_n \in (\mathbb{Z}_{12})^n$, una *Inversión* es una función tal que:

$$\begin{aligned} I_t\colon (\mathbb{Z}_{12})^n &\longrightarrow (\mathbb{Z}_{12})^n \\ \alpha_n &\longrightarrow I_t(\alpha_n) = 2t - \alpha_n \end{aligned}$$

donde

$$2t - \alpha_n = (2t - a_1, 2t - a_2, \dots 2t - a_n), a_i, t \in \mathbb{Z}_{12}$$

Es importante determinar y fijar una nota t para efectos de esta transformación. En el *Serialismo* normalmente esta nota es la primera de la serie. Por la manera en que se define esta transformación y por las características de la multiplicación en $\mathbb{Z}_{12}$ es posible notar que no se tienen doce inversiones en total (una por cada nota que haga el papel de t), sino que hay tan solo seis, pues

$$2t - \alpha_n = (2t + 0) - \alpha_n = (2t + 2 \cdot 6) - \alpha_n = 2(t + 6) - \alpha_n$$

Con esto es visible que finalmente se darán 6 inversiones distintas y no 12 (correspondiente al número de notas de la escala cromática temperada), es decir que la inversión por DO es la misma que por FA♯, por DO♯ es la misma que por SOL, y de forma similar con las demás notas hasta la inversión por FA y SI. Ahora la *Retrogradación.*

Definición 5.3. Dada una *n-serie* $\alpha_n \in (\mathbb{Z}_{12})^n$, una *Retrogradación* es una función tal que:

$$R: (\mathbb{Z}_{12})^n \longrightarrow (\mathbb{Z}_{12})^n$$
$$\alpha_n \longrightarrow R(\alpha_n) = \overleftarrow{\alpha_n}$$

donde

$$\overleftarrow{\alpha_n} = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)$$

En esta transformación básicamente los elementos de la *n-serie* son invertidos de orden. Finalmente la *Retrogradación con Inversión.*

Definición 5.4. Dada una *n-serie* $\alpha_n \in (\mathbb{Z}_{12})^n$, una *Retrogradación con Inversión* es una función tal que:

$$RI_t: (\mathbb{Z}_{12})^n \longrightarrow (\mathbb{Z}_{12})^n$$
$$\alpha_n \longrightarrow 2t - \overleftarrow{\alpha_n}$$

donde

$$2t - \overleftarrow{\alpha_n} = (2t - a_n, 2t - a_{n-1}, \dots, 2t - a_1)$$

Aquí también es necesario fijar una nota de la serie, como en la *Inversión*. Además de estas transformaciones es posible definir el estado fundamental de la serie como una función que es básicamente aquella que lleva una *n-serie* en ella misma. De manera análoga se puede demostrar que así mismo que son 6 retrogradaciones con inversión. Para efectos de cuentas es necesario definir una transformación *Fundamental.*

Definición 5.5. Dada una *n-serie* $\alpha_n \in (\mathbb{Z}_{12})^n$, la *Fundamental* no es más que la identidad:

$$F: (\mathbb{Z}_{12})^n \longrightarrow (\mathbb{Z}_{12})^n$$
$$\alpha_n \longrightarrow \alpha_n$$

En el de texto de (Agustín, du Plessis, Lluis, & Montiel, 2009) se da como ejemplo la *n-serie* que se encuentra en el compás 29 de la Fuga 6 en RE menor del primer libro del *Das Wohltemperierte Klavier* de Johann Sebastian Bach,

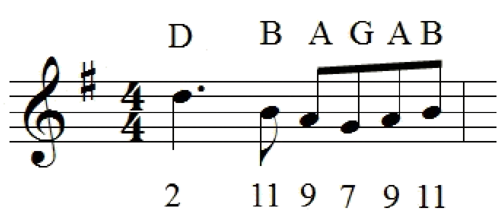
$$(9, 7, 5, 4, 7)$$

Se aplican las diferentes transformaciones anteriormente definidas obteniendo las *n-series* $(5, 7, 9, 10, 7)$, por medio de la *Inversión* respecto a la nota SOL, $(7, 4, 5, 7, 9)$, por medio de la *Retrogradación* lo que resulta únicamente en invertir el orden de los elementos de la *n-serie*, y finalmente la Inversión con Retrogradación para obtener $(7, 10, 9, 7, 5)$. En este ejemplo en particular las transformaciones permiten que las nuevas *n-series* se mantengan dentro de la tonalidad. Nótese que la *Retrogradación* siempre respetará la tonalidad del tema ya que su única función es un cambio de orden a las notas, no de afinación, ahora será necesario ver si la *Inversión*, y por lo tanto la *Retrogradación con Inversión*, igualmente respeta la tonalidad en general.

Como ejemplo se tomará la primer parte de un tema conocido del rock en español, "La flaca", de Andrés Calamaro, este tema se encuentra en la tonalidad de G mayor:

$$\{G, A, B, C, D, E, F\#\} \approx \{7, 9, 11, 0, 2, 4, 6\}$$

La *n-serie* a transformar es $(2, 11, 9, 7, 9, 2)$, a esta se le aplica la *Inversión* respecto a cada una de las notas de la escala cromática temperada, prestando mayor atención sobre los tonos que hacen parte de la tonalidad de G mayor. A continuación se presentan en el pentagrama el n-motivo original y las inversiones obtenidas para cada tonalidad.

n-serie original	Inversiones	
		Por 0
		Por 1

		Por 2
		Por 3
		Por 4
		Por 5

Tabla 25. Inversiones para cada tono.

Al realizar esto se encuentra que no necesariamente la inversión respeta la tonalidad, las nuevas *n-series* pueden traer consigo notas que se salen de las alteraciones de la escala, en el caso particular la única alteración de G mayor es $F\#$. En los diferentes compases es visible que las nuevas *n-series* pueden tener alteraciones por fuera de la escala por las alteraciones (sostenidos y becuadros) que acompañan las diferentes notas, a excepción de la inversión por el tono $s = 3 = f(D\#)$, aunque esta nota no tiene relación alguna con la tonalidad. También se tiene los dos tipos de alteraciones en los diferentes compases (sostenido y bemol), los cuales se han elegido convenientemente para que las configuraciones figurales sean iguales en todos los casos, todas las inversiones presentan la misma forma en ubicaciones diferentes (con un incremento constante de un tono a partir de la primer inversión).

En el estudio de funciones uno de los procedimientos más comunes es la composición. Para realizar esto con las diferentes transformaciones (incluyendo la *Fundamental*), se cuenta con 14 funciones: la *Fundamental,* la *Retrogradación*, 6 *Inversiones* y 6 *Retrogradaciones con Inversión.* Las siguientes tablas registran los resultados de estas composiciones.

$\circ$	F	R	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5
F	F	R	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5
R	R	F	RI_0	RI_1	RI_2	RI_3	RI_4	RI_5
I_0	I_0	RI_0	F	$F+10$	$F+8$	$F+6$	$F+4$	$F+2$
I_1	I_1	RI_1	$F+2$	F	$F+10$	$F+8$	$F+6$	$F+4$
I_2	I_2	RI_2	$F+4$	$F+2$	F	$F+10$	$F+8$	$F+6$
I_3	I_3	RI_3	$F+6$	$F+4$	$F+2$	F	$F+10$	$F+8$
I_4	I_4	RI_4	$F+8$	$F+6$	$F+4$	$F+2$	F	$F+10$
I_5	I_5	RI_5	$F+10$	$F+8$	$F+6$	$F+4$	$F+2$	F

Tabla 26. Composición de las transformaciones dodecafónicas 1.

$\circ$	RI_0	RI_1	RI_2	RI_3	RI_4	RI_5
F	RI_0	RI_1	RI_2	RI_3	RI_4	RI_5
R	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_4
I_0	R	$R+10$	$R+8$	$R+6$	$R+4$	$R+2$
I_1	$R+2$	R	$R+10$	$R+8$	$R+6$	$R+4$
I_2	$R+4$	$R+2$	R	$R+10$	$R+8$	$R+6$
I_3	$R+6$	$R+4$	$R+2$	R	$R+10$	$R+8$
I_4	$R+8$	$R+6$	$R+4$	$R+2$	R	$R+10$
I_5	$R+10$	$R+8$	$R+6$	$R+4$	$R+2$	R

Tabla 27. Composición de las transformaciones dodecafónicas 2.

$\circ$	F	R	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5
RI_0	RI_0	I_0	R	$R+10$	$R+8$	$R+6$	$R+4$	$R+2$

RI_1	RI_1	I_1	$R+2$	R	$R+10$	$R+8$	$R+6$	$R+4$
RI_2	RI_2	I_2	$R+4$	$R+2$	R	$R+10$	$R+8$	$R+6$
RI_3	RI_3	I_3	$R+6$	$R+4$	$R+2$	R	$R+10$	$R+8$
RI_4	RI_4	I_4	$R+8$	$R+6$	$R+4$	$R+2$	R	$R+10$
RI_5	RI_5	I_5	$R+10$	$R+8$	$R+6$	$R+4$	$R+2$	R

Tabla 28. Composición de las transformaciones dodecafónicas 3.

$\circ$	RI_0	RI_1	RI_2	RI_3	RI_4	RI_5
RI_0	F	$F+10$	$F+8$	$F+6$	$F+4$	$F+2$
RI_1	$F+2$	F	$F+10$	$F+8$	$F+6$	$F+4$
RI_2	$F+4$	$F+2$	F	$F+10$	$F+8$	$F+6$
RI_3	$F+6$	$F+4$	$F+2$	F	$F+10$	$F+8$
RI_4	$F+8$	$F+6$	$F+4$	$F+2$	F	$F+10$
RI_5	$F+10$	$F+8$	$F+6$	$F+4$	$F+2$	F

Tabla 29. Composición de las transformaciones dodecafónicas 4.

En estas tablas se puede ver que la composición de las diferentes transformaciones (incluyendo la *Fundamental*), no es cerrada, se presentan resultados del tipo $F+a$ y $R+b$, con $a, b \in \mathbb{Z}_{12}$, que finalmente son nuevas transformaciones:

$$\begin{aligned} F+a\colon (\mathbb{Z}_{12})^{\mathrm{n}} &\longrightarrow (\mathbb{Z}_{12})^{\mathrm{n}} \\ \alpha_n &\longrightarrow \alpha_n + a \end{aligned}$$

donde

$$\alpha_n + a = (a_1 + a, a_2 + a, \dots, a_n + a)$$

$$\begin{aligned} R+b\colon (\mathbb{Z}_{12})^{\mathrm{n}} &\longrightarrow (\mathbb{Z}_{12})^{\mathrm{n}} \\ \alpha_n &\longrightarrow R(\alpha_n) + b = \overleftarrow{\alpha_n} + b \end{aligned}$$

donde

$$\overleftarrow{\alpha_n} + b = (a_n + b, a_{n-1} + b, \dots, a_1 + b)$$

Nótese que estas nuevas funciones aparecen en la composición de transformaciones que involucran inversiones (I_t y RI_s, con $t, s \in \mathbb{Z}_{12}$), cuando una de las transformaciones a componer era la *Fundamental* o la *Retrogradación*, la composición se mantiene cerrada respecto a las 14 transformaciones tomadas inicialmente. Otro resultado visible en la tabla es que

$$I_t \circ I_s = RI_t \circ RI_s$$

$$RI_t \circ I_s = I_t \circ RI_s$$

A pesar de que las 14 transformaciones no sean cerradas bajo la composición, al fijar la nota de inversión, es posible ver que la composición se "cierra"; en la siguiente tabla se muestra esta idea fijando a 0 como nota de inversión.

$\circ$	F	R	I_0	RI_0
F	F	R	I_0	RI_0
R	R	F	RI_0	I_0
I_0	I_0	RI_0	F	R
RI_0	RI_0	I_0	R	F

Tabla 30. Composición de transformaciones con tono de inversión fijo.

En esta tabla se puede ver que la estructura $(\{F, R, I_t, RI_t\}, \circ)$, con t un tono fijo para la inversión, es cerrada bajo la composición, su operación es asociativa (propiedad característica de la composición de funciones), F actúa como elemento neutro, cada elemento es su propio inverso, y además es conmutativo, por tanto esta estructura es un *grupo abeliano*. En Teoría de Grupos existe una estructura muy conocida, también con cuatro elementos, conmutativa y en la cual cada elemento es su propio inverso, este se conoce como el *grupo cuarto de Klein* (este grupo tiene una configuración similar al de la tabla 14). Por tanto la estructura $(\{F, R, I_t, RI_t\}, \circ)$ y el grupo de Klein ($\mathbb{K}$) presentan un *isomorfismo* de grupos; esto se visualiza mediante la función.

$f: \mathbb{K} \longrightarrow \{F, R, I_t, RI_t\}$			
$0 \longrightarrow F$	$1 \longrightarrow R$	$2 \longrightarrow I_t$	$3 \longrightarrow RI_t$

Tabla 31. Klein en las transformaciones de n-series.

Conclusiones, Reflexiones y Recomendaciones

Con base en el desarrollo de este documento se puede concluir que:

- En la indagación realizada se observó que muy pocos textos que hablan sobre la Música y las Matemáticas los relacionan de forma directa, por lo general la Física u otro campo de conocimiento aparece como mediador.
- Debido a que dos notas de la escala temperada reciben el mismo nombre cuando el cociente de sus frecuencias es una potencia de 2, y teniendo en cuenta que las frecuencias se asignan mediante una progresión geométrica[16] con razón $\sqrt[12]{2}$, se presenta un comportamiento cíclico nominal en las notas musicales que permite establecer una biyección con el grupo cíclico $\mathbb{Z}_{12}$.
- El poder establecer una distancia tonal en el conjunto de las notas musicales, permite definir una acción del grupo abeliano $(\mathbb{Z}_{12},+)$ sobre el conjunto de notas de la escala temperada.
- Usando la biyección entre el conjunto de notas de la escala temperada y el conjunto $\mathbb{Z}_{12}$, es posible redefinir algunos conceptos musicales como el de melodía y acorde a partir de funciones.
- Varios de los métodos de composición que se utilizan en la música resultan ser operaciones, esto se hace evidente cuando dichos métodos se expresan como funciones en conjuntos construidos a partir del grupo abeliano $(\mathbb{Z}_{12},+)$.
- Definir de manera matemática algunos conceptos musicales no garantiza que los tratamientos con dichos conceptos correspondan a una estructura matemática; así mismo el llevar estructuras y tratamientos matemáticos sobre objetos musicales no garantiza que se obtengan resultados válidos desde la teoría musical.

[16] En realidad esta no es una progresión geométrica como tal pues no se define desde $\mathbb{N}$ sino desde $\mathbb{Z}$.

Como reflexión en el desarrollo de las ideas aquí presentadas se puede ver que:

- ❖ Por medio de este Trabajo de Grado se logró inicialmente hacer un análisis de un documento que si bien presenta relaciones entre la Teoría de Grupos y la Música no es lo suficientemente concreto al momento de presentarlas, tan solo muestra algunos procedimientos sin profundizar en ninguno de los dos campos; en este documento se puntualizó varias de estas ideas haciendo una nueva presentación del enlace Música-Matemáticas presente en el documento de Agustín y otros (2009) que fuese más preciso, aspecto que personalmente es de suma importancia pues este trabajo se realizó con el fin de obtener el título de Licenciado en Matemáticas, y si un Licenciado no busca diferentes maneras de expresar ideas en busca de que sus estudiantes le entiendan de la mejor manera posible, en lo personal, ha perdido años valiosos en una formación que no generó reflexión en él.

Se recomienda al lector que:

- ❖ El estudio de un documento académico, debe traer consigo una reflexión constante de las ideas que allí se presenten; si bien la redacción de publicaciones trae consigo la responsabilidad de comunicar ideas ciertas, es decir, que bajo ciertas bases se presenten verdades dentro de una teoría, el trabajo del lector es emitir una interpretación propia de las ideas presentes en el documento, y, de ser necesario, hacer una crítica que permita al autor, y a otros lectores, llegar a nuevas o mejores interpretaciones.

Bibliografía.

Agustín, O., du Plessis, J., Lluis, E., & Montiel, M. (2009). *Una introducción a la Teoría de Grupos con aplicaciones en la Teoría Matemática de la Música.* Sociedad Matemática Mexicana.

Blázquez, R. M. (2012). *Música y Matemáticas.* Ávila.

Borrero, F. D. (Diciembre de 2008). Recuperado el 2 de Septiembre de 2015, de http://www.csi-csif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_13/FCO_DANIEL_BORRERO_2.pdf

García, R., & Martinez, T. (s.f.). Recuperado el 6 de Septiembre de 2015, de http://www-ma4.upc.edu/~xgracia/musmat/treballs/GarMar.armonia.pdf

Lárez, V. (2010). *Armonía I.* Caracas: Universidad Nacional Experimental.

Lluis, E. (2006). *Teoría de Grupos, un primer curso.* Ciudad de México: Sociedad Matemática Mexicana.

Pérez, É. (2008). *Estructuras Algebraicas.* Bogotá D.C.: Universidad Pedagógica Nacional.

Romero, R. (s.f.). *Música y Matemáticas*. Recuperado el 22 de Abril de 2015, de https://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/historia/Musica%20y%20Matematicas.pdf

Schoenberg, A. (1974). *Tratado de Armonía.* Madrid: Real Musica.