

# **SÓLIDOS DE ANCHO CONSTANTE: MÉTODOS DE CONSTRUCCIÓN**

Modalidad: Trabajo de grado asociado al interés propio de los estudiantes

**ARBEY ANDRÉS PRIETO MARTÍNEZ  
VICTOR ALFONSO PRIAS ALARCÓN**

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL  
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
Bogotá D.C., Noviembre de 2015**

**SÓLIDOS DE ANCHO CONSTANTE: MÉTODOS DE CONSTRUCCIÓN**

**Trabajo de grado presentado para optar al título de  
Licenciado en Matemáticas**

**ARBEY ANDRÉS PRIETO MARTÍNEZ**

**Código: 2010140082**

**VICTOR ALFONSO PRIAS ALARCÓN**

**Código: 2010140042**

**ASESOR:**

**OSCAR JAVIER MOLINA JAIME**

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL**

**FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA**

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**

**Bogotá D.C., Noviembre de 2015**



## RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE

<b>1. Información General</b>	
<b>Tipo de documento</b>	Trabajo de grado.
<b>Acceso al documento</b>	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central.
<b>Título del documento</b>	SÓLIDOS DE ANCHO CONSTANTE: MÉTODOS DE CONSTRUCCIÓN.
<b>Autor(es)</b>	Prías Alarcón, Víctor Alfonso; Prieto Martínez, Arbey Andrés
<b>Director</b>	Molina Jaime, Oscar Javier
<b>Publicación</b>	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2015. 105 p.
<b>Unidad Patrocinante</b>	Universidad Pedagógica Nacional.
<b>Palabras Claves</b>	FIGURAS DE ANCHO CONSTANTE, SÓLIDOS DE ANCHO CONSTANTE, MÉTODOS DE CONSTRUCCIÓN DE SÓLIDOS DE ANCHO CONSTANTE.

<b>2. Descripción</b>
<p>En este trabajo se realiza una descripción y justificación de métodos de construcción de algunos sólidos de ancho constante con ayuda del programa Cabri 3D y Rhinoceros 5 como entornos de geometría dinámica y gráfico, respectivamente.</p> <p>Para algunos casos, estos métodos de construcción son una recopilación de procedimientos que se encuentran en documentos especializados sobre este tipo de sólidos. Entre este tipo de métodos, resaltamos aquellos que son una extrapolación, al caso del espacio, de los métodos de construcción de Figuras (planas) de Ancho Constante expuestos por Gil y Orjuela (2010), Montejano (1998) y Weber (2009). De otro lado, presentamos otros métodos que son de nuestra autoría, fundamentados en las ideas expuestas por Weber para construir su Sólido de Ancho Constante a partir de un tetraedro regular; destacamos, en este contexto, dos caminos de exploración para generar métodos de construcción de SAC:</p> <p>Camino 1: Dado que el tetraedro de Reuleaux se basa en un tetraedro regular, y es posible construir un SAC a partir de estos, tenemos como hipótesis que es posible generar métodos de construcción de SAC con base en los demás sólidos platónicos.</p>



Camino 2: Dado que el tetraedro de Reuleaux se basa en un tetraedro regular, y es posible construir un SAC a partir de estos, tenemos como hipótesis que al considerar el tetraedro como una pirámide con ciertas condiciones (su “base” es un polígono regular, su eje es perpendicular a la base por su centro), es posible generar métodos de construcción de SAC con base en otras pirámides con condiciones similares a estas.

En síntesis, presentamos métodos de construcción de Sólidos de Ancho Constante presentes en alguna literatura especializada, y aquellos que surgen de la exploración antes descrita.

### 3. Fuentes

Para este trabajo se consultaron las siguientes fuentes:

1. Cortés, J. & Cordero, J. (2002). *Curvas y superficies para el modelado geométrico*. Obtenido de Centro de investigación de métodos computacionales el 10 de febrero de 2015 desde: [http://www.cimec.org.ar/~ncalvo/curvas\\_doc.pdf](http://www.cimec.org.ar/~ncalvo/curvas_doc.pdf)
2. Gil, L. & Orjuela, M. (2010). *Figuras de ancho constante: una temática para explorar*. (Trabajo de grado para optar por el título de Licenciatura en Matemáticas). UPN, Bogotá, Colombia.
3. McNeel, R. & Associates. (2014). Manual del usuario Rhinoceros 5. Barcelona, España. Recuperado de: <https://www.rhino3d.com/download/rhino/5.0/UsersGuide>
4. Moise, E. & Downs, F. (1986). *Geometría moderna*. Editorial Addison-Wesley Iberoamericana: Estados Unidos.
5. Montejano, L. (1998). *Cuerpos de ancho constante*. Ediciones científicas universitarias, Universidad Autónoma de México. Fondo de cultura económica: México D.F.
6. Rademacher, H. & Töeplitz, O. (1990). Curves of Constant Breadth. En D. P. amateur. New York.
7. Sophie & Pierre René de Cotret. (2006). Manual del usuario cabri 3D. Montréal, Quebec, Canadá. Recuperado de: <http://www.cabri.com>
8. Weber, C. (2009). *What does this solid have to do with a ball? (pp 1-4)*. Obtenido de Swissheduc.ch el 10 de febrero de 2015 desde: [http://www.swissheduc.ch/mathematik/geometrie/gleichdick/docs/meissner\\_en.pdf](http://www.swissheduc.ch/mathematik/geometrie/gleichdick/docs/meissner_en.pdf)

#### 4. Contenidos

El objetivo del presente trabajo de grado es “Describir, crear y justificar métodos de construcción de algunos sólidos de ancho constante (SAC), con ayuda de los programas Cabrí 3D y Rhinoceros 5 como entornos de geometría dinámica y gráfico, respectivamente”. Para describir el proceso que nos permitió alcanzar dicho objetivo, presentamos cinco capítulos que se describen a continuación:

En el capítulo 1 se presenta la justificación, objetivo general antes mencionado y los objetivos específicos que se pretenden alcanzar con este estudio.

El capítulo 2 se titula *Referente teórico y fases de estudio*. Allí se encuentran los referentes teóricos que fundamentan la realización de dicho trabajo; estos se presentan en tres secciones: La primera expone una descripción general de las características esenciales de los programas computarizados Cabrí 3d y Rhinoceros 5 y cómo se complementan entre sí para este estudio. En la segunda sección presentamos referentes geométricos que permiten describir las figuras planas y sólidos de ancho constante. En la tercera sección se presenta, de manera general, las fases de estudio y metodología seguida para la consolidación tanto del estudio como del documento final para este trabajo.

En el capítulo 3 titulado *Métodos de construcción de SAC (Sólidos de Ancho Constante)*, se presenta la que podríamos llamar la sustancia del estudio, esto es, los métodos de construcción de los sólidos de ancho constante que pudimos compilar y crear como resultado de una consulta y exploración, respectivamente. Estos se muestran en cinco secciones: SAC a partir de la revolución de FAC (figuras de ancho constante), SAC a partir de la revolución de SAC, SAC a partir del método de Weber, SAC a partir de la modificación del método de Weber (primer aporte), SAC a partir de otros poliedros regulares (segundo aporte) y SAC a partir de pirámides rectangulares (tercer aporte).

Finalmente en los capítulos 4 y 5 se presentan las conclusiones obtenidas y la bibliografía de documento, respectivamente.

#### 5. Metodología

Para describir, crear y justificar los métodos de construcción de los SAC, optamos por las siguientes fases de estudio: primero se hizo una consulta y recolección de material bibliográfico sobre los sólidos de ancho constante y paralelamente a ello, sobre el uso de

programas computarizados útiles para la modelación y exploración de objetos geométricos en el espacio (Rhinoceros 5 y Cabri 3d).

Luego de precisar algunos métodos de SAC en cierta literatura especializada al respecto, nos enfocamos en hacer exploraciones en el software Cabri 3D (dado que permite el dinamismo a partir de la herramienta del *arrastre*), fundamentados en los métodos encontrados en tal literatura, que nos permitieran crear SAC con el propósito de generar procedimientos originales para construir este tipo de sólidos; hechas las exploraciones, nos avocamos a escribir e ilustrar cada uno de los pasos de los procedimientos producidos haciendo uso de Cabri 3D y Rhinoceros 5. Para todos los casos genéricos, se proveyó una justificación que garantiza que el sólido resultante es de ancho constante.

## 6. Conclusiones

1. Haciendo énfasis en los métodos de construcción de (Montejano, L., 1998; Weber, C, 2009) respectivamente, podemos concluir de cada método:

**SAC a partir de la revolución de figuras de ancho constante.** Es posible construir Sólidos de Ancho Constante al revolucionar Figuras de Ancho Constante con respecto a uno de sus ejes de simetría.

**SAC a partir del método de Weber.** Mostramos, en primera instancia que este método se basa en la extrapolación del método de construcción del triángulo de Reuleaux, esto es, tomar el tetraedro regular como Poliedro “base” (en lugar de un triángulo equilátero) y con centro en cada uno de los vértices del tetraedro y radio igual a una de las aristas, realizar sendas esferas (en lugar de circunferencias con centro los vértices del triángulo, y radio, los lados del mismo). El sólido de menor superficie resultante de la unión de los casquetes esféricos surgidos a partir de la intersección de las esferas construidas se llama Tetraedro de Reuleaux. Dicho sólido no es un SAC; no obstante es posible hacer unos ajustes a tal Tetraedro de manera tal que se genere un SAC. Weber propone uno de tales ajustes al revolucionar unos arcos especiales; nosotros logramos precisar dos: uno equivalente al de Weber y otro basado en la construcción de otras esferas (que llamamos esferas ajuste) que en esencia permite redondear el tetraedro de Reuleaux y en consecuencia, así obtener un SAC.

2. Con base en las ideas surgidas a partir de ajustar el tetraedro de Reuleaux, se determinaron, describieron y justificaron métodos genuinos de construcción de

algunos sólidos de ancho constante. En este sentido, se construyeron SAC a partir del Cubo y del Octaedro. Para ello fue necesario hacer exploraciones realizadas en los programas computarizados utilizados, a partir de tales poliedros Platónicos. Se presumen que son más los SAC que se obtienen a partir del Cubo y del Octaedro lo cual sería consecuencia de tener en cuenta otras esferas de ajuste diferentes a las que acá presentamos. Todo dependería de las combinaciones posibles de los arcos en los cuales se construyen los puntos que se toman como centro de tal esfera. Hipotetizamos además que con los demás poliedros platónicos, es posible también generar SAC. El espacio temporal y de extensión de este documento no nos permitió verificar nuestra hipótesis

3. De manera análoga al procedimiento expuesto en el numeral anterior, logramos precisar que es posible generar SAC a partir de otros tipos de poliedros, esto es, de pirámides rectangulares con base en un polígono regular.
4. Los programas computarizados utilizados se convirtieron en una herramienta fundamental de exploración, pero en particular Rhinoceros 5 fue una herramienta bastante útil para obtener los resultados expuestos anteriormente, a pesar de no ser un software de geometría dinámica, sino de diseño.

<b>Elaborado por:</b>	Prias Alarcón, Victor Alfonso; Prieto Martínez, Arbey Andrés
<b>Revisado por:</b>	Molina Jaime, Oscar Javier

<b>Fecha de elaboración del Resumen:</b>	3	11	2015
--	---	----	------

## TABLA DE CONTENIDO

1	JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVOS .....	15
1.1	JUSTIFICACIÓN DE ESTUDIO.....	15
1.2	OBJETIVOS DEL ESTUDIO.....	16
1.2.1	General .....	16
1.2.2	Objetivos Específicos.....	16
2	REFERENTE TEÓRICO Y FASES DE ESTUDIO .....	17
2.1	Programas computarizados empleados en el estudio .....	17
2.1.1	Descripción de Cabrí 3D.....	17
2.1.2	Descripción General de Rhinoceros 5 .....	24
2.1.2.1	Breve descripción de NURBS .....	25
2.1.2.2	Objetos geométricos básicos de Rhinoceros.....	26
2.1.3	Cómo se complementan estos programas para el estudio .....	27
2.2	Referente Geométrico.....	28
2.2.1	Definiciones.....	28
2.2.1.1	Definiciones Básicas de la geometría plana y del espacio.....	28
2.2.1.2	Definiciones Específicas relativas a figuras planas y sólidos de ancho constante.....	33
2.2.2	Teoremas y Postulados .....	36
2.2.2.1	Teoremas y postulados básicos de la geometría plana y del espacio.....	36
2.3	Fases de Estudio.....	37
2.3.1	Primera Fase: Consulta y recolección de material bibliográfico .....	37
2.3.2	Segunda Fase: Construcción del referente teórico.....	37
2.3.3	Tercera Fase: exploración, creación y justificación de métodos .....	37
2.3.4	Cuarta Fase: Escritura documento final .....	38
3	MÉTODOS DE CONSTRUCCIÓN DE SAC.....	39
3.1	A partir de la Revolución de FAC .....	39
3.1.1	SAC a partir de revolucionar FAC generadas por un polígono regular de un número impar de lados.....	39
3.1.2	SAC a partir de revolucionar FAC generadas por un polígono regular de un número par de lados .....	46
3.1.3	Justificación General del Método de Revolución.....	49

3.2	A partir del Método de Weber: SAC de Reuleaux.....	50
3.2.1	SAC con base en tetraedro regular .....	50
3.2.2	Justificación del Método de Weber.....	56
3.3	SAC a partir de la modificación del Método de Weber: Nuestro primer aporte.....	60
3.3.1	Justificación.....	65
3.3.2	Otro SAC a partir del Tetraedro: Ajustes diferentes a los del anterior método..	65
3.4	SAC a partir de otros Poliedros Regulares: Nuestro segundo aporte .....	68
3.4.1	El caso del cubo.....	68
3.4.2	En el caso del Octaedro.....	76
3.5	SAC a partir de Pirámides Rectangulares: Nuestro tercer aporte.....	85
3.5.1	Pirámides Rectangulares con base un Polígono Regular de cantidad impar de lados	85
3.5.1.1	Caso SAC a partir de la pirámide rectangular de base un pentágono regular	86
3.5.1.2	Generalización SAC a partir de pirámides rectangulares de base n-ágono regular, n impar .....	91
3.5.2	Pirámides Rectangulares con base un Polígono Regular de cantidad par de lados	92
3.5.2.1	Caso SAC a partir de la pirámide rectangular de base un cuadrado .....	92
3.5.2.2	Generalización SAC a partir de pirámides rectangulares de base n-ágono regular, n par .....	99
4	CONCLUSIONES .....	101
5	BIBLIOGRAFÍA.....	105

## TABLA DE ILUSTRACIONES

Figura 1 Vista preliminar Cabrí 3D .....	18
Figura 2 NURBS y sus Pn puntos de control.....	25
Figura 3 Representación gráfica del Teorema. ....	36
Figura 4 Triángulo de Reuleaux.....	40
Figura 5 Eje de simetría polígono base .....	41
Figura 6 Revolución de la FAC .....	41
Figura 7 Planos soportes y diámetros en diferentes direcciones. ....	42
Figura 8 FAC a partir del pentágono .....	42
Figura 9 Eje de simetría de polígono base para la FAC a partir del pentágono .....	43
Figura 10 Revolución de la FAC a partir del pentágono .....	43
Figura 11 Planos soportes y diámetros en diferentes direcciones .....	44
Figura 12 Extensión del Triángulo de Reuleaux .....	45
Figura 13 Eje de simetría del polígono base para la extensión del triángulo de Reuleaux.....	45
Figura 14 SAC obtenido al revolucionar la extensión del triángulo de Reuleaux .....	46
Figura 15 Planos soportes y diámetros en diferentes direcciones .....	46
Figura 16 FAC obtenida a partir de un cuadrado. ....	47
Figura 17 Polígono base y eje de simetría como diagonal .....	47
Figura 18 Revolución de FAC a partir del cuadrado .....	48
Figura 19 Planos soportes y diámetros de la revolución en diferentes direcciones.....	48
Figura 20 FAC para revolución .....	49
Figura 21 SAC análogo.....	50
Figura 22 Tetraedro regular .....	51
Figura 23 Arco de menor longitud .....	51
Figura 24 Esfera y sector esférico generado .....	52
Figura 25 Tetraedro de Reuleaux.....	52
Figura 26 Diámetros en diferentes direcciones .....	53
Figura 27 Planos para ajuste del sólido.....	53
Figura 28 Intersección planos resultantes con el Tetraedro de Reuleaux.....	54
Figura 29 lugares de ajuste el ajuste.....	54
Figura 30 Sustracción de superficies sobrantes .....	55
Figura 31 Superficies de revolución del ajuste.....	55
Figura 32 SAC de Reuleaux.....	56
Figura 33 Tetraedro de Reuleaux en Cabrí 3D .....	57
Figura 34 Circunferencias para arco menor .....	57
Figura 35 Plano determinado por una arista .....	58
Figura 36 Resultado de la rotación.....	58
Figura 37 Sólido resultante para el ajuste.....	60
Figura 38 Centro de esferas para ajustes (opción 1).....	61

Figura 39 Esfera de ajuste y superficie a ajustar .....	62
Figura 40 Superficie sobrante del sólido .....	62
Figura 41 Sólido resultante del primer ajuste .....	62
Figura 42 Sólido resultante a partir de los ajustes .....	63
Figura 43 Sólido obtenido de los primeros ajustes .....	63
<p>Hechos los pasos anteriores, debemos precisar que aún no tenemos un SAC. Al explorar el sólido mostrado en la Figura 43, nos pudimos percatar que al construir los supuestos planos soporte relativos a las zonas de color verde producto del ajuste presentado con anterioridad, el plano opuesto <math>\delta</math> al plano tangente a dicha zona verde resulta ser no tangente al sólido construido, razón por la cual se debe hacer un último ajuste. En la Figura 44, se ilustra tales planos y el sector del sólido que genera el inconveniente antes mencionado. Específicamente, dicho sector se muestra en la ilustración de la derecha de la Figura 44.....</p>	
Figura 44 Sector del ajuste final .....	64
<p>Como anteriormente lo mencionamos la distancia (diámetro del sólido) ente los dos planos que se construyeron como supuestos soporte, es la medida del diámetro que queremos que tenga el SAC (<i>i.e.</i>, la medida de la arista del tetraedro base). Para solventar el inconveniente, bastaría con “rebanar” el sector sobrante del Sólido mostrado en la Figura 43, con planos análogos al plano <math>\delta</math> antes referido. Dado que los planos soporte son perpendiculares a un diámetro en cualquier dirección, para construir los planos <math>\delta</math> primero generamos cualquier cuerda que sería diámetro del sólido (<i>i.e.</i>, cualquier radio cuyo extremo <math>P</math> pertenezca al sector verde de la esfera referida en el paso III del método), luego el plano perpendicular <math>\alpha</math> a estos radios por los puntos <math>P</math> y finalmente el plano <math>\delta</math> paralelo a <math>\alpha</math> por el otro extremo de la cuerda. De esta forma se garantiza que el diámetro es constante en cualquier dirección en este sector problemático y que los planos <math>\alpha</math> y <math>\delta</math> resultan ser tangentes a la figura y por ende soportes. En la Figura 46, se ilustran varios planos (<math>\alpha</math> y <math>\delta</math>) con las características antes mencionadas. ....</p>	
Figura 46 Planos soportes para ajuste final .....	64
Figura 47 Centros de esferas para ajustes (opción 2) .....	66
Figura 48 Esfera de ajuste y superficie a ajustar .....	66
Figura 49 SAC a partir del tetraedro (opción 2) .....	67
Figura 50 Centro de esferas de ajuste (opción 3) .....	67
Figura 51 SAC a partir del tetraedro (opción 3) .....	68
Figura 52 Cubo Base .....	68
Figura 53 Esfera y sector esférico generado .....	69
Figura 54 Sólido resultante para el ajuste “Octaedro Degenerado” .....	69
Figura 55 Diámetros de diferente longitud .....	70
Figura 56 Centro de esferas para primeros ajustes .....	70
Figura 57 Esfera para primeros ajustes y superficie a ajustar .....	71
Figura 58 Superficie sobrante del sólido .....	71
Figura 59 Sólido resultante del primer ajuste .....	72
Figura 60 Primeros Ajustes del Octaedro Degenerado .....	72
Figura 61 Centro de esferas para segundos ajustes.....	73



Figura 62 Esfera para segundos ajustes y superficie a ajustar .....	73
Figura 63 Superficie sobrante del sólido .....	74
Figura 64 Sólido resultante del ajuste.....	74
Figura 65 SAC a partir de un cubo .....	75
Figura 66 SAC con diferentes puntos de ajuste .....	76
Figura 67 Octaedro Base .....	76
Figura 68 Esfera de ajuste de superficie .....	77
Figura 69 Sólido resultante para ajuste “cubo degenerado” .....	77
Figura 70 Centros de Esferas para primeros ajustes.....	78
Figura 71 Esfera para ajuste y superficie a ajustar.....	78
Figura 72 Superficie sobrante del sólido .....	79
Figura 73 Sólido resultante del primer ajuste .....	79
Figura 74 Sólido con primeros ajustes .....	80
Figura 75 Centro de esferas para segundo grupo de ajustes.....	80
Figura 76 Esfera para segundo ajuste y superficie a ajustar .....	81
Figura 77 Sólido con segundo grupo de ajustes.....	81
Figura 78 Centro de esferas para tercer grupo de ajustes del cubo redondo .....	82
Figura 79 Esfera para tercer grupo de ajustes y superficie a ajustar .....	82
Figura 80 Superficie sobrante del sólido .....	83
Figura 81 Sólido resultante del tercer grupo de ajustes .....	83
Figura 82 Centro de esferas para el cuarto grupo de ajustes .....	84
Figura 83 SAC basado en el octaedro primera escogencia .....	84
Figura 84 SAC basado en octaedro escogencia alternativa .....	85
Figura 85 Pirámide de base pentagonal.....	86
Figura 86 Esfera y sector esférico generado .....	87
Figura 87 Sólido resultante para ajuste .....	87
Figura 88 Verificación de anchos en diferentes direcciones.....	88
Figura 89 Centro de esferas para ajustes.....	88
Figura 90 Esfera para ajuste y superficie a ajustar.....	89
Figura 91 Superficie sobrante del sólido .....	89
Figura 92 Sólido resultante del primer ajuste .....	90
Figura 93 SAC resultante a partir de la pirámide de base pentagonal.....	90
Figura 94 SAC pirámide con base pentagonal.....	90
Figura 95 SAC a partir de la pirámide de base heptagonal .....	91
Figura 96 FAC pirámide de base cuadrada.....	92
Figura 97 Esfera y sector esférico generado .....	93
Figura 98 Sólido resultante para ajuste .....	93
Figura 99 Diámetros de distinta longitud en diferentes direcciones.....	94
Figura 100 Centro de esferas para primeros ajustes .....	94
Figura 101 Esfera para primeros ajustes y superficie a ajustar .....	95
Figura 102 Superficie sobrante del sólido.....	95
Figura 103 Sólido resultante del primer ajuste.....	96

Figura 104 Primeros ajustes de la pirámide redonda. ....	96
Figura 105 Centro de esferas para segundos ajustes.....	97
Figura 106 Esfera para segundos ajustes y superficie a ajustar.....	97
Figura 107 Superficie sobrante del sólido.....	98
Figura 108 Sólido resultante del segundo ajuste.....	98
Figura 109 SAC a partir de la pirámide de base cuadrada.....	99
Figura 110 SAC a partir de la pirámide de base hexagonal.....	100
Figura 111 Pirámides trabajadas en la sección.....	100

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Herramientas de Cabrí 3D.....	24
Tabla 2 Herramientas Rhinoceros 5.....	27
Tabla 3 Definiciones previas.....	32
Tabla 4 Definiciones relativas a FAC.....	34
Tabla 5 Definiciones relativas a SAC.....	35

# 1 JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVOS

## 1.1 JUSTIFICACIÓN DE ESTUDIO

En una jornada del educador matemático, el profesor Oscar Molina presentó una conferencia sobre un tema que no es muy conocido, por lo menos en el contexto del programa de Licenciatura en Matemáticas de la UPN, titulada *Figuras de ancho constante: una temática para explorar*, ponencia basada en un trabajo de grado (Gil, L. & Orjuela, M, 2010) que él había asesorado con antelación. En esta conferencia, el profesor expuso las características principales de tales figuras, y métodos de construcción de algunas de ellas haciendo uso de un software de geometría dinámica. Las figuras geométricas de ancho constante son, grosso modo, aquellas que tienen el mismo ancho en cualquier dirección; el ancho de una figura se refiere a la distancia entre dos rectas tangentes a la figura y perpendiculares a una dirección dada *-i.e.*, son perpendiculares a una cuerda de la figura que indica dicha dirección (Montejano, L., 1998)-; tales rectas tangentes se conocen como rectas soporte de la figura; una circunferencia, por ejemplo, en una figura de ancho constante. En aquella conferencia, el profesor Molina, al terminar la misma, propuso una invitación a los asistentes en términos de las siguientes preguntas:

- ¿Es posible generar Sólidos (figuras en tres dimensiones) de Ancho Constante<sup>1</sup> (SAC) [una esfera sería un Sólido tal] a partir de Figuras planas de Ancho Constante (FAC)?
- ¿Se pueden construir SAC con base en poliedros regulares, siguiendo métodos análogos a los que se utilizan para construir FAC basado el polígonos regulares?
- En otras palabras, ¿qué propiedades generales de las FAC se pueden trasladar y ajustar a los SAC?

Nosotros hemos decidido aceptar la invitación y nos hemos embarcado en una consulta y exploración que provea respuestas, aunque sean parciales, a estas preguntas. La exploración se realizará haciendo uso del Software de Geometría Dinámica Cabrí 3D y uno especializado en diseños gráficos llamado Rhinoceros 5. Tendremos como documentos básicos de consulta el trabajo de grado de Licenciatura de Gil, L. & Orjuela, M, (2010) y del trabajo de Montejano (1998) principalmente.

El interés sobre este tema, se da como una necesidad de profundizar en esta temática, ya que de igual forma a lo que sucede con las figuras de ancho constante, estas son poco conocidas (Gil, L. & Orjuela, M, 2010); nosotros hemos constatado que el asunto no es muy distinto en lo que respecta a las SAC; es poca la literatura accesible que

---

<sup>1</sup> En el marco teórico, precisamos formalmente la definición de este tipo de sólidos.

versa sobre tales sólidos y sus métodos de construcción. En tal sentido, queremos hacer un documento que complemente el estudio realizado por Gil y Orjuela (2010), pero esta vez centrándonos en las SAC, intentando extrapolar al caso del espacio, los métodos de construcción expuestos por ellas. Como se dijo antes, usaremos entornos computarizados que favorecen la exploración de sólidos con miras a precisar métodos que permitan construir SAC.

Finalmente, pretendemos dejar un documento físico que contenga un reporte de los métodos de construcción, ello con el fin de que nuestro trabajo sirva como referente teórico para el estudio de esta temática (no usual en el currículo escolar o universitario) y que puedan ser de utilidad en el diseño, implementación y evaluación de propuestas didácticas.

## **1.2 OBJETIVOS DEL ESTUDIO**

### **1.2.1 General**

Describir, crear y justificar métodos de construcción de algunos sólidos de ancho constante (SAC), con ayuda de los programas Cabri 3D y Rhinoceros 5 como entornos de geometría dinámica y gráfico, respectivamente.

### **1.2.2 Objetivos Específicos**

- Consultar procedimientos de construcción de sólidos de ancho constante (SAC).
- Explorar los Poliedros Platónicos con miras a determinar métodos de construcción de sólidos de ancho constante, extrapolar métodos usados para la construcción de Figuras de Ancho Constante.
- Explorar otros tipos de poliedros, diferentes a los Platónicos, con miras a determinar métodos de construcción de sólidos de ancho constante.
- Justificar los métodos surgidos a partir de las exploraciones realizadas.
- Realizar un documento escrito donde se sintetizen los resultados obtenidos en la exploración y el trabajo realizado.

## **2 REFERENTE TEÓRICO Y FASES DE ESTUDIO**

Teniendo en cuenta que el objetivo general para este trabajo es crear, describir y justificar métodos de construcción de algunos sólidos de ancho constante (SAC), usando ciertos programas computarizados especializados, vale la pena, previo a la presentación de la descripción y justificación de tales métodos, precisar los referentes teóricos que fundamentan la realización de dicho trabajo; estos se presentan en tres secciones:

La primera expone una descripción general de las características esenciales de los programas computarizados Cabrí 3d como entorno dinámico relacionado con la geometría euclidiana y Rhinoceros 5 como herramienta gráfica sustentado con la geometría de las NURBS. Estos fueron los programas computacionales empleados para la realización del estudio que acá se presenta.

En la segunda sección presentamos referentes matemáticos básicos que permiten describir las figuras planas y sólidos de ancho constante; estos referentes nos permitirán no solo hacer una presentación y descripción formal de los métodos, sino lograr una justificación, con cierta rigurosidad, de la validez de los métodos.

En la tercera sección se presenta, de manera general, las fases de estudio y metodología seguida para la consolidación del documento final para este trabajo.

### **2.1 Programas computarizados empleados en el estudio**

En esta sección se presenta una descripción general de los programas computarizados Cabrí 3D y Rhinoceros 5, y su relación con la Geometría; se exponen además, las principales herramientas y su uso para este estudio.

#### **2.1.1 Descripción de Cabrí 3D**

Cabrí 3D es un software de geometría dinámica que corporeiza la geometría plana y del espacio euclidiana. En este entorno, se pueden construir figuras geométricas a partir de objetos geométricos básicos en los que se sustenta (*v.g.*, puntos, segmentos, planos, circunferencias, esferas, poliedros, etc.) y a partir de su propiedad del arrastre (que hace tangible lo dinámico del software) posibilita explorar figuras en él construidas, para inducir propiedades de estas; al usar un entorno tal debemos tener presente que “Al construir figuras dinámicas, sólo las propiedades construidas explícitamente (por una orden del programa) resistirán el desplazamiento; en síntesis, los objetos geométricos allí construidos no son estáticos, y en consecuencia se convierte en una herramienta importante que favorece la exploración y procesos de conjeturación en geometría. De manera particular, el programa Cabrí 3D tiene un potencial importante en tanto la visualización de cuerpos sólidos, acción compleja si

no se cuenta con objetos concretos que se puedan manipular. De alguna manera, este programa vuelve tangible un objeto de tres dimensiones, para poderle observar desde diferentes perspectivas y poderle manipular desde los objetos que lo conforman.

A continuación se muestra (Figura 1), una representación gráfica del entorno de Cabrí 3D, para que el lector se familiarice con el mismo.

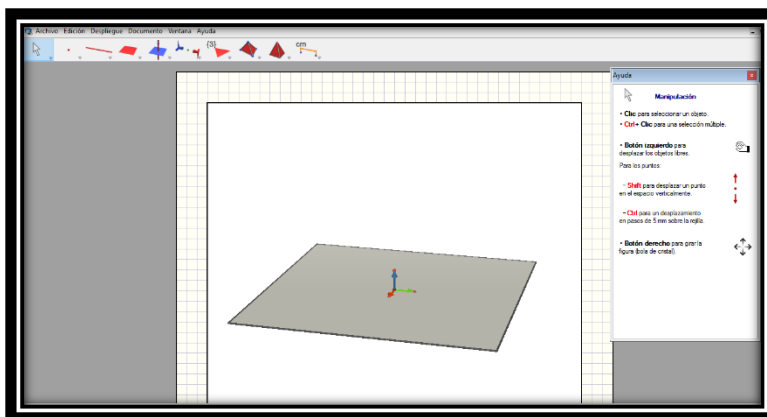

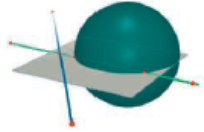

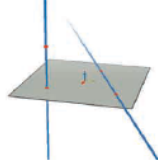

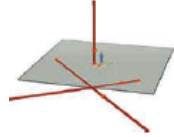

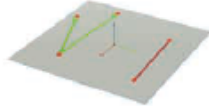

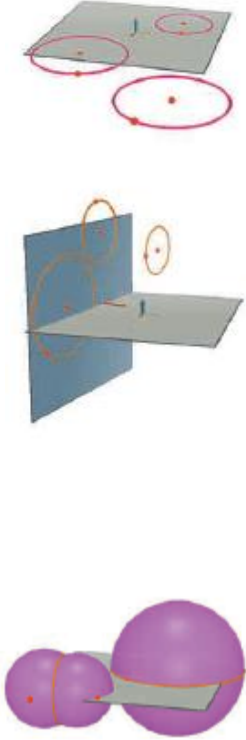

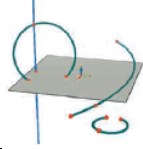

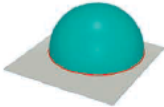


Figura 1 Vista preliminar Cabrí 3D


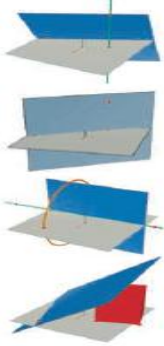

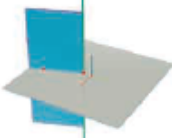

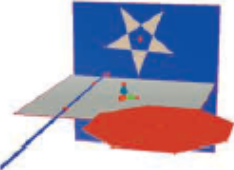

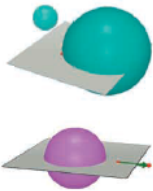
En lo que sigue, presentaremos una descripción general de las herramientas de exploración y construcción del programa (Sophie & Pierre René de Cotret, 2006):


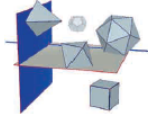

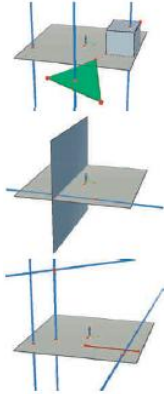
<b>HERRAMIENTAS DE MANIPULACIÓN/EXPLORACIÓN</b>		
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Permite seleccionar puntos y objetos.</li> <li>• Permite desplazar puntos y objetos (y en consecuencia, todos los objetos que de ellos dependen).</li> </ul>	
<b>HERRAMIENTAS DE CONSTRUCCIÓN</b>		
<b>PUNTOS</b>		
Punto (sobre un plano, en el espacio o sobre un objeto)		
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Permite construir puntos de diferentes maneras.</li> <li>• Esos puntos pueden enseguida servir de base para</li> <li>• construir diversos objetos (segmentos, planos, poliedros, etc.).</li> <li>• Construye puntos sobre la parte visible PV de los planos.</li> <li>• Construye puntos en el espacio. Por defecto, estos puntos serán situados en la PNV del plano de base.</li> </ul>	

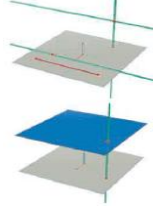

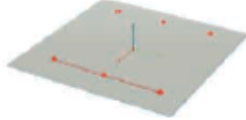
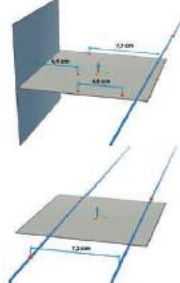
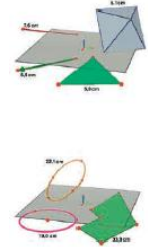
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Construye puntos sobre todos los objetos (excepto en el interior de polígonos cóncavos).</li> </ul>	
Punto(s) de intersección		
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Permite construir el o los puntos de intersección de 2 objetos (2 rectas, una recta y una esfera, etc.).</li> </ul>	
<b>CURVAS</b>		
Recta		
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Permite construir una recta que pasa por 2 puntos.</li> <li>• Permite construir la recta de intersección de 2 planos: Desplazar el cursor del ratón a proximidad de la intersección de 2 planos para hacer aparecer la recta. Hacer clic para validar.</li> </ul>	
Semirrecta		
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Permite construir una semirrecta que pasa por dos puntos. El primer punto es el origen de la semirrecta.</li> </ul>	
Segmento		
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Permite construir un segmento definido por 2 puntos.</li> </ul>	
Circunferencia		
	<p>Permite construir circunferencias de diferentes maneras:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Circunferencia definida por 2 puntos (centro y radio), sobre el plano de base: Hacer clic sobre la PV para seleccionar el plano. Construir la circunferencia sobre la PV o la PNV.</li> <li>• Circunferencia definida por 2 puntos (centro y radio), sobre otro plano: Hacer clic sobre la PV para</li> </ul>	

	<p>seleccionar el plano.          Construir el centro de la circunferencia sobre la PV.          Construir el punto que define el radio también sobre la PV (o sobre un objeto ya construido en la PNV de ese plano).</p> <p>Nota: una vez construida, la circunferencia puede ser desplazada sobre la PNV con la herramienta Manipulación.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Permite construir la circunferencia intersección esfera-esfera o esfera-plano:          Desplazar el cursor del ratón a proximidad de la intersección para hacer aparecer la circunferencia. Hacer clic para validar.</li> </ul>	
<b>Arco</b>		
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Permite construir un arco definido por tres puntos.</li> </ul>	
<b>Curva de intersección</b>		
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Permite construir la recta intersección de 2 planos.</li> <li>• Permite construir la cónica intersección de un plano con un cono, una esfera o un cilindro.</li> <li>• Permite construir la circunferencia intersección de 2 esferas.</li> </ul>	
<b>SUPERFICIES</b>		
<b>Plano</b>		
	<p>Permite construir nuevos planos de diferentes maneras. Para utilizar esta herramienta, es necesario utilizar al menos un punto arriba o abajo del plano</p>	



	<p>de base (ese punto puede estar situado sobre un objeto existente, o construido con la tecla).</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Plano que pasa por 3 puntos.</li> <li>• Plano que pasa por dos rectas (o partes de recta*) coplanares.</li> <li>• Plano que pasa por una recta (o una parte de recta*) y un punto.</li> </ul> <p>Plano definido por un triángulo o un polígono antes construido:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Desplazar el cursor del ratón a proximidad del triángulo o del polígono para hacer aparecer el plano</li> <li>• Hacer clic para validar.</li> </ul>	
<p>Semiplano</p>		
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Permite construir un semiplano limitado por una recta (o una parte de recta*) y que pasa por un punto.</li> </ul>	
<p>Polígonos Regulares</p>		
	<p>Permite construir polígonos regulares en un plano dado:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Seleccionar un plano.</li> <li>• Construir el polígono definiendo el punto central y otro punto.</li> <li>• Al momento de la construcción, el 2º punto debe necesariamente estar sobre la <b>PV</b> del plano (o sobre un objeto antes construido en la <b>PNV</b> de ese plano). Una vez el polígono construido, se le puede desplazar en la <b>PNV</b>.</li> </ul>	
<p><b>SÓLIDOS</b></p>		
<p>Esfera</p>		
	<p>Permite construir una esfera a partir de su centro y de otro punto que determina su radio.</p> <p>Permite construir una esfera cuyo radio se controla por una medida:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Efectuar cualquier medida de un objeto utilizando</li> <li>• una de las herramientas de</li> </ul>	

	<p>medida.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Construir (o seleccionar) el centro de la esfera y seleccionar la medida que definirá el radio.</li> </ul>	
<p>Poliedros Regulares: Ejemplificamos la herramienta solo con "Tetraedro". Para los demás tipos de poliedros, el procedimiento es análogo.</p>		
	<p>Permite construir directamente un poliedro:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Seleccionar un plano.</li> <li>• Construir un 1er punto.</li> <li>• Construir un 2o punto. El 2º punto debe estar construido necesariamente sobre la PV del plano seleccionado (o sobre un objeto antes construido en la PNV de ese plano).</li> </ul> <p>Nota: para colocar un poliedro regular fuera de la PV de un plano, construirlo primero sobre la PV, luego desplazarlo con la ayuda de la herramienta Manipulación.</p>	
<p><b>CONSTRUCCIONES RELATIVAS</b></p>		
<p>Perpendicular (Recta o plano perpendicular)</p>		
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Permite construir una recta perpendicular a una superficie plana**.</li> <li>• Permite construir un plano perpendicular a una recta (o parte de recta*).</li> <li>• Permite construir una recta perpendicular a otra recta (o parte de recta*). Para utilizar esta función, es necesario mantener pulsada la tecla Ctrl del teclado (option/alt en Macintosh). Para construir la recta perpendicular en el mismo plano que la recta de referencia, es necesario hacer clic para seleccionar el plano en cuestión, antes de construir el punto, por el que pasará la recta perpendicular.</li> </ul>	
<p>Paralela (Recta o plano paralelo)</p>		
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Permite construir una recta paralela a una recta (o parte de</li> </ul>	

	<p>recta*).</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Permite construir un plano paralelo a una superficie plana** y que pase por un punto. Para construir un plano paralelo que no sea confundido con el plano de referencia seleccionado, es necesario utilizar un punto que no esté sobre ese plano de referencia.</li> </ul>	
<b>Punto Medio</b>		
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Permite construir el punto medio entre 2 puntos.</li> <li>Permite construir el punto medio de una parte de recta (segmento, vector, lado de polígono, arista de poliedro).</li> </ul>	
<b>HERRAMIENTAS DE MEDIDA Y DE CÁLCULO/EXPLORACIÓN</b>		
<b>Distancia</b>		
	<p>Permite medir la distancia entre un punto y:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Otro punto, una recta, un plano (PV o PNV).</li> </ul> <p>Permite medir la distancia entre 2 rectas.</p> <p>Nota: En ciertos casos, puede suceder que el texto de la medida se encuentre fuera de la zona de trabajo visible. Para tener acceso a ese texto, utilizar la bola de cristal o desplazar uno de los objetos que determina la distancia.</p>	
<b>Longitud</b>		
	<p>Permite medir la longitud de objetos y partes de los objetos siguientes:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Segmentos, vectores, lados de polígonos, aristas de poliedros.</li> </ul> <p>Permite medir el perímetro de los objetos siguientes:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Circunferencias, elipses y polígonos.</li> </ul>	
<b>Ángulo</b>		
	<p>Permite medir el ángulo entre un plano y:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Una recta, una semirrecta, un segmento y un vector.</li> </ul> <p>Permite medir un ángulo formado por 3</p>	


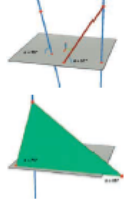
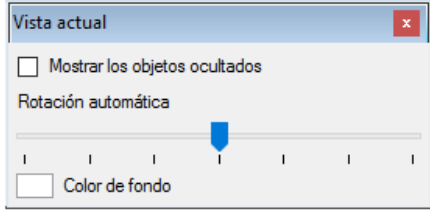
	<p>puntos:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Seleccionar (o construir) un primer punto</li> <li>• Seleccionar (o construir) el vértice</li> <li>• Seleccionar (o construir) un tercer punto.</li> </ul>	
<b>FUNCIONES COMPLEMENTARIAS</b>		
Rotación Automática		
<p>Cabri 3D ofrece la posibilidad de hacer girar su construcción sobre un eje central. Seleccione <b>Ventana</b> y elija <b>Vista actual</b> para que la ventana de los parámetros aparezca. Desplace enseguida el cursor <b>Rotación Automática</b> para comenzar la rotación, controlar su velocidad y el sentido de rotación.</p>		

Tabla 1 Herramientas de Cabri 3D

### 2.1.2 Descripción General de Rhinoceros 5

La siguiente descripción es tomada de (McNeel, R. & Associates, 2014). **Rhinoceros** es un software de diseño y modelado 3D asistido por computadora (CAD), el cual se fundamenta en la geometría de las curvas NURBS (B – Spline racionales no uniformes) para el modelamiento de cualquier tipo de objetos tridimensionales concretos. Es una herramienta bastante poderosa pues se emplea en la industria naval, aeronáutica, automovilística, arquitectura entre otras profesiones para el diseño interior y exterior de distintos objetos. Los fabricantes de electrodomésticos y accesorios de oficina, mobiliario, equipamiento médico y deportivo, calzado y joyería utilizan Rhinoceros para crear sus diseños por medio del modelado de formas libres como lo es el diseño de la carrocería de un automóvil.

El uso del modelado con base en curvas NURBS también se ha extendido entre profesionales de la animación y artistas gráficos. Teniendo en cuenta que Rhinoceros se basa en este tipo de curvas, nos parece pertinente presentar una descripción muy general de tales curvas sin adentrarnos en la rigurosidad matemáticas de estas pues se sale de nuestras posibilidades.

### 2.1.2.1 Breve descripción de NURBS

Las NURBS es un modelo matemático que permite suavizar curvas para que se correspondan con objetos geométricos que el usuario del programa desee (Cortés,J.& Cordero,J, 2002). El modelo se basa en una curvas denominadas Spline, que no son más que curvas que se definen, por porciones, mediante polinomios, útiles para lograr aproximaciones muy precisas de objetos específicos: rectas, cónicas, superficies esféricas, etc. Dado que las curvas NURBS permiten una modelación de objetos muy precisa pero a través de porciones, estas son útiles para los diseñadores pues pueden manipular el modelo mediante los puntos que definen las porciones (i.e., los puntos extremos de las curvas polinómicas que suavizan la curva deseada). Si se desea una aproximación muy precisa, se usa una mayor cantidad de tales puntos (denominados por la mayoría de software puntos control). Es precisar a partir de estos puntos control que se pueden definir los puntos que finalmente hacen parte de la curva. La B y la S del acrónimo NURBS, hace referencia a las curvas Bézier Spline; Bézier es un tipo de polinomio usado para generar el Spline. Ese tipo de polinomio se genera a partir de una serie de potencias. La ventaja de usar curvas Bézier en los Spline, es que proporcionan continuidad (no restrictiva desde un punto de vista geométrico pues la genera con base en vectores) entre una porción de la curva con sus adyacentes. LA R del acrónimo alude a Curvas Bézier Spline Racionales, que permiten dos cualidades principalmente: generar secciones cónicas y mantener invariante la curva independientemente de la proyección que se realice a cualquiera de los planos en 3D. La siguiente representación (Figura 2) ilustra una curva NURBS que se suaviza en la medida que se usen mayor cantidad de puntos control

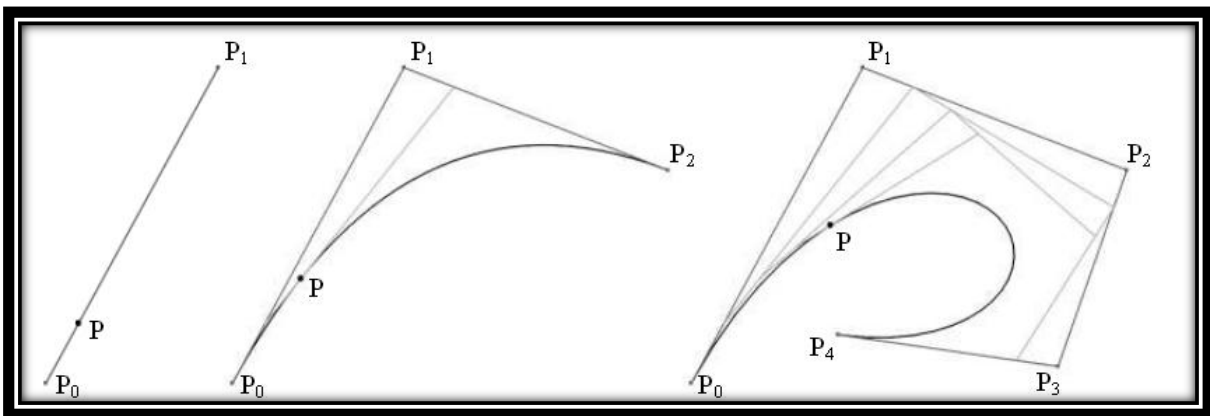


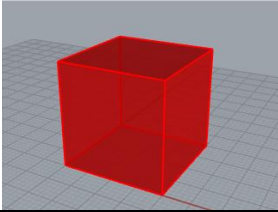
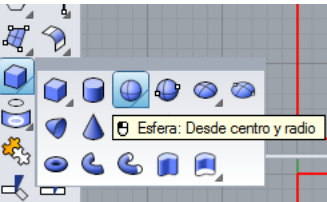
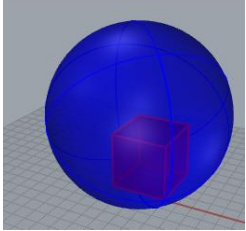
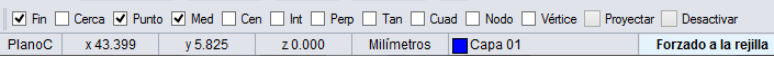

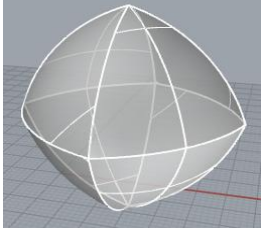
Figura 2 NURBS y sus  $P_n$  puntos de control

Insistimos que no es menester de este trabajo describir por completo, desde un punto de vista matemático, las características geométricas de una NURBS, pero sí dejar una idea al lector de que el programa usado para construir e ilustrar SAC tiene un sustento desde las matemáticas, para este caso de unas curvas que posibilitan suavizar objetos geométricos con tanta precisión como lo desee el usuario. Claramente, Rhinoceros por

defecto, modela perfectamente objetos geométricos básicos: rectas, cónicas, superficies cilíndricas, esféricas, y poliédricas, que en esencia, son los que utilizaremos en este estudio.

### 2.1.2.2 Objetos geométricos básicos de Rhinoceros

A continuación se describen de manera gráfica algunos objetos y herramientas básicas con los que funciona **Rhinoceros** que son necesarios para la construcción de un SAC.

<b>HERRAMIENTAS BÁSICAS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE UN SAC</b>		
<b>Cubo</b>		
	Nos permite crear un cubo.	
<b>Esfera</b>		
	Herramienta esfera, la cual nos permite crear una esfera a partir de su centro y radio.	
<b>Barra de Herramientas</b>		
Barra de herramienta que nos da certeza de las aproximaciones		
<b>Operación entre sólidos</b>		
	Nos permite realizar operaciones básicas entre sólidos: Unión, Intersección y recortes entre dos superficies. Es de resaltar que esta herramienta permite realizar estas operaciones con más de dos sólidos	
<b>Esfera</b>		

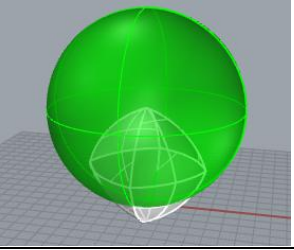
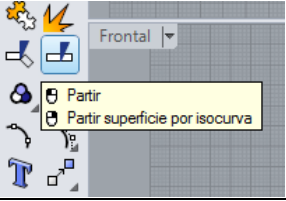
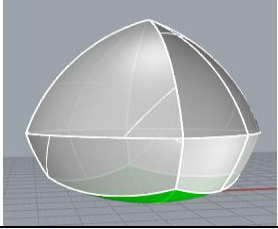

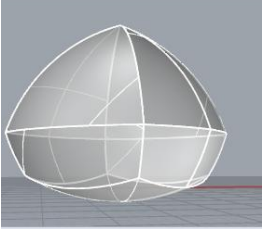
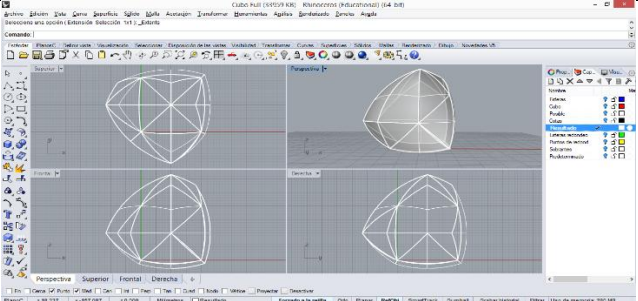
<p>Nuevamente seleccionamos la herramienta esfera, creamos esferas del mismo radio.</p>		
<p>Partir</p>		
	<p>Seleccionamos la herramienta partir, para dividir los sólidos creados.</p>	
<p>Unir</p>		
	<p>Seleccionamos herramienta unir, con base al casquete de esfera (verde) y el sólido blanco crear un único sólido.</p>	
<p>Después de todos los ajustes el resultado es el SAC.</p>		

Tabla 2 Herramientas Rhinoceros 5

### 2.1.3 Cómo se complementan estos programas para el estudio

La utilización de Cabrí 3D en este trabajo nos permite explorar sólidos para precisar ajustes que se deben hacer a ciertos sólidos para que resulten ser de ancho constante (SAC), los cuales luego son modelados con Rhinoceros 5; en tal sentido, este último programa se usa principalmente para ilustrar los pasos de construcción de un SAC, dado su potencial gráfico.

El lector se preguntará ¿por qué no modelamos esta clase de sólidos en Cabrí 3D? La respuesta es muy sencilla: Cabrí 3D no permite modelar estos sólidos porque el mismo software carece de herramientas que nos permita realizar con más de dos sólidos operaciones como unión, intersección y recortes entre dos conjuntos de

superficies cualesquiera (conjuntos que para este caso son superficies esféricas). Sumado a esta falencia, no permite tampoco generar sólidos a partir de revolución de figuras planas para poder manipularlos como objetos. Dado este contexto, Rhinoceros suple estas falencias con creces proveyendo herramientas específicas que permite hacer este tipo de tareas; no obstante, este programa no es de geometría dinámica razón por la cual no favorece algunas exploraciones con el fin de precisar o verificar algunas propiedades de las figuras resultantes.

## 2.2 Referente Geométrico

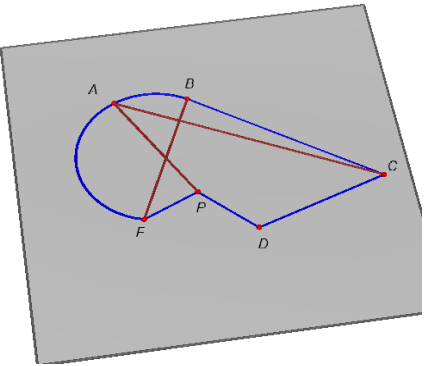
En este apartado se muestran un conjunto de definiciones, teoremas y postulados relacionados con la geometría plana, geometría del espacio, y figuras planas y sólidos de ancho constante indispensables para este estudio; estos elementos nos posibilitan tanto la descripción como la justificación de los métodos de construcción obtenidos para los sólidos de ancho constante.

### 2.2.1 Definiciones

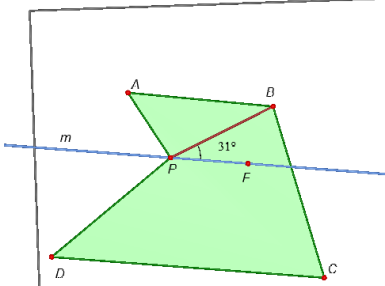
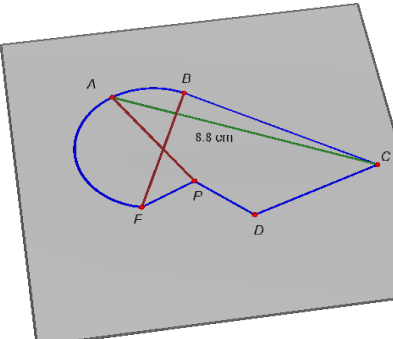
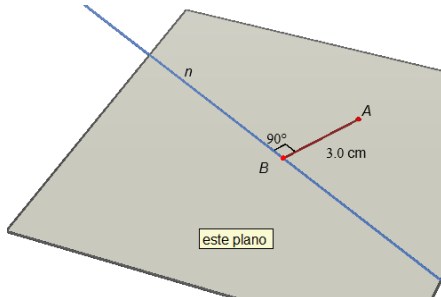
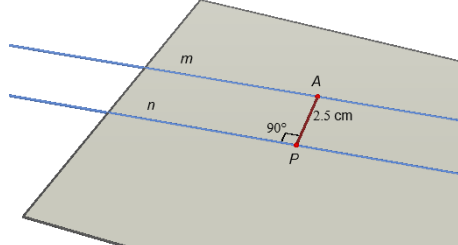
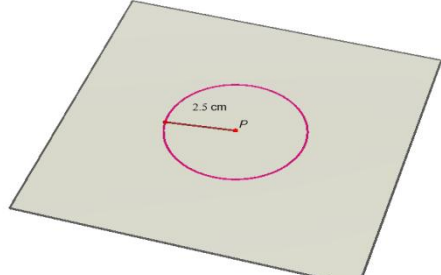
Las definiciones que se presentan en este apartado se clasifican en dos categorías: la primera, se refiere a definiciones de objetos básicos de la geometría plana y del espacio. La segunda categoría se refiere a definiciones relacionadas específicamente con las figuras planas y los sólidos de ancho constante.

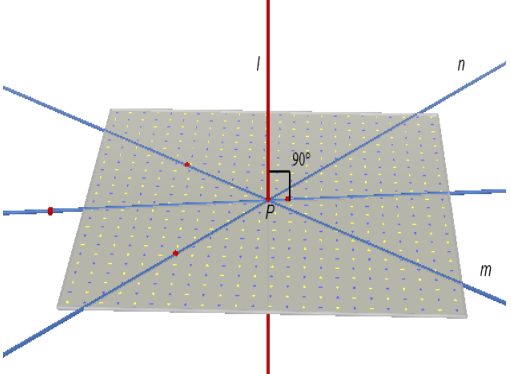
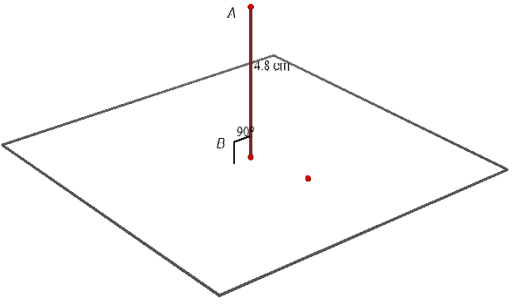
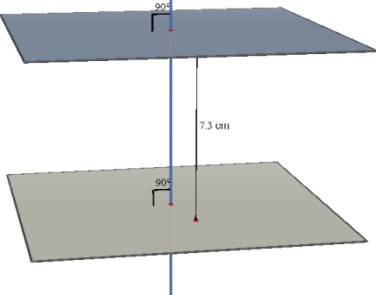
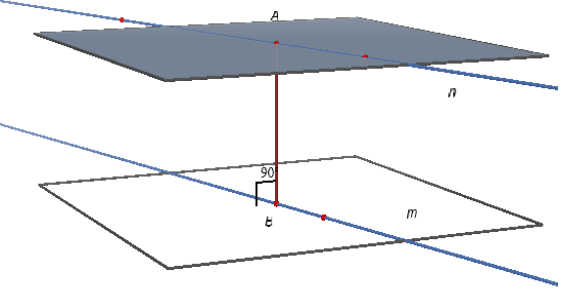
#### 2.2.1.1 Definiciones Básicas de la geometría plana y del espacio

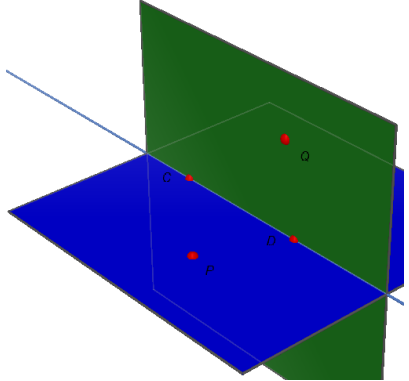
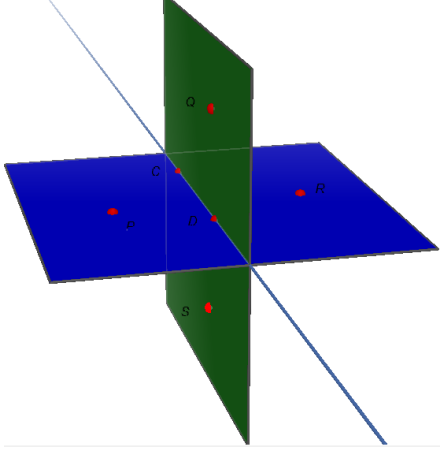
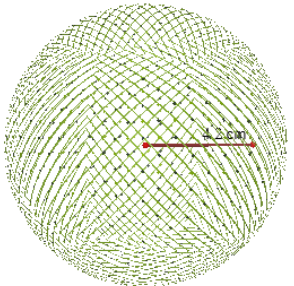
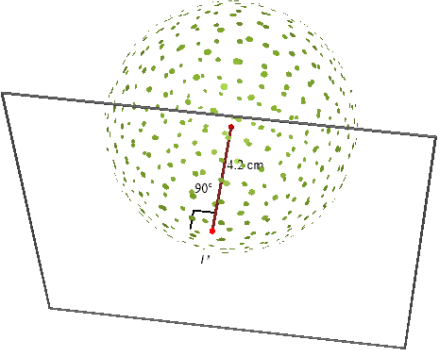
Las definiciones que se muestran a continuación hacen referencia a la geometría plana y del espacio son tomadas (Moise, E. & Downs, F., 1986):

<p><b>Cuerda.</b> La cuerda de una curva es el segmento cuyos extremos son dos puntos de dicha curva. En este ejemplo AC, BF y AP son cuerdas de la curva ABCDPF.</p>	
---	--



<p><b>Dirección.</b> En un plano, la dirección de una cuerda es la medida del ángulo, en sentido positivo, determinado por una recta horizontal y la recta que contiene a dicha cuerda.</p> <p><b>PB</b> Cuerda del polígono ABCDP. El <math>\angle BPF</math> determina la dirección de PB.</p>	
<p><b>Diámetro.</b> En una dirección, es la cuerda de mayor longitud que tiene una curva cerrada. En este ejemplo AC es el diámetro de la curva ABCDPF en una dirección.</p>	
<p><b>Distancia entre una recta y un punto.</b> La distancia entre una recta <math>n</math> y un punto <math>A</math> que no pertenece a ella es la longitud del segmento perpendicular a <math>n</math> cuyos extremos son <math>A</math> y <math>B</math> tal que <math>B</math> pertenece a <math>n</math>. La distancia entre una recta y un punto de la misma se define como cero. En este ejemplo la distancia del punto <math>A</math>, a la recta <math>n</math> es 3,0 cm.</p>	
<p><b>Distancia entre rectas paralelas.</b> Dadas dos rectas paralelas, la distancia entre estas es la distancia de cualquier punto de una de tales rectas a la otra.</p>	
<p><b>Definición de circunferencia.</b> Sea <math>P</math> un punto de un plano dado y sea <math>r</math> un número real positivo. La circunferencia con centro <math>P</math> y radio <math>r</math> es el conjunto de todos los puntos del plano que están a la distancia <math>r</math> del punto <math>P</math>.</p>	

<p><b>Definición Recta perpendicular a un plano.</b> Una recta y un plano son perpendiculares, si se intersectan y si toda recta en el plano que pase por el punto de intersección es perpendicular a la recta dada. Cuando la recta <math>l</math> el plano <math>\alpha</math> son perpendiculares, entonces escribimos <math>l \perp \alpha</math> por <math>P</math>.</p>	
<p><b>Definición distancia de un punto a un plano.</b> La distancia a un plano <math>\alpha</math> desde un punto <math>A</math> que no está situado en él, es la longitud del segmento perpendicular al plano cuyos extremos son <math>A</math> y <math>B</math> tal que <math>B</math> pertenece a <math>\alpha</math>. En este caso la distancia del punto <math>A</math> al plano <math>\alpha</math> es de 4,8 cm.</p>	
<p><b>Distancia entre planos paralelos.</b> Dados dos planos paralelos, la distancia entre estos es la distancia de cualquier punto de uno de los planos al otro.</p>	
<p><b>Definición planos paralelos.</b> Dos planos son paralelos si no se intersectan.</p> <p><b>Definición recta paralela a plano.</b> Un plano y una recta son paralelos si no se intersectan.</p>	
<p><b>Definición ángulo diedro.</b> Si dos semiplanos tienen la misma arista, pero no están en el mismo plano, entonces la reunión de los dos semiplanos y su arista común es un ángulo diedro.</p> <p>El <math>\angle P - CD - Q</math>, se la notación para un ángulo diedro en el que <math>CD</math> es la arista común de los dos semiplanos. Las caras</p>	

<p>del ángulo diedro son los semiplanos que contienen al punto Q y P respectivamente.</p>	
<p><b>Definición de ángulos diedros opuestos por la arista.</b> Dos ángulos diedros opuestos por la arista, son aquellos que tienen una arista en común y sus caras forman dos pares de semiplanos opuestos. El <math>\angle P - CD - Q</math> es opuesto al <math>\angle S - CD - R</math>. <math>CD</math> es la arista común. El semiplano que contiene al punto P es opuesto al semiplano que contiene al punto R y el semiplano que contiene al punto Q es opuesto al semiplano que contiene al punto S.</p>	
<p><b>Definición de esfera.</b> Sea P un punto de un plano dado y sea r un número real positivo. La superficie esférica con centro P y radio r es el conjunto de todos los puntos del espacio que están a una distancia r del punto P.</p>	
<p><b>Definición Plano tangente.</b> Se llama plano tangente a una superficie en un punto P de la misma, al plano que contiene todas las rectas tangentes a la superficie por el punto P.</p>	
<p><b>Definición Recta Normal a una superficie.</b> Se llama recta normal a una superficie por el punto P, a la recta que pasa por el punto P y es perpendicular al</p>	

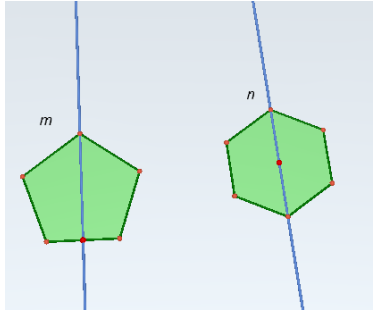
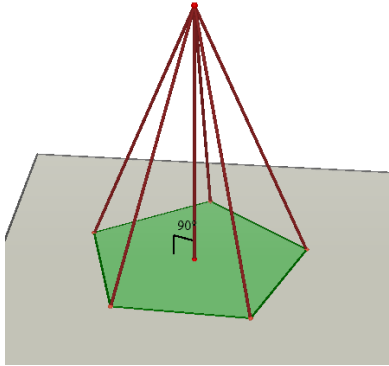
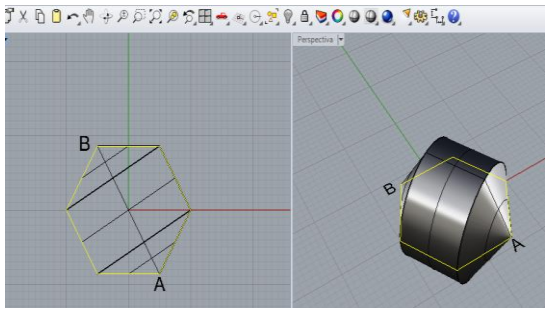
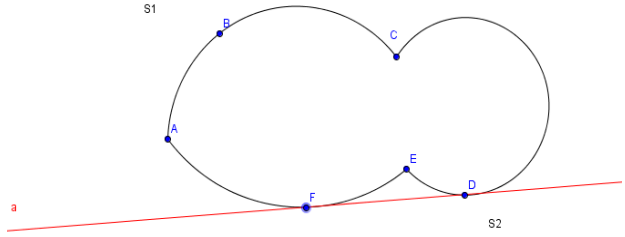
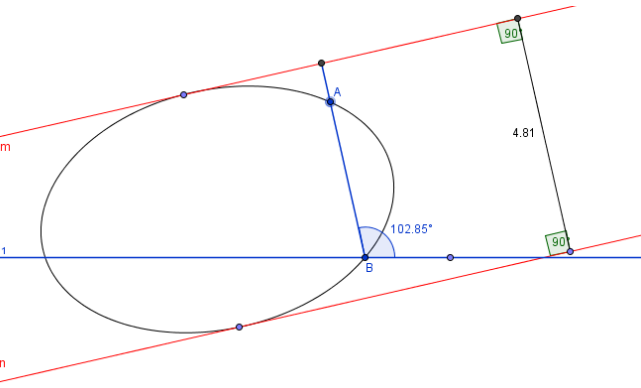
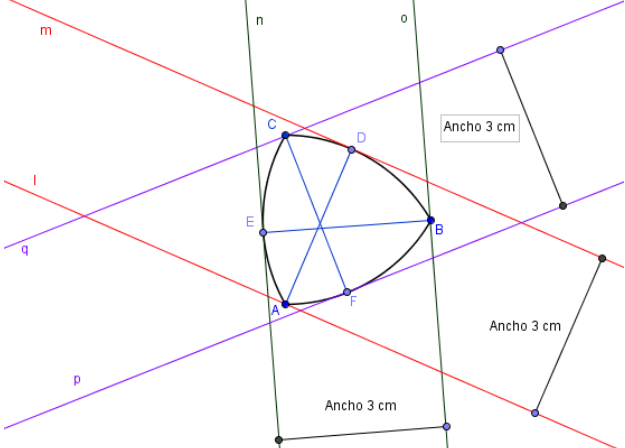
<p>plano tangente.</p>	
<p><b>Simetría Axial.</b> Una figura tiene simetría axial si existe una recta <math>m</math> tal que la imagen de cualquier punto <math>P</math> de la figura bajo la reflexión respecto a <math>m</math>, también es un punto de la figura, la recta <math>m</math> se llama eje de simetría.</p> <p>Las rectas <math>m</math> y <math>n</math> son ejes de simetría del pentágono regular y hexágono regular respectivamente.</p>	
<p><b>D. pirámide rectangular:</b> Dado un polígono <math>\delta</math> y su interior, y <math>D</math> un punto que no pertenece al plano <math>\alpha</math> que contiene a <math>\delta</math>. Una pirámide es la unión del polígono con los triángulos (y su interior) cuyos vértices son los vértices del polígono y el punto <math>D</math>. La pirámide es rectangular si <math>D</math> pertenece a la recta perpendicular al plano <math>\alpha</math> por el baricentro del polígono dado. A <math>\delta</math> le llamaremos polígono base de la pirámide y al punto <math>D</math>, vértice superior de la pirámide. A los lados de los triángulos que conforman la pirámide las llamamos aristas; las aristas que no son lados del polígono, les denominamos aristas laterales.</p>	
<p><b>Sólido de Revolución.</b> Es la superficie generada al rotar una curva plana en torno a una recta contenida en ese mismo plano. En este caso se revoluciona un hexágono regular a través de una de sus diagonales <math>AB</math>.</p>	

Tabla 3 Definiciones previas

### 2.2.1.2 Definiciones Específicas relativas a figuras planas y sólidos de ancho constante

Las definiciones que se presentan a continuación son tomadas del trabajo de grado de Gil y Orjuela (2010).

Concernientes a las figuras planas de ancho constante.

<p><b>Recta soporte de una figura.</b> Es una recta que interseca a una figura y la deja totalmente contenida, salvo los puntos de intersección, en uno de los dos semiplanos determinados por ella.</p> <p><math>S_1</math> y <math>S_2</math> son los semiplanos determinados por la recta <math>a</math>. La figura determinada por los arcos ABCDEF está contenida en <math>S_1</math>. <math>a</math> es recta soporte de la figura ABCDEF.</p>	
<p><b>Ancho de una figura.</b> Sean dos rectas soportes a una figura, paralelas entre sí y perpendiculares a una dirección cualquiera, la distancia entre dichas rectas es el ancho de la figura en la dirección dada.</p> <p>Las rectas <math>m</math> y <math>n</math> son rectas soporte de la elipse tal que <math>m \parallel n</math>. El ancho de la elipse es de 4,81 cm en la dirección de la cuerda AB.</p>	
<p><b>Figuras de ancho constante (FAC).</b> Una figura es de ancho constante, si y sólo si tiene el mismo ancho en cualquier dirección.</p>	

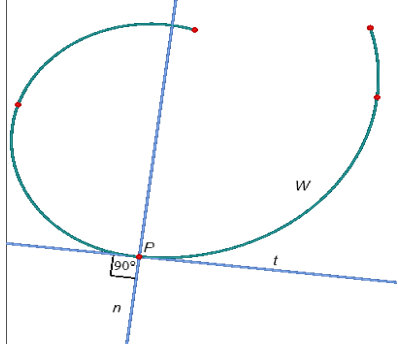
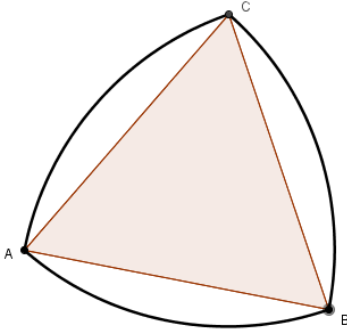
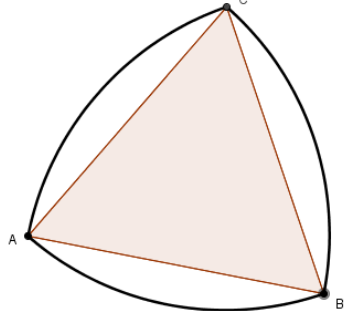
<p><b>Normal a una curva.</b> Sea <math>t</math> una recta tangente a <math>W</math> (curva) por el punto <math>P</math>. La recta normal a una curva <math>W</math> en el punto <math>P</math> es la recta <math>n</math> perpendicular a <math>t</math> por el punto de tangencia.</p>	
<p><b>Triángulo de Reuleaux.</b> Sea <math>ABC</math> un triángulo equilátero dado. Con centro en <math>A</math> y radio la medida de cualquiera de sus lados se traza un arco de círculo de radio <math>BC</math>. Con centro en <math>B</math> y radio la medida de cualquiera de sus lados, se traza un arco de círculo de radio <math>CA</math>. Finalmente, con centro en <math>C</math> y radio la medida de cualquiera de sus lados, se traza un arco de círculo de radio <math>AB</math>. La figura obtenida al unir los tres arcos de menor longitud de círculos se llama triángulo de Reuleaux.</p>	
<p><b>Figura base de una FAC.</b> Es la figura geométrica de la cual se obtiene una figura de ancho constante. Por ejemplo, en el triángulo de Reuleaux, la figura base asociada es un triángulo equilátero.</p>	

Tabla 4 Definiciones relativas a FAC

Concernientes a los sólidos de ancho constante (SAC).

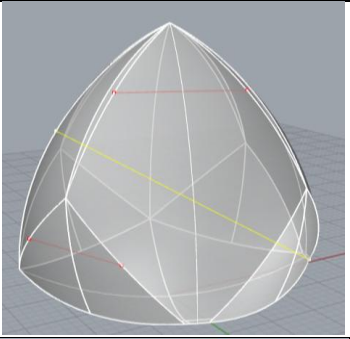
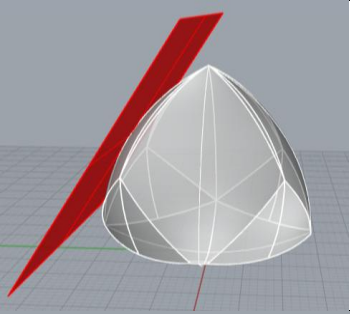
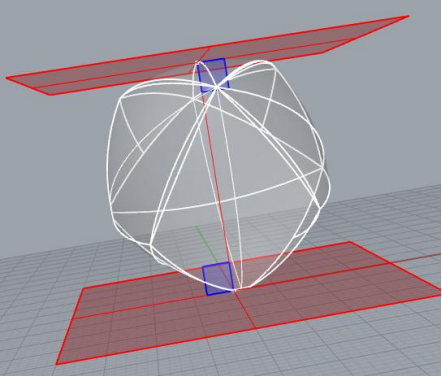
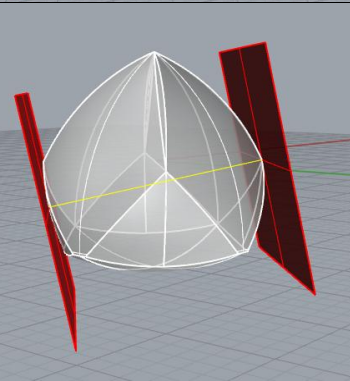
<p><b>Diámetro de un SAC.</b> En una dirección espacial, la cuerda del SAC de mayor longitud es el diámetro del SAC en esa dirección. En el ejemplo se deja ver una cuerda (Rojo) y un diámetro (Amarillo).</p>	
<p><b>Plano soporte de un sólido.</b> Es el plano tangente en un punto a la superficie talque todo el sólido está contenido en un mismo semiespacio, salvo los puntos de intersección.</p>	
<p><b>Cuerda normal de un sólido:</b> Una cuerda de un cuerpo es normal, si el plano perpendicular a dicha cuerda que pasa por uno de sus extremos es plano soporte del sólido.</p>	
<p><b>Ancho de un sólido.</b> Al tomar una dirección en el espacio y planos soporte perpendiculares a esta dirección que de un sólido. La distancia entre estos dos planos es el ancho del sólido en esta dirección.</p>	
<p><b>Sólidos de Ancho Constante (SAC).</b> Un sólido es de ancho constante si y solo si su ancho es el mismo en cualquier dirección. Una esfera es el SAC más famoso y básico existente.</p>	

Tabla 5 Definiciones relativas a SAC

## 2.2.2 Teoremas y Postulados

Al igual que las definiciones se clasifican en dos categorías: en la primera, son los teoremas y postulados básicos de la geometría plana y del espacio, útiles para este estudio. En la segunda, se toma como teoremas específicos aquellos que tienen que ver con las figuras y los sólidos de ancho constante.

### 2.2.2.1 Teoremas y postulados básicos de la geometría plana y del espacio

Todos los enunciados que se exponen a continuación son tomados de Moise, E. & Downs, F. (1986):

- **Teorema recta perpendicular a plano – contención.** Si una recta y un plano son perpendiculares, entonces el plano contiene toda recta perpendicular a la recta dada en su punto de intersección con el plano dado.
- **Teorema Fundamental sobre Perpendiculares.** Si una recta es perpendicular a otras dos que se intersecan en su punto de intersección, entonces es perpendicular al plano que contiene a las dos rectas.
- **Teorema planos perpendiculares – paralelos.** Dos planos perpendiculares a una misma recta son paralelos.

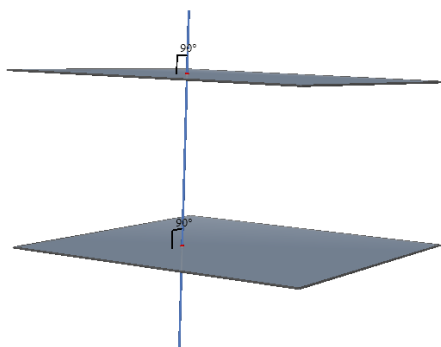


Figura 3 Representación gráfica del Teorema.

- **Teorema Planos paralelos – Perpendicular.** Dado dos planos paralelos y una recta perpendicular a uno de ellos, entonces dicha recta es perpendicular al otro plano.
- **Teorema Recta tangente a una circunferencia.** Toda recta es tangente a una circunferencia si y solo si es perpendicular al radio por el punto de intersección.
- **Plano tangente a una esfera.** Un plano es perpendicular a un radio en su extremo si y solo si es tangente a la esfera.



## **2.3 Fases de Estudio**

A continuación se describen las diferentes fases de estudio que componen la metodología general que se llevó a cabo para realizar el estudio, en la cual se presenta una síntesis en el orden de la elaboración del mismo, para dar cumplimiento a nuestros objetivos planteados.

### **2.3.1 Primera Fase: Consulta y recolección de material bibliográfico**

Inicialmente se indagó por literatura de los sólidos de ancho constante y paralelamente a ello, de programas computarizados útiles para la modelación y exploración de objetos geométricos en el espacio. En ese sentido, se consultaron autores como Gil, L. & Orjuela, M. (2010), Montejano, L. (1998), Weber, C. (2009), Cortés, J. & Cordero, J. (2002), Sophie & Pierre René de Cotret. (2006), McNeel, R. & Associates (2014) en busca de información relacionada con cada uno de los capítulos que constituyen este documento centrándonos en si existían métodos de construcción de los sólidos de ancho constante y en el manejo de los software empleados (Cabré 3D y Rhinoceros 5).

### **2.3.2 Segunda Fase: Construcción del referente teórico**

Luego de recolectar la mayor cantidad de información posible del tema de estudio y de los software empleados, se realizó una selección de la misma; se explicitaron los programas computarizados a utilizar en este trabajo. Al respecto de ellos, se hizo una descripción general teniendo en cuenta los objetos geométricos e herramientas básicas con los que funcionan respectivamente y cómo se complementan entre sí.

Posteriormente se conformó el referente geométrico donde se encuentra un conjunto de definiciones, teoremas y postulados relacionados a la geometría plana, del espacio, figuras de ancho constante (FAC) y sólidos de ancho constante (SAC) respectivamente. Estos elementos son el fundamento teórico de las construcciones, verificaciones y respectivas justificaciones de los métodos explorados y expuestos en el documento. Teniendo en cuenta lo descrito anteriormente se consolida y estructura el capítulo 2 de nuestro estudio.

### **2.3.3 Tercera Fase: exploración, creación y justificación de métodos**

Durante esta fase además de consultar sobre métodos de construcción de SAC encontrados en la literatura, nos concentramos en una exploración que nos permitiera generar procedimientos genuinos para construir este tipo de sólidos.

En un primer momento, tomamos como punto de partida métodos para construir figuras planas de ancho constante que pudiésemos extrapolar al espacio para producir

SAC; en este sentido al consultar bibliografía al respecto, nos encontramos un método de construcción el cual se basa en revolucionar Figuras de Ancho Constante a través de su eje de simetría (Montejano, L., 1998). Otro método de construcción de un sólido de ancho constante (SAC) encontrado fue propuesto por Weber (2009) a partir de una extrapolación del método de construcción del Triángulo de Reuleaux; dicho método se describe y justifica en el siguiente capítulo.

Así como se describirá en el capítulo tres, mostramos nuestros propios aportes de métodos de construcción que surgieron como modificación del método de Weber, el cual nos permitió un campo amplio de exploración. En su momento precisaremos en qué sentido ello fue permitido y explicitaremos los métodos que surgieron en ese marco de exploración a partir tanto de otros poliedros regulares como de pirámides rectangulares.

Hechas las exploraciones, nos avocamos a escribir e ilustrar cada uno de los pasos de los procedimientos producidos con Rhinoceros 5 y usando Cabri 3d como herramienta de apoyo en algunas justificaciones. Para todos los casos de métodos que están en una misma “categoría”, se provee una justificación genérica que garantiza que el sólido resultante es de ancho constante.

#### **2.3.4 Cuarta Fase: Escritura documento final**

En esta fase nos concentramos en la escritura final del documento, el cual contiene los resultados de cada una de las fases de estudio, explicitando los métodos de construcción (y sus justificaciones) encontrados tanto en la literatura como en el proceso de exploración con ayuda de los programas computarizados. En esta fase también nos enfocamos en precisar y escribir las conclusiones de este trabajo que pretende avalar el cumplimiento de los objetivos planteados.

### **3 MÉTODOS DE CONSTRUCCIÓN DE SAC**

En esta sección se presentan los métodos de construcción de Sólidos de Ancho Constante (SAC). Para algunos casos, estos métodos son una recopilación de procedimientos que se encuentran en documentos especializados, como es el caso de aquellos que surgen de revolucionar Figuras de Ancho de Constante o de tomar como base un tetraedro regular. Otros métodos, que en su momento precisaremos, son de nuestra autoría, claro, basados en procedimientos que previamente se han presentado y en exploraciones realizadas en los programas computarizados utilizados.

Los diferentes métodos de construcción de los SAC los clasificamos de la siguiente manera:

- A partir de la revolución de Figuras de Ancho Constante (FAC).
- A partir del método de Weber (basado en el tetraedro de Reuleaux).

Vale la pena precisar que justo a partir de estudiar este último método, nos surgieron dos caminos de exploración para generar métodos de construcción de SAC:

Camino 1: Dado que el tetraedro de Reuleaux se basa en un tetraedro regular, y es posible construir un SAC a partir de estos, tenemos como hipótesis que es posible generar métodos de construcción de SAC con base en los demás sólidos platónicos.

Camino 2: Dado que el tetraedro de Reuleaux se basa en un tetraedro regular, y es posible construir un SAC a partir de estos, tenemos como hipótesis que al considerar el tetraedro como una pirámide con ciertas condiciones (su “base” es un polígono regular, su eje es perpendicular a la base por su centro), es posible generar métodos de construcción de SAC con base en otras pirámides con condiciones similares a estas.

En lo que sigue, vamos a presentar los métodos de construcción siguiendo la clasificación anteriormente presentada.

#### **3.1 A partir de la Revolución de FAC**

El primer métodos de construcción de los Sólidos de Ancho Constante (SAC) estudiado surge al revolucionar Figuras Planas de Ancho Constante (FAC). Para ello, basta con determinar la recta sobre la cual se llevará a cabo revolución de la FAC que se tome como base. A continuación haremos una descripción de los SAC que se generan a partir de FAC específicas:

##### **3.1.1 SAC a partir de revolucionar FAC generadas por un polígono regular de un número impar de lados**

Montejano (1998) menciona que para generar SAC basta con revolucionar  $FAC^2$  a partir de una recta “especial” que sirva de eje de revolución. En términos generales, esa recta es el eje de simetría de la FAC. No obstante, en ocasiones no es evidente determinar ese eje. Presentaremos ejemplos de caracterización de rectas que terminan siendo ejes de simetría del FAC que producen SAC luego de realizar la respectiva revolución.

- Si se toma una FAC cuyo polígono base es un polígono regular de un número impar de lados, el eje de revolución debe ser un eje de simetría de dicho polígono. Para ejemplificar el método, tomaremos el caso del **triángulo de Reuleaux**:

I. Sean ABC los vértices de un triángulo de Reuleaux, que denotaremos  $\Delta ABC$ . Ver Figura 4

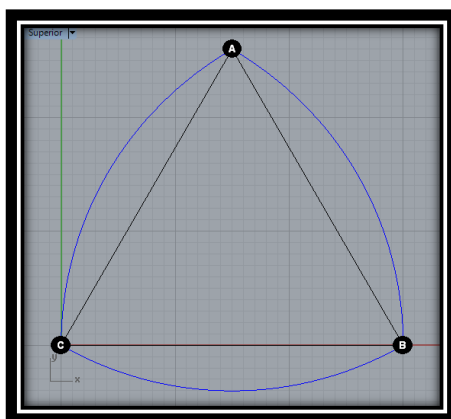


Figura 4 Triángulo de Reuleaux

II. Definimos el punto D como el punto medio del lado opuesto al vértice A del triángulo, en otras palabras el CB) y trazamos AD, el cual es eje de simetría  $\Delta ABC$  equilátero (polígono base). Ver Figura 5.

---

<sup>2</sup> Para ver varias FAC, el trabajo de grado realizado por Martha Orejuela y Leidi Gil en el año 2010, denominado “Figuras De Ancho Constante: Una Temática para Explorar”, presenta varios métodos de construcción para la creación de figuras de ancho constante (FAC).

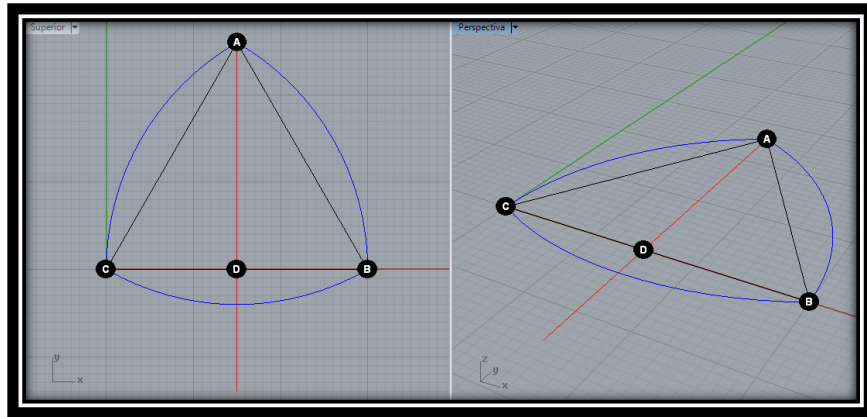


Figura 5 Eje de simetría polígono base

III. Revolucionamos el  $\Delta ABC$  con respecto al eje AD. La superficie generada por la revolución, determina un sólido de ancho constante. Ver Figura 6

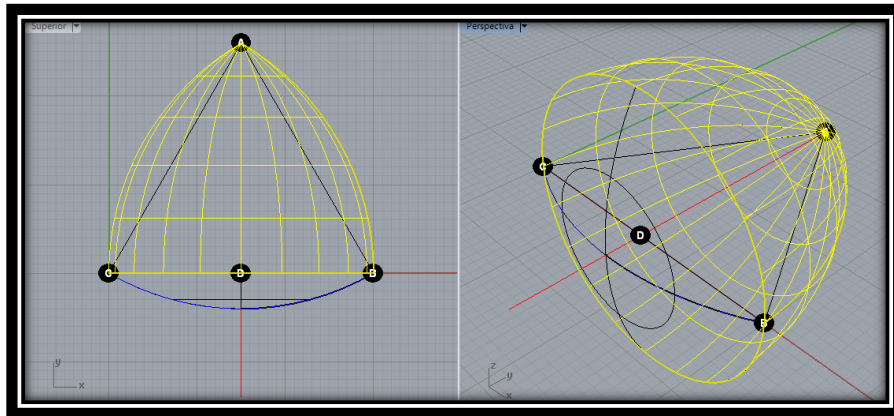


Figura 6 Revolución de la FAC

IV. Para verificar que el sólido es un SAC, construimos sendos planos soporte, respecto de los extremos de algunos de sus diámetros. Ver Figura 7, donde se pueden apreciar diferentes planos soportes (resaltados en color rojo) con los respectivos diámetros y como se observa, el ancho de la figura siempre es el mismo.

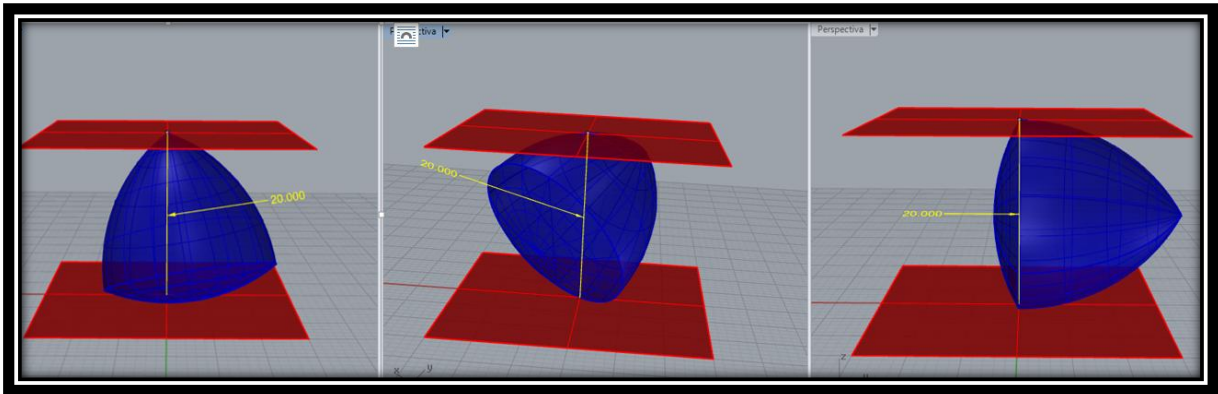


Figura 7 Planos soportes y diámetros en diferentes direcciones.

A modo de ilustración presentamos el caso del pentágono, análogo al caso anterior:

I. Dada la FAC ABCDE. Ver Figura 8

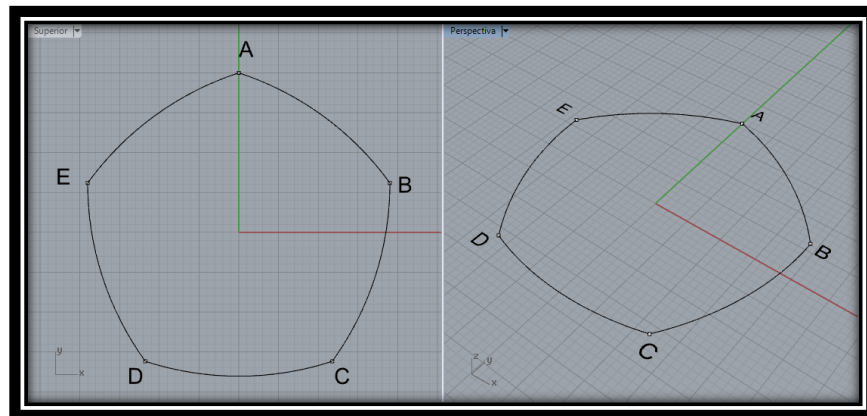


Figura 8 FAC a partir del pentágono

II. Definimos el punto F como el punto medio del lado opuesto al vértice A del pentágono, en otras palabras el DC, y trazamos AF. Esta recta es el eje de simetría del pentágono regular ABCDEF (polígono base). Ver Figura 9

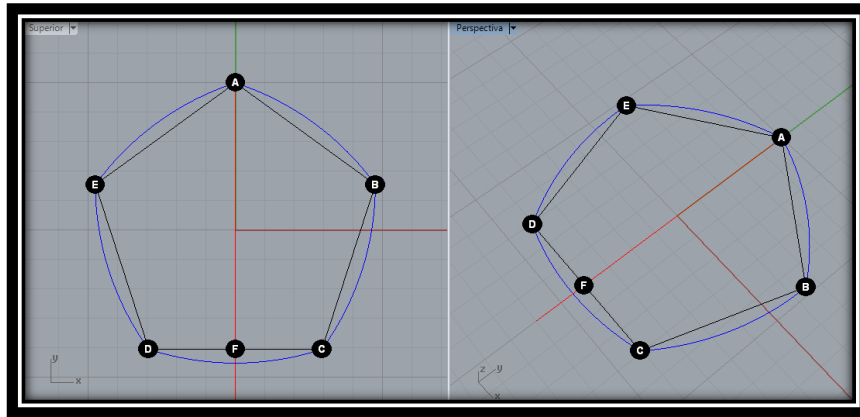


Figura 9 Eje de simetría de polígono base para la FAC a partir del pentágono

III. Revolucionamos la FAC ABCDE alrededor del eje AF. Para obtener el sólido de ancho constante (SAC). Ver Figura 10

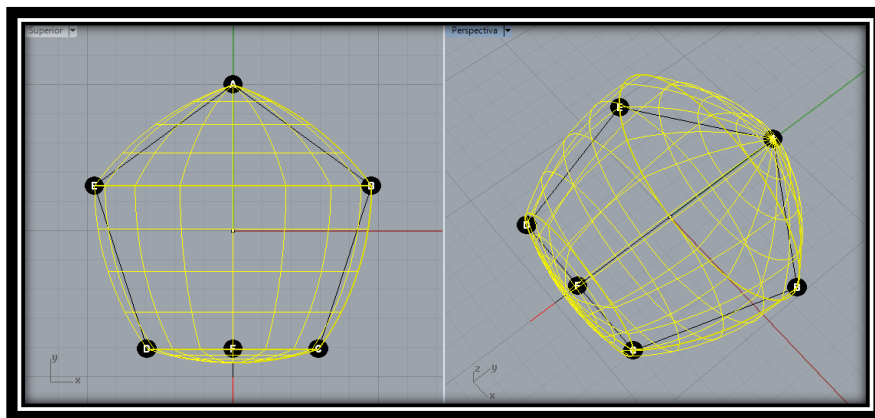


Figura 10 Revolución de la FAC a partir del pentágono

IV. El sólido resultante de dicha revolución es un SAC, nuevamente lo comprobamos midiendo anchos del sólido en varias direcciones. Ver Figura 11

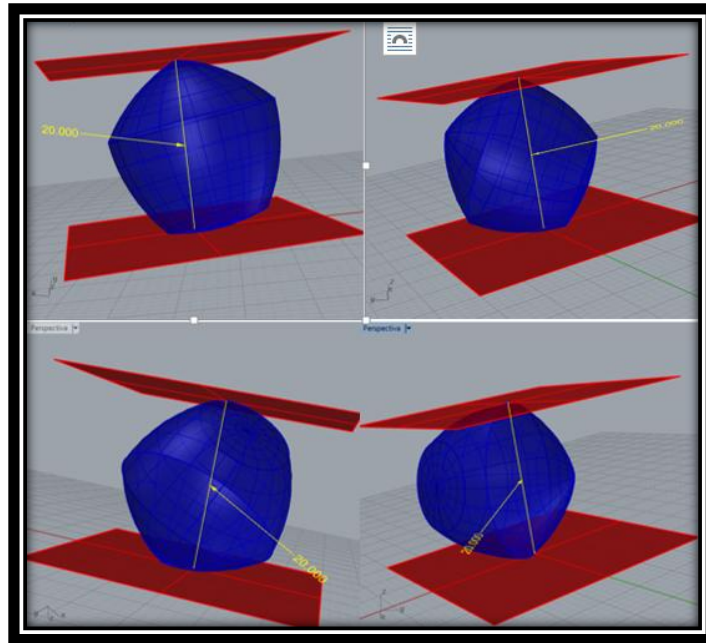


Figura 11 Planos soportes y diámetros en diferentes direcciones

- **Extensión del triángulo de Reuleaux:** Como pudimos consultar en Gil y Orjuela (2019), quienes se basaron en Radamacher y Töeplitz, (1990) a partir de cualquier FAC es posible crear otras FAC; el método consiste en redondear las “puntas” de las figuras de ancho constante utilizando arcos de circunferencia. Ver Figura 12.

A continuación, tomaremos una extensión del triángulo de Reuleaux y, con base en ella, ilustraremos el método de la generación de SAC a partir de su revolución:

- I. Dado un triángulo  $\Delta ABC$  (de Reuleaux) y  $\Delta ABC$  equilátero como su respectivo polígono base.
- II. Construimos  $\alpha$  la nueva FAC que surge de la extensión<sup>3</sup> del  $\Delta ABC$ .

---

<sup>3</sup> Denotamos como  $\alpha$  la nueva FAC “extensión” del tetraedro de Reuleaux, dicha extensión se construye extendiendo los lados del triángulo equilátero, el cual es la base de la construcción del triángulo de Reuleaux, seguido a esto se construyen circunferencias con centro en los vértices del triángulo y un radio cualquiera, los arcos de circunferencia de menor longitud, determinados por las extensiones de los lados del triángulo forman parte del nuevo SAC, ahora con centro nuevamente en cada uno de los vértices del triángulo equilátero y radio la distancia del segmento que tiene como extremos el vértice del triángulo y el extremo del arco que está contenido en la extensión del mismo lado del triángulo en la que está el vértice de uno de los arcos construimos las tres circunferencias y nuevamente elegimos el arco de circunferencia de menor longitud determinados por la extensión de los lados y que tienen los dos puntos extremos en común con los otros arcos de menor circunferencia realizados anteriormente, la unión entre los 6 arcos escogidos es una FAC de extensión.



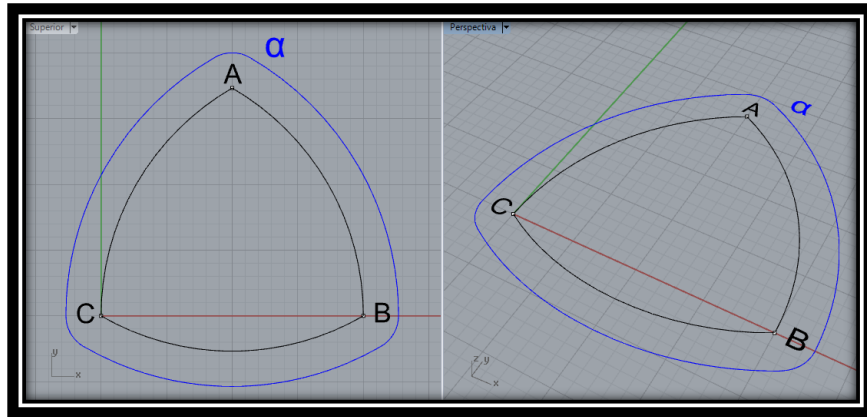


Figura 12 Extensión del Triángulo de Reuleaux

III. Definimos el punto D como el punto medio del lado CB del triángulo (e.g., CB) y trazamos AD, el cual es eje de simetría  $\Delta ABC$  equilátero (polígono base).

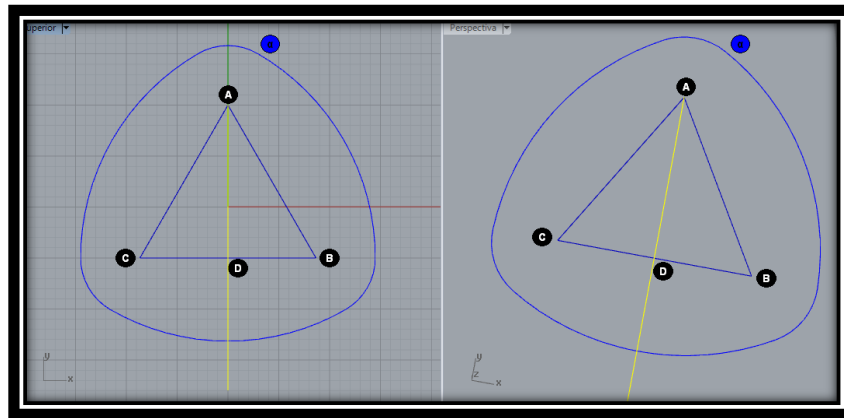


Figura 13 Eje de simetría del polígono base para la extensión del triángulo de Reuleaux

IV. Revolucionamos  $\alpha$  con respecto al eje AD. La superficie generada por la revolución, determina un sólido de ancho constante (SAC). Ver Figura 14

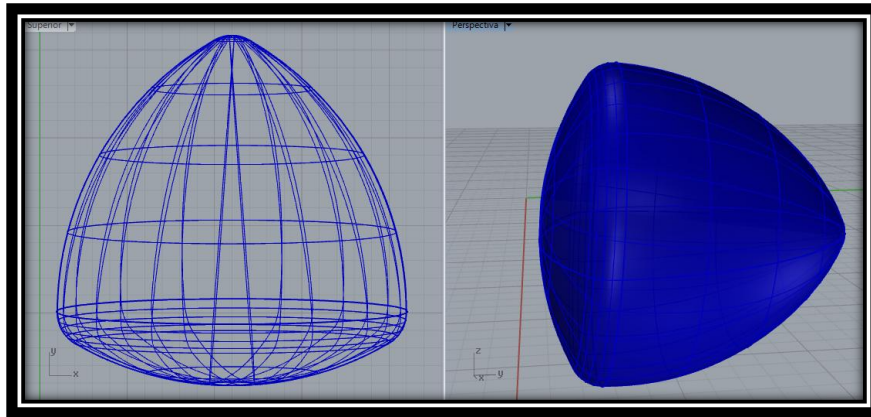


Figura 14 SAC obtenido al revolucionar la extensión del triángulo de Reuleaux

- V. El sólido resultante de dicha revolución nuevamente resulta ser un SAC. La figura siguiente verifica que los anchos de la figura para dos direcciones cualesquiera es la misma, ver Figura 15.

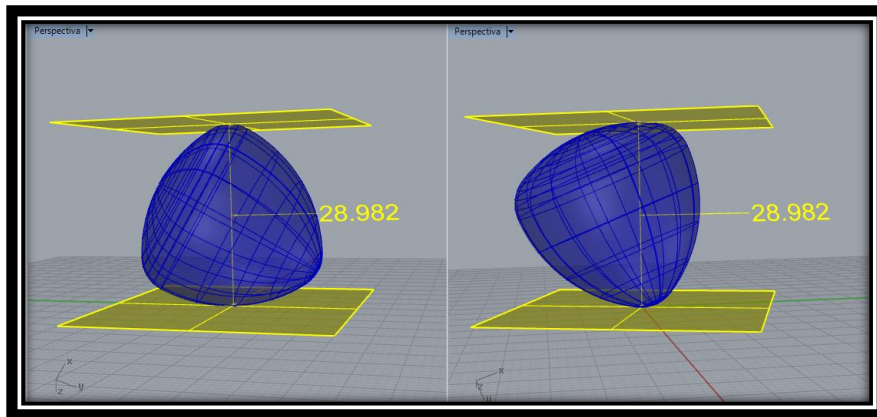


Figura 15 Planos soportes y diámetros en diferentes direcciones

### 3.1.2 SAC a partir de revolucionar FAC generadas por un polígono regular de un número par de lados

Siguiendo la misma idea que se presentó anteriormente, presentamos métodos de construcción SAC vía revolución de FAC que se basan en polígono regulares de número par de lados.

- **Caso del Cuadrado**

- I. Construimos la figura de ancho constante ABCDEF basada en el cuadrado ABDF que se exponen en el trabajo de (Gil, L. & Orjuela, M, 2010). Ver Figura 16.

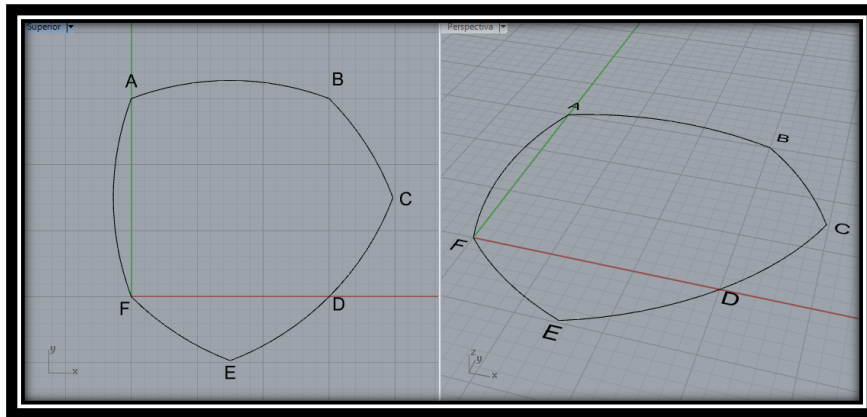


Figura 16 FAC obtenida a partir de un cuadrado.

- II. Trazamos AD, que contiene la diagonal del cuadrado con extremos en un vértice del mismo y en el punto medio del arco con mayor longitud de la FAC. Dicha recta es eje de simetría tanto del cuadrado ABDF como de la FAC en cuestión. Ver Figura 17.

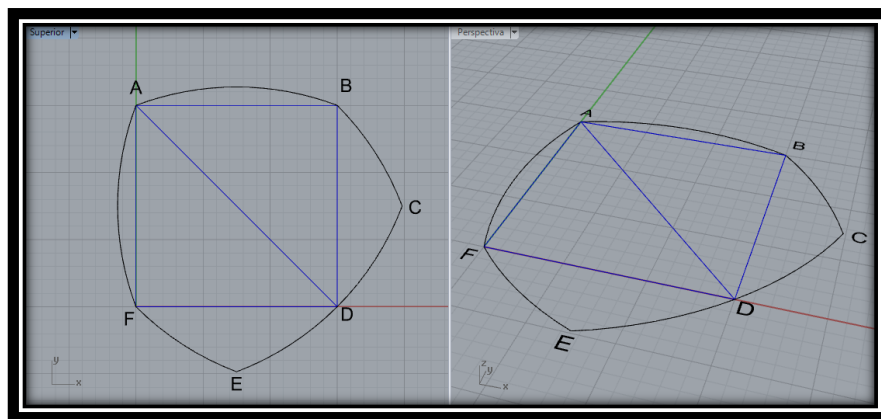


Figura 17 Polígono base y eje de simetría como diagonal

- III. Revolucionamos la figura de ancho constante ABCDEF alrededor del eje AD. Para obtener el sólido de ancho constante (SAC). Ver Figura 18

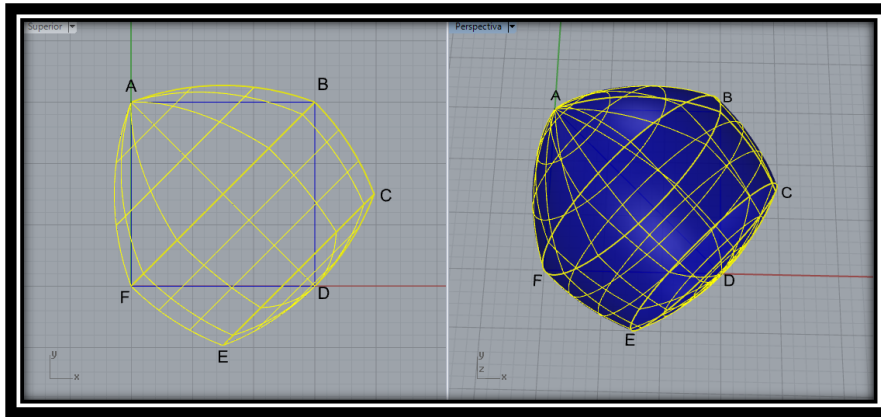


Figura 18 Revolución de FAC a partir del cuadrado

IV. A continuación se ilustra la verificación de que el sólido conformado es de ancho contante, mostrando anchos de la misma para varias direcciones. Ver Figura 19

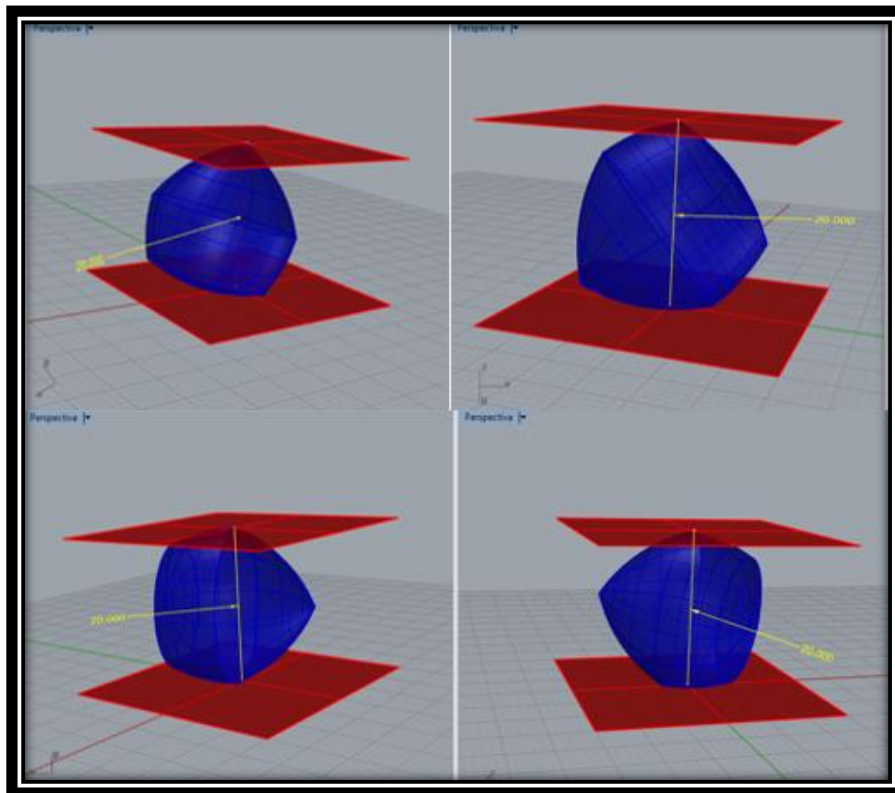


Figura 19 Planos soportes y diámetros de la revolución en diferentes direcciones



2. Rotar la figura resultante, respecto del tal eje de simetría. El resultado, es la mismo SAC de la Figura 11.

Algo análogo se puede hacer con un SAC que tiene eje de simetría, quitándole un subconjunto de su superficie perteneciente a uno de los semiespacios determinado por un plano que contiene dicho eje de simetría (Ver Figura 21 como un ejemplo). La figura resultante es la misma de la Figura 18.

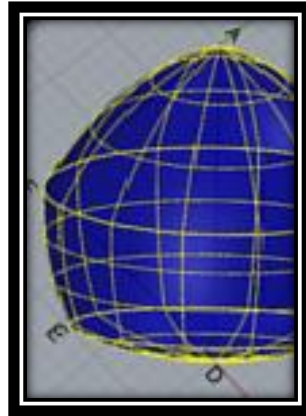


Figura 21 SAC análogo

### 3.2 A partir del Método de Weber: SAC de Reuleaux

A continuación presentamos la manera como (Weber, C, 2009) construye un sólido de ancho constante (SAC), a partir de una extrapolación del método de construcción del Triángulo de Reuleaux, es decir, mediante la utilización de esferas con centros en los vértices de un tetraedro regular y radios de igual medida a la de sus aristas; ahora bien, esto no es suficiente, hay que hacer ciertos ajustes los cuales serán expuestos en su momento. Como se dijo antes, fue este método el que nos permitió un campo amplio de exploración. Más adelante precisaremos en qué sentido ello fue permitido y explicitaremos los métodos que surgieron en ese marco de exploración. Para generar un contexto adecuado que nos permita entender este panorama, iniciaremos con la propuesta de Weber para construir un SAC con base en un tetraedro regular.

#### 3.2.1 SAC con base en tetraedro regular

- I. Construir el Tetraedro regular ABCD. Ver Figura 22.

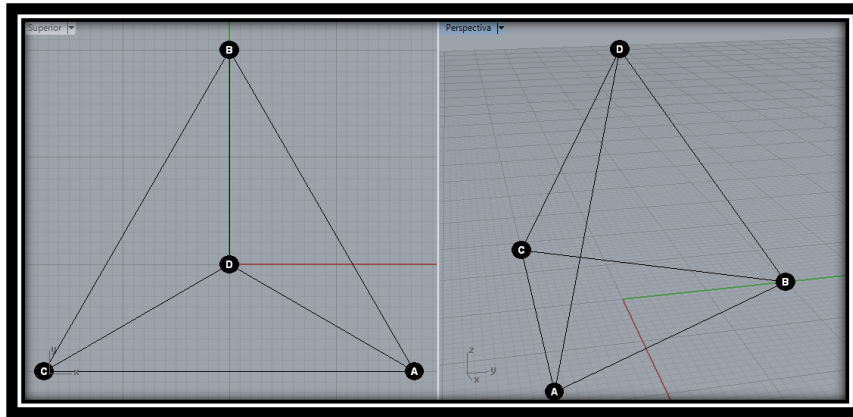


Figura 22 Tetraedro regular

- II. Con centro en los vértices del tetraedro A, C y radio igual a la medida de las aristas laterales, construimos sendas esfera con el fin de determinar el arco de menor longitud determinado por la intersección de las dos esferas y los vértices del tetraedro D y B, ver Figura 23.

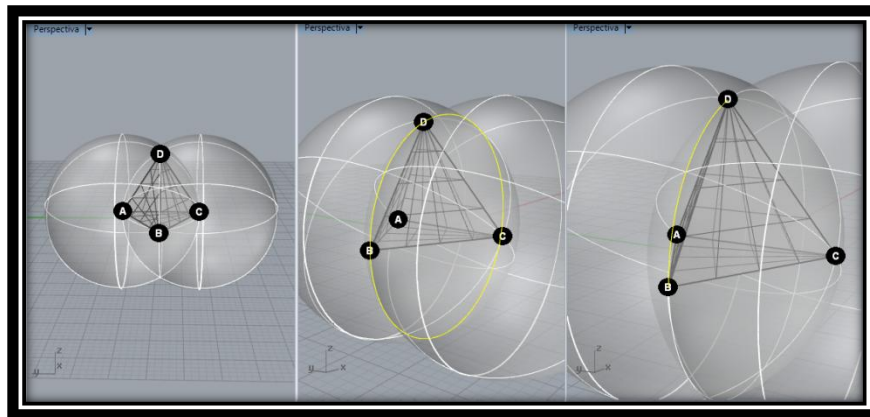


Figura 23 Arco de menor longitud

- III. Con centro en A y radio igual a la medida de las aristas laterales, construimos una esfera con el fin de obtener el sector esférico de menor cantidad de superficie, que es determinado por la construcción (análoga al paso II) de los arcos de menor longitud Ver Figura 23 cuyos extremos son los vértices B,C,D, Ver Figura 24.



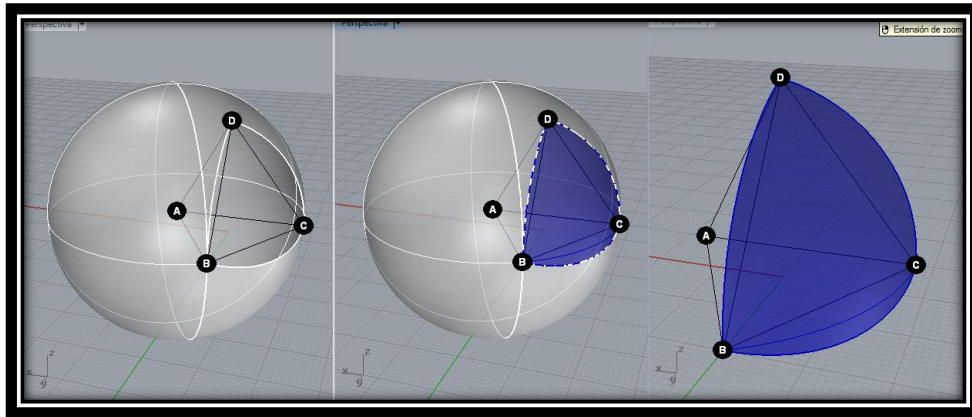


Figura 24 Esfera y sector esférico generado

- IV. De forma análoga, realizamos esferas para cada uno de los vértices del tetraedro ABCD, con el fin de obtener siempre el sector esférico de menor superficie determinado de la misma manera que se describió en el paso anterior. Así la unión de los cuatro sectores esféricos correspondientes a cada una de las caras del Tetraedro se conoce como el Tetraedro de Reuleaux. Ver Figura 25.

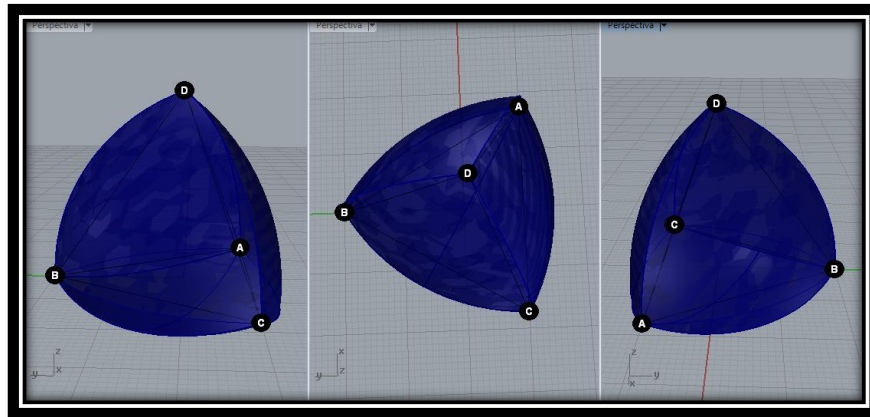


Figura 25 Tetraedro de Reuleaux



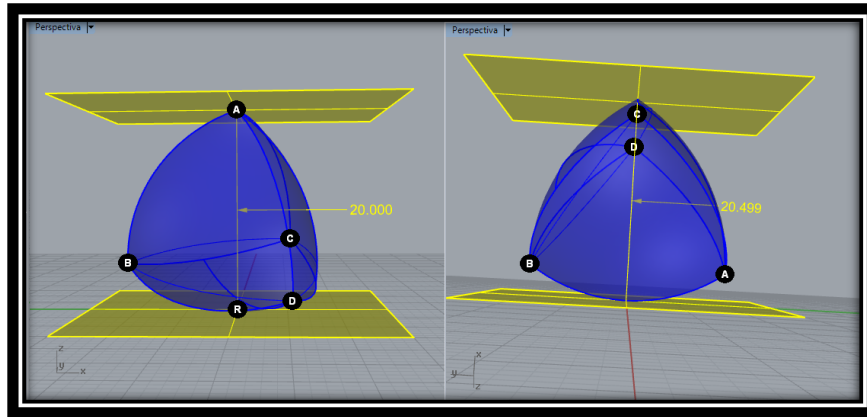


Figura 26 Diámetros en diferentes direcciones

Ahora bien, debido a que el sólido mostrado en la Figura 25 posee distintos diámetros en varias direcciones, específicamente aquellas determinadas por los diámetros cuyos extremos están en los arcos determinados por los puntos que son extremo de las aristas de tetraedro que no se intersectan (v.g., A y B, y C y D) (ver Figura 26), surge la pregunta: ¿es posible hacerle algún tratamiento a este sólido, para que se transforme en uno de ancho constante? La respuesta es sí. En lo que sigue, presentamos un procedimiento tal, propuesto por Weber (2009).

- V. Construimos los planos que contienen las caras de tetraedro regular con el vértice común D. Ver Figura 27

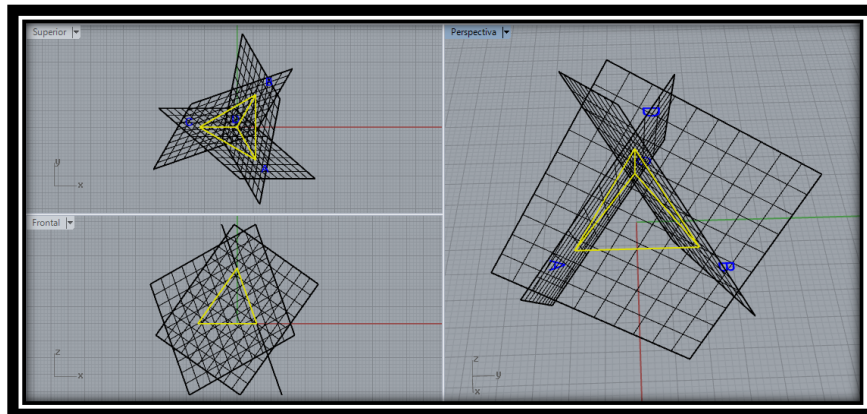


Figura 27 Planos para ajuste del sólido

- VI. Intersecamos los tres planos resultantes, con el Tetraedro de Reuleaux.

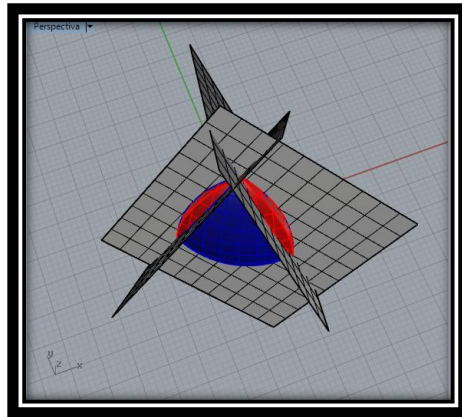


Figura 28 Intersección planos resultantes con el Tetraedro de Reuleaux

Como se muestra en la Figura 26, el Tetraedro de Reuleaux presenta mayor ancho en las zonas rojas, razón por la cual estas son las partes que merecen un tratamiento especial para generar un SAC. En primera instancia, las vamos a sustraer del Tetraedro de Reuleaux. Llamaremos a estas zonas, lugares de ajuste. Ver Figura 29.

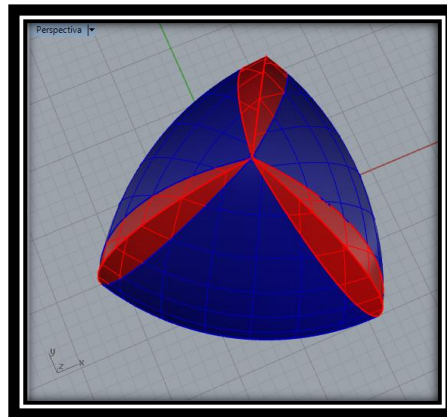


Figura 29 lugares de ajuste el ajuste

VII. La figura resultante de hacer tal sustracción se presenta en la Figura 30

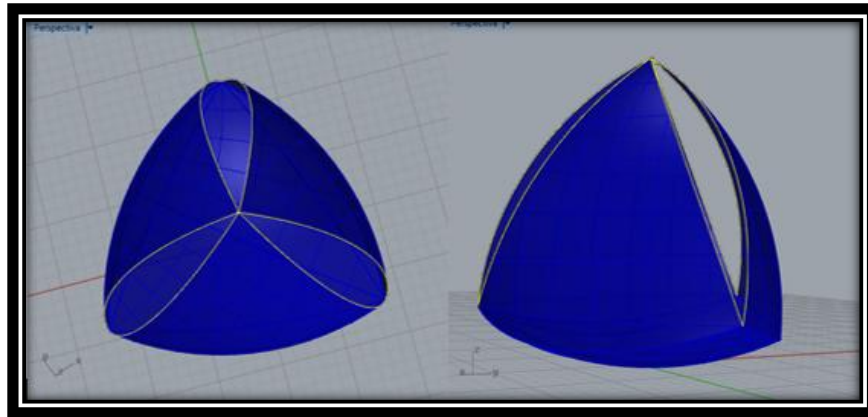


Figura 30 Sustracción de superficies sobrantes

Al hacer tal sustracción, se generan “huecos” que están conformados por los arcos determinados por la intersección del Tetraedro de Reuleaux con los planos generados en el paso I.

La idea de Weber fue reemplazar las superficies sustraídas por superficies de revolución. Pero, ¿qué objeto revolucionar? Precisamente, los arcos referidos anteriormente se constituyen en la respuesta a esa pregunta. La pregunta ahora es ¿cuál eje de revolución tomar? La respuesta es “natural”: la arista del tetraedro determinada por los extremos del arco a revolucionar; de manera específica la revolución a realizar se realiza teniendo como rango la amplitud del ángulo diedro opuesto por dicha arista, al ángulo diedro determinado por los semiplanos que contienen las caras del tetraedro regular. El arco revolucionado en ese rango, se ilustra en la Figura 31, con color verde.

VIII. Revolucionamos los arcos mencionado en el párrafo anterior, ver Figura 31.

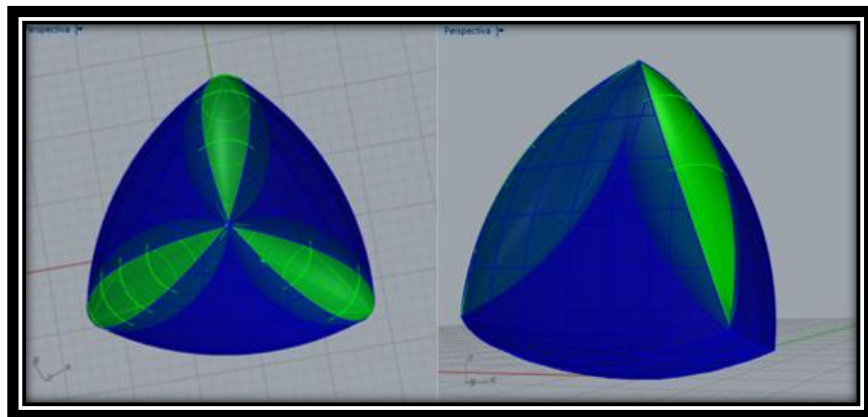


Figura 31 Superficies de revolución del ajuste

Al realizar estas superficies de revolución para cada sección resultante de la sustracción, los anchos del nuevo sólido, para cualquier dirección, tienen la misma medida, dejando atrás el inconveniente que se mostró en la Figura 26 y terminando por generar un SAC. En conclusión, la unión de las tres superficies de revolución con la superficie restante del tetraedro de Reuleaux (la que efectivamente tomamos en cuenta), conforman un sólido de ancho constante, con base en el tetraedro regular. Llamaremos a este sólido, SAC de Reuleaux. Ver Figura 32.

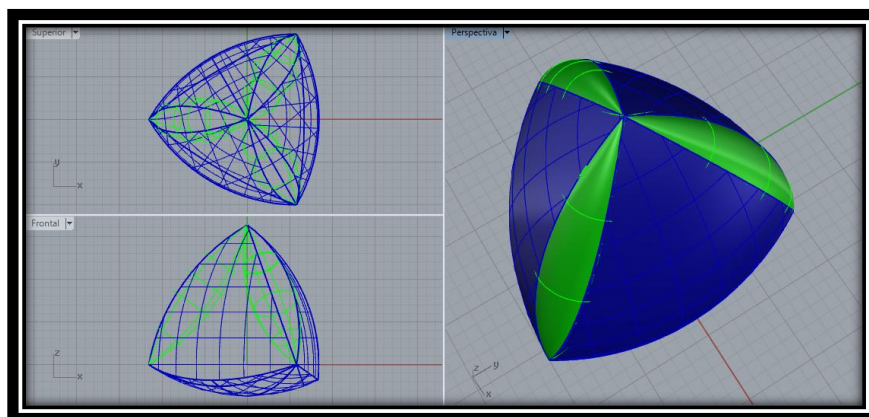


Figura 32 SAC de Reuleaux

### 3.2.2 Justificación del Método de Weber

Ahora bien, como nos dimos pudimos dar cuenta, el método anterior se fundamentó en el Tetraedro de Reuleux y algunos ajustes que tuvieron que hacerse para lograr diámetros constantes en cualquier dirección. Con el ánimo de precisar la justificación del método que acabamos de presetar, nos adentramos en una exploración, particularmente en el software Cabri 3D. Para ello, hicimos los siguiente:

- I. Construimos un tetraedro regular y las esferas que permiten generar el tetraedro de Reuleaux. Enseguida, marcamos los arcos de intersección de las esferas, mencionados en los pasos III y IV del método de la sección 3.2.1. Ver Figura 33.

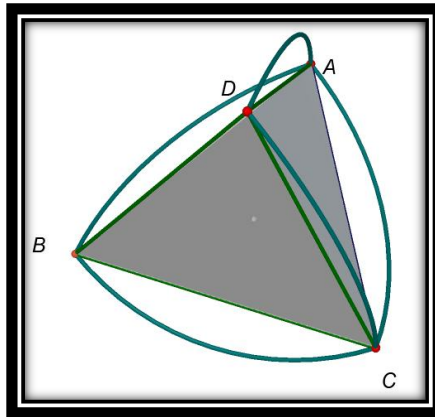


Figura 33 Tetraedro de Reuleaux en Cabr3D

- II. Luego trazamos la circunferencia que permite determinar el arco (menor) de intersección del plano determinado por los puntos C, B y D, y la esfera de centro C y radio CB. Recordemos que este arco es el que utiliza Weber para hacer el respectivo ajuste. Ver Figura 34.

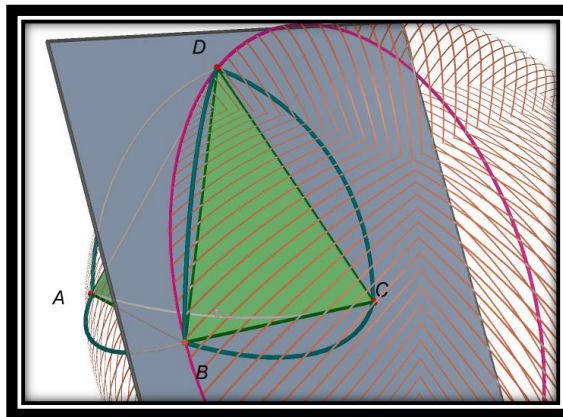


Figura 34 Circunferencias para arco menor

- III. Ahora, la idea era precisar circunferencias análogas a la anterior, que permiten determinar los arcos que conforman la superficie de revolución que utiliza Weber para ajustar el tetraedro de Reuleaux. Para generar tales circunferencias, necesitamos un plano, un radio y claro, su centro. Para precisar estos datos, hicimos la siguiente exploración:

- a) Tomamos como plano aquel determinado por la arista  $BD$  y un punto cualquiera del arco  $AC$  determinado en el paso I, ver Figura 35.

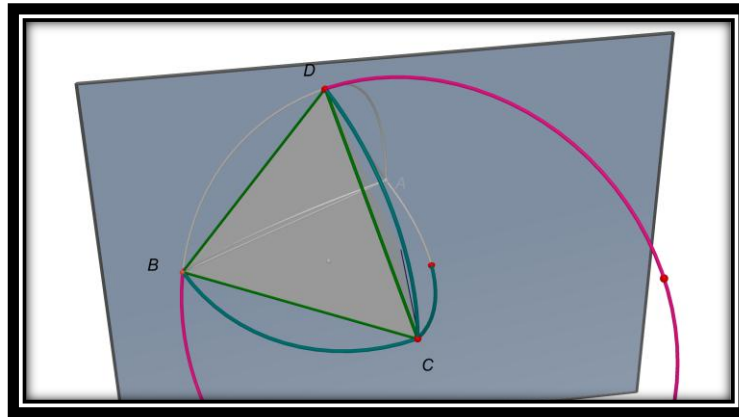


Figura 35 Plano determinado por una arista

- b) Enseguida, utilizamos la herramienta *rotación* del Software, para hacer la rotación de la circunferencia del paso II alrededor de  $BD$  con dirección del plano del literal a. Esto es para simular la revolución hecha por Weber. La idea con esto fue precisar el centro de las circunferencia y los radios, que para ese momento ya se tenía determinado ( $BC$ ) producto de lo hecho en el paso II. El resultado de la rotación en la circunferencia verde que se presenta en la Figura 36. Esta figura muestra también, varios resultados de la rotación, al cambiar la dirección del plano referido.

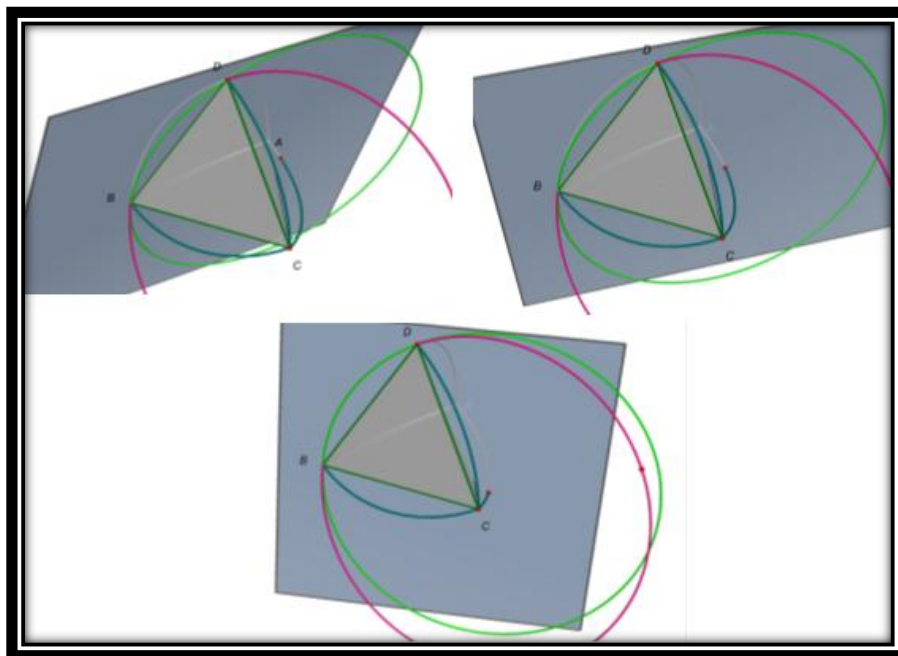


Figura 36 Resultado de la rotación

- c) Al estudiar los centros de las circunferencias de color verde, nos percatamos que estas pertenecen al arco AC construido en el paso 1.

Hecha la exploración antes descrita, justificar el método de Weber es relativamente sencillo. Centrémonos primero en las circunferencias azules de la Figura 30). Estas garantizan que se genera un SAC pues las cuerdas a considerar en cualquier dirección se generan de la siguiente manera: tómesese un punto R cualquiera en tales casquetes (tomar por ejemplo de la Figura 26), la cuerda a considerar sería  $RA$ , es decir, un radio cualquiera de la esfera que determina dicho casquete. Claro, los planos soporte relativos a tales puntos son los perpendiculares a la cuerda  $RA$  por los puntos A y R. Estos planos son tangentes al SAC en los puntos R y A gracias a uno de los teoremas expuestos en el marco teórico de este documento (Plano tangente a una esfera).

Concentremos ahora en las zonas de ajuste (ver paso VIII del método de Weber); basta con ilustrar la justificación para una de tales zonas (las demás se hace de manera análoga); por ejemplo la que usamos para presentar la exploración antes realizada. En este caso, el arco que se revoluciona, como se vio, genera arcos que son subconjunto de las circunferencias con radio  $BC$  y centro un punto T del arco AC (referenciado en el paso I de la exploración); tales circunferencias están en el plano determinado por los puntos C y la arista  $BD$ . Como tales circunferencias tienen el mismo radio, en la dirección del plano (dirección cualquiera en la sección de ajuste) se garantiza que la superficie generada por el arco revolucionado junto con el arco AC, determinan cuerdas cuya longitud es el radio de las circunferencias mencionadas; en otras palabras, para cada arco  $\varepsilon$  producto de la rotación (en la revolución) existe un punto T en el arco AC, tal que al tomar un punto P en  $\varepsilon$ ,  $TP$  es igual a la medida de la arista  $BD$ . Para estos casos los planos soporte se generan con los planos perpendiculares a los segmentos  $TP$  por el punto T y el punto P, respectivamente. Claro, estos resultan ser tangente a las circunferencias trazadas en el ítem b del paso III de la exploración, y a la circunferencia que contiene el arco AC del paso I de tal exploración (esto gracias al Teorema Recta tangente a una circunferencia). Así, tales planos también son tangentes a la generada con la revolución (o rotación) antes descrita.

Con lo dicho en los últimos párrafos, la figura resultante del método de Weber, es un SAC de ancho la medida de la arista del tetraedro.



### 3.3 SAC a partir de la modificación del Método de Weber: Nuestro primer aporte

Con lo presentado en la sección anterior, nos preguntamos si había lugar a realizar ajustes de una manera distinta a la que propone Weber en su método, esto es, sin hacer uso de las revoluciones de arco. En lo que sigue, presentamos el resultado de nuestra exploración en relación con este asunto.

Observamos un camino para realizar un procedimiento de construcción para los SAC, a partir del tetraedro regular, cuya principal diferencia con el método de Weber radica en que ya no vamos a necesitar realizar la revolución de los arcos; en lugar de ello, utilizaremos sectores esféricos resultantes de la intersección de esferas (que llamaremos “esferas de ajuste”) con el sólido a ajustar, como lo veremos durante los pasos IV y V del siguiente procedimiento. Este descubrimiento es nuestro primer aporte original para generar un método de construcción de un SAC.

En un principio, seguimos los primeros tres pasos del procedimiento seguido por Weber; en adelante, se presentamos los pasos que se distancian de dicha propuesta y que se constituyen en nuestro descubrimiento:

- I. Realizar la intersección entre las cuatro esferas con centro en cada uno de los vértices del tetraedro; con lo cual obtenemos el Tetraedro de Reuleaux. Ver Figura 37. En adelante, llamaremos estos arcos de intersección, aristas del Tetraedro de Reuleaux.

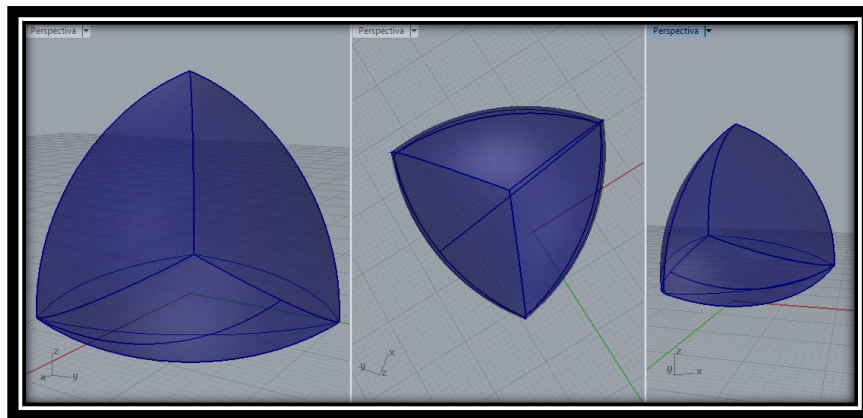


Figura 37 Sólido resultante para el ajuste

En las exploraciones realizadas para la efectiva realización del método, pudimos dar cuenta que es necesario realizar ajustes debido a que el sólido tiene diámetros diferentes en distintas direcciones como dejamos en evidencia en la Figura 26.



Para dicho ajuste tenemos que construir un número de esferas igual a la mitad del número aristas que tiene el tetraedro base; en este caso como hemos construido las primeras esferas con radio igual a la medida de una de las aristas del tetraedro, vamos a tomar como diámetro del SAC esta misma medida.

Las esferas anteriormente mencionadas, realizarán el ajuste del tetraedro de Reuleaux para conformar un SAC. De manera específica, describimos cómo realizar tales ajustes:

- II. Determinamos en la Figura 38, los puntos que van a servir como centro de las esferas con las cuales realizaremos los primeros ajustes; estos centros serán los puntos medio de tres de las aristas del Tetraedro de Reuleaux que tienen un extremo en común (aristas con un mismo vértice, siguiendo la idea de Weber); esto debido a que necesitamos ajustar los sectores que nos generan inconvenientes (Figura 29), esto es los sectores opuestos a tales aristas.

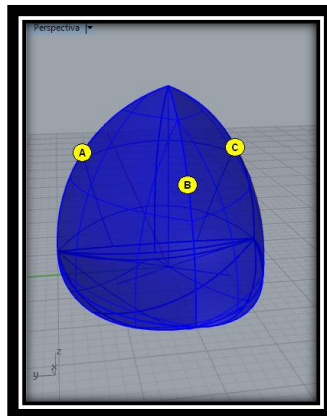


Figura 38 Centro de esferas para ajustes (opción 1)

- III. Con centro en A (uno de los puntos ya mencionados en el paso II) y radio igual al que venimos trabajando (longitud de una de las aristas del tetraedro base), construimos la esfera que servirá para realizar el ajuste. En la Figura 39 mostramos una de tales esferas ajuste con el objetivo de ilustrar la superficie de la Figura 38 a ajustar.

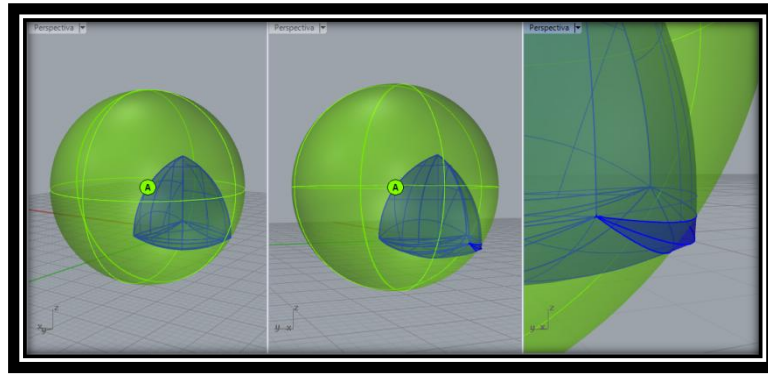


Figura 39 Esfera de ajuste y superficie a ajustar

- IV. Realizamos la intersección entre la esfera de ajuste y la Figura 37 resultando uno de los “sobrantes” del sólido que se desean ajustar. La superficie en color rojo de la Figura 40 es aquella parte sobrante.

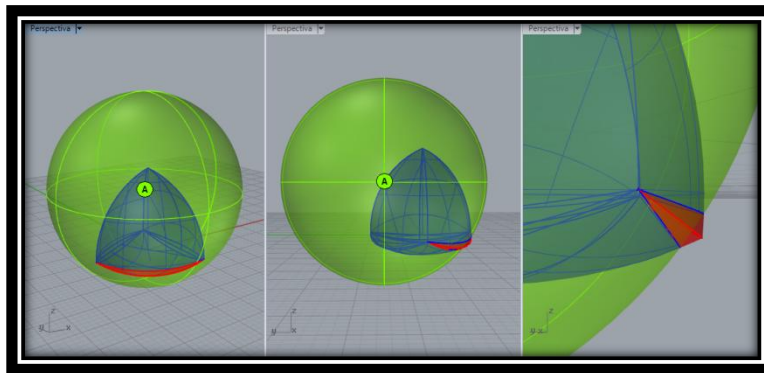


Figura 40 Superficie sobrante del sólido

- V. Se escoge ahora el sector de la esfera construida en el paso III, que tiene menor superficie y determinado por la intersección caracterizada en el paso IV. Ver Figura 41.

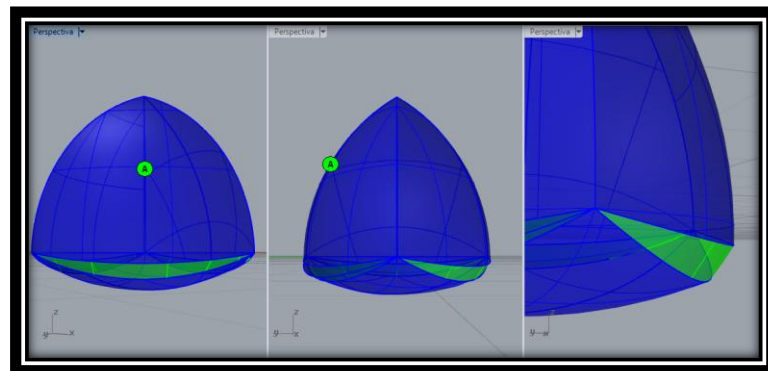


Figura 41 Sólido resultante del primer ajuste

- VI. Luego de haber determinados sectores esféricos análogos a los descritos en el paso V pero usando como centros de esferas con el mismo radio todos los puntos (B y C) indicados en el paso II, finalmente el sólido resultante de la unión entre la parte de la Figura 37 (sin los sobrantes) con dichos sectores esféricos es un SAC. Ver Figura 42.

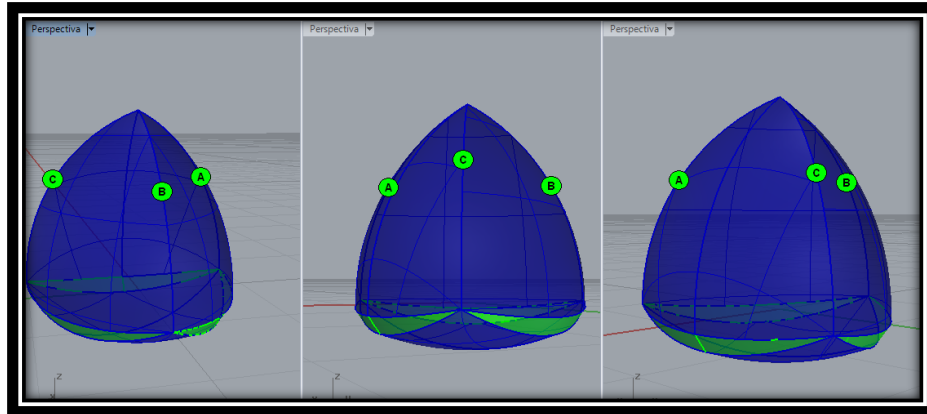


Figura 42 Sólido resultante a partir de los ajustes

Luego de hacer estos la Figura 43 muestra el sólido obtenido hasta el momento.

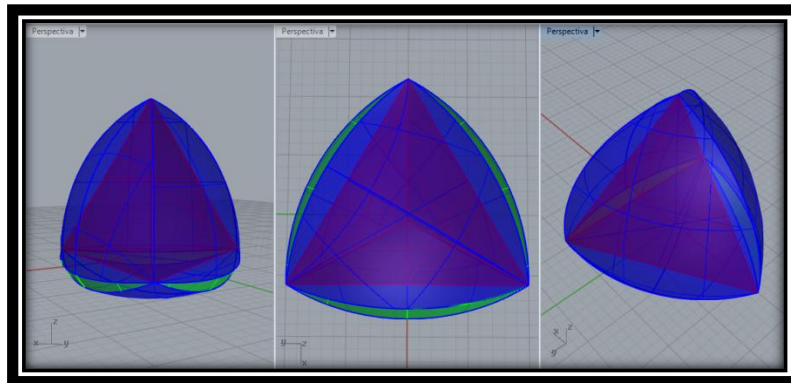


Figura 43 Sólido obtenido de los primeros ajustes

### Ajuste final:

Hechos los pasos anteriores, debemos precisar que aún no tenemos un SAC. Al explorar el sólido mostrado en la Figura 44, nos pudimos percatar que al construir los supuestos planos soporte relativos a las zonas de color verde producto del ajuste presentado con anterioridad, el plano opuesto  $\delta$  al plano tangente a dicha zona verde resulta ser no tangente al sólido construido, razón por la cual se debe hacer un último ajuste. En la Figura 45, se ilustra tales planos y el sector del sólido que genera el

inconveniente antes mencionado. Específicamente, dicho sector se muestra en la ilustración de la derecha de la Figura 45.

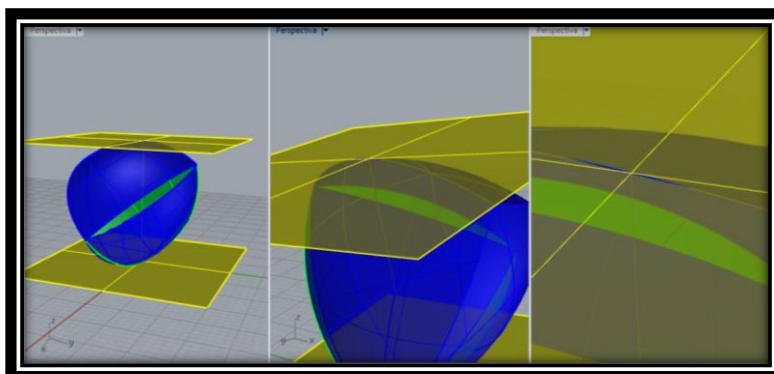


Figura 45 Sector del ajuste final

Como anteriormente lo mencionamos la distancia (diámetro del sólido) ente los dos planos que se construyeron como supuestos soporte, es la medida del diámetro que queremos que tenga el SAC (*i.e.*, la medida de la arista del tetraedro base). Para solventar el inconveniente, bastaría con “rebanar” el sector sobrante del Sólido mostrado en la Figura 46, con planos análogos al plano  $\delta$  antes referido. Dado que los planos soporte son perpendiculares a un diámetro en cualquier dirección, para construir los planos  $\delta$  primero generamos cualquier cuerda que sería diámetro del sólido (*i.e.*, cualquier radio cuyo extremo  $P$  pertenezca al sector verde de la esfera referida en el paso III del método), luego el plano perpendicular  $\alpha$  a estos radios por los puntos  $P$  y finalmente el plano  $\delta$  paralelo a  $\alpha$  por el otro extremo de la cuerda. De esta forma se garantiza que el diámetro es constante en cualquier dirección en este sector problemático y que los planos  $\alpha$  y  $\delta$  resultan ser tangentes a la figura y por ende soportes. En la Figura 47, se ilustran varios planos ( $\alpha$  y  $\delta$ ) con las características antes mencionadas.

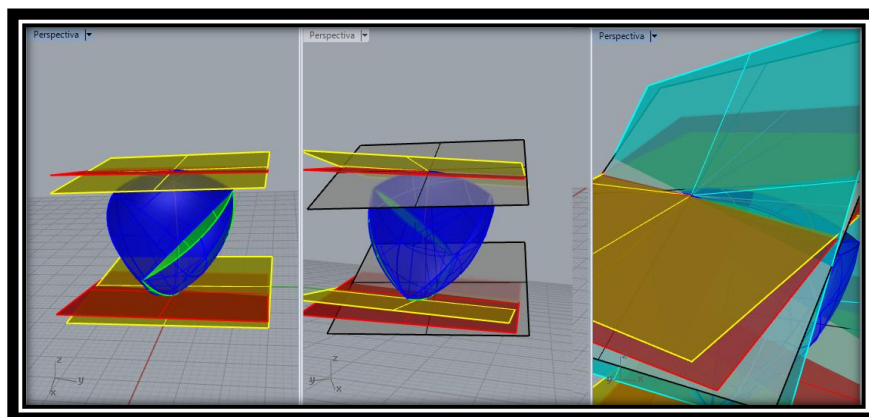


Figura 47 Planos soportes para ajuste final

Lastimosamente, por imposibilidad de los software utilizados debido a la falta de dinamismo de Rhinoceros y representación de sólidos producto de intersección (entre otros sólidos) de Cabri 3D, no podemos ilustrar el SAC resultante; no obstante este sólido será muy parecido al presentado en la Figura 43. Este tipo de ajuste, como se verá, será utilizado en todos los métodos que presentaremos a continuación.

### **3.3.1 Justificación**

Estudiaremos solo los sectores de ajuste (la justificación relativa a los sectores esféricos de color azul de la Figura 38, es análoga a la hecha para el SAC de Weber). Los sectores verdes de la Figura 41, producto del procedimiento antes descrito, resultan generar un ancho constante debido a que se están construyendo esferas que tienen el mismo radio para generar los sectores azules (medida de una arista del poliedro base); siempre en búsqueda de garantizar el mismo diámetro en cualquier dirección (ancho constante). Así, si se toma un punto R cualquiera en tales casquetes verdes, la cuerda a considerar sería  $RA$ , con A el punto medio de la arista del Tetraedro de Reuleaux opuesta a tal casquete; con base en lo dicho, tal cuerda sería un radio cualquiera de la esfera que determina dicho casquete. En tal sentido, los planos soporte relativos a tales puntos (R y A) son los perpendiculares a la cuerda  $RA$  por dichos puntos. Estos planos son tangentes al SAC en los puntos R y A gracias a uno de los teoremas expuestos en el marco teórico de este documento (Plano tangente a una esfera). Vale la pena comentar, que el método que sigue, es análogo al presentado en esta sección; la diferencia es que se toman aristas del tetraedro de Reuleaux diferentes a las que se escogieron en el anterior procedimiento. En tal sentido, la justificación de la validez de los métodos siguientes y de la sección 3.4, es en esencia el mismo acá expuesto.

### **3.3.2 Otro SAC a partir del Tetraedro: Ajustes diferentes a los del anterior método**

Por otro lado, es posible crear otro SAC diferente de manera análoga a como se construyó el anterior mediante la escogencia de otra combinación de los puntos (Figura 38) que nos servirán como centro de esferas de ajuste, las cuales nos permitirán ajustar otras tres aristas (del tetraedro de Reuleaux) respecto del método expuesto en la sección anterior. Veamos el procedimiento:

- I. A partir del paso II descrito anteriormente, determinamos los puntos que van a servir como centro de las esferas con las cuales realizaremos los primeros ajustes, los cuales serán los puntos medios de las tres aristas (del tetraedro de Reuleaux) de la Figura 37. Ver Figura 48.

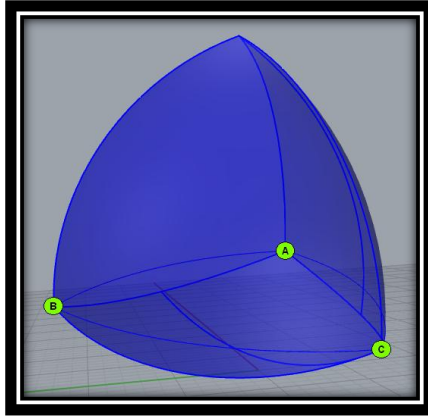


Figura 48 Centros de esferas para ajustes (opción 2)

- II. Ahora con centro en A (uno de los puntos ya mencionados en el paso I) y radio igual al que venimos trabajando (aristas del tetraedro regular base), construimos la esfera que servirá para realizar el ajuste. En la Figura 49 mostramos una de tales esferas ajuste para ilustrar la superficie de la Figura 37 a ajustar.

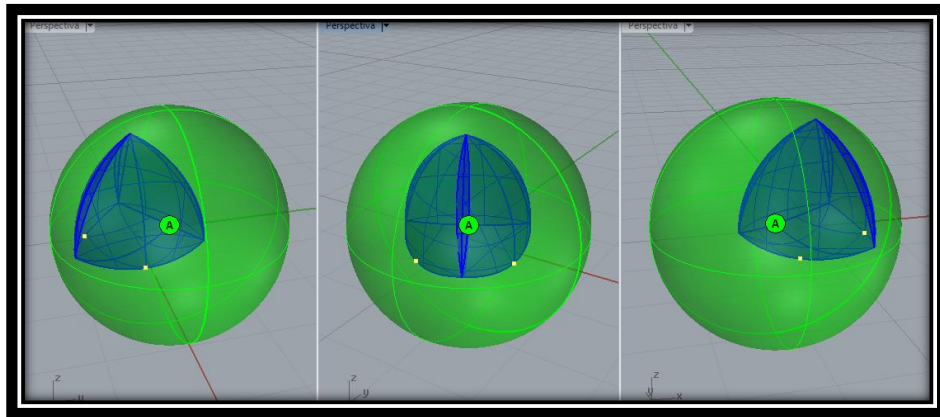


Figura 49 Esfera de ajuste y superficie a ajustar

- III. De manera análoga a los pasos IV, V y VI del método de la sección anterior, se obtiene un SAC diferente basado en el tetraedro de Reuleaux. Ver Figura 50.

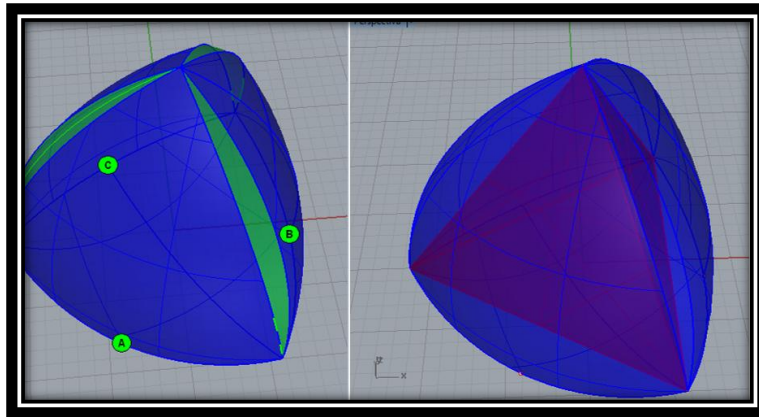


Figura 50 SAC a partir del tetraedro (opción 2)

IV. Se hace necesario realizar un ajuste de forma análoga al mostrado anteriormente en la página 64.

Vale la pena decir que es posible una tercera opción en la escogencia de los puntos que van a ser los centros de las esferas para los ajustes y radio igual a la medida de una de las aristas del tetraedro de Reuleaux: dichos puntos son dos puntos medios (C y D) de dos aristas de una “cara” de tal tetraedro y un tercer punto medio (A) de la arista de otra “cara” diferente a la determinada por las dos aristas anteriores. Ver Figura 51.

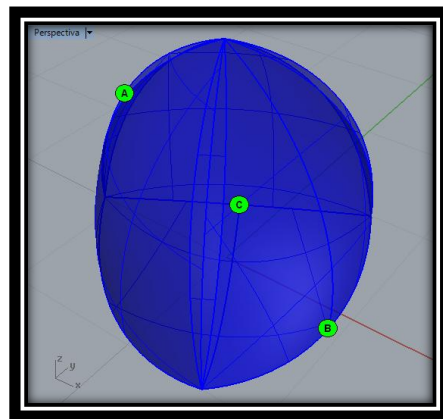


Figura 51 Centro de esferas de ajuste (opción 3)

El sólido resultante es un SAC. Ver Figura 52



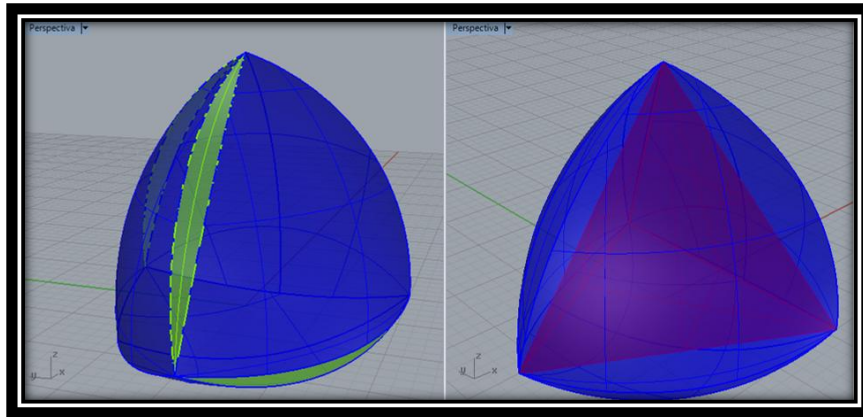


Figura 52 SAC a partir del tetraedro (opción 3)

### 3.4 SAC a partir de otros Poliedros Regulares: Nuestro segundo aporte

Como dijimos en la introducción del capítulo 3, el método de Weber nos permitió caminos de exploración para precisar métodos de construcción de SAC. En lo que sigue, presentamos uno de tales caminos, el cual consiste en replicar el método presentado en la sección 3.3, pero ahora utilizando de base otros poliedros regulares, a saber, cubo y octaedro.

#### 3.4.1 El caso del cubo

Continuando nuestro proceso de estudio, fijamos ahora nuestra atención en el siguiente sólido platónico el cual creímos conveniente para nuestra exploración, el cubo.

- I. Construir un cubo (Poliedro base). Ver Figura 53

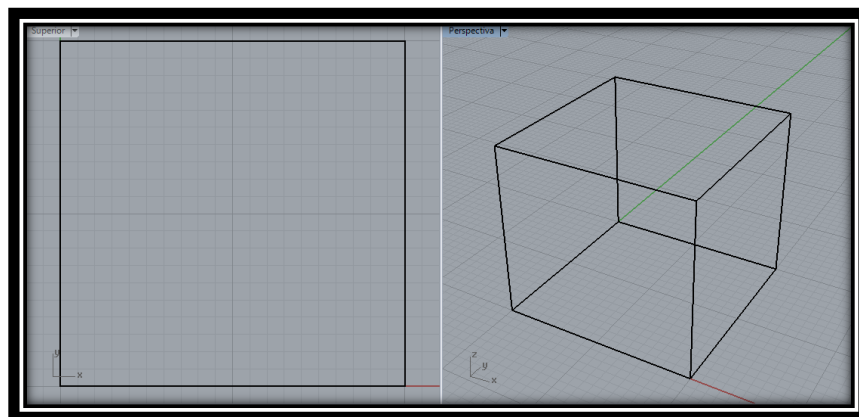


Figura 53 Cubo Base



- II. Construimos las esferas con centro en cada uno de los vértices del cubo y radio igual a la medida de una de las diagonales. En seguida se marcan las circunferencias de intersecciones de cada tres de tales esferas con el fin de obtener el sector esférico de menor cantidad de superficie determinado por arcos de dichas circunferencias tal como se ilustra en la Figura 54.

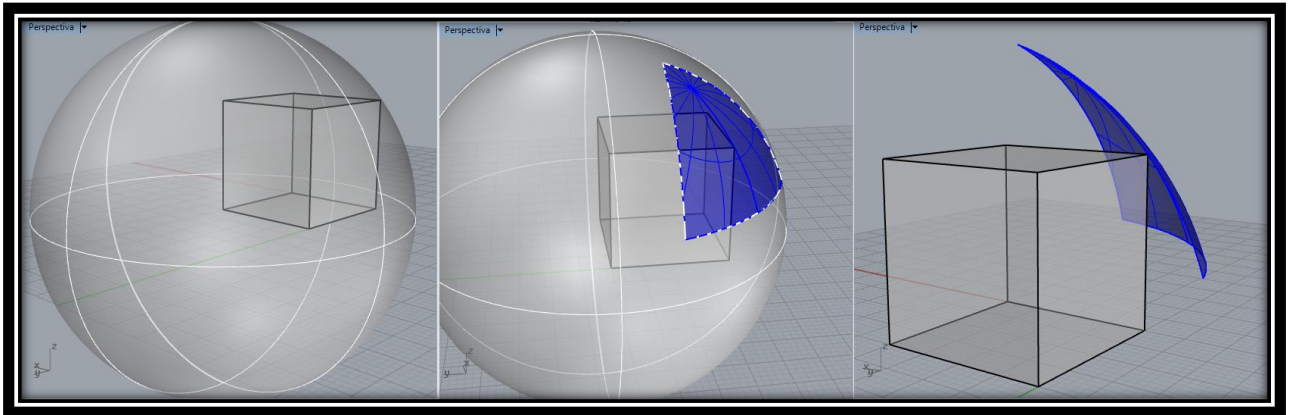


Figura 54 Esfera y sector esférico generado

- III. Al determinar los sectores para cada terna de esferas, obtenemos la siguiente figura que llamaremos “Octaedro redondo”. Ver Figura 55.

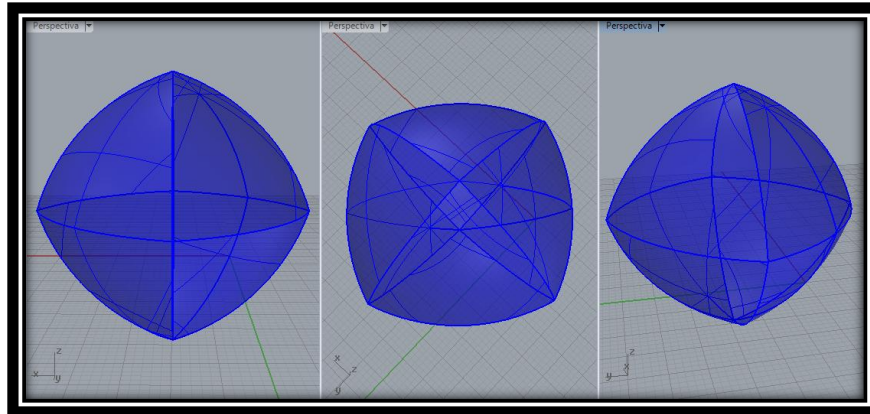


Figura 55 Sólido resultante para el ajuste “Octaedro Degenerado”

Luego de realizar el procedimiento del paso III, de manera análoga a como está en la página 52 para el Tetraedro de Reuleaux es necesario realizar ajustes debido a que el sólido tiene diámetros diferentes en distintas direcciones ver Figura 56, particularmente en aquellos sectores caracterizados por ser un par de vértices opuestos o un par de aristas opuestas del octaedro redondo.

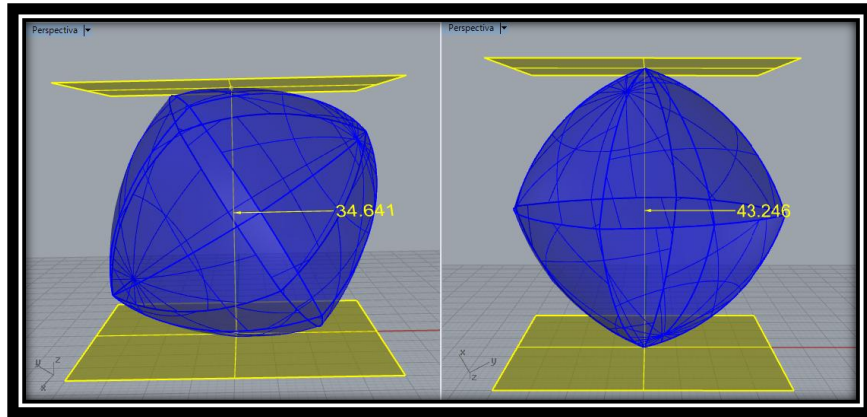


Figura 56 Diámetros de diferente longitud

Nuevamente, durante el proceso de exploración pudimos dar cuenta que de la escogencia de las aristas a realizar el ajuste se crearán diferentes sólidos de ancho constante.

Para dicho ajuste tenemos que construir, tal como se hizo en los métodos de la sección 3.3, un número de esferas igual a la mitad del número aristas que tiene el poliedro base, en este caso como hemos construido las primeras esferas con radio igual a la medida de una de las diagonales del cubo, vamos a tomar como diámetro del SAC esta misma medida.

IV. Ahora determinamos en la Figura 57, los puntos que van a servir como centro de las esferas con las cuales realizaremos los primeros ajustes, los cuales serán 3 vértices que determinan una de las caras del octaedro redondo.

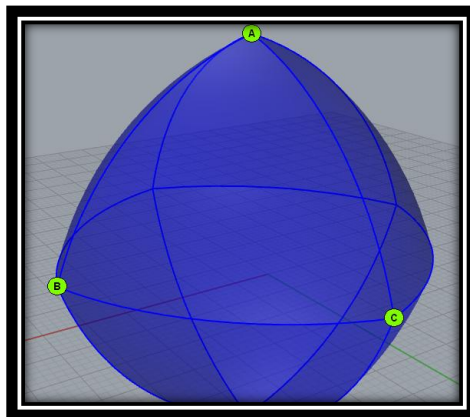


Figura 57 Centro de esferas para primeros ajustes

V. Con centro en A (uno de los puntos ya mencionados en el paso IV) y radio igual al que venimos trabajando (medida de una de las diagonales del cubo), construimos la esfera que servirá para realizar el ajuste. En la Figura 58 mostramos una de

tales esferas ajuste con el objetivo de ilustrar la superficie de la Figura 55 a ajustar.

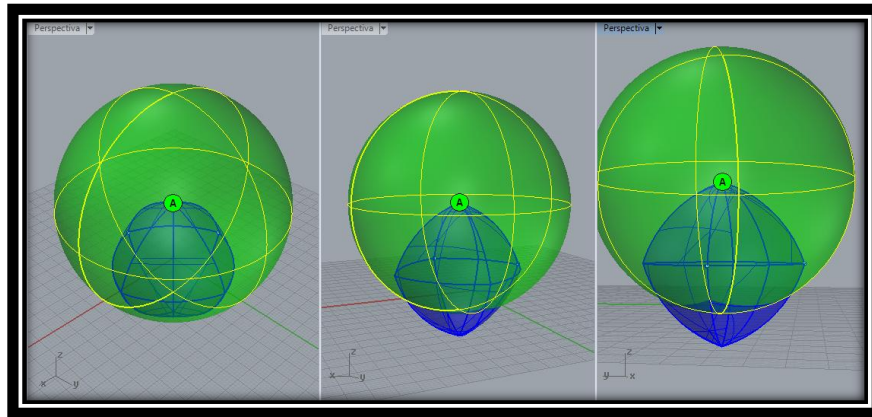


Figura 58 Esfera para primeros ajustes y superficie a ajustar

VI. Realizamos la intersección entre la esfera de ajuste y la Figura 55 resultando uno de los “sobrantes” del sólido que se desean ajustar. La superficie en color rojo de la Figura 59 es aquella parte sobrante.

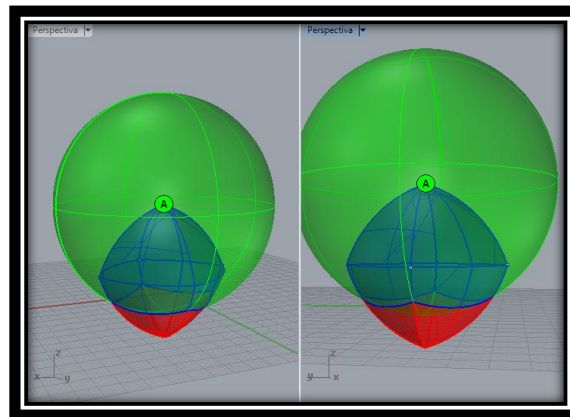


Figura 59 Superficie sobrante del sólido

VII. Se escoge ahora el sector de la esfera construida en el paso V, que tiene menor superficie y determinado por la intersección caracterizada en el paso VI. Figura 60.

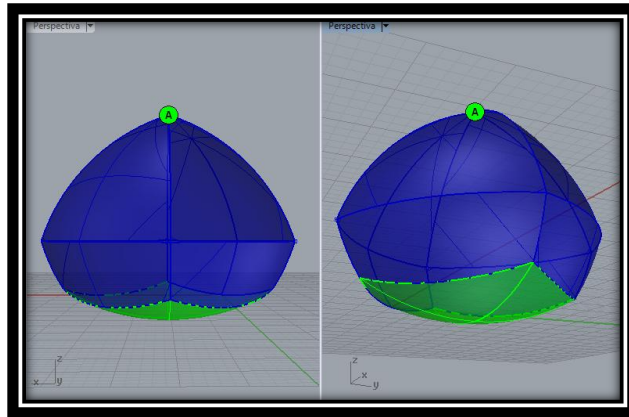


Figura 60 Sólido resultante del primer ajuste

VIII. Luego de haber determinado sectores esféricos análogos a los descritos en el paso VII pero usando como centros de esferas con el mismo radio los puntos (B y C) indicados en el paso IV, finalmente el sólido resultante de la unión entre la parte de la Figura 55 (sin los sobrantes) con dichos sectores esféricos es la Figura 61.

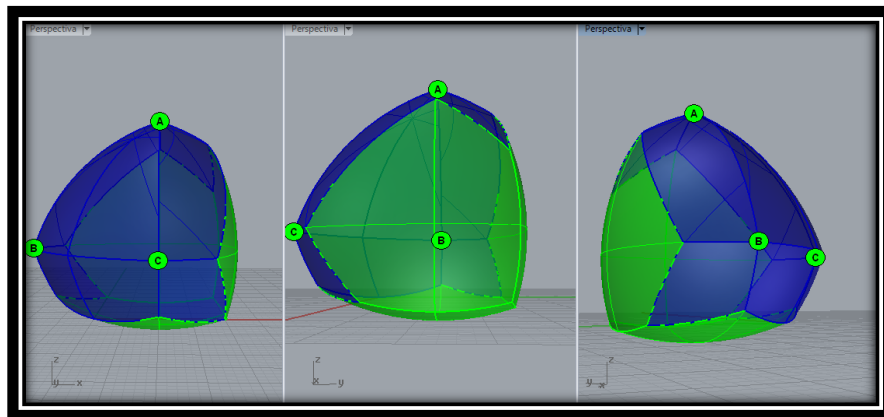


Figura 61 Primeros Ajustes del Octaedro Degenerado

De manera análoga al paso III el sólido generado en la Figura 61 todavía no es un SAC, porque todavía tiene diámetros diferentes en distintas direcciones.

IX. Escogeremos dos nuevas “caras” del sólido de la Figura 52 que tiene forma de “pentágonos degenerados” generadas en el paso anterior, los vértices D y E de dichos pentágonos que no son vértices del cubo, los cuales serán los centros de esferas para los segundos ajustes como se ilustra en la Figura 62.

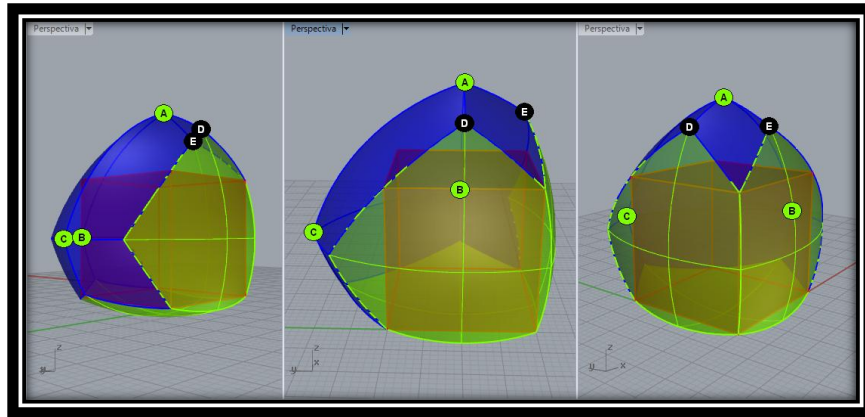


Figura 62 Centro de esferas para segundos ajustes

- X. Con centro en D y el mismo radio usual del paso V. Construimos una esfera para hacer los segundos ajustes con el fin de obtener el sector esférico de menor cantidad de superficie, que es determinado por la construcción (análoga al paso VI) . Ver Figura 63

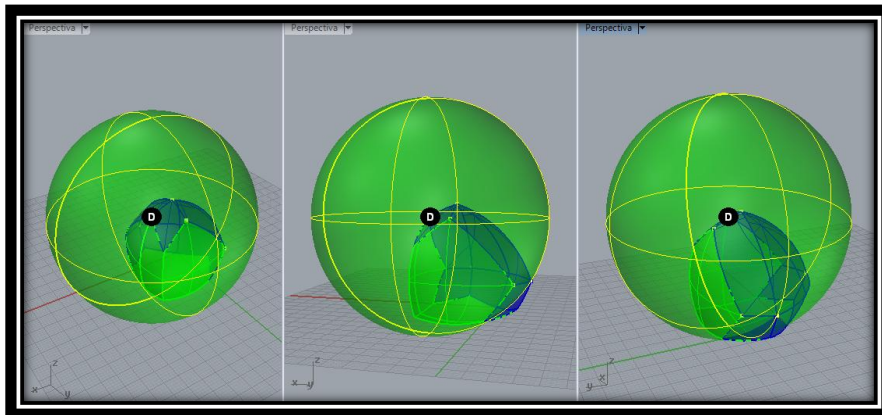


Figura 63 Esfera para segundos ajustes y superficie a ajustar

- XI. Realizamos la intersección entre la esfera de ajuste y la Figura 61, resultando uno de los “sobrantes” del sólido que se desea ajustar. La superficie en color rojo de la Figura 64 es la parte sobrante.



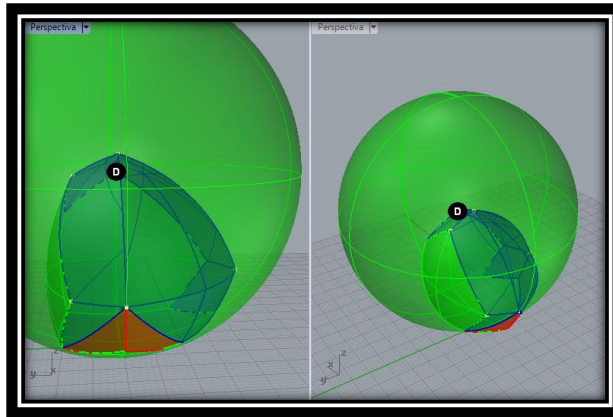


Figura 64 Superficie sobrante del sólido

- XII. Se escoge ahora el sector de la esfera construida en el paso X, que tiene menor superficie y determinado por la intersección caracterizada en el paso XI. Figura 65.

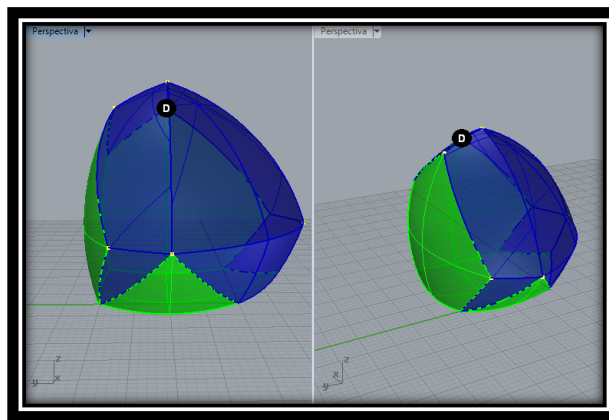


Figura 65 Sólido resultante del ajuste

- XIII. Luego de haber determinado sectores esféricos análogos a los descritos en el paso XII pero usando como centros de esferas el punto E (caracterizado en el paso IX), finalmente se obtiene un SAC. Ver Figura 66.

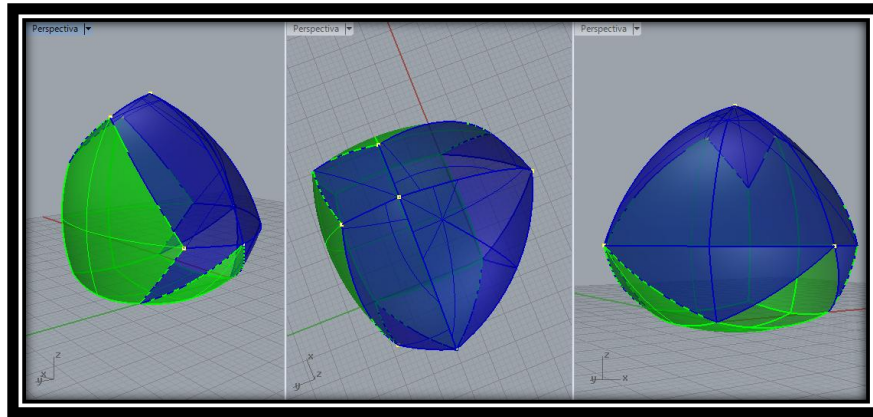


Figura 66 SAC a partir de un cubo

XIV. Se hace necesario realizar un ajuste de forma análoga al mostrado anteriormente en la página 64, es decir en los sectores opuestos a las zonas de color verde.

Como se evidenció en la construcción del sólido anterior, es posible llegar a obtener un sólido diferente que también es de ancho constante, solo modificando la forma de escogencia de las aristas de ajuste.

Así como presentamos las diferentes combinaciones posibles para hacer ajustes al Tetraedro de Reuleaux y obtener un SAC, es natural y pertinente pensar si en el caso del ocaedro redondo (generado a partir del cubo), tomar otros puntos de “ajuste” permite generar un SAC diferente al ilustrado antes: surgen entonces las preguntas ¿se podrá generar un SAC diferente escogiendo otros puntos? ¿se deben tomar la misma cantidad de puntos para el ajuste?

En la Figura 67 observamos otro SAC con base en el cubo como el anterior, pero con la misma cantidad (seis en cada caso) y una forma diferente de escogencia de los puntos que serán los centros de las esferas de ajuste.

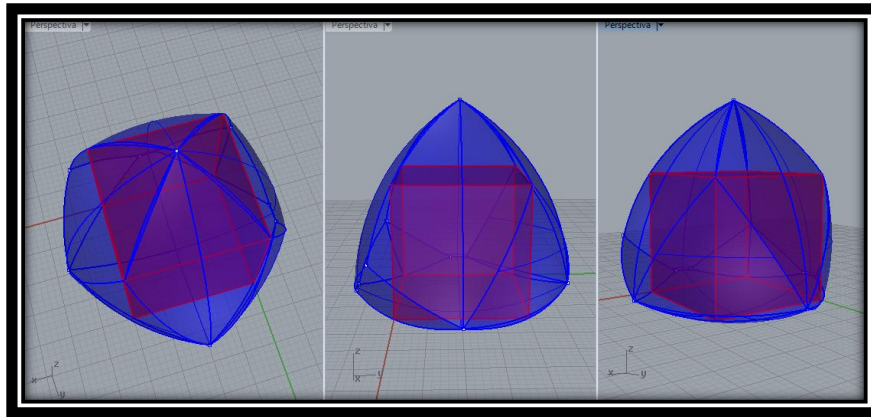


Figura 67 SAC con diferentes puntos de ajuste

Para este caso como es de esperar, también se hace necesario realizar un ajuste de forma análoga al mostrado anteriormente en la página 64.

### 3.4.2 En el caso del Octaedro

Para este sólido trabajamos el mismo método de construcción que hemos venido estudiando y así dar luces a una generalización del método de construcción estudiado.

I. Construir un octaedro. Ver Figura 68.

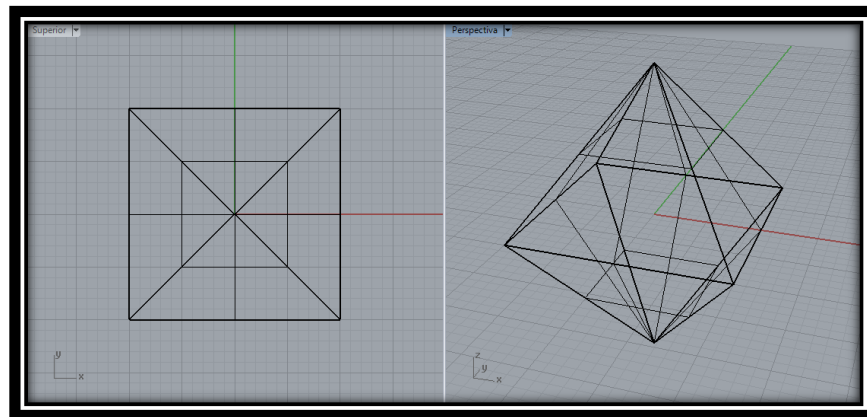


Figura 68 Octaedro Base

II. Construimos las esferas con centro en cada uno de los vértices del octaedro “base” y radio igual a la medida de una de sus diagonales. En seguida se marcan las circunferencias de intersecciones de cada tres de tales esferas con el fin de obtener el sector esférico de menor cantidad de superficie determinado por arcos de dichas circunferencias tal como se ilustra en la Figura 69



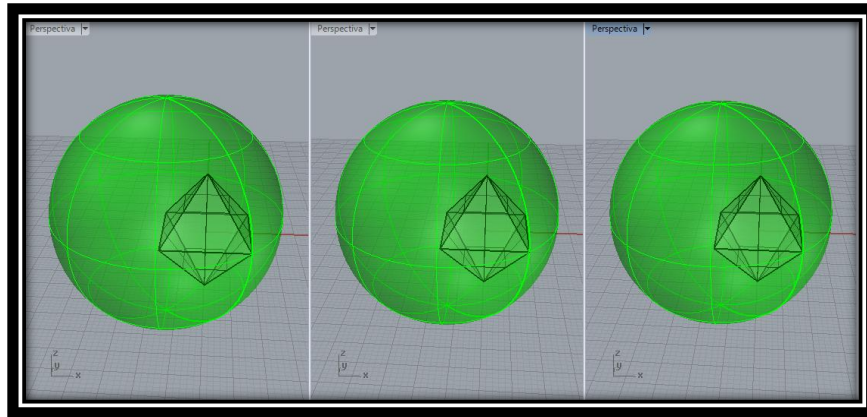


Figura 69 Esfera de ajuste de superficie

III. Como se muestra en la Figura 70 de forma análoga al paso II, se determinan los sectores para cada terna de esferas, obtenemos la siguiente figura que llamaremos “Cubo degenerado”.

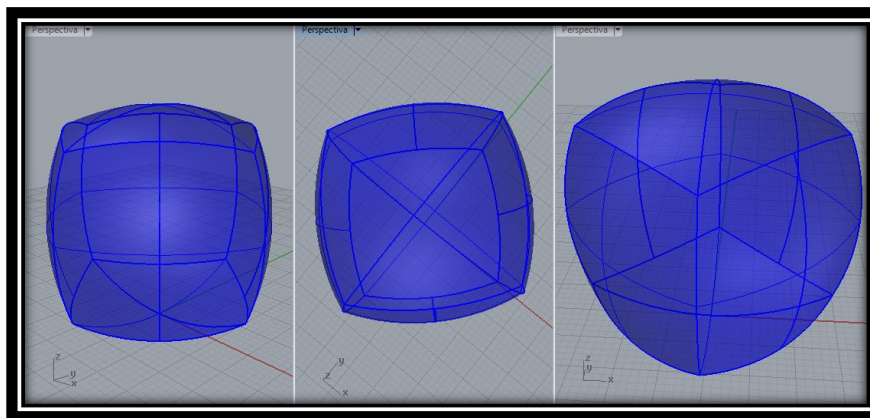


Figura 70 Sólido resultante para ajuste “cubo degenerado”

Como el lector podrá inducir de los métodos presentados hasta el momento, el cubo degenerado no es un SAC, Luego de hacer varias exploraciones, notamos que para este caso, tendremos que 10 sectores asociados a 10 de sus 12 aristas.

Apartir de este punto se vuelve a realizar la escogencia de las aristas para relizar el ajuste y como ya lo hemos visto, tal escogencia nos determinará la forma del SAC que se obtiene.

IV. Fijamos los puntos medios de las cuatro aristas que conforman cualquiera de las caras (cara inicial) del cubo degenerado, con el fin que sean centro de las esferas con las cuales se realizará el ajuste. Figura 71.

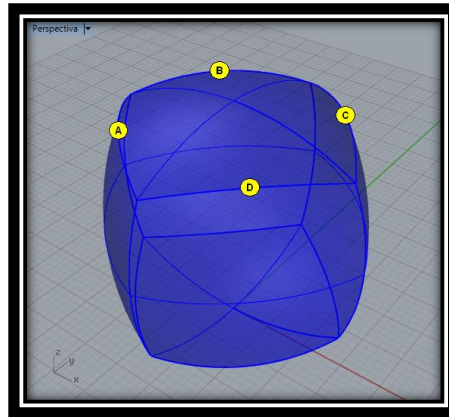


Figura 71 Centros de Esferas para primeros ajustes

- V. Con centro en A (uno de los puntos mencionados en el paso IV) y radio igual al que venimos trabajando (medida de una de las diagonales del octaedro base), construimos la esfera que servirá para realizar el ajuste. En la Figura 72, mostramos una de tales esferas ajuste con el objetivo de ilustrar la superficie de la Figura 70 a ajustar.

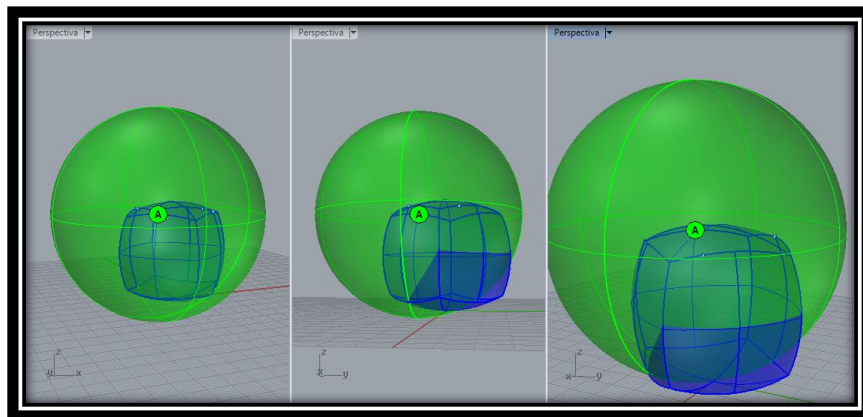


Figura 72 Esfera para ajuste y superficie a ajustar

- VI. Realizamos la interseccion entre la esfera de ajuste y la Figura 70, resultando uno de los “sobrantes” del sólido que se desean ajustar. La superficie en color rojo de la Figura 73 es aquella parte sobrante.

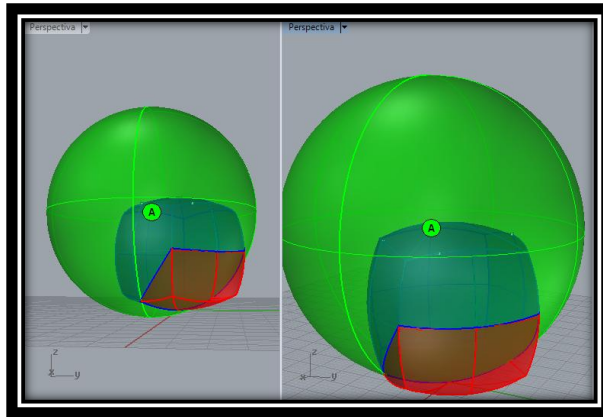


Figura 73 Superficie sobrante del sólido

- VII. Se escoge ahora el sector de la esfera construida en el paso V, que tiene menor superficie y determinado por la intersección caracterizada en el paso VI. Ver Figura 74.

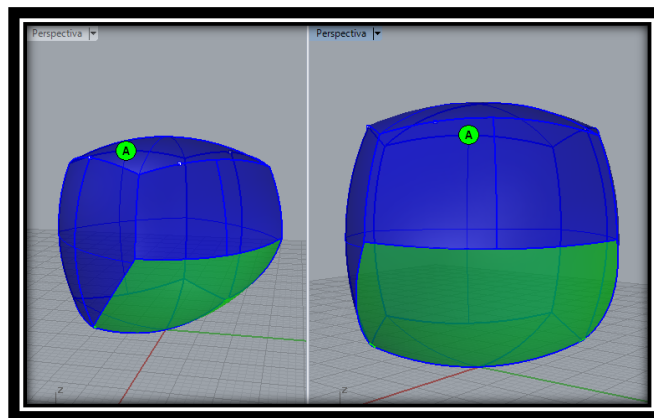


Figura 74 Sólido resultante del primer ajuste

- VIII. Luego de haber determinado sectores esféricos análogos a los descritos en el paso VII pero usando como centros de esferas con el mismo radio todos los puntos (B, C y D) indicados en el paso IV, se genera un sólido resultante de la unión entre la parte de la Figura 70 (sin los sobrantes) con dichos sectores esféricos. Figura 75.

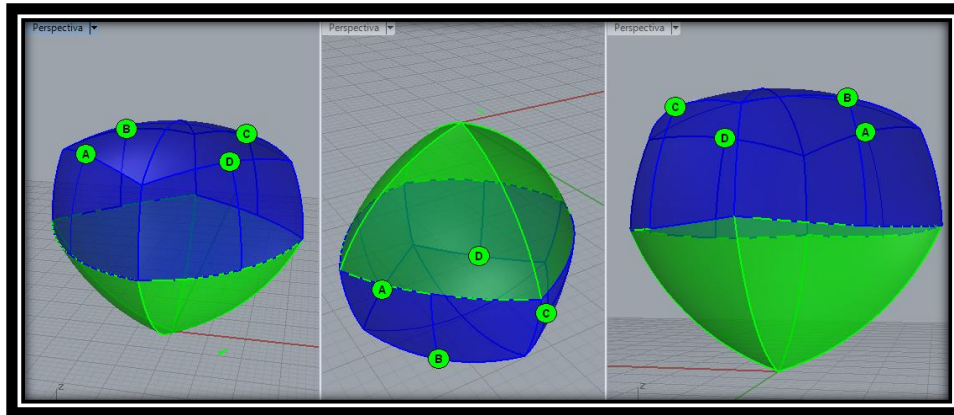


Figura 75 Sólido con primeros ajustes

Este sólido aún no resulta ser de ancho constante. Falta realizar 6 ajustes más.

- IX. Ahora escogemos una de las caras que comparten exactamente una arista en común con la mencionada en el paso IV, los puntos medios E y F de las aristas de dicha cara que comparten exactamente un vértice en común de la cara inicial en la Figura 75, para construir los centros de esferas para el segundo grupo de ajustes como se ilustra en la Figura 76.

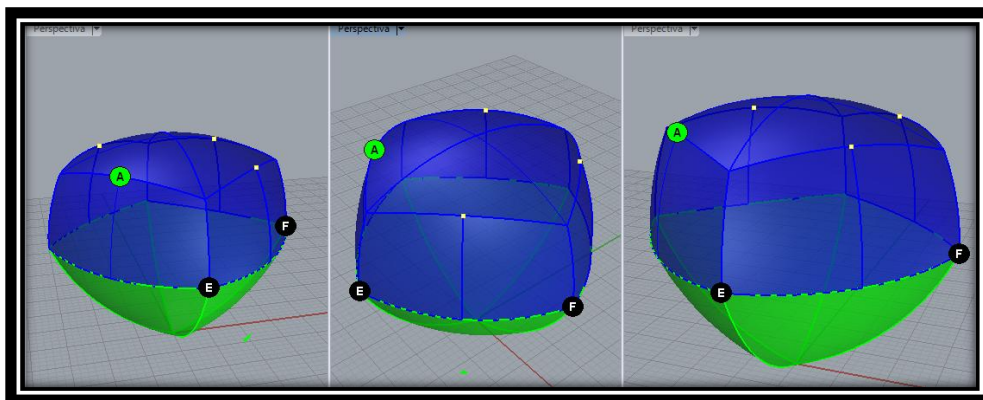


Figura 76 Centro de esferas para segundo grupo de ajustes

- X. De manera análoga al paso V, con centro en E (uno de los puntos mencionados en el paso anterior) y radio igual al que venimos trabajando (longitud de una de las diagonales del octaedro), construimos la esfera que servirá para realizar uno de los segundos ajustes. En la Figura 77 mostramos una de tales esferas ajuste con el objetivo de ilustrar la superficie de la Figura 76 a ajustar.

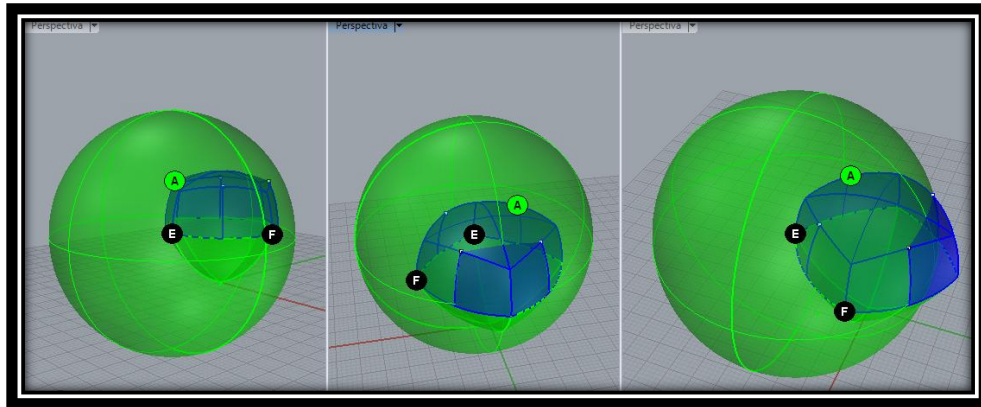


Figura 77 Esfera para segundo ajuste y superficie a ajustar

- XI. Como el lector ya se habrá percatado y con el fin de no extendernos en tantas ilustraciones, se muestra en la Figura 78 el sólido resultante conformado por la unión de la Figura 75 (sin los sobrantes), con dichos sectores esféricos obtenidos por este grupo de ajustes.

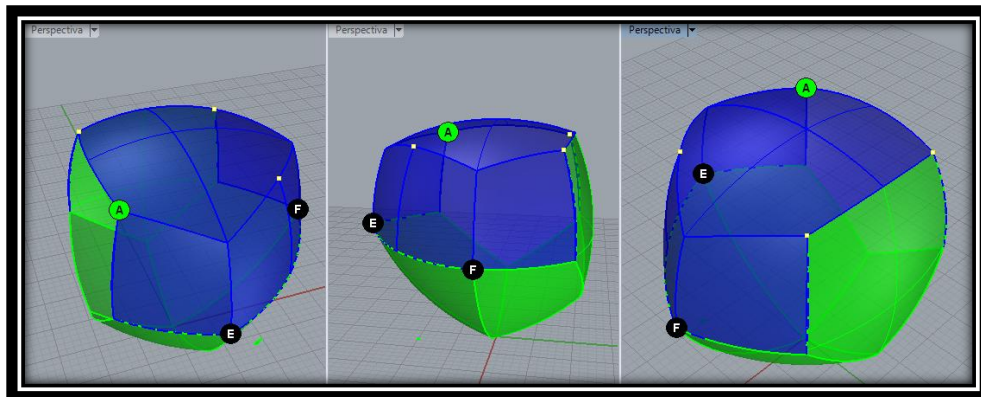


Figura 78 Sólido con segundo grupo de ajustes

- XII. Para continuar con el tercer grupo de ajustes, volvemos a realizar la escogencia de dos nuevos puntos (G y H); estos son los puntos resultantes de la intersección de las esferas de ajuste realizadas en el paso X y las “diagonales” de la cara inicial del cubo degenerado.



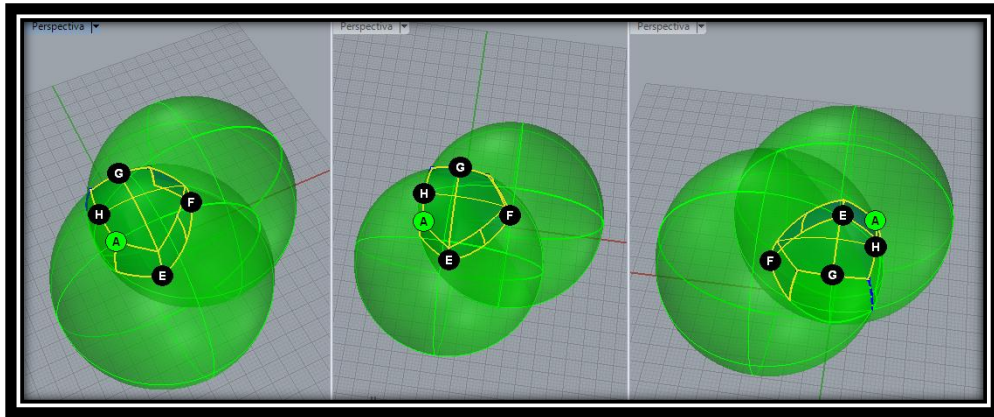


Figura 79 Centro de esferas para tercer grupo de ajustes del cubo redondo

XIII. Con centro en G (uno de los puntos mencionados en el paso anterior) y radio igual al que venimos trabajando (medida de una de las diagonales del octaedro), construimos la esfera que servirá para realizar el ajuste. En la Figura 80 mostramos una de tales esferas ajuste para ilustrar la superficie de la Figura 78 a ajustar.

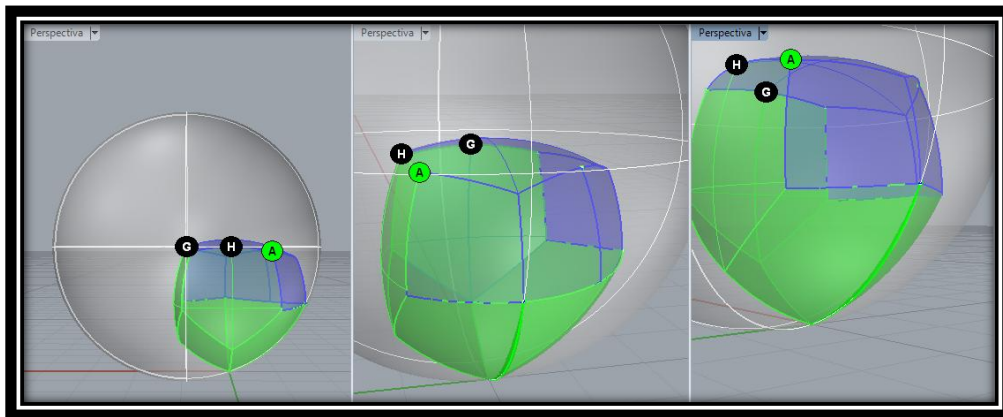


Figura 80 Esfera para tercer grupo de ajustes y superficie a ajustar

XIV. Realizamos la intersección entre la esfera de ajuste y la Figura 78, resultando uno de los “sobrantes” del sólido que se desea ajustar. La superficie en color rojo de la Figura 81 es aquella parte sobrante.

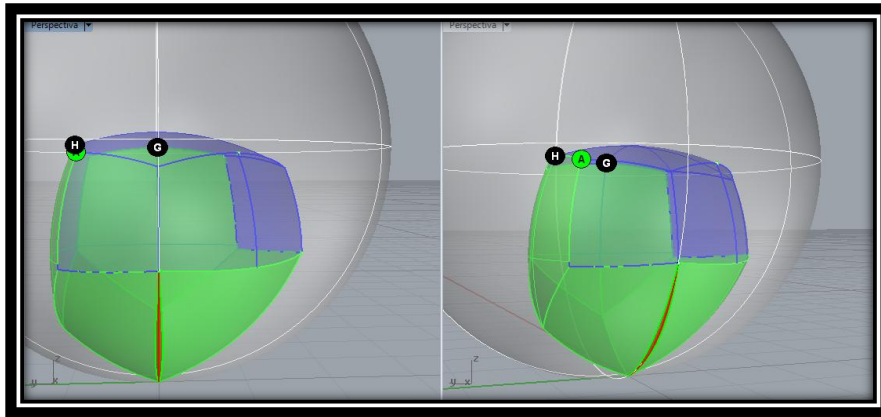


Figura 81 Superficie sobrante del sólido

XV. Se escoge ahora el sector de la esfera construida en el paso XIII, que tiene menor superficie y determinado por la intersección caracterizada en el paso anterior. Ver Figura 82.

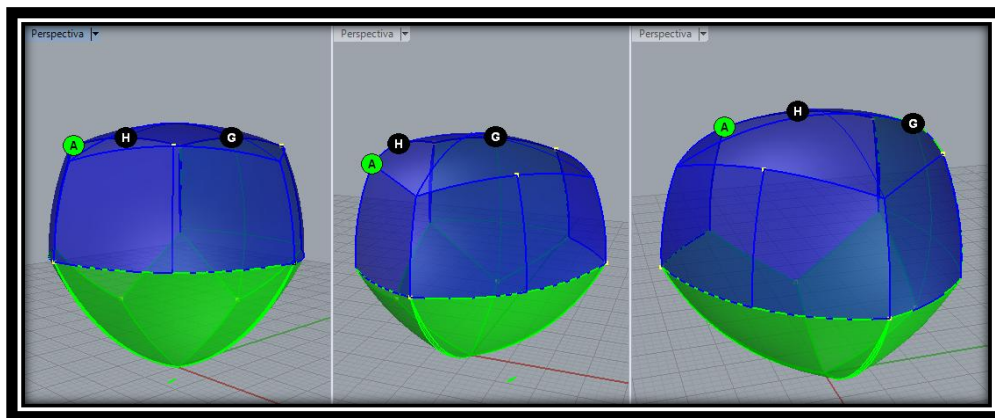


Figura 82 Sólido resultante del tercer grupo de ajustes

XVI. Finalmente y como últimos puntos para realizar el cuarto grupo de ajustes del sólido resultante del paso anterior, ( y así poder generar un SAC), escogeremos de las dos “nuevas” caras de pentágonos degenerados creadas en el punto anterior, los vértices I y J de dichos pentágonos que no son vértices del octaedro regular. Ver Figura 83.

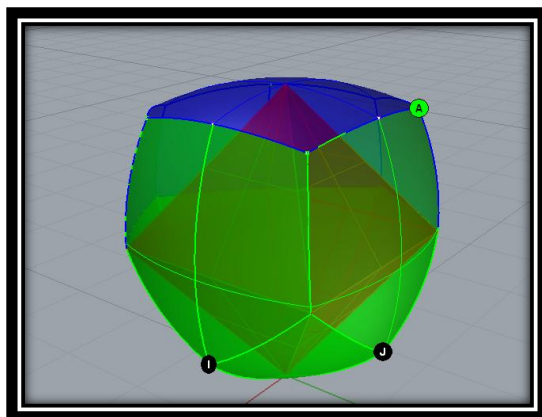


Figura 83 Centro de esferas para el cuarto grupo de ajustes

XVII. Realizamos el cuarto grupo de ajustes de manera análoga a como se ha venido trabajando a lo largo del documento. Finalmente, obtenemos un SAC como se muestra en la Figura 84. (Se utilizaron en total 10 puntos de ajustes para este caso)

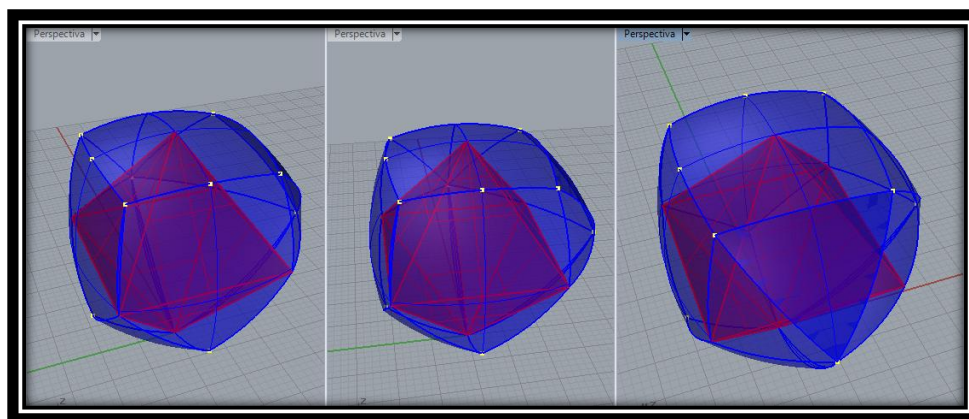


Figura 84 SAC basado en el octaedro primera escogencia

XVIII. Se hace necesario realizar un ajuste de forma análoga al mostrado anteriormente en la página 64.

Como ya es costumbre, son varios los SAC que se pueden generar a partir del octaedro regular. Todo depende de la escogencia y cantidad de otros puntos que nos permitirán ajustar sectores problemáticos. En la Figura 85 mostramos los resultados obtenidos al hacer otras combinaciones de puntos ajuste (se necesitaron de 9 puntos de ajuste para este caso).



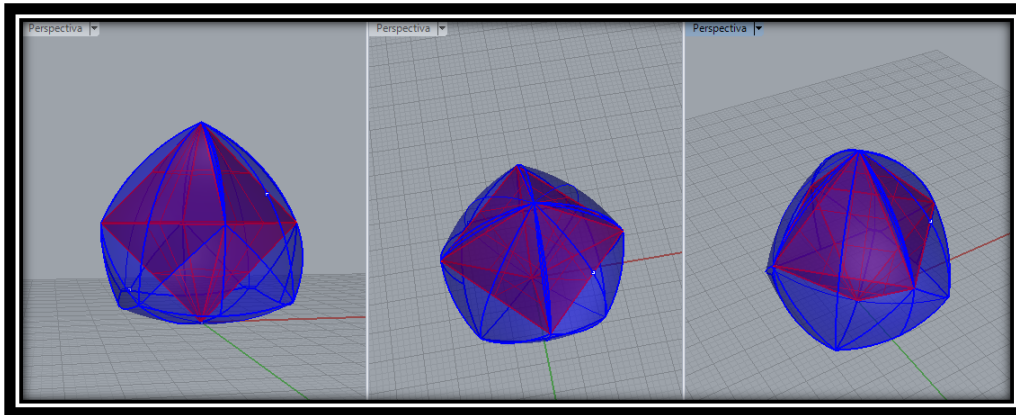


Figura 85 SAC basado en octaedro escogencia alternativa

### 3.5 SAC a partir de Pirámides Rectangulares: Nuestro tercer aporte

Presentaremos, en lo que sigue, nuestro segundo camino de exploración fundamentado en el método de Weber, en correspondencia con lo planteado en la introducción del capítulo 3. Este método parte del presupuesto de considerar el tetraedro regular como una pirámide rectangular cuya base está conformada por un polígono regular (para ese caso, un triángulo equilátero). Lo que queremos es extender el método considerando otras pirámides con esas características, rectangulares y con base un polígono regular. El asunto interesante es determinar, para cada caso, qué medida de aristas para la pirámide considerar y qué puntos tener en cuenta para construir las esferas “naturales” (i.e., las que no se usan para “ajustar” la figura) con centro ese punto y radio tales aristas.

En lo que sigue, presentamos los procedimientos surgidos de nuestra exploración.

#### 3.5.1 Pirámides Rectangulares con base un Polígono Regular de cantidad impar de lados

Como se dijo, la clave del procedimiento está en determinar las medidas de las aristas que conforman la pirámide y las características de las esferas “naturales” cuyo sector conformará el potencial SAC. Haciendo un primer acercamiento, nos dimos cuenta que al tomar pirámides rectangulares cuyas bases son un polígono regular de cantidad impar de lados, determinar las medidas de tales aristas, los centros y radios de aquellas esferas, fue relativamente fácil; estos son:

- Medidas de aristas: la medida de las aristas que son los lados del polígono base puede ser cualquiera; mientras que la medida de las aristas que tienen como

extremo un punto en la recta perpendicular de la potencial pirámide, debe tener la medida de las diagonales de mayor medida del polígono base.

- Centro de las esferas: los vértices de la pirámide.
- Radio de las esferas: diagonal de mayor medida del polígono base.

Claro, con estas características, pretendemos que la SAC resultante tenga como ancho la medida del radio escogido para las esferas. Además, se garantiza que cada vértice de la pirámide, quede contenida en tal SAC.

Presentemos el caso particular para la pirámide rectangular con base un pentágono regular; en medio de la descripción del procedimiento, indicamos las características de las esferas “ajuste”, que son específicas para cada caso.

Para ilustrar el método, usamos una pirámide rectangular de base un pentágono regular.

### 3.5.1.1 Caso SAC a partir de la pirámide rectangular de base un pentágono regular

- I. Construimos la una piramide rectangular cuya base sea determinada por un pentágono regular y la medida de las aristas laterales sea igual la medida de las diagonales del pentágono (base), ver Figura 86.

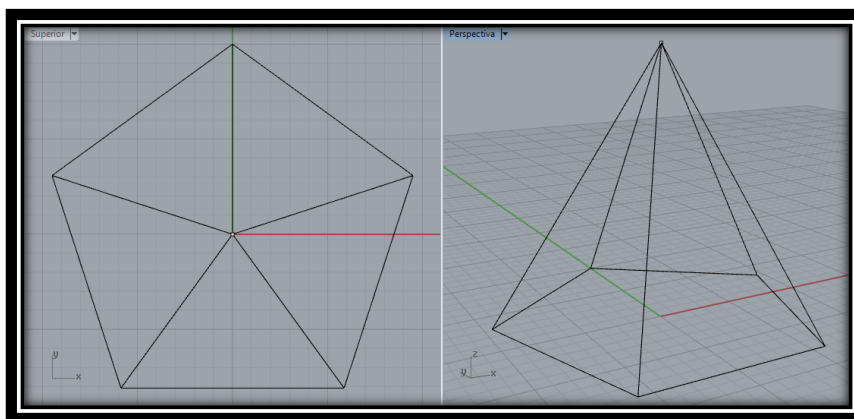


Figura 86 Pirámide de base pentagonal

- II. Con centro en el vértice superior de la pirámide y radio igual a la medida de las aristas laterales, construimos una esfera con el fin de obtener el sector esférico de menor cantidad de superficie. Determinado por la intersección de la esfera con la base de la pirámide. Ver Figura 87.

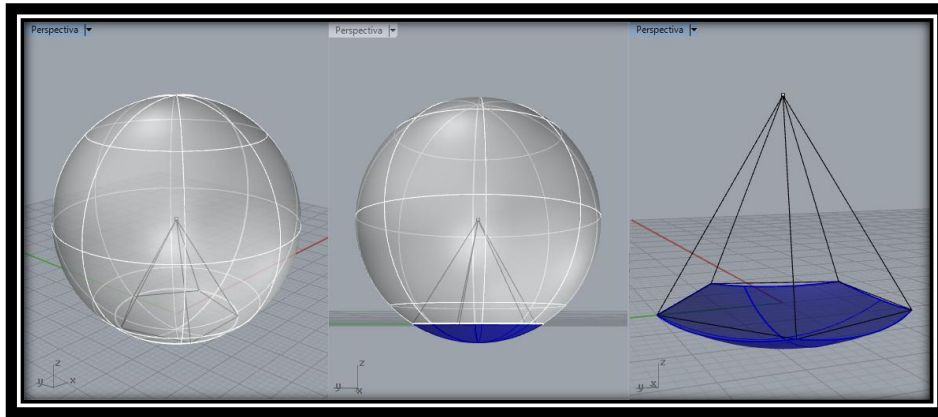


Figura 87 Esfera y sector esférico generado

- III. Construimos esferas con centro en cada uno de los vértices de la base de la pirámide y radio igual a la medida de una de sus aristas laterales, con el fin de obtener sectores esféricos análogos al paso II. Determinados por los arcos de circunferencias generadas como intersección de cada una de las esferas. Ver Figura 88

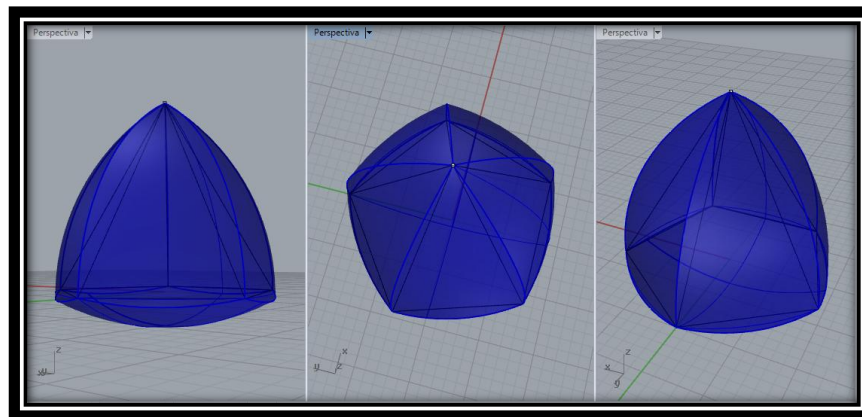


Figura 88 Sólido resultante para ajuste

Debido a que este sólido mostrado en la Figura 88 posee distintos diámetros en diferentes direcciones, este problema se presenta en aquellos sectores de la base opuestos a las aristas (Figura 89), es necesario realizar un ajuste al sólido mencionado.

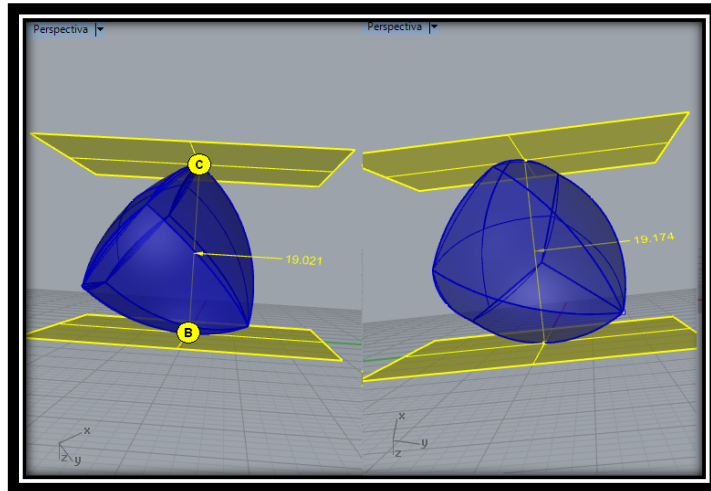


Figura 89 Verificación de anchos en diferentes direcciones

Nos centramos ahora en los arcos “laterales” generados por las intersecciones de las esferas construidas en el paso III, con el fin de construir las esferas “ajuste” que permitirán “ajustar” el sólido de la Figura 88 para transformarla en SAC, acción que se caracterizó en nuestro “Primer Aporte” y que hemos venido empleando en los últimos métodos realizados.

- IV. Fijamos los puntos medios de los arcos laterales de la Figura 88, con el fin que sean centro de las esferas con las cuales se realizará el ajuste, ver Figura 90.

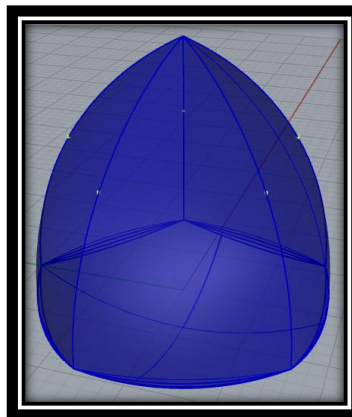


Figura 90 Centro de esferas para ajustes

- V. Con centro en A (uno de los puntos mencionados en el paso IV) y radio igual al que venimos trabajando (longitud de las aristas de la pirámide), construimos la esfera que servirá para realizar el ajuste. En la Figura 91, mostramos una de tales esferas ajuste con el objetivo de ilustrar la superficie de la Figura 88 a ajustar.

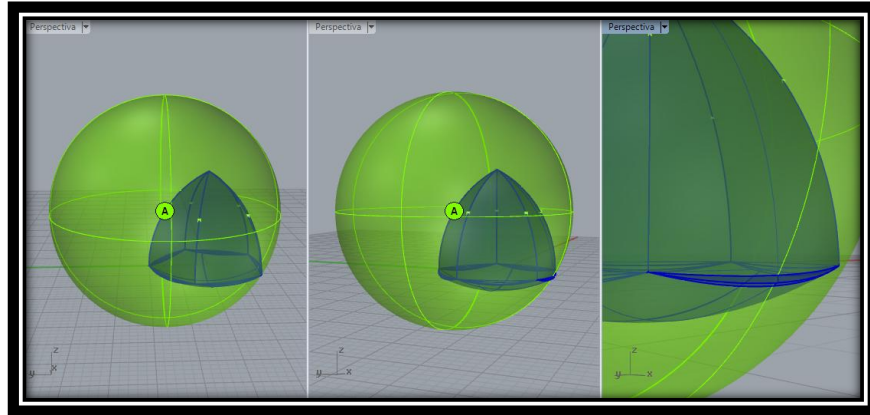


Figura 91 Esfera para ajuste y superficie a ajustar

- VI. Realizamos la intersección entre la esfera de ajuste y la Figura 88, resultando uno de los “sobrantes” del sólido que se desean ajustar. La superficie en color rojo de la Figura 92 es aquella parte sobrante.

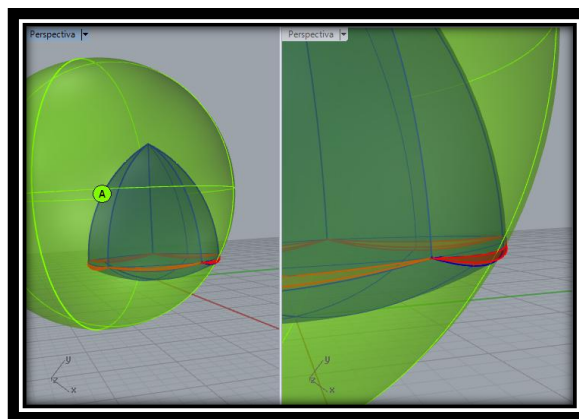


Figura 92 Superficie sobrante del sólido.

- VII. Se escoge ahora el sector de la esfera construida en el paso V, que tiene menor superficie y determinado por la intersección caracterizada en el paso VI. Ver Figura 93.

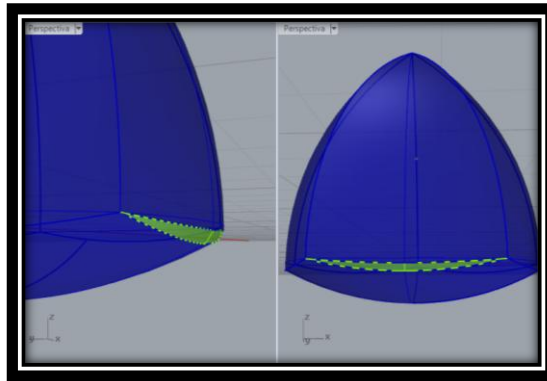


Figura 93 Sólido resultante del primer ajuste

- VIII. Luego de haber determinados sectores esféricos análogos a los descritos en el paso VII pero usando como centros todos los puntos indicados en el paso IV, finalmente el sólido resultante de la unión entre la parte de la Figura 88 (sin los sobrantes) con dichos sectores esféricos, es un SAC (Figura 94).

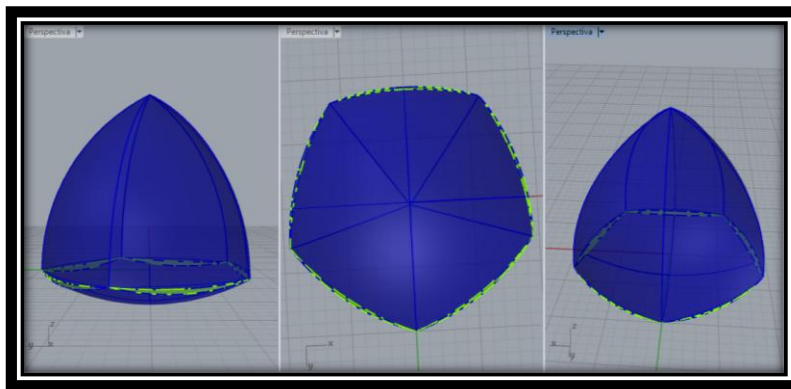


Figura 94 SAC resultante a partir de la pirámide de base pentagonal

- IX. Se hace necesario realizar un ajuste de forma análogo al mostrado anteriormente en la página 64.

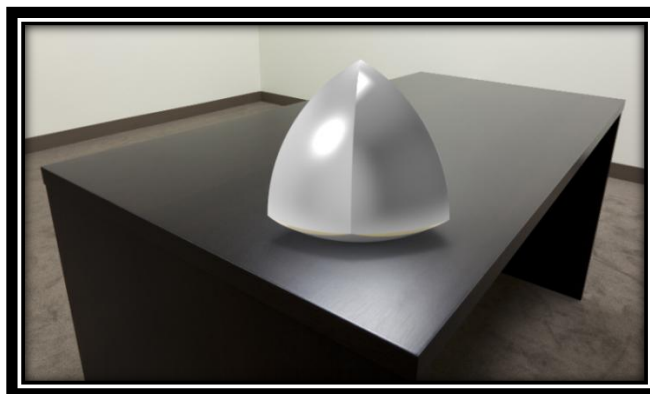


Figura 95 SAC pirámide con base pentagonal



### 3.5.1.2 Generalización SAC a partir de pirámides rectangulares de base n-ágono regular, n impar

En general, para la construcción de SAC a partir de pirámides rectangulares de base n-ágono regular con n impar, es posible seguir un procedimiento de similares características las cuales empiezan con la construcción de esferas con centro en cada uno de los vértices de la pirámide y radio igual a la medida de las aristas laterales o a las diagonales de mayor longitud del polígono base, para así poder obtener el sólido resultante por la unión de cada uno de los sectores esféricos de menor cantidad de superficie que son determinados por cada una de las caras de la pirámide (caras que se determinan con los arcos de circunferencia que son intersección de las esferas construidas); seguido a esto y siempre con el fin de garantizar el ancho constante del sólido, se definen los sectores problemáticos del sólido, que deberán ser ajustados mediante esferas de radio igual a las iniciales y cuyos centros deben estar en algunos de los arcos antes referidos. Para este caso, estos arcos son los que tiene por extremo el vértice superior de la pirámide base; los centros son los puntos medio de tales arcos.

Al construir tales esferas, se generan las partes sobrantes del sólido inicial (surgido por las esferas “naturales”) y a la vez, los sectores esféricos (subconjuntos de tales esferas) que ajustan la figura. Estos sectores unidos con las partes no sobrantes del sólido inicial es un SAC. En la figura 93 mostramos el SAC surgido de heptágono.

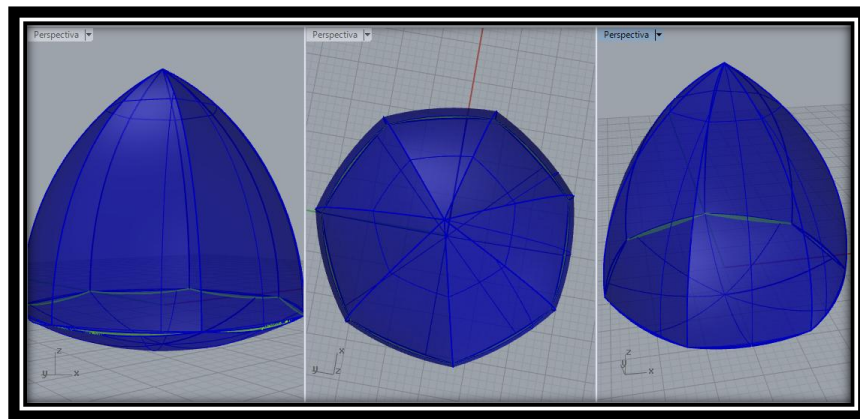


Figura 96 SAC a partir de la pirámide de base heptagonal

La justificación del método es análoga a la presentada para el SAC resultante del ajuste, propuesto por nosotros, del Tetraedro de Reuleaux presentada en la sección 3.3.1. La idea central consiste en construir esferas del mismo radio que tiene las esferas “naturales” previamente construidas. Así, se ajustan los sectores problemáticos y se garantizan los planos soporte a partir del Plano tangente a una esfera. El radio del SAC es el radio de tales esferas, para estos casos, la medida de las

diagonales de mayor longitud de los polígonos base. Esta justificación, aplica también para el método siguiente.

### 3.5.2 Pirámides Rectangulares con base un Polígono Regular de cantidad par de lados

De igual forma que en el caso de pirámides con base un polígono regular de cantidad impar de lados, la clave del procedimiento está en determinar las medidas de las aristas que conforman la pirámide y las características de las esferas “naturales” cuyo sector conformará el potencial SAC. En principio las medidas de las aristas de la pirámide, y el centro y radio de tales esferas “naturales” cumplen las mismas condiciones descritas para el caso de polígonos de cantidad impar de lados. En donde se presentan diferencias significativas, es en los centros de las esferas “ajuste”, que son específicas para cada caso. Veamos el caso para bases de pirámide un cuadrado y un hexágono regular. Así, ilustramos los procedimientos:

#### 3.5.2.1 Caso SAC a partir de la pirámide rectangular de base un cuadrado

- I. Construimos la una pirámide rectangular cuya base sea determinada por un cuadrado y la medida de las aristas laterales sea igual la medida de las diagonales de dicho cuadrado (base). Figura 97.

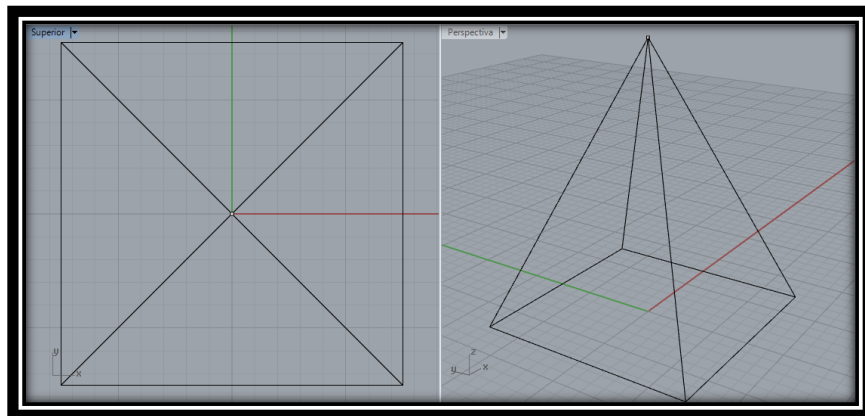


Figura 97 FAC pirámide de base cuadrada

- II. Realizamos una esfera con centro en el vértice superior de la pirámide y radio igual a la medida de las aristas laterales del tetraedro, construimos una esfera con el fin de obtener el sector esférico de menor cantidad de superficie determinado por la esfera y la base de la pirámide, ver Figura 98.



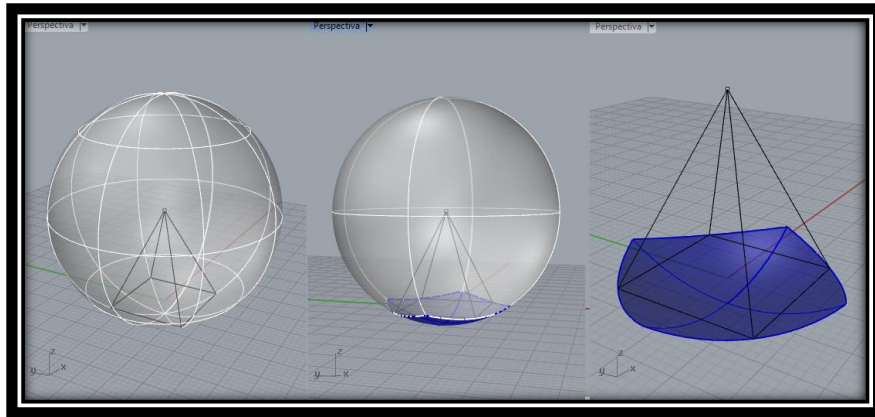


Figura 98 Esfera y sector esférico generado

- III. De forma análoga al paso II, realizamos esferas con centro en cada uno de los vértices de la base de la pirámide y radio igual a la medida de una de sus aristas laterales, con el fin de obtener siempre los sectores esféricos análogos al paso II. Determinados por los arcos de circunferencias generados como intersección de cada una de las esferas. Ver Figura 96

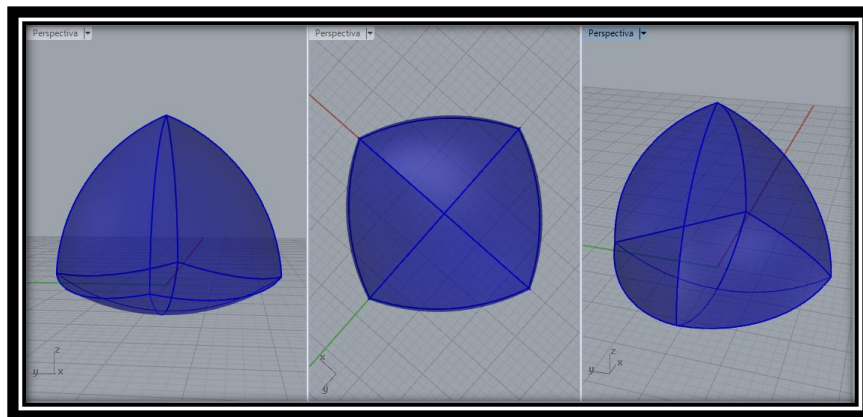


Figura 99 Sólido resultante para ajuste

Como hemos venido evidenciando a lo largo de los diferentes métodos de construcción de SAC, luego de realizar el proceso mencionado en el paso III es necesario realizar ajustes debido a que el sólido tiene diámetros diferentes. Ver Figura 100

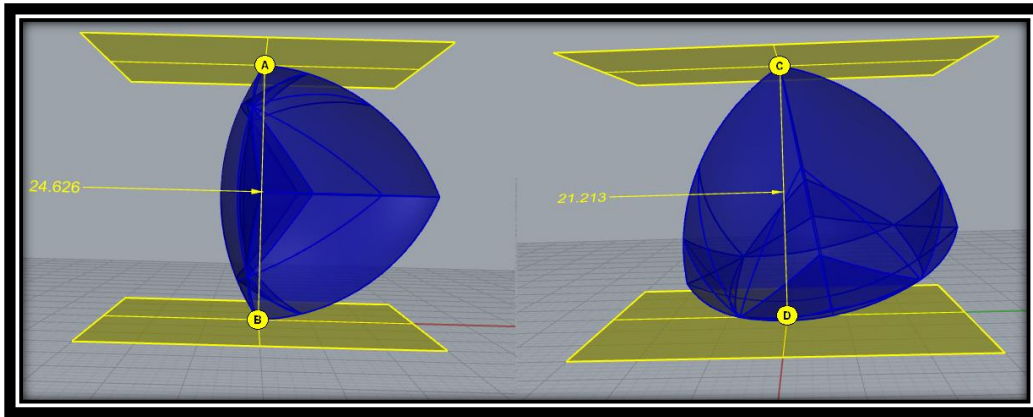


Figura 100 Diámetros de distinta longitud en diferentes direcciones

- IV. Fijamos en la Figura 101 los puntos que van a servir como centro a las esferas con las cuales realizaremos el primero grupo de ajustes, los cuales serán los puntos medios de los arcos laterales de la Figura 99.

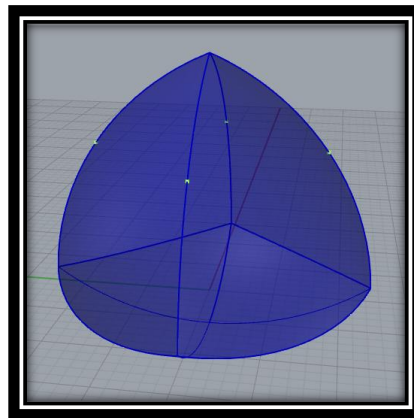


Figura 101 Centro de esferas para primeros ajustes

- V. Con centro en A (uno de los puntos ya mencionados en el paso IV) y radio igual al que venimos trabajando (longitud de las aristas de la pirámide), construimos la esfera que servirá para realizar el ajuste. En la Figura 102 mostramos una de tales esferas ajuste con el objetivo de ilustrar la superficie de la Figura 99 a ajustar.

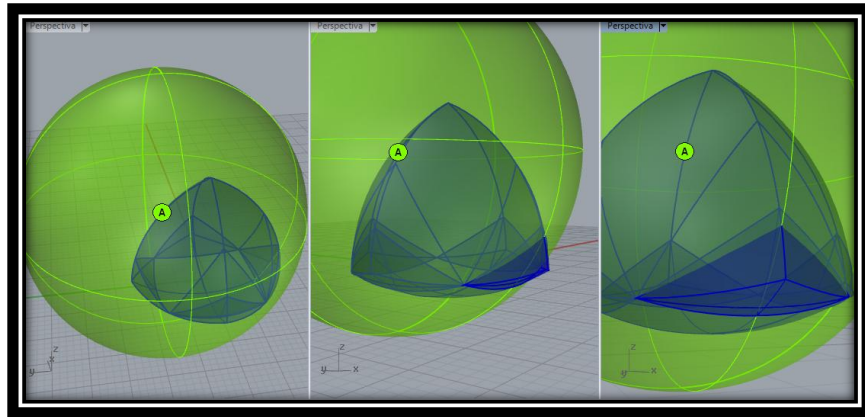


Figura 102 Esfera para primeros ajustes y superficie a ajustar

- VI. Realizamos la intersección entre la esfera de ajuste y la Figura 99, resultando uno de los “sobrantes” del sólido que se desean ajustar. La superficie en color rojo de la Figura 103 es aquella parte sobrante.

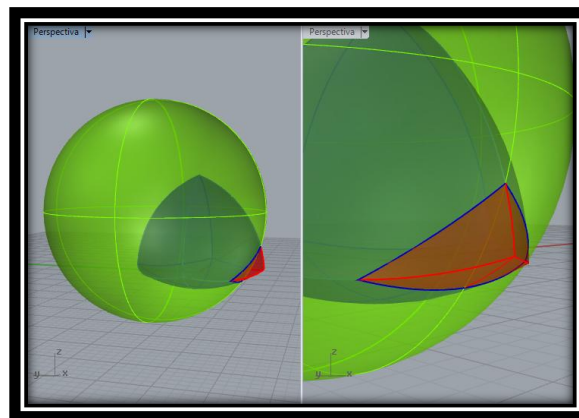


Figura 103 Superficie sobrante del sólido.

- VII. Se escoge ahora el sector de la esfera construida en el paso V, que tiene menor superficie y determinado por la intersección caracterizada en el paso VI. Ver Figura 104.

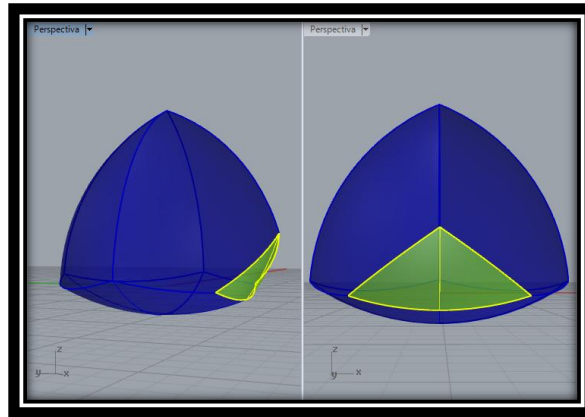


Figura 104 Sólido resultante del primer ajuste

- VIII. Luego de haber determinados sectores esféricos análogos a los descritos en el paso VII pero usando como centros todos los puntos indicados en el paso IV, finalmente el sólido resultante de la unión entre la parte de la Figura 99 (sin los sobrantes) con dichos sectores esféricos, todavía no es un SAC (Figura 105).

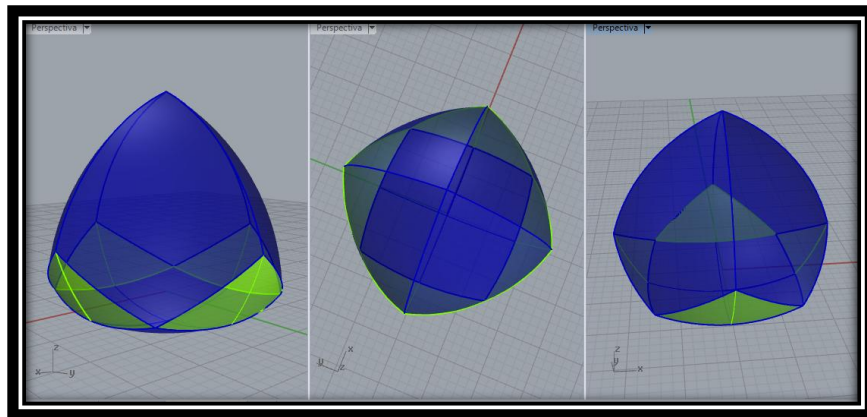


Figura 105 Primeros ajustes de la pirámide redonda.

En este punto, el lector podrá pensar que el resultado mostrado en la Figura 105 ya es el un SAC; sin embargo, no es así. Aún falta hacer un grupo de ajustes más. Este hecho caracteriza la diferencia fundamental entre el método de la sección 3.5.1 y la sección 3.5.2, en otras palabras la cantidad de ajustes necesarios.

Para continuar con el respectivo método de construcción determinaremos los nuevos centros y esferas para dichos “segundos” ajustes de la siguiente manera:

- IX. Fijamos como centro de las esferas, que nos permitirán realizar los nuevos ajustes, los vértices de dos de las “nuevas caras” con un vértice en común generadas en el paso VIII (con forma de triángulos degenerados) que no son vértices de la base cuadrada de la pirámide, ver Figura 106.

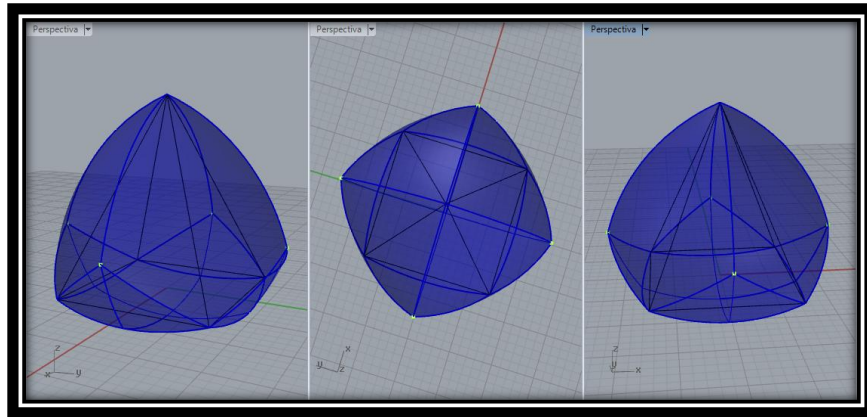


Figura 106 Centro de esferas para segundos ajustes

- X. Nuevamente, con uno de los puntos determinados en el paso IX y el mismo radio (usual) del paso V, en la Figura 107 construimos una esfera para realizar un nuevo ajuste.

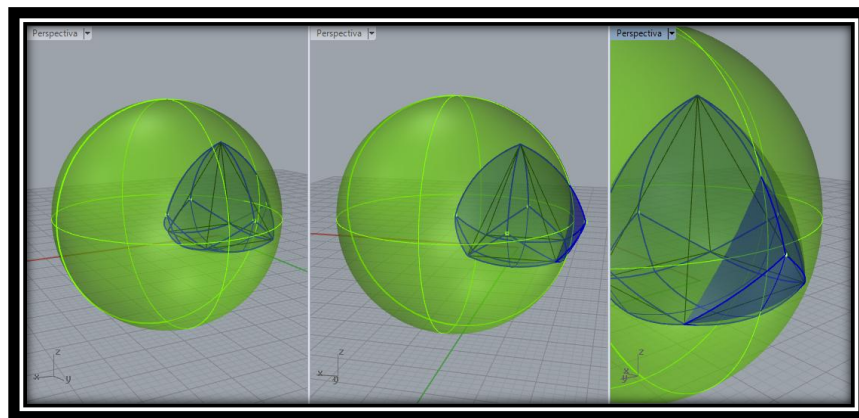


Figura 107 Esfera para segundos ajustes y superficie a ajustar

- XI. Realizamos la interseccion entre la esfera del ajuste y la Figura 106, resultando uno de los “sobrantes” del solido que se desean ajustar, La superficie en color rojo de la Figura 108 es aquella parte sobrante.

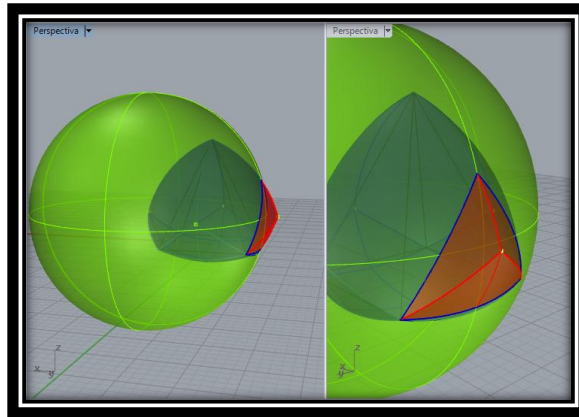


Figura 108 Superficie sobrante del sólido

- XII. Se escoge ahora el sector de la esfera construida en el paso X, que tiene menor superficie y determinado por la intersección caracterizada en el paso XI. Figura 109.

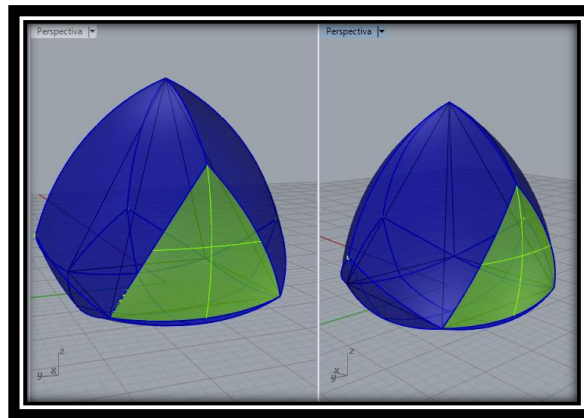


Figura 109 Sólido resultante del segundo ajuste

- XIII. Luego de haber determinado sectores esféricos análogos a los descritos en el paso XII, pero usando como centro el punto faltante en el paso X, finalmente el sólido resultante de la unión entre la parte de la Figura 99 (sin los sobrantes) con dichos sectores esféricos, es un SAC (Figura 110).



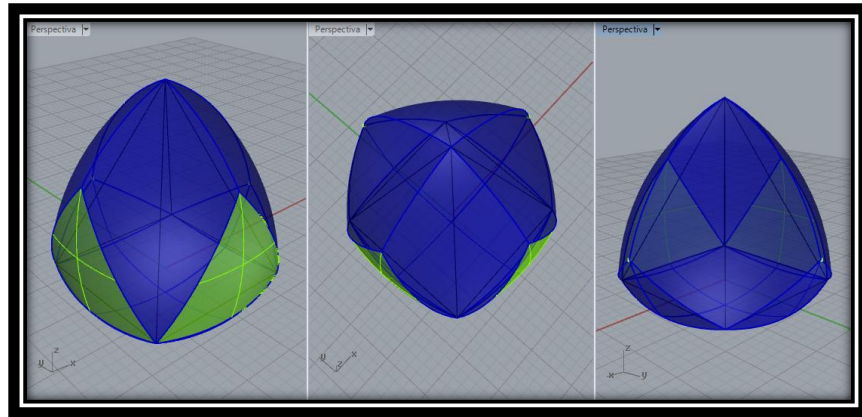


Figura 110 SAC a partir de la pirámide de base cuadrada

Nuevamente como es de esperarse, como para los poliedros regulares se hace necesario realizar un ajuste de forma análogo al mostrado anteriormente en la página 64, las pirámides no son ajenas a este proceso.

### 3.5.2.2 Generalización SAC a partir de pirámides rectangulares de base $n$ -ágono regular, $n$ par

En general, para la construcción de SAC a partir de pirámides rectangulares de base  $n$ -ágono regular con  $n$  par, es posible seguir un procedimiento análogo al presentado en la sección 3.5.2; como se ve guarda estrecha relación con aquel descrito en la sección 3.5.1. La diferencia fundamental entre dichos dos métodos radica en la necesidad que aparece en las pirámides de la sección 3.5.2, consistente en realizar una mayor cantidad de ajustes, los cuales dependen de la formación de “nuevas caras” (con forma de triángulos degenerados) resultantes del primer grupo de ajustes realizados; en estos casos, los puntos que servirán de centro a las esferas de ajuste serán los vértices que determina dicha nueva cara que a su vez no son vértices de la pirámide y que no hacen parte de caras opuestas entre sí.

En la Figura 111, presentamos el SAC a partir de la pirámide rectangular de base hexagonal siguiendo el mismo proceso de construcción.

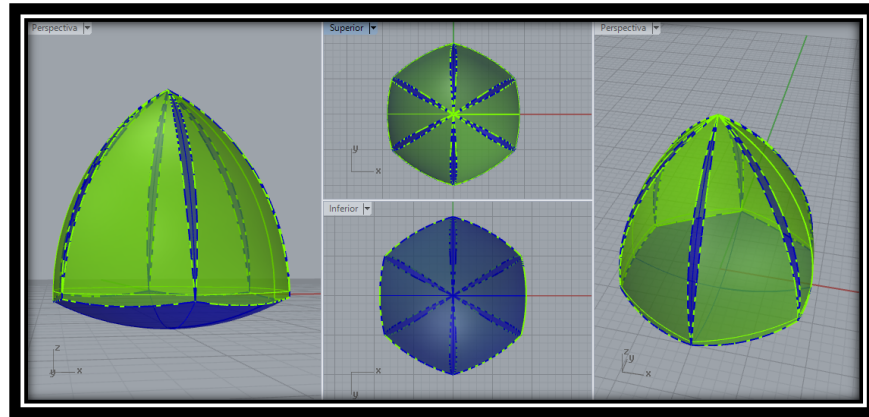


Figura 111 SAC a partir de la pirámide de base hexagonal

Se hace necesario realizar un ajuste de forma análogo al mostrado anteriormente en la página 64.

A continuación presentamos algunos SAC con base en las pirámides rectangulares que se trabajaron a lo largo de la sección 3.5. Ver Figura 112



Figura 112 Pirámides trabajadas en la sección



## 4 CONCLUSIONES

En relación con el objetivo principal de este estudio efectivamente describimos, creamos y justificamos métodos de construcción de algunos sólidos de ancho constante (SAC), con ayuda de los programas Cabrí 3D y Rhinoceros 5 como entornos de geometría dinámica y gráfico. De manera específica, presentamos las siguientes conclusiones:

- a. Teniendo en cuenta la información recopilada y seleccionada sobre los Sólidos de Ancho Constante (Montejano, L., 1998; Weber, C, 2009), se precisaron algunos métodos de construcción de los SAC, los cuales se describieron y justificaron en el respectivo capítulo.
- b. De manera concreta, teniendo como referencia el método de construcción presentado por Weber, fue posible generar métodos de nuestra propia autoría, que tiene una misma estructura y por ende, una justificación análoga sobre su validez.
- c. Definitivamente los programas utilizados se convirtieron en una herramienta fundamental de exploración, pero en particular Rhinoceros 5 fue una herramienta bastante poderosa para obtener los resultados expuestos anteriormente, a pesar de no ser un software de geometría dinámica.

A continuación, precisamos algunos detalles concluyentes respecto de los métodos expuestos:

### **SAC a partir de la revolución de figuras de ancho constante**

Es relativamente sencillo construir Sólidos de Ancho Constante a partir de la revolución (rotación en el espacio) de Figuras de Ancho Constante a través de uno de sus ejes de simetría, siempre que la FAC los tenga (Montejano, L., 1998). Para caracterizar dichos eje ocurren dos casos, particularmente para los FAC que tienen como base un polígono regular:

1. Si el polígono “base” del cual se obtiene la FAC es un polígono con un número impar de lados, el eje de simetría de la FAC es cualquier eje de simetría de dicho polígono.
2. Si el polígono “base” del cual se obtiene la FAC es un polígono con un número par de lados, el eje de simetría de la FAC se obtiene al trazar la recta que contiene la diagonal del polígono “base” con extremos en un vértice del mismo y en el punto medio del arco con mayor longitud de la FAC. Dicha recta es eje de simetría tanto del polígono “base” como de la FAC en cuestión.

Por otro lado nos pudimos dar cuenta que no siempre es posible construir SAC a partir de la revolución de un SAC “base”; esto depende de si el SAC “base” tiene un eje de simetría; si es así, la revolución hecha respecto de tal eje, genera el mismo SAC “base”. Si la SAC no tiene tal eje, el sólido resultante de la revolución no es un SAC.

### **SAC a partir del método de Weber: partiendo del triángulo de Reuleaux**

Mostramos, en primera instancia que este método se basa en la extrapolación del método de construcción del triángulo de Reuleaux, esto es, tomar el tetraedro regular como Poliedro “base” (en lugar de un triángulo equilátero) y con centro en cada uno de los vértices del tetraedro y radio igual a una de las aristas, realizar sendas esferas (en lugar de circunferencias con centro los vértices del triángulo, y radio, los lados del mismo). El sólido de menor superficie resultante de la unión de los casquetes esféricos surgidos a partir de la intersección de las esferas construidas se llama Tetraedro de Reuleaux. Dicho sólido no es un SAC; no obstante es posible hacer unos ajustes a dicho Tetraedro de manera tal que se genere un SAC. Weber propone uno de tales ajustes al revolucionar unos arcos especiales; nosotros logramos precisar dos: uno equivalente al de Weber y otro basado en la construcción de otras esferas (que llamamos esferas ajuste) que en esencia permite redondear el tetraedro de Reuleaux y en consecuencia, así obtener un SAC. Con base en estos ajustes, surgieron entonces ciertas especificidades, las cuales sintetizamos enseguida:

### **SAC a partir de los Poliedros “base” Regulares.**

En este sentido, se determinaron, describieron y justificaron métodos genuinos de construcción de algunos sólidos de ancho constante. Se construyeron SAC a partir del Cubo y del Octaedro. Para ello fue necesario hacer exploraciones realizadas en los programas computarizados utilizados, a partir de tales poliedros Platónicos. Se presumen que son más los SAC que se obtienen a partir del Cubo y del Octaedro lo cual sería consecuencia de tener en cuenta otras esferas de ajuste diferentes a las que acá presentamos. Todo dependería de las combinaciones posibles de los arcos en los cuales se construyen los puntos que se toman como centro de tal esfera. Hipotetizamos además que con los demás poliedros platónicos, es posible también generar SAC. El espacio temporal y de extensión de este documento no nos permitió verificar nuestra hipótesis.

De manera general y siguiendo el método de Weber se parte de un poliedro “base” regular ya sea (tetraedro, cubo y octaedro). Luego se realiza la intersección de esferas (que llamamos “esferas naturales”) con centros en los vértices de cada poliedro “base” y radios de igual medida a la de una de sus diagonales. Los sólidos resultantes, respectivamente, los denominamos Tetraedro de Reuleaux, Octaedro Degenerado y Cubo Degenerado (poliedros degenerados). Estos sólidos todavía no son un SAC; los

mismos deben ser ajustados (redondeados). Para ello, en lugar de utilizar la revolución de ciertos arcos (como lo sugiere Weber), utilizamos sectores esféricos resultantes de la intersección entre esferas (con centros especiales) con el sólido a ajustar. Se debe hacer tantos ajustes como sean necesarios hasta obtener un SAC. Los ajustes tienen las siguientes características:

- El sector a ajustar de los poliedros degenerados, siempre es opuesto al centro de la esfera que se está construyendo. Esto garantiza el ancho constante y por ende los planos soporte.
- Se presumen que son más los SAC que se obtienen a partir de las combinaciones posibles de centros de esferas de ajustes y cada uno depende de la forma de escogencia de dichos centros. Ello se comprobó parcialmente para el caso de los poliedros base estudiados en este documento.
- El ancho del SAC obtenido siempre se busca de acuerdo a la medida de una de las diagonales del poliedro “base”; en el caso del Tetraedro Regular, este diámetro corresponde a la medida de una de sus aristas.

### **SAC a partir de pirámides rectangulares similares al tetraedro regular.**

De manera análoga al procedimiento expuesto para las SAC basadas en poliedros regulares, logramos precisar que es posible generar SAC a partir de otros tipos de poliedros, esto es, de pirámides rectangulares con base un el polígono regular. El asunto interesante estuvo en determinar, para cada caso, qué medida de aristas para la pirámide considerar y qué puntos tener en cuenta para construir las esferas “naturales” (i.e., las que no se usan para “ajustar” la figura) con centro ese punto y radio tales aristas. Para ello se obtuvieron dos casos: Base de Pirámide rectangular con un número impar de lados y con un número par de lados. Las conclusiones referentes a esta clase de SAC quedaron especificadas en la sección donde se muestra este método de construcción (3.5), por lo que no se nos hace necesario volverlas a explicitar.

### **ALGUNOS COMENTARIOS DE ÍNDOLE PERSONAL**

El desarrollo de este tema de estudio nos hace evidenciar que es poco común en el currículo colombiano de matemáticas, ya sea a nivel de secundaria como de educación superior. Lo cual nosotros como personas y futuros docentes de matemáticas posiblemente se nos dificulte su enseñanza en alguno de estos dos niveles de educación además por ser un objeto de estudio especializado.

Por otro lado, esperamos que este trabajo sirva de inspiración a otras personas que quieran indagar y profundizar sobre las propiedades y Sólidos de Ancho Contante, así como de posibles aplicaciones que puedan ser implementadas a la vida cotidiana.

## 5 BIBLIOGRAFÍA

- Cortés, J. & Cordero, J. (2002). *Curvas y superficies para el modelado geométrico*.  
Obtenido de Centro de investigación de métodos computacionales el 10 de febrero de 2015 desde: [http://www.cimec.org.ar/~ncalvo/curvas\\_doc.pdf](http://www.cimec.org.ar/~ncalvo/curvas_doc.pdf)
- Gil, L. & Orjuela, M. (2010). *Figuras de ancho constante: una temática para explorar. (Trabajo de grado para optar por el título de Licenciatura en Matemáticas)*. UPN, Bogotá,, Colombia.
- McNeel, R. & Associates. (2014). *Manual del usuario Rhinoceros 5*. Barcelona, España:  
Recuperado de: <https://www.rhino3d.com/download/rhino/5.0/UsersGuide>.
- Moise, E. & Downs, F. (1986). *Geometría moderna*. Editorial Addison-Wesley Iberoamericana: Estados Unidos.
- Montejano, L. (1998). *Cuerpos de ancho constante*. Ediciones científicas universitarias, Universidad Autónoma de México. Fondo de cultura económica: México D.F.
- Rademacher, H. & Töeplitz, O. (1990). Curves of Constant Breadth. En D. P. amateur. New York.
- Sophie & Pierre René de Cotret. (2006). Manual del usuario cabri 3D. Montréal, Quebec, Canadá: Recuperado de: <http://www.cabri.com/>.
- Weber, C. (2009). *What does this solid have to do with a ball? (pp 1-4)*. Obtenido de Swisseduc.ch el 10 de febrero de 2015 desde:  
[http://www.swisseduc.ch/mathematik/geometrie/gleichdick/docs/meissner\\_en.pdf](http://www.swisseduc.ch/mathematik/geometrie/gleichdick/docs/meissner_en.pdf)