“RELACIÓN ENTRE LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN Y LA VARIACIÓN EN LA PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE A UNA FUNCIÓN A PARTIR DE LA VISUALIZACIÓN EN GEOMETRÍA DINÁMICA”

GERMÁN ARTURO GARCÍA CORTÉS
2012182019

ALEJANDRO HUMBERTO ROJAS TOVAR
2012182035

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BOGOTÁ D.C.
2012

“RELACIÓN ENTRE LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN Y LA VARIACIÓN EN LA PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE A UNA FUNCIÓN A PARTIR DE LA VISUALIZACIÓN EN GEOMETRÍA DINÁMICA”

GERMÁN ARTURO GARCÍA CORTÉS
20121820

ALEJANDRO HUMBERTO ROJAS TOVAR
2012182035

Trabajo de Grado presentado ante el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia para optar al título de Especialistas en Educación Matemática.

Asesor:
Edwin Arturo Carranza Vargas
Docente Especialización en Educación Matemática

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BOGOTÁ D.C.
2012

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL	*FORMATO*
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE

Código: FOR020GIB	**Versión: 01**
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	**Página 3 de 53**

1.Información General	
Tipo de documento	Tesis como requisito para obtener el título de Especialista en Educación Matemática.
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Titulo del documento	"Relación entre la Solución de Problemas de optimización y la variación en la Pendiente de la recta Tangente a una función a partir de la Visualización en Geometría Dinámica"
Autor(es)	Germán Arturo García Cortés – Alejandro Humberto Rojas Tovar
Director	Edwin Arturo Carranza Vargas – Docente Especialización en Educación Matemática
Publicación	*Bogotá D.C. 2012 (Páginas)*
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional.
Palabras Claves	Problemas de optimización, geometría dinámica, nuevas tecnologías, visualización, pensamiento variacional, matemáticas, enseñanza, aprendizaje, cálculo, gráfica de una función, puntos máximos o mínimos, recta tangente.

2.Descripción
Es una propuesta de enseñanza que presenta una manera de generar imágenes mentales en los estudiantes de la relación entre los puntos máximos y mínimos de una función y la solución de problemas de optimización a partir de la percepción del cambio en la recta tangente a la gráfica de dicha función en el entorno de Geogebra.

3.Fuentes
- Documentos de didáctica de las matemáticas relacionados con los procesos de visualización, con representaciones ejecutables, con la geometría dinámica y con la enseñanza del cálculo. - Libros de cálculo de educación media y universitaria. - Proyectos de grado Universidad Pedagógica Nacional relacionados con las temáticas tratadas. - Artículos de historia de las matemáticas sobre el desarrollo del concepto de tangente. Y didácticos

4.Contenidos
En este documento se encuentran los sustentos matemáticos y didácticos sobre el cuales se sustenta la propuesta. En el aspecto matemático la propuesta se sustentó en la evolución histórica del concepto de tangente y en el aspecto didáctico sobre la forma como el software de geometría dinámica estimula la visualización de regularidades y brinda una nueva estrategia para la enseñanza de la relación entre la recta tangente a una curva y la identificación de los puntos extremos de la misma. En la descripción ilustra la manera como se diseñó la propuesta, la elección de los problemas de optimización a tratar y las preguntas que se podían generar a partir de dichos problemas y que se incluirían en los aplicativos sirviendo como orientadoras de las actividades y como herramientas de evaluación. Por otra parte

se presentan los prerrequisitos necesarios para la aplicación de la propuesta y la manera como serían implementadas en el aula.

En la sección de aplicación se muestra la población en la cual fue implementada, la metodología de aplicación y las estrategias de recolección de resultados. Por último en los resultados se presentan las respuestas dadas por los estudiantes a cada una de las preguntas planteadas y un análisis de dichas respuestas con base en los objetivos propuestos.

5.Metodología

La metodología utilizada es de tipo cualitativo ya que se esfuerza por comprender el fenómeno de la comprensión de la relación entre la solución de problemas de optimización, los extremos de funciones y la recta tangente a la función en los puntos extremos, descriptiva por que procura detallar las acciones, afirmaciones y conclusiones a las que llegan los estudiantes en el desarrollo de las actividades e interpretativa por que analiza los resultados de las actividades con el fin de determinar si los objetivos planteados fueron alcanzados.

A continuación se detalla el proceso de diseño, aplicación y evaluación de la propuesta:

- Diseño de la propuesta:

  El diseño de la propuesta se inició con la elección de dos problemas de optimización trabajados en el proyecto de grado "*Propuesta de tratamiento didáctico para la Resolución de problemas de optimización a través de la geometría dinámica*" (Ávila Gómez & Rojas Tovar, 2005) y su posterior modelación en *Geogebra*. En la modelación de estos problemas se seleccionaron los elementos que brindaban la información necesaria sobre el problema y los elementos que se desea que los estudiantes observen para que, a partir de la percepción de su variación, los estudiantes lleguen a visualizar las relaciones existentes con el propósito que logren generalizar comportamientos y situaciones.

  Luego de la elección y modelación de estos problemas, se generó una actividad en geometría dinámica en donde los estudiantes pueden, a partir del movimiento de un punto, seleccionar la gráfica de una función y sobre ésta mover un punto el cuál es el punto de tangencia entre la gráfica de la función seleccionada y una recta. El objetivo de esta actividad es que los estudiantes lleguen a abstraer las regularidades observadas en las dos primeras actividades y generalizarlas en gráficas que ya no dependen de un problema específico, para que de esta manera se logren edificar nociones que relacionen la recta tangente a esta curva con los puntos máximos, mínimos y con los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

A la par con el diseño de las actividades en Geogebra se generaron aplicativos en Google Docs (uno por cada actividad), los cuales son la guía orientadora de las acciones del estudiante ya que lo dirige en los pasos que debe realizar en el entorno de geometría dinámica, lo cuestiona sobre algunos aspectos que se desea que el estudiante observe como lo son las características de la recta tangente a la curva de la función relacionada con el problema a resolver en los puntos máximos o mínimos y por ultimo brinda herramientas de análisis sobre las imágenes mentales que el estudiante ha generado en el desarrollo de las actividades.

- Pilotaje de las actividades

  Dado que la propuesta se basa en la visualización de regularidades en el entorno de Geogebra y que los conceptos puestos en juego son de educación básica, las actividades que se diseñaron fueron piloteadas en un grupo de estudiantes de grado noveno del Instituto Técnico Industrial Piloto J.T. Estos estudiantes realizaron las actividades y respondieron las preguntas de una manera satisfactoria, es decir que al término de las tres actividades los estudiantes lograron visualizar la relación entre los puntos máximos y mínimos de una función, la recta tangente a la gráfica de esta función en el punto máximo y la solución de un problema de optimización específico.

- Aplicación de la propuesta:

La propuesta fue aplicada a estudiantes de grado once de dos instituciones educativas públicas en donde se seleccionaron dos grupos de dos estudiantes por institución; para la selección de estos estudiantes solo se tuvo en cuenta la motivación y el deseo de ellos por participar en la actividad.

Como primera acción, se enviaron los vínculos de los aplicativos de Google Docs a los correos personales de los estudiantes a igual que las construcciones en Geogebra. Cada uno de los grupos fue desarrollando las acciones que el aplicativo de Google Docs indicaba, las desarrollaba en el entorno de Geogebra y respondía las preguntas que se encontraban en el aplicativo referidas a lo “observado” en el entorno de geometría dinámica. Al terminar cada aplicativo el estudiante lo enviaba y sus respuestas se consignaban en una base de datos.

Cada una de las acciones que los estudiantes realizaban se grabaron en video para su posterior análisis en conjunto con las respuestas contenidas en la base de datos.

- Análisis de las respuestas de los estudiantes

Con base en cada una de las preguntas y de las acciones que se pedía en los formularios, se analizaron las respuestas de los estudiantes y las acciones y formulaciones verbales que desarrollaron en cada una de las actividades teniendo como sustento las respuestas de la base de datos de Google Docs, los escritos desarrollados y los videos de cada actividad.

6.Conclusiones
El análisis de las respuestas de los estudiantes y de los videos, concluyó que las actividades alcanzaron los objetivos propuestos ya que permitieron que los estudiantes visualizaran las relaciones entre la solución de los problemas de optimización, los extremos de curvas y el comportamiento de la recta tangente a estas curvas en estos puntos, pero se considera que es necesaria la interacción directa del docente para mejorar la comprensión de los enunciados de las situaciones y para procurar que los estudiantes vayan más allá de encontrar la solución del problema y del análisis numérico y local, esto con el fin de aumentar la generalización de las regularidades y de aumentar el análisis global de las situaciones.

Elaborado por:	Germán Arturo García Cortes – Alejandro Humberto Rojas Tovar
Revisado por:	Edwin Arturo Carranza Vargas

Fecha de elaboración del Resumen:	03	11	2012

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

El estudio del cálculo en grado once de educación media se caracteriza por que enfatiza el desarrollo de los conceptos a partir de su representación algebraica, la cual dirige la atención de los estudiantes al desarrollo de procedimientos algebraicos (Narro Ramirez & Kanagúsico Muñoz, 2011) que ocultan la noción de variación y su estudio, es decir que en realidad el estudio de cálculo en grado once, en la gran mayoría de los casos, se convierte en un estudio de algebra y no un estudio sustentado en las nociones de variable, de función y de límite. Teniendo en cuenta esta situación, la propuesta que a continuación se presenta es una alternativa para la introducción del concepto de derivada a partir de dos de sus aplicaciones, la resolución de problemas de optimización y la determinación de punto máximos y mínimos sobre la gráfica de una función haciendo uso del método de Fermat (Apostol) y del software de geometría dinámica Geogebra. Es preciso aclarar que no se pretende desplazar la representación algebraica del concepto de derivada, pero si llenar de sentido procedimientos tales como el igualar la derivada de una función a cero, haciendo uso de la habilidad de visualización de los estudiantes en la generación de imágenes mentales que sirvan como cimientos en los cuales sustentar la construcción del concepto de derivada, interactuando en un ambiente dinámico diferente al de la clase usual de cálculo y en contacto directo con la variación de magnitudes lo cual se considera como esencial para la adquisición de las nociones propias del cálculo.

La propuesta se basa en el estudio de la variación en casos de resolución de problemas de optimización a partir de la observación de procesos de cambio en el entorno Geogebra, en donde se exhibe la modelación de dos problemas que procuran que el estudiante determine la solución desarrollando una serie de acciones en el software y respondiendo a algunas preguntas orientadoras y tienen como objeto que los estudiantes, aparte de resolver los problemas, visualicen la relación entre la recta tangente de pendiente cero, el punto máximo o mínimo de una función y la solución del problema de optimización. La tercera actividad tiene como propósito la generalización de la relación entre la recta tangente a la curva y la forma de la función, en especial la relación entre la recta tangente de pendiente cero y los puntos máximos y mínimos; en ella se muestra la gráfica de una función que puede cambiar su forma y la recta tangente a esta, recta que cambia al realizar un movimiento sobre el punto de tangencia, el cuál es un objeto de interacción del estudiante con la situación.

Esta propuesta cuyo nombre original fue “Relación entre la Solución de Problemas de Optimización y la variación de la Pendiente de la Recta Tangente a una función específica a partir del modelado en Geometría Dinámica” cambió su nombre ya que en ella no se presenta el proceso de modelación de los problemas trabajados sino que los problemas se presentan modelados en el entorno de Geogebra y los estudiantes utilizan dicha modelación para desarrollar las acciones solicitadas en cada una de las actividades y para responder a los cuestionamientos específicos de cada una. Su aplicación se desarrolló en el Instituto Técnico Industrial Piloto J.T y en la I.E.D. León XIII J.T., en donde fueron participes 4 estudiantes por institución los cuales se organizaron en grupos de dos para el desarrollo de las actividades; estos estudiantes desarrollaron las actividades, respondieron las preguntas y las respuestas fueron consignadas en una base de datos de Google Docs en una de las instituciones y de manera escrita en la segunda debido a una dificultad de conexión a internet, dejando un registro de video de cada una de las actividades.

A partir del análisis de los escritos de los estudiantes, de las respuestas consignadas en la base de datos y de los videos que registraron las actividades, se realizó el análisis sobre el que se concluye que los estudiantes que estuvieron en contacto con las actividades propuestas lograron visualizar la relación entre la solución de los problemas de optimización, los puntos máximos y mínimos de la gráfica de una función y la recta tangente a la gráfica de esta función en el punto máximo.

OBJETIVOS

Objetivo General

- Generar una herramienta didáctica que mediante su manipulación, aplicación y evaluación acerque al estudiante a la comprensión de los procesos de optimización y de determinación de máximos y mínimos de curvas, facilitando la enseñanza y el aprendizaje del cálculo haciendo uso de herramientas tecnológicas.

Objetivos Específicos

- Diseñar una herramienta didáctica que a través de la visualización de la variación de magnitudes y su relación con la gráfica de una función dirija al estudiante a relacionar la situación de cambio de la magnitud con la pendiente de la recta tangente a la curva de la función dada.

- Provocar que el estudiante mediante la visualización del cambio de magnitudes interrelacione el punto mínimo o máximo de una función con la solución de un problema de optimización y además que en dicho punto la pendiente de la recta tangente es cero.

1. MARCO TEÓRICO

1.1. MARCO MATEMÁTICO

Permanentemente la humanidad busca la manera de realizar mejor sus actividades y de alcanzar el mayor beneficio al hacerlo; por ejemplo en la industria se busca la manera de maximizar los beneficios al vender un producto o al prestar un servicio reduciendo el costo de producción, se quisiera que un automóvil recorriera mayor distancia con un mínimo de consumo de combustible o simplemente es deseable que nuestro tiempo se aprovechara de la mejor manera para cumplir con todas las actividades que debemos realizar. En muchas situaciones, esta necesidad de maximizar o minimizar una magnitud se puede expresar haciendo uso de las matemáticas y es aquí donde el cálculo se presenta como una poderosa herramienta para lograr este propósito mediante el proceso de determinación de los máximos y mínimos haciendo uso de derivadas.

Teniendo en cuenta que el concepto de derivada surgió precisamente por el problema de determinar los puntos máximos y mínimos de funciones haciendo uso de la recta tangente a dichas funciones en puntos dados (La recta tangente: notas históricas y actividades para el aula, 2009), se comienza este análisis con algunos aspectos considerados como importantes en la evolución histórica del concepto de recta tangente desde los estudios de Euclides y Apolonio en la Grecia Antigua hasta el método de máximos y mínimos de Fermat en el siglo XVII.

Para comenzar, es preciso decir que la determinación de rectas tangentes a curvas fue un problema importante en Grecia en la época de Euclides pero se tenía la dificultad de ser un concepto que en ese entonces no podía ser bien definido y por ello tan solo se intuía como una recta “que toca a la curva sin cortarla”. Son de destacar los trabajos de Euclides (325 a.C, 265 a.C) y Apolonio (262 a.C., 190 a.C.); Euclides analizó el comportamiento de una recta que forma un ángulo recto con el diámetro de una circunferencia, observando que la recta tiene un solo punto en común con la circunferencia y que entre la circunferencia y la recta dada no es posible trazar otra recta (La recta tangente: notas históricas y actividades para el aula, 2009).

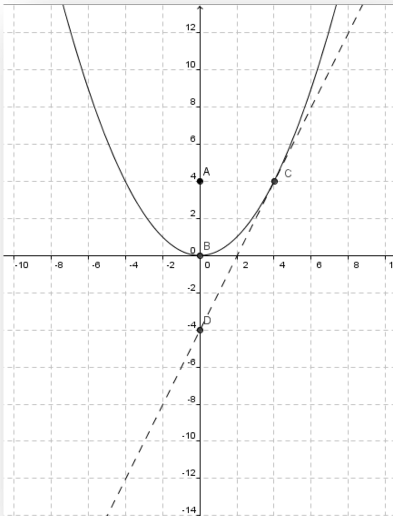


Figura 1

Por su parte Apolonio en su trabajo dedicado a las secciones cónicas desarrolló métodos para la construcción de rectas tangentes a circunferencias, elipses y parábolas y a continuación se muestra un ejemplo:

Siendo C un punto de la parábola con vértice en B, eje de simetría $\overleftrightarrow{AD}$ y teniendo que $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{AD}$, cuando $AB = BD$ se tendrá que $\overleftrightarrow{DC}$ es recta tangente a la parábola en el punto C.

En el siglo XVII se desarrollaron procedimientos puramente algebraicos para encontrar rectas tangentes a curvas, estos procedimientos que fueron sustentados en la resolución de ecuaciones y en las propiedades de las curvas originó una clase de cálculo libre del concepto de límite, pero al finalizar este siglo con el desarrollo de este concepto por parte de Newton y Leibniz, estos procedimientos fueron abandonados. A manera de ejemplo se presenta esta técnica desarrollada por Descartes (1596 - 1650) la cual aparece descrita en su libro "*La Géométrie*" de 1637:

> "*Encontrar una circunferencia tangente en un punto C a una curva dada,* esto se hace igualando circunferencia y curva y obligando a que se corten en un solo punto.
>
> Ya que la recta tangente a una circunferencia es perpendicular a su radio, esta recta es fácil de calcular.

Los procedimientos algebraicos para desarrollar este tipo de técnica pueden ser consultados en la revista *SUMA* de junio de 2009 (La recta tangente: notas históricas y actividades para el aula, 2009) sobre la cual se sustentó este análisis sobre la recta tangente.

De igual forma en el mismo siglo XVII las curvas se consideraban como la trayectoria de un objeto que se mueve y Newton conceptualizó la tangente a dichas curvas como la dirección en la que el objeto se mueve en un momento determinado, de esta manera se asoció la tangente como el vector velocidad del objeto; este método de encontrar tangentes a partir del vector velocidad del objeto fue denominado por Newton como el “método cinemático”. Durante este mismo siglo, se fue generando lentamente la idea de la recta tangente a una curva como una posición límite de una recta secante para la cual sus puntos de corte se acercan cada vez más hasta coincidir. (Ver figura 2a, 2b, 2c y 2d)

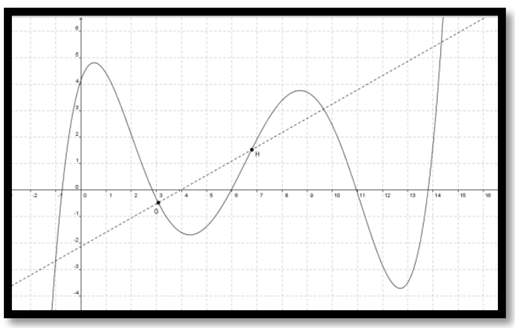


Figura 2a

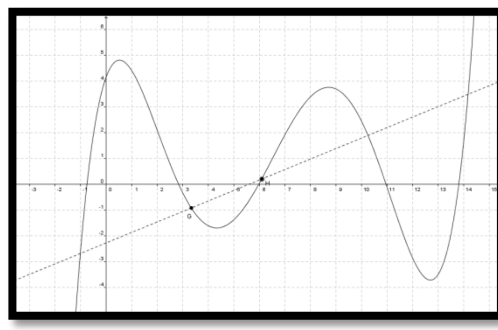


Figura 2b

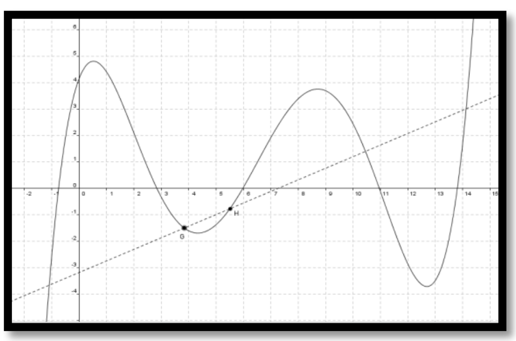


Figura 2c

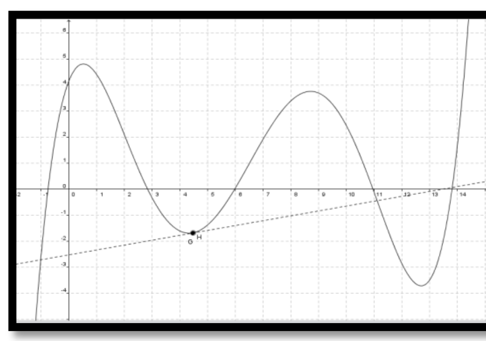


Figura 2d

Ahora, al abordar el concepto de puntos máximos o mínimos de una función se toma como base la idea del matemático francés Pierre de Fermat (1601 - 1665) quién en el siglo XVII intentó determinar los máximos y mínimos de ciertas funciones a partir del análisis de la dirección que tiene cada uno de los puntos sobre la curva de la función y esta dirección puede estar dada por la tangente (ver figura 3)

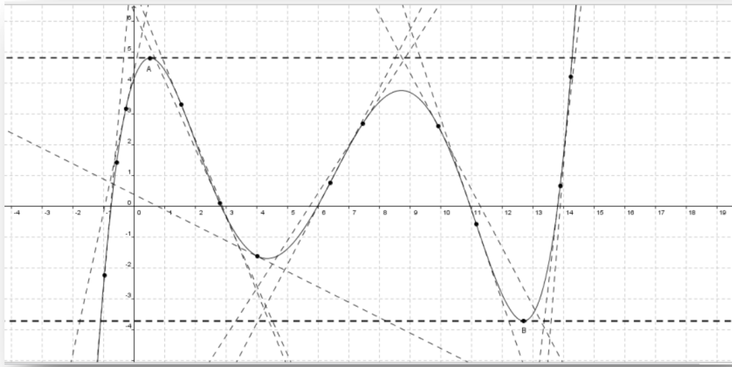


Figura 3

Fermat observó que en aquellos puntos en que la función posee un máximo o un mínimo, la recta tangente ha de ser horizontal (como sucede en los puntos A y B de la figura 3) y de esta manera el problema de determinar los puntos máximos y mínimos de la función se reduce a encontrar los valores de la variable independiente para los cuales la recta tangente a la curva es horizontal o tiene pendiente cero. Si se desea conocer más sobre el método de Fermat para hallar los puntos máximos y mínimos de una función, se puede consultar el artículo "*El Método de Máximos y Mínimos de Fermat*" (De la Torre Gómez, Suescún Arteaga, & Alarcón Vasco, 2005)

Por último, al hablar de los problemas de optimización se debe iniciar con que son una de las aplicaciones directas del cálculo diferencial ya que permite contextualizar el concepto de derivada (y por ende el de función y límite) al utilizar el problema de la determinación de máximos y mínimos expuesto anteriormente. Por lo general, las dificultades que surgen en la resolución de este tipo de problemas son por un lado la comprensión del enunciado y su planteamiento matemático, la interpretación de los resultados en el contexto del problema y por último que al basarse sobre un proceso puramente algebraico el cuál se puede resumir en la determinación de una función, de su derivada y de los valores para los cuales esta derivada es igual a cero a partir de resolución de ecuaciones, la resolución del problema a veces pasa a un segundo plano al privilegiarse el desarrollo de procedimientos y no el porqué y el para qué de los mismos.

1.2. MARCO DIDÁCTICO

Las nuevas herramientas que la tecnología ha desarrollado con el propósito de servir a la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas ha modificado la manera como el conocimiento se ha puesto en juego en el aula; herramientas tales como calculadoras que facilitan los procesos algorítmicos y computadores con software de matemáticas que permite la modelación de situaciones propias de la geometría y el cálculo, modificaron la perspectiva de que es lo que se debe enseñar y cómo se debe hacer y, por tanto, también ha modificado la participación tanto del estudiante como del docente, al dejar de ser el primero un actor pasivo del proceso para convertirse en un factor participativo, propositivo y creativo y al convertir al segundo en constructor de herramientas de aprendizaje y en mediador entre el conocimiento y el estudiante a través de la interacción con la tecnología.

En particular, los diferentes software de geometría dinámica como **Geogebra, Cabri Geometre** y **Geometra Sketchpak** se han convertido en una poderosa herramienta que permite la modelación de situaciones de variación, ya que el dinamismo propio de estos entornos ha permitido que la noción de variable y la visualización del cambio de dichas variables sean más visibles a los estudiantes, quienes ahora ven có,mo el movimiento de un punto determina la gráfica de una función, que observan cómo el cambio en el radio de un círculo altera de inmediato su área y perímetro y además que estos cambios a los cuales se hace referencia son causados por ellos, es decir, que ellos tienen influencia directa sobre los cambios que se produzcan generando de esta manera una interacción entre la herramienta cognoscitiva que se está usando y el conocimiento en sí lo cual cambia la manera como las imágenes reales y mentales del estudiante se relacionan.

Los aspectos antes mencionados han transformado la manera en que los conceptos de función y de derivada se presentan en el aula ya que ha brindado un medio de interrelación entre los diferentes sistemas de representación y los ha dotado de dinamismo y de sentido. Según la “Fundamentación Cognitiva del Currículo de Matemáticas” (Moreno Armella & Waldegg, 2002), la inclusión de la tecnología como el software de geometría dinámica en el aula de matemáticas, sirve como una herramienta estructurante que permite la exploración del estudiante quien puede generar ideas que están íntimamente ligadas al medio dinámico del software y que estarán en gran medida influenciadas por la potencialidad que tiene el software de permitir la interacción del estudiante con las representaciones, en este caso con la representación gráfica. Todo lo anterior sustenta esta propuesta, la cual procura el aprovechamiento de las características de la representación gráfica de relaciones funcionales a partir de la visualización de regularidades y del uso del software de geometría dinámica en la dotación de cualidades ejecutables a la representación gráfica.

En cuanto a la representación gráfica de funciones se puede decir que puede permitir que el estudiante, al analizar correctamente el registro de representación compuesto por los ejes coordenados (en nuestro caso el sistema cartesiano) y por la relación funcional de cada uno de los puntos que componen la gráfica, identifique variables visuales explorando la forma de la gráfica esto con el fin de entablar relaciones entre estas variables y sus correspondientes equivalentes en los demás sistemas de representación. La representación gráfica de funciones tradicionalmente se ha manejado de manera estática, lo cual dificulta la comprensión de la noción de variable al observarse ésta como un valor estático representado por las coordenadas de puntos sobre la gráfica de la función, la cual queda determinada por la unión de algunos puntos, lo cual determina un gran salto desde lo discreto de los puntos graficados a los infinitos puntos contenidos en la gráfica.

En cuanto a las características que un estudiante puede percibir (Hitt, 2003) al observar la gráfica de una función como la de la Figura 4, la cuál ha sido trazada haciendo uso del lápiz y papel y es estática por el medio en el que se encuentra, se pueden mencionar los puntos de corte con

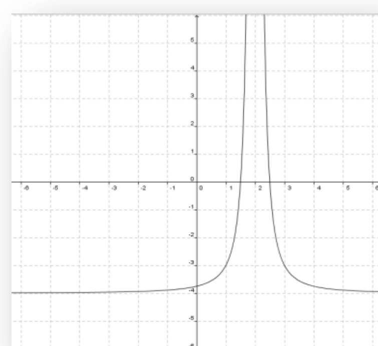


Figura 4

los ejes coordenados, los puntos en donde la función aparentemente “se corta” y los intervalos en donde la función crece, decrece o es constante, pero al realizar el paso hacia la visualización de regularidades tales como el comportamiento de las rectas tangentes a la función, la percepción de cambio de dichas tangentes se ve coartada por el medio estático en el cuál se encuentra la gráfica, mientras que en el entorno de geometría dinámica al haber graficado la función, ubicar un punto sobre la gráfica y utilizar la opción tangente, el estudiante podrá observar con tan solo un movimiento del punto el cambio de dicha recta permitiendo esto que el estudiante pueda llegar a hacer conjeturas sobre las características de la recta tangente en puntos específicos de la función. Aquí el estudiante además de percibir los aspectos antes mencionados observa el cambio de una variable con relación a otra y adquiere mayor sentido la gráfica de la función porque ésta se convierte en el “producto” de un proceso de variación infinito de un valor que se encuentra relacionado con otro que de igual manera cambia.

Atendiendo a lo enunciado por (Córdoba & Ardila, 2011) en cuanto al concepto de visualización como un proceso en el cuál se forman imágenes mentales que procuran la comprensión de objetos matemáticos y estimulan el proceso de descubrimiento y construcción de nociones, cabe decir que Geogebra y demás software de geometría dinámica por su misma característica de dinamismo e interacción con la representación enriquece el proceso de visualización de las características de la gráfica al dotarlas de una particularidad que antes no poseía la ejecutabilidad, lo cual quiere decir que la representación gráfica que antes era estática ahora es dinámica e interactiva ya que el estudiante puede influir directamente sobre el cambio en la variable y observar las cosas que cambian y aquellas que se mantienen invariantes teniendo la oportunidad de observar regularidades que se presentan en cuanto al comportamiento de la función y en el caso de esta propuesta al comportamiento de la recta tangente de la gráfica de una función.

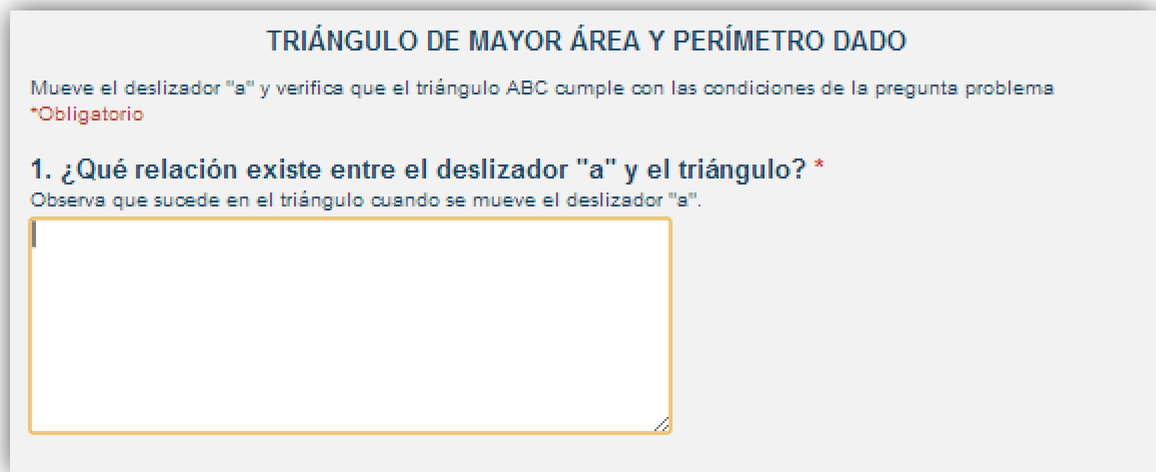
2. DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA

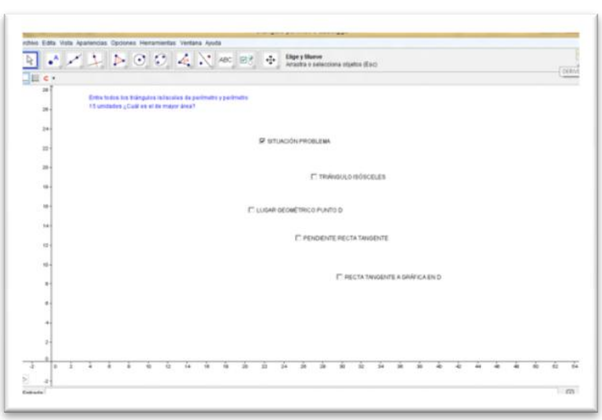
Esta propuesta se diseñó pensando en ofrecer, a los profesores de cálculo en grado once, una alternativa para el desarrollo de imágenes mentales de los procesos de variación presentes en los problemas de optimización que permita relacionar estas imágenes con las características de las rectas tangentes a la gráfica de la función relacionada con el problema dado. Se basa en la percepción y en la visualización tal como la enuncia (Hitt, 2003) ya que procura que a partir de la observación de situaciones de cambio dirigidas, los estudiantes generen una imagen mental de la situación llegando a determinar algunas características de la misma y con el fin de llegar a conjeturar sobre estos aspectos. Para el diseño y desarrollo de la propuesta se tuvieron en cuenta dos aspectos sobresalientes en la geometría dinámica: El primero es que la ejecutabilidad e interacción que permiten las construcciones realizadas con geometría dinámica posibilitan al estudiante la identificación de las variables del problema representadas geométricamente y, luego de esto, determinar la covariación existente entre estas variables; como segundo aspecto se tiene la percepción de la variación de las magnitudes, esta es una característica que hace de la geometría dinámica una buena herramienta para la enseñanza del cálculo. El dinamismo permite visualizar la variación de las magnitudes ya que en una construcción realizada con geometría dinámica, las magnitudes como longitudes, áreas, perímetros, etc., dejan de ser estáticas, para ser variables dinámicas que pueden tomar distintos valores en un cierto dominio, facilitando con esto la modelación de la variación en un sistema cartesiano y, por tanto, la construcción de la gráfica de la función que representa dicha variación, gráfica que por demás, es dinámica al trazarse conforme las magnitudes varían.

La propuesta está compuesta por tres actividades, cada una de las cuales está acompañada por un aplicativo en Google Docs el cual se debe seguir simultáneamente con la actividad y que sirvió como fuente de análisis ya que recopiló las respuestas que los estudiantes daban ante las situaciones propuestas; en cada aplicativo se dan las instrucciones que los estudiantes deben seguir en el entorno de Geogebra y se hacen preguntas relacionadas con la situación problema y con los objetos observados. A continuación se presentan las tres actividades que se aplicaron a cuatro grupos de dos estudiantes de grado once de dos instituciones educativas y para su desarrollo los únicos requisitos indispensables son conocimientos básicos sobre el entorno de Geogebra y a nivel conceptual el concepto de función y de sus clases.

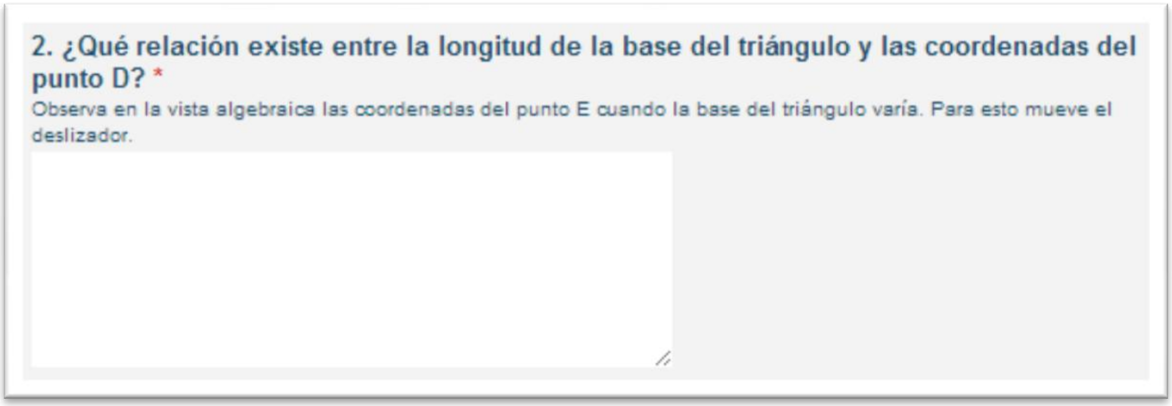
2.1. PRIMERA ACTIVIDAD

Como primer problema de optimización a tratar se eligió el del *triángulo isósceles de perímetro dado y área máxima*, tomando como perímetro 15 unidades.





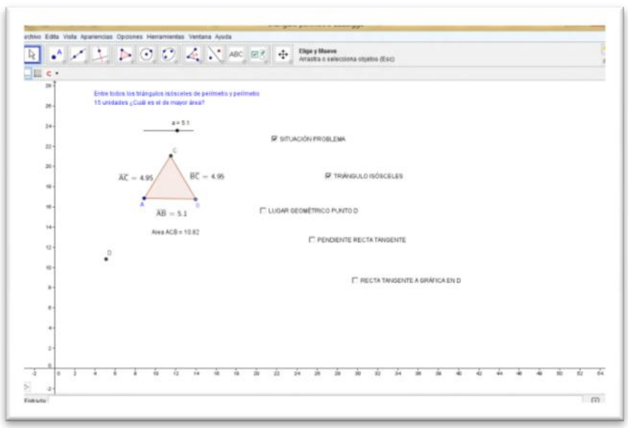
Al elegir la opción situación problema, aparece el enunciado en pantalla para el análisis por parte del estudiante.



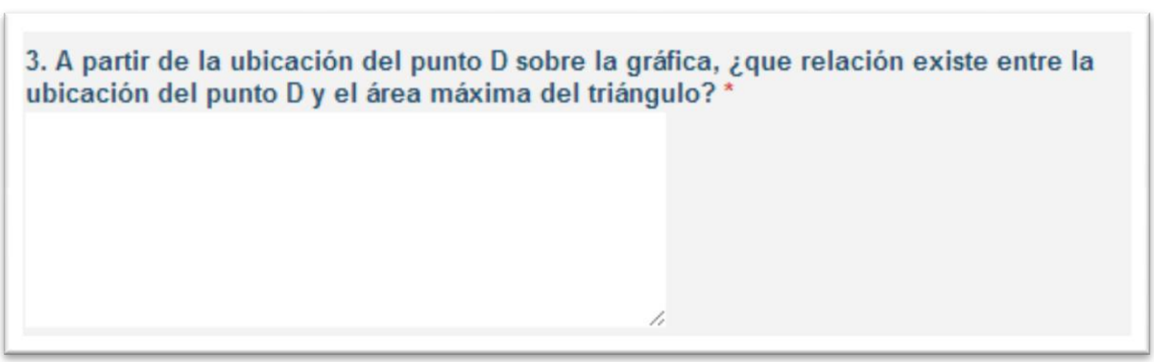
2. ¿Qué relación existe entre la longitud de la base del triángulo y las coordenadas del punto D? *

Observa en la vista algebraica las coordenadas del punto E cuando la base del triángulo varía. Para esto mueve el deslizador.

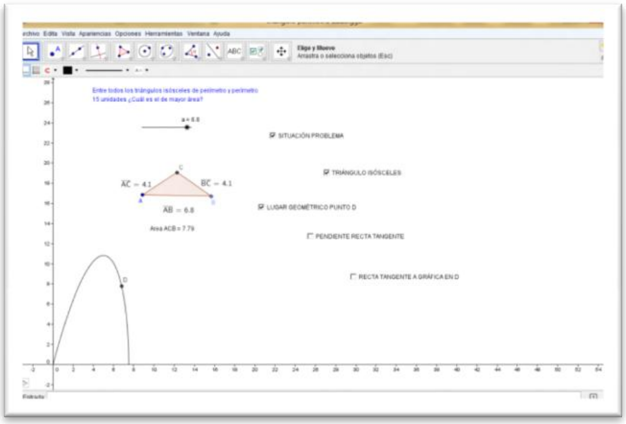
En la segunda pantalla, al seleccionar la opción triángulo isósceles aparece el triángulo con la información sobre la longitud de sus lados y área. Al mover el punto “a” el triángulo cambia su forma pero mantiene su característica de ser isósceles y de perímetro 15 unidades.



En esta pantalla además aparece el punto D quién es el punto que posteriormente determinara la gráfica de la función que modela la situación problema al mover el punto “a”.



3. A partir de la ubicación del punto D sobre la gráfica, ¿que relación existe entre la ubicación del punto D y el área máxima del triángulo? *

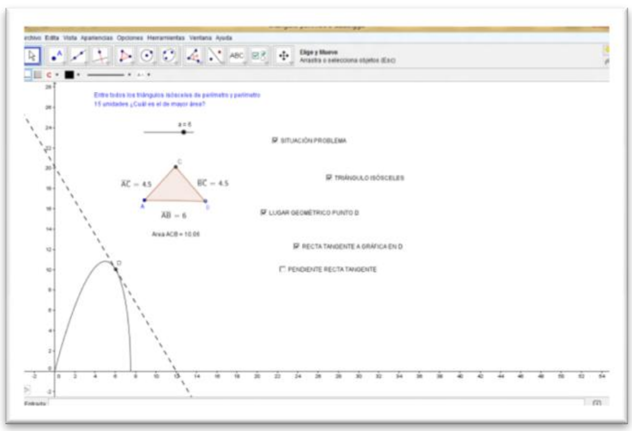


En la tercera pantalla aparece la gráfica de la función que modela la situación problema y sobre esta está el punto D quién cambia de posición sobre la gráfica cuando “a” se mueve.

4. Cuándo el triángulo alcanza su máxima área ¿Cómo es la recta tangente a la curva en el punto D? *

Mueve el deslizador y observa las características de la recta tangente a la curva en el punto D

A continuación se presenta la recta tangente a la gráfica de la función en el punto D y los demás objetos presentados anteriormente.



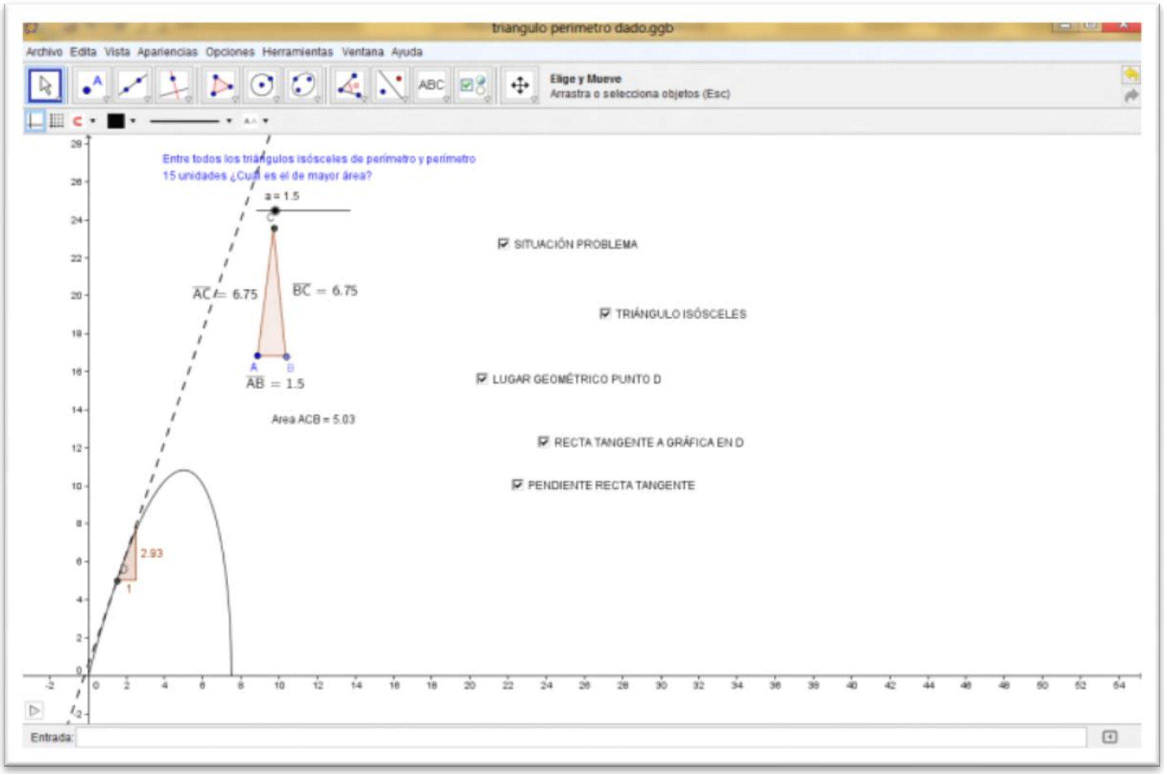
5. ¿Cómo es la inclinación (pendiente) de la recta tangente a la curva en el punto D cuando el triángulo alcanza el área máxima? *

Mueve el deslizador y observa el valor de la pendiente

La pendiente es positiva

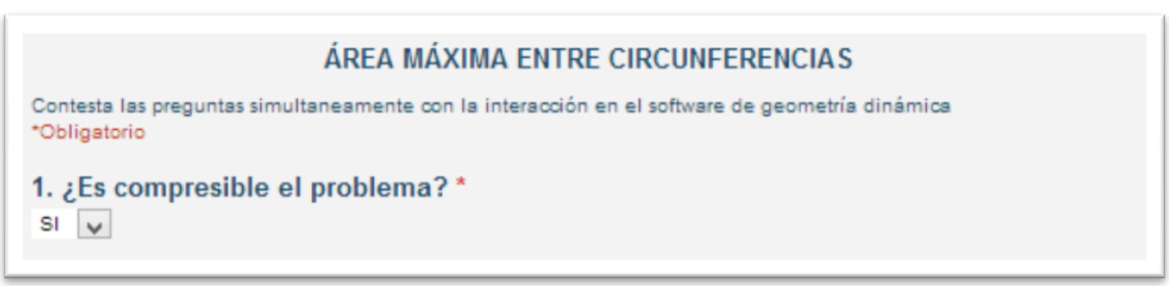
Enviar

Por último se presenta la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto D. Al depender el punto D del movimiento de “a”, tanto la recta tangente como el valor de su pendiente cambian con este mismo movimiento.



2.2. SEGUNDA ACTIVIDAD

El problema de optimización a tratar en esta actividad es "ÁREA MÁXIMA ENTRE CIRCUNFERENCIAS" *Dada una circunferencia de radio 2.5cm se divide el diámetro en dos partes que se toman como diámetros de dos circunferencias inscritas. Hallar el área máxima de la superficie clara.*

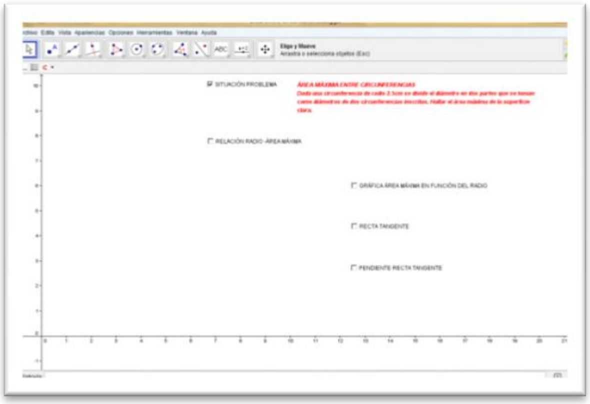


ÁREA MÁXIMA ENTRE CIRCUNFERENCIAS

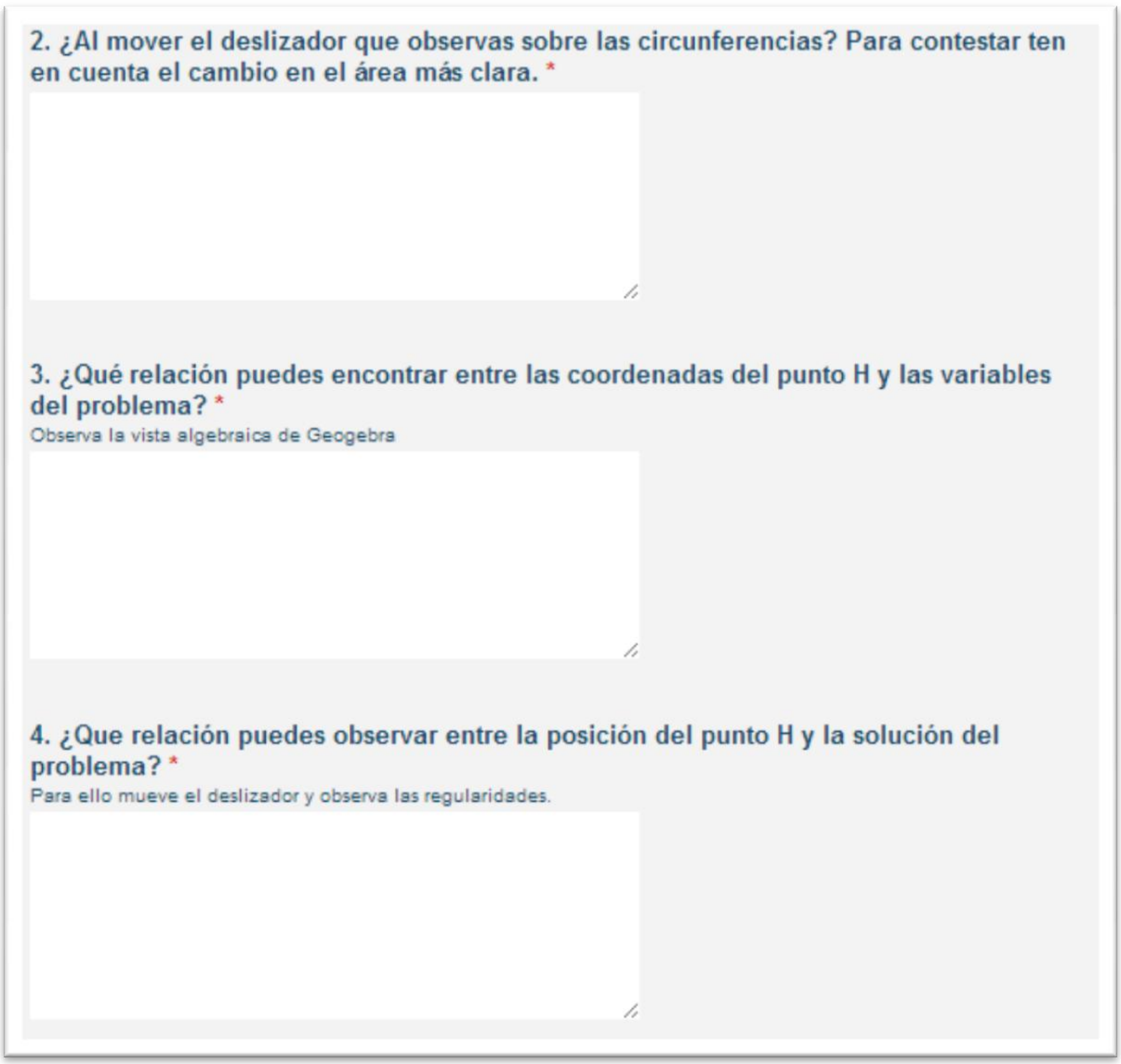
Contesta las preguntas simultaneamente con la interacción en el software de geometría dinámica
*Obligatorio

1. ¿Es compresible el problema? *

SI



En la primera pantalla se presenta solo el enunciado del problema el cual aparece al seleccionar la opción “Situación problema”

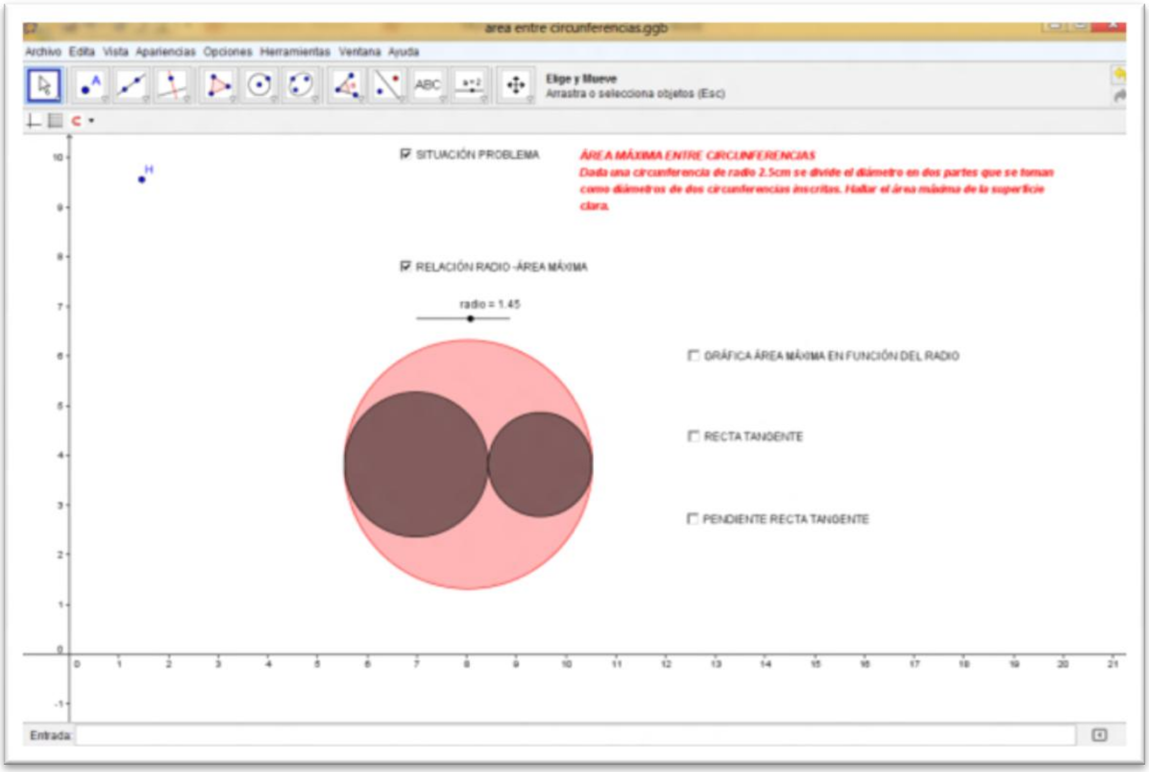


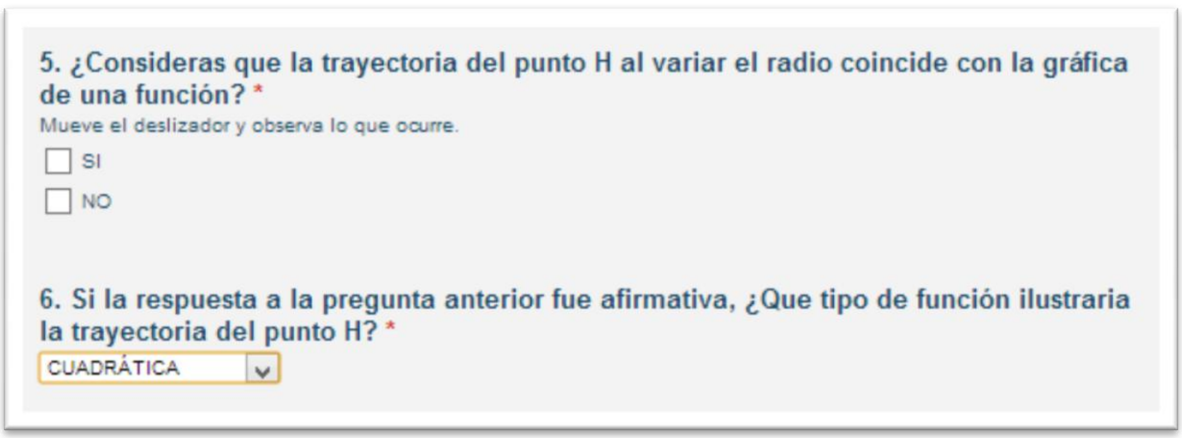
2. ¿Al mover el deslizador que observas sobre las circunferencias? Para contestar ten en cuenta el cambio en el área más clara. *

3. ¿Qué relación puedes encontrar entre las coordenadas del punto H y las variables del problema? *
Observa la vista algebraica de Geogebra

4. ¿Que relación puedes observar entre la posición del punto H y la solución del problema? *
Para ello mueve el deslizador y observa las regularidades.

En la segunda pantalla aparece la situación problema modelada, un deslizador del que depende el cambio en el área requerida y un punto H el cual se mueve dependiendo del movimiento del deslizador.





5. ¿Consideras que la trayectoria del punto H al variar el radio coincide con la gráfica de una función? *

Mueve el deslizador y observa lo que ocurre.

- [ ] SI
- [ ] NO

6. Si la respuesta a la pregunta anterior fue afirmativa, ¿Que tipo de función ilustraria la trayectoria del punto H? *

CUADRÁTICA

7. Al observar la gráfica de la trayectoria de H, ¿Coincide con tu conjetura de si es función y del tipo de función que representa? *

☐ SI

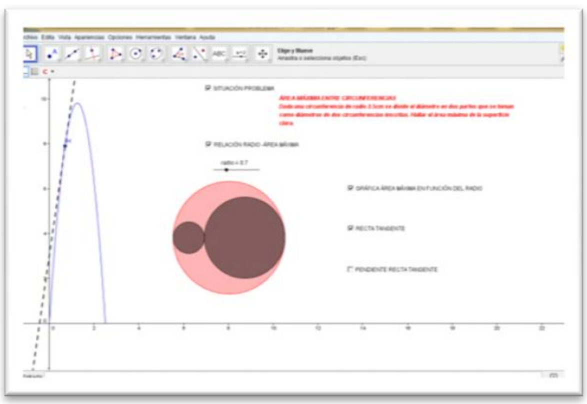
☐ NO

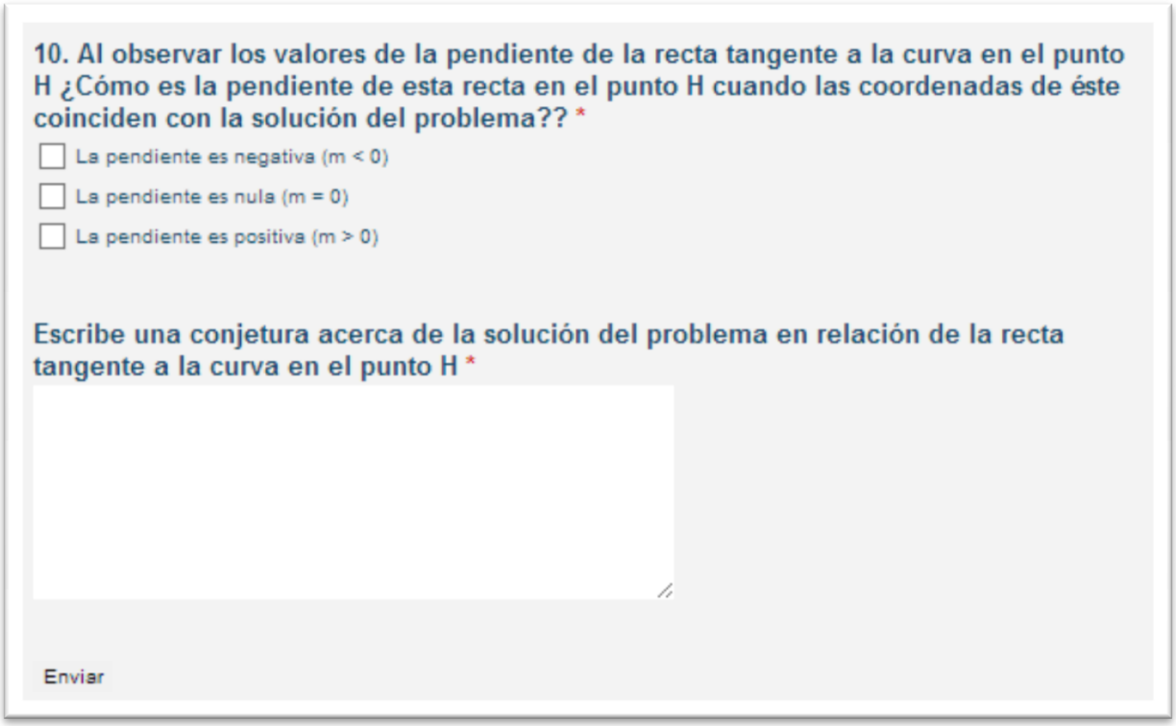
8. En que posición debe estar H sobre la gráfica para coincidir con la solución del problema? *

A continuación aparece la gráfica de la función relacionada con el problema la cuál es trazada por el punto H. El punto H cambia su posición sobre la gráfica cuando se realiza un movimiento sobre el deslizador.

9. Según tu respuesta a la pregunta anterior, ¿que puedes decir de la recta tangente a la curva en el punto H? *

En la cuarta pantalla aparecen todos los elementos antes mencionados y además la recta tangente a la gráfica de la función en el punto H



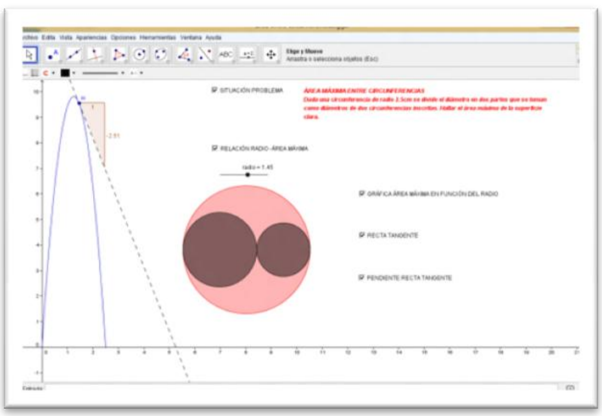


10. Al observar los valores de la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto H ¿Cómo es la pendiente de esta recta en el punto H cuando las coordenadas de éste coinciden con la solución del problema?? *

- [ ] La pendiente es negativa (m < 0)
- [ ] La pendiente es nula (m = 0)
- [ ] La pendiente es positiva (m > 0)

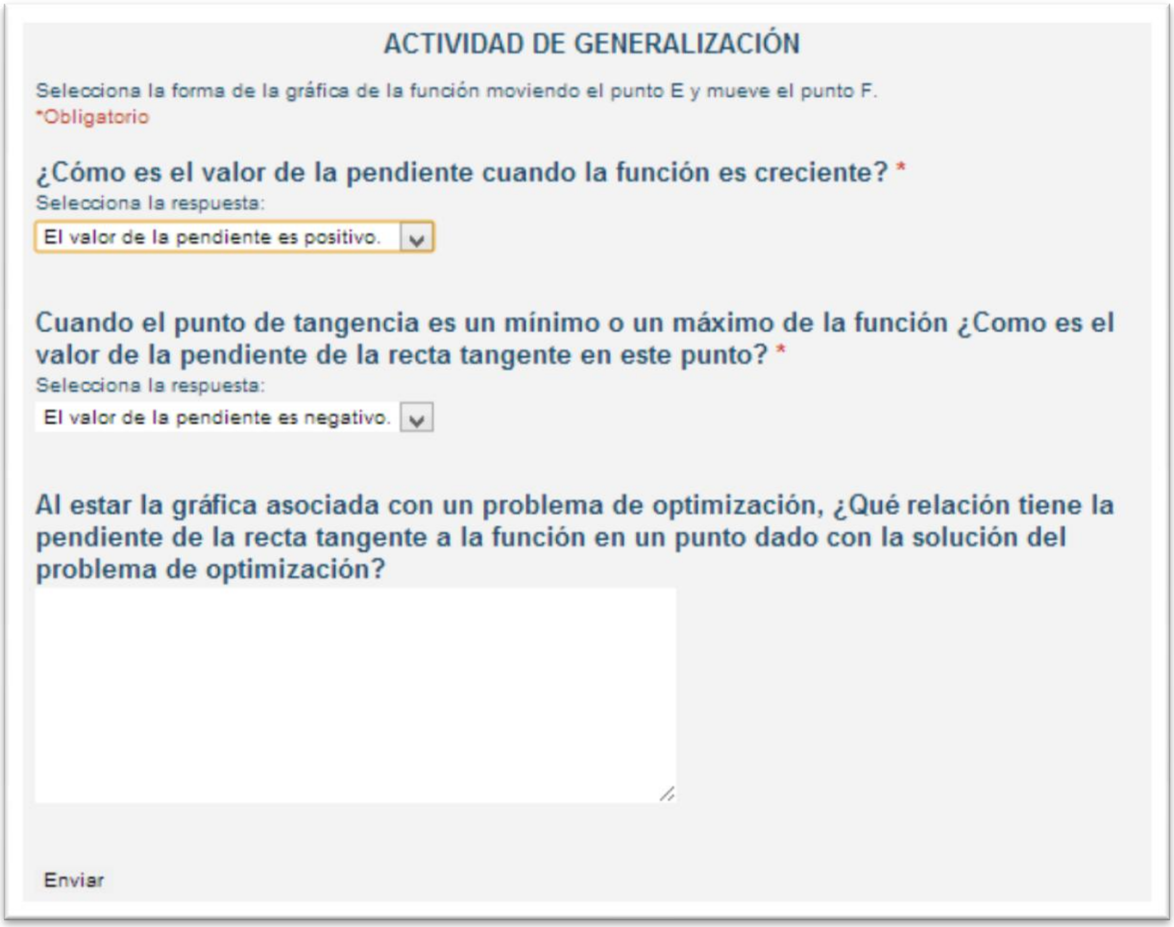
Escribe una conjetura acerca de la solución del problema en relación de la recta tangente a la curva en el punto H *

Enviar



En la última pantalla aparecen todos los objetos presentados anteriormente incluyendo el valor de la recta tangente a la curva en el punto H. Tanto la recta tangente como el valor de su pendiente cambian con el movimiento de H sobre la gráfica de la función

2.3. TERCERA ACTIVIDAD


ACTIVIDAD DE GENERALIZACIÓN

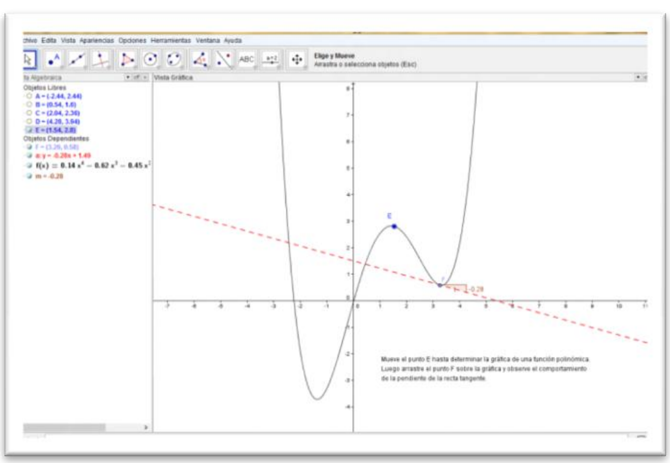
Selecciona la forma de la gráfica de la función moviendo el punto E y mueve el punto F.
*Obligatorio

¿Cómo es el valor de la pendiente cuando la función es creciente? *
Selecciona la respuesta:
El valor de la pendiente es positivo.

Cuando el punto de tangencia es un mínimo o un máximo de la función ¿Como es el valor de la pendiente de la recta tangente en este punto? *
Selecciona la respuesta:
El valor de la pendiente es negativo.

Al estar la gráfica asociada con un problema de optimización, ¿Qué relación tiene la pendiente de la recta tangente a la función en un punto dado con la solución del problema de optimización?

Enviar



Esta actividad se desarrolla con todos los elementos en la pantalla. Allí se muestra la gráfica de una función que varía al mover el punto E, un punto F sobre la gráfica el cuál determina el punto de tangencia entre la gráfica y una recta y el valor de la pendiente de esta recta que de igual forma cambia cuando se ubica el punto F en distintas posiciones.

3. APLICACIÓN DE LA PROPUESTA

La propuesta didáctica se aplicó en los colegios Instituto Técnico Industrial Piloto J.T. localidad sexta en la ciudad de Bogotá D.C. y en el I.E.D. León XIII J.T. en el municipio de Soacha Cundinamarca. En cada una de las instituciones participaron cuatro estudiantes de grado once con los cuales se formaron 2 grupos de dos personas a los cuales se les envió las construcciones en Geogebra y los aplicativos de Google Docs al correo personal; dado que uno de los propósitos de esta propuesta es que los estudiantes adquieran de manera intuitiva la relación entre la solución de problemas de optimización y los cambios en la pendiente de la recta tangente a una función en un punto, se seleccionaron estudiantes que aún no tuvieran conocimiento del proceso algorítmico de resolución de este tipo de problemas a partir de derivadas y se espera que cuando se desarrolle este tema en el aula, los estudiantes lleguen a relacionarlo con la actividad desarrollada en Geogebra.

Las actividades fueron desarrolladas en el orden en que fueron presentadas en este documento, siendo orientadas por el docente de cálculo el cuál intervino solamente en los momentos en que las actividades no eran entendidas por los estudiantes y grabadas en video por un estudiante que estuvo pendiente de cada una de las interacciones de los grupos de estudiantes en el entorno de Geogebra, de las discusiones que se generaron alrededor de cada uno de los cuestionamientos surgidos a partir de las preguntas de la aplicación de Google Docs y de las respuestas que ellos generaron. El docente dirigió la actividad tan solo como mediador para la comprensión del enunciado de los problemas y como cuestionador frente a las apreciaciones de los estudiantes, realizando preguntas que dirigieran la atención del estudiante hacia los fenómenos presentados en el entorno dinámico. En una de las instituciones se enviaron los aplicativos de Google Docs a la base de datos al terminar la actividad y en la otra los estudiantes respondieron las preguntas en una hoja ya que la conexión a internet falló en la aplicación de la propuesta y no fue posible hacer uso del aplicativo de Google Docs.

4. RESULTADOS

A continuación se presentan algunas respuestas de los estudiantes, las imágenes de los estudiantes interactuando con el Geogebra y desarrollando las actividades y algunos escritos sobre las actividades realizadas. Se hace un análisis por cada una de las preguntas y de sus respuestas, análisis que se basa en las respuestas consignadas en la base de datos y en las afirmaciones escritas y verbales de los estudiantes durante la actividad que fue grabada en video.

4.1. ACTIVIDAD 1

A continuación se muestra los datos obtenidos por los estudiantes para su posterior análisis, teniendo en cuenta el objetivo de cada pregunta:

Pregunta 1: ¿Qué relación existe entre el deslizador “a” y el triángulo?

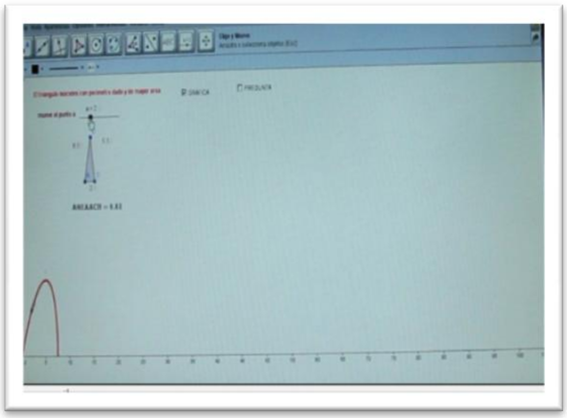
Propósito: Evidenciar que el deslizador “a” afecta de manera concreta al triángulo cuando se desplaza.

> Lo que sucede es que al deslizar el punto a hacia el lado derecho queda una linea horizontal entre el punto A B, y hacia el lado izquierdo una linea vertical entre A y C.
> Al aumentar o disminuir el punto a, este va ser igual a la longitud de la recta AB

> medida que se va deslizando el punto a va cambiando el triangulo su forma y su área.

> mover el punto a, disminuye y aumenta valor de sus lados.

Cuando se les presentó la aplicación en Geogebra a los estudiantes, en su mayoría colocaron el puntero del mause sobre la línea y al picar se dieron cuenta que aparecía la mano indicando que se podía mover, al hacerlo el dibujo empezó a cambiar, pero dicho cambio no se producía de manera desordenada, cambiaba de más a menos y viceversa, ellos comentaron que al mover el deslizador a el triángulo cambiaba su forma.



Esto indicó que efectivamente existía una relación entre el punto a y la forma del triángulo, este hecho se presentó en la mayoría de los grupos.

Pregunta 2: ¿Qué relación existe entre la longitud de la base del triángulo y las coordenadas del punto E?

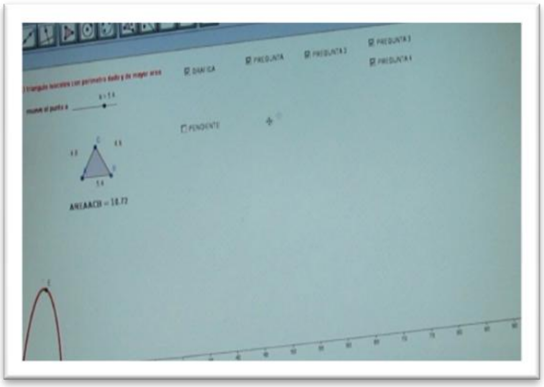
Propósito: Explorar si el estudiante encuentra una relación entre una distancia y un punto situado en el plano.

Respuestas:

la relacion que existe entre la longitud de la base del triangulo y las coordenadas del punto E es que en un punto especifico el punto E decrece y la base del triangulo siempre aumenta.

Al mover el deslizador encontramos que el valor de la base del triangulo y la coordenada x del punto E van a ser iguales al valor del punto a. El punto E tiene el recorrido de una parabola cada vez que cambia de valor

CAMBIA EL AREA SEGUN EL PUNTO

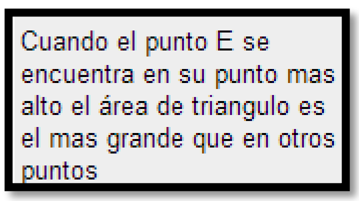


Los estudiantes manifestaron que de acuerdo a la posición del punto D en la gráfica la base se hacía más pequeña o más grande esto indica que los grupos encontraron una evidencia fuerte que conecta la posición de un punto a la base del triángulo, al parecer empiezan a intuir el concepto de punto máximo de una gráfica, y el valor de una distancia entre dos puntos.

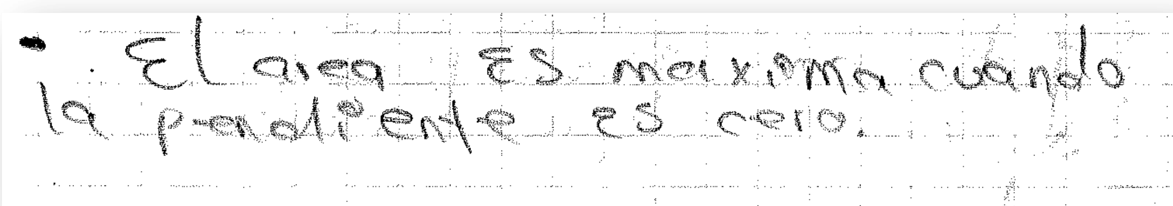
Pregunta 3: A partir de la ubicación del punto D sobre la gráfica ¿Qué relación existe entre la ubicación del punto D y el área máxima del triángulo?

Propósito: Indagar si el estudiante puede encontrar un punto de la gráfica donde el triángulo tiene área máxima.

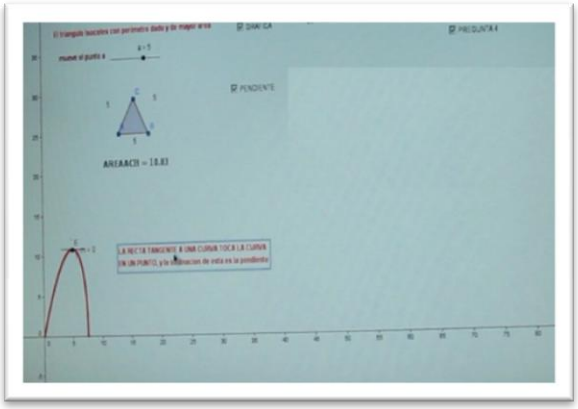
Respuestas:



Cuando el punto E se encuentra en su punto mas alto el área de triangulo es el mas grande que en otros puntos



• El area es maxima cuando la pendiente es cero.

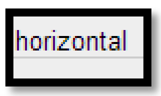


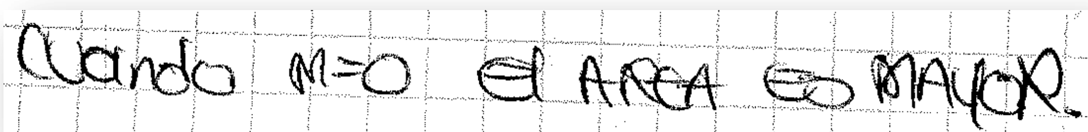
Para esta pregunta uno de los estudiantes manifestó que la relación era pendiente cero esto quiere decir que afianzó su concepto de máximo y logra encontrar la relación que existe entre el máximo del área y la pendiente de una curva que representa lo que pasa en el triángulo.

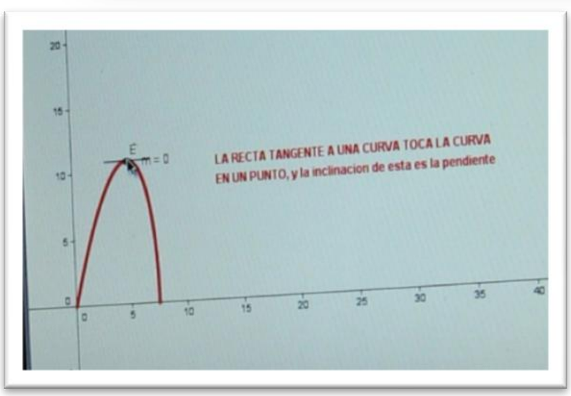
Pregunta 4: Cuando el triángulo alcanza su área máxima ¿cómo es la recta tangente a la curva en el punto D?

Propósito: indagar sobre los conceptos de pendiente y tangente, la relación que existe entre una y la otra.

Respuestas:







Los estudiantes en su mayoría pudieron identificar el valor de la pendiente y observaron que éste correspondía a cero cuando el área del triángulo es el más grande, según lo manifestado por varios estudiantes que muestran con el puntero que en ese punto existe el área máxima y no para otro punto.

Se concluye que evidentemente la pregunta anterior ayuda a mostrar de forma más clara esta correspondencia y el aplicativo como es dinámico permite manipular diferentes posiciones de la pendiente haciendo que ésta sea cero y comparan dicho resultado con el área del triangulo.

Pregunta 5: ¿Cómo es la inclinación (pendiente) de la recta tangente a la curva en el punto D cuando el triángulo alcanza el área máxima?

Propósito: En esta pregunta se busca establecer si el estudiante puede relacionar la inclinación de la recta con el área.

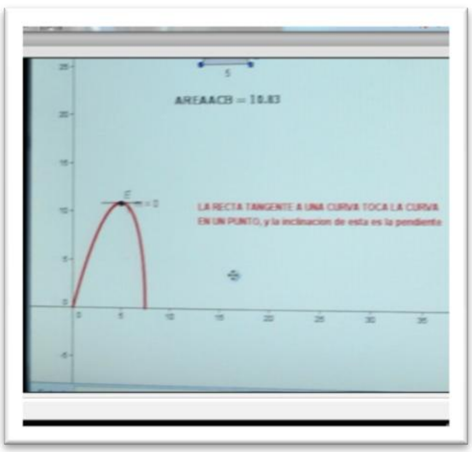
Respuestas:

La pendiente es cero

La pendiente es positiva

la pendiente es constante

Los estudiantes coincidieron que la pendiente es constante e igual a cero en el área máxima esto hace concluir que los estudiantes estuvieron en capacidad de relacionar el área de una figura con la pendiente y que está pendiente es cero cuando el área es máxima, según lo dicho por dos estudiantes es constante y lo relacionan con un concepto visto y es el concepto de función constante.

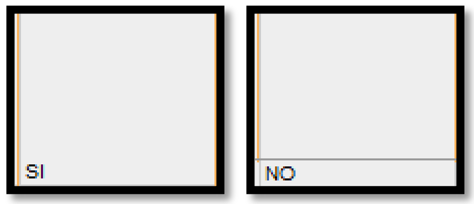


4.2. ACTIVIDAD 2

Pregunta 1: ¿Es compresible el problema?

Propósito: Determinar si el estudiante ha comprendido la actividad implica el enunciado del problema.

Respuestas

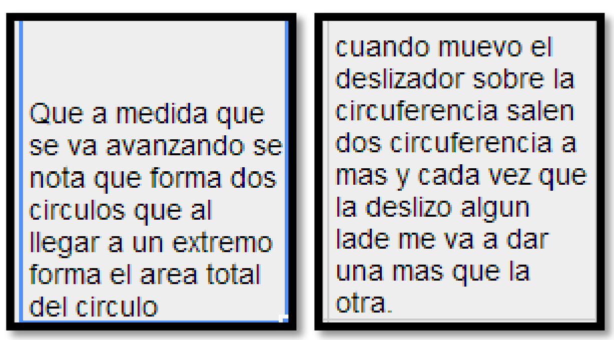


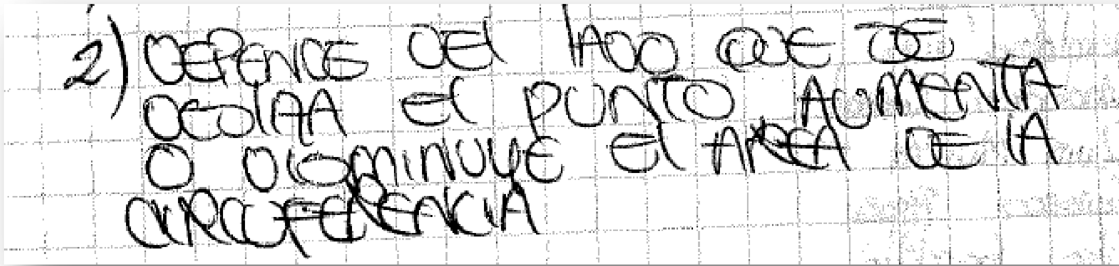
Al realizar la lectura del problema uno de los grupos de estudiantes dijo que comprendía el problema y continuó con la actividad, el segundo grupo afirmó que no entendía el enunciado y el docente intervino para aclarar el enunciado y explicar la actividad que solicitaba dicho enunciado.

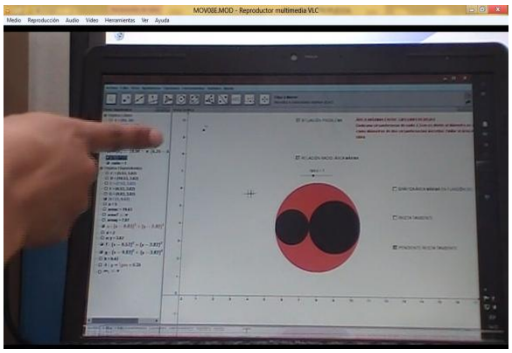
Pregunta 2 ¿Al mover el deslizador que observas sobre las circunferencias?

Propósito: notar las percepciones de los estudiantes sobre el cambio en las circunferencias y en el área solicitada.

Respuestas:




2) DEPENDE DEL LADO QUE SE DESLIZA EL PUNTO AUMENTA O DISMINUYE EL AREA DE LA CIRCUNFERENCIA



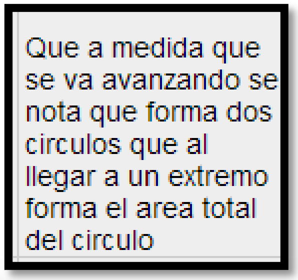
Al realizar el movimiento del deslizador, en uno de los grupos los estudiantes movieron el punto “*a*” a lo largo del deslizador de extremo a extremo y afirmaban que en estos puntos el área de una de las circunferencias inscritas coincidía con el área de la circunferencia mayor.

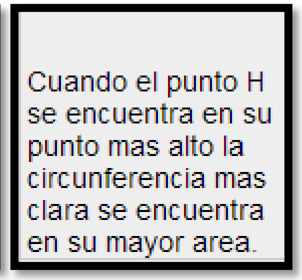
En esta pregunta se cuestionó sobre la relación existente entre el movimiento del punto “a” sobre el deslizador y el cambio en la construcción, a lo cual los estudiantes concluyeron que cuando el punto “a” se mueve las circunferencias en la construcción cambian, es decir que logran identificar una relación de dependencia directa entre las dos variables aunque aún no hablan en términos de las áreas.

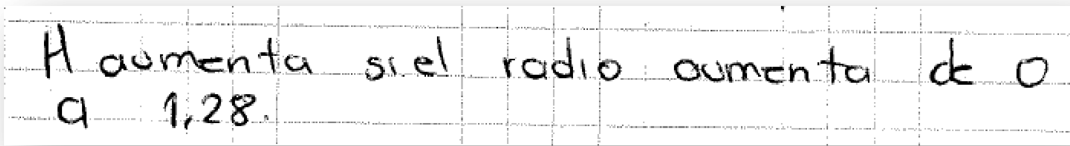
Pregunta 3 ¿Qué relación puedes encontrar entre las coordenadas del punto H y las variables del problema?

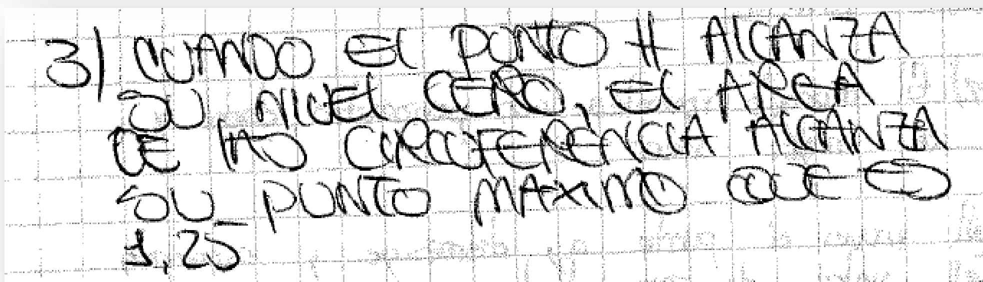
> *Propósito:* en esta pregunta se busca que los estudiantes observen la relación existente entre un punto en el plano y la situación, en especial que observen que cuando el área solicitada es máxima el punto se encuentra en un máximo de su recorrido respecto del eje y.

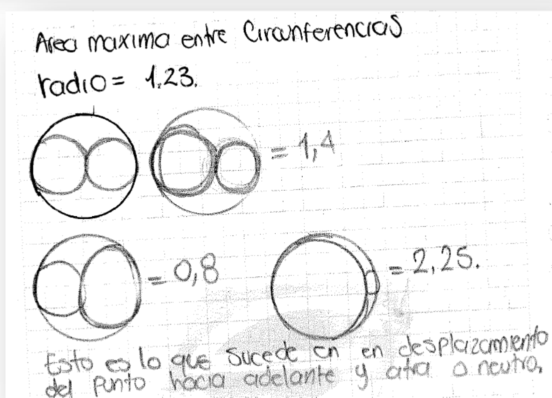
Respuestas:


Que a medida que se va avanzando se nota que forma dos circulos que al llegar a un extremo forma el area total del circulo


Cuando el punto H se encuentra en su punto mas alto la circunferencia mas clara se encuentra en su mayor area.


H aumenta si el radio aumenta de 0 a 1,28.


3) CUANDO EL PUNTO H ALCANZA SU NIVEL CERO, EL AREA DE LAS CIRCUNFERENCIA ALCANZA SU PUNTO MAXIMO QUE ES 1,25



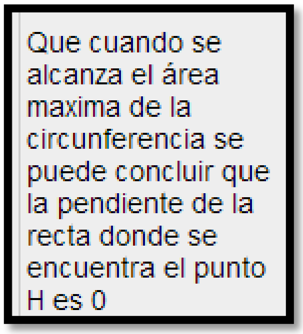
En la tercera pregunta, uno de los grupos de estudiantes determinó que la relación entre el punto H y las variables del problema es que cuando una de las circunferencias “oscuras” alcanza su mayor tamaño y que en este momento el punto H desaparece.

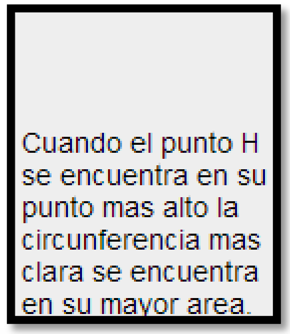
Por otra parte, los otros grupos concluyeron que cuando las dos circunferencias “oscuras” son iguales, el punto H se encuentra en la parte más alta y se puede decir que este grupo alcanzó a vislumbrar la solución del problema aunque la variable área aún no es tenida en cuenta.

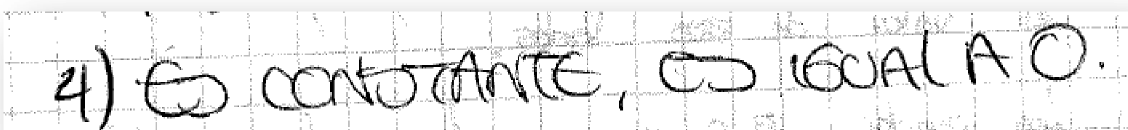
Pregunta 4 ¿Qué relación puedes observar entre la posición del punto H y la solución del problema?

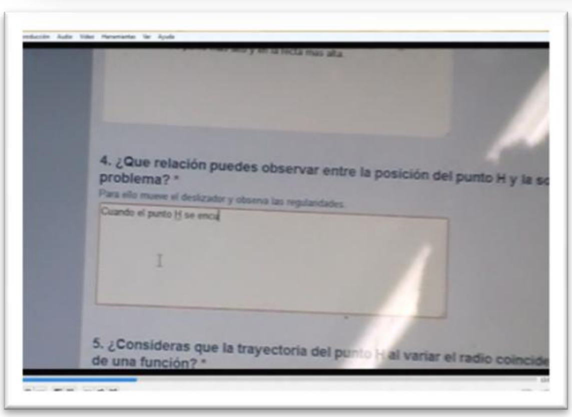
Propósito: Luego que los estudiantes han encontrado la relación que existe entre el punto H y la situación, se procura guiar la observación a la posición del punto H y la relación con el área máxima requerida.

Respuestas:


Que cuando se alcanza el área maxima de la circunferencia se puede concluir que la pendiente de la recta donde se encuentra el punto H es 0


Cuando el punto H se encuentra en su punto mas alto la circunferencia mas clara se encuentra en su mayor area.


4) ES CONSTANTE, ES IGUAL A 0.



En esta pregunta los dos grupos coincidieron en que la mayor área se alcanza cuando el punto H se encuentra en la parte más alta y uno de los grupo que ya había visualizado la recta tangente afirmó que “cuando el área es máxima la pendiente de la recta en H es cero” lo cual es una de las afirmaciones con las que se puede decir que el estudiante visualiza la relación de la solución del problema con una característica particular de la recta tangente.

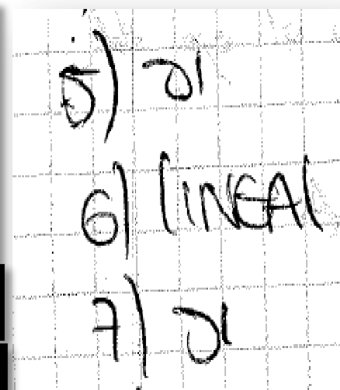
Preguntas 5 a 7

5. ¿Consideras que la trayectoria del punto H al variar el radio coincide con la gráfica de una función?
6. Si la respuesta a la pregunta anterior fue afirmativa, ¿Qué tipo de función ilustraría la trayectoria del punto H?
7. Al observar la gráfica de la trayectoria del punto H, ¿coincide con tu conjetura de si es función y del tipo de función que representa?

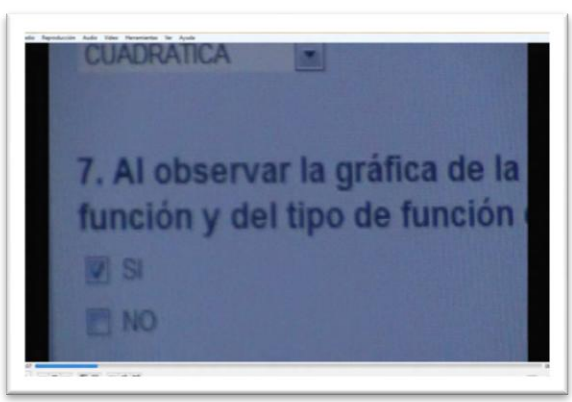
Propósito: Cuestionar a los estudiantes sobre la posibilidad de que la gráfica presentada en el entorno fuese la gráfica de una función y sobre el tipo de función que podría ser y de esta manera que ellos lograran visualizar que la relación que ellos habían determinado entre el punto H y la solución del es de tipo funcional.

Respuestas:

5. ¿Consideras que la trayectoria del punto H al variar el radio coincide con la gráfica de una función?	6. Si la respuesta a la pregunta anterior fue afirmativa, ¿Que tipo de función ilustraria la trayectoria del punto H?	7. Al observar la gráfica de la trayectoria de H, ¿Coincide con tu conjetura de si es función y del tipo de función que representa?
SI	TRIGONOMÉTRICA	SI
SI	CUADRÁTICA	SI



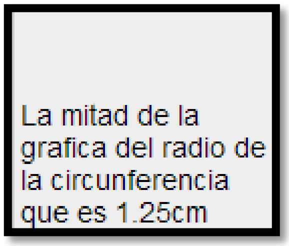
Los dos grupos de estudiantes concluyeron que la gráfica de la trayectoria del punto H representa una función aunque uno de los grupos llegó a esta conclusión luego de responder la siguiente pregunta sobre el tipo de función que sería.

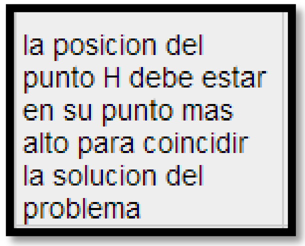


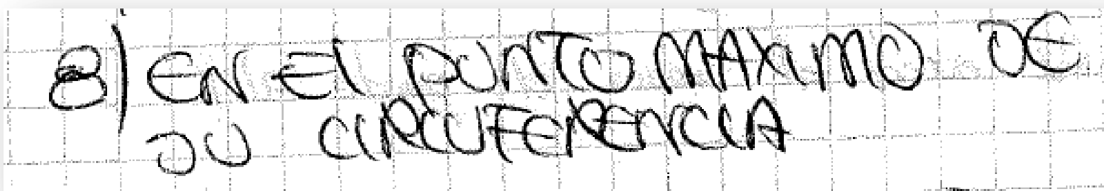
Pregunta 8 ¿En qué posición debe estar H sobre la gráfica para coincidir con la solución del problema?

Propósito: con esta pregunta se pretende que los estudiantes relacionen directamente la solución del problema con el punto máximo de la curva.

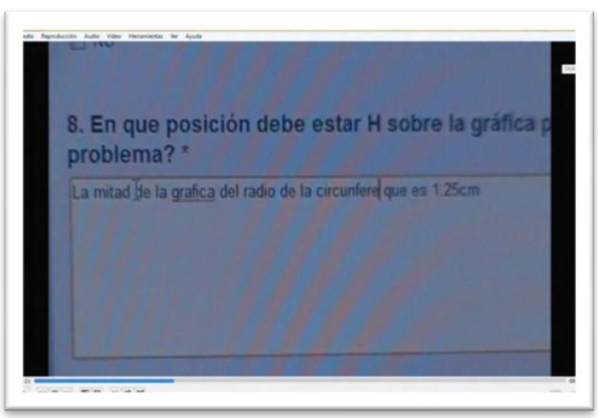
Respuestas:







En la pregunta 8, uno de los grupos acertó en determinar el valor de la variable independiente en el que se encuentra la solución del problema y los otros indican que el punto H debe estar en el lugar más alto para que coincida con la solución.

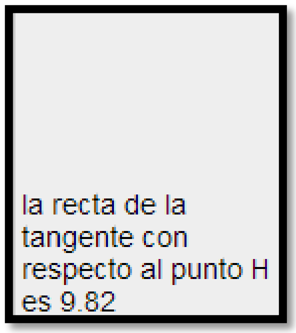


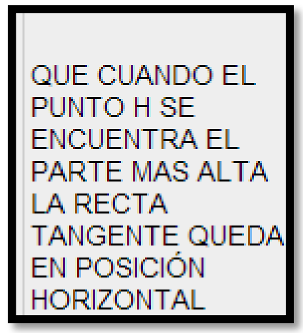
Estas respuestas indican que los estudiantes mediante la observación de la variación de las magnitudes involucradas en el problema, han logrado relacionar el punto máximo de una curva con la solución de dicho problema y además lograron resolver el problema mediante el mismo proceso.

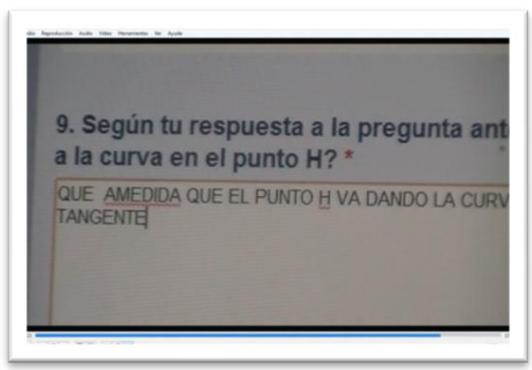
Pregunta 9 ¿Qué puedes decir de la recta tangente a la curva en el punto H?

Propósito: El objeto de esta pregunta es que los estudiantes caractericen la recta tangente a la curva en el punto de la curva en donde se encuentra la solución del problema. Esta caracterización se espera que sea la determinación que la recta tangente a la curva en el punto en cuestión tiene pendiente cero.

Respuestas:





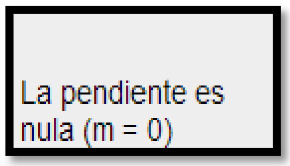


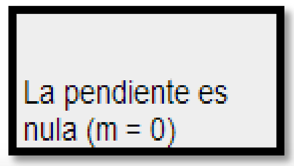
Basados en la respuesta anterior, uno de los grupos de estudiantes logro determinar el valor de la máxima área el cuál es la solución del problema de optimización, mientras que el otro caracterizó la recta tangente en el punto máximo de la curva como una recta horizontal indicando esto que se ha alcanzado una relación entre la solución del problema de optimización y la característica especial de la recta tangente a la curva; este mismo grupo, antes de escribir la respuesta definitiva manifestó que cuando "*el punto H va dando la curva*" existe un cambio en la recta tangente lo cuál indica que los estudiantes han visualizado la noción de crecimiento y decrecimiento en la gráfica y una relación de estas nociones con la recta tangente a la curva.

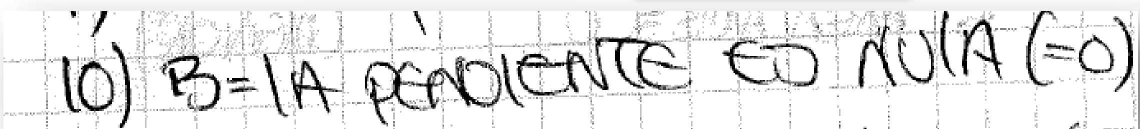
Pregunta 10 ¿Cómo es la pendiente de esta recta en el punto H cuando las coordenadas de éste coinciden con la solución del problema?

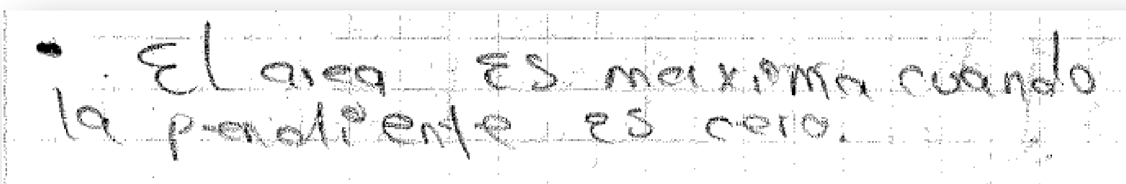
Propósito: La última pregunta tiene como objetivo que los estudiantes relacionen la solución del problema de optimización con la recta tangente de pendiente cero, ya sabiendo que esta recta se presenta en un punto máximo de la curva. Este aspecto es esencial ya que de aquí se puede dar sentido al proceso algebraico de igualar la derivada de una función a cero.

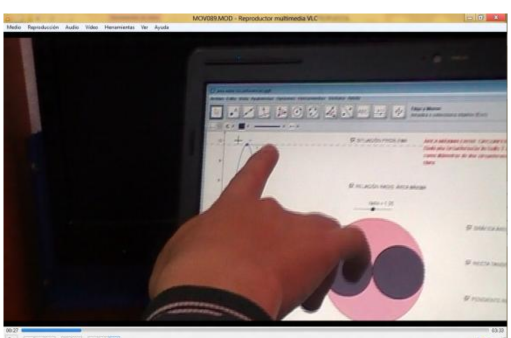
Respuestas:


La pendiente es nula (m = 0)


La pendiente es nula (m = 0)


10) B=LA PENDIENTE ES NULA (=0)


• El area es maxima cuando la pendiente es cero.

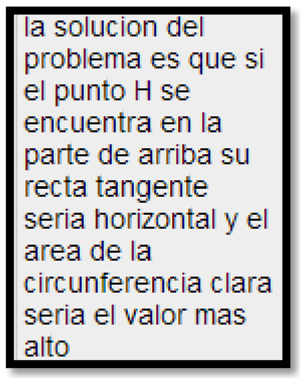


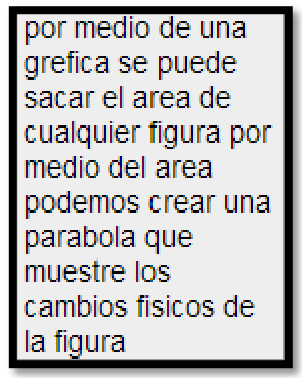
En esta pregunta, la cual relaciona la pendiente de la recta tangente con la solución del problema de optimización, los grupos de estudiantes indicaron que la recta tangente a la curva debe tener pendiente nula para que coincida con la solución del problema.

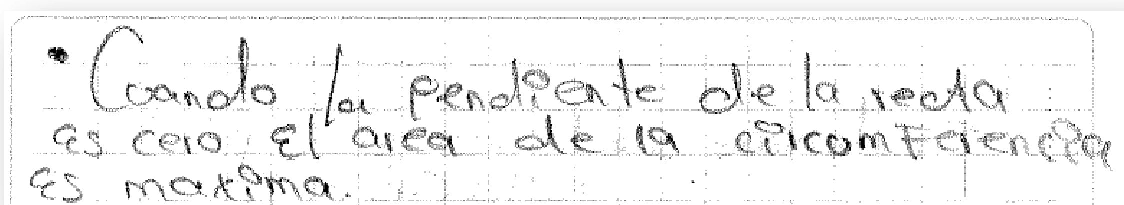
En el momento en que los estudiantes estaban respondiendo a la pregunta gestualizaban con sus manos indicando en la pantalla del computador que la recta tangente a la curva en este punto es horizontal.

Conjeturas de los estudiantes

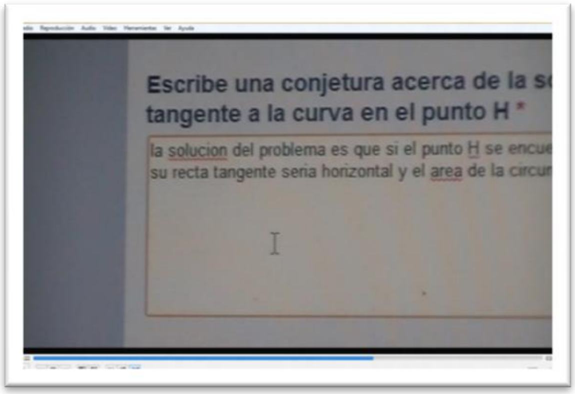
La actividad de generación de conjeturas tiene como propósito que los estudiantes exterioricen las imágenes mentales que lograron generar durante el desarrollo de la actividad, a continuación se presentan:


la solucion del problema es que si el punto H se encuentra en la parte de arriba su recta tangente seria horizontal y el area de la circunferencia clara seria el valor mas alto


por medio de una grefica se puede sacar el area de cualquier figura por medio del area podemos crear una parabola que muestre los cambios fisicos de la figura


• Cuando la pendiente de la recta es cero el area de la circomferencia es maxima.

Al analizar las conjeturas de los estudiantes, se puede deducir que uno de los grupo alcanzó a visualizar la relación entre la solución del problema de optimización y la recta horizontal que es tangente a la curva mientras que el otro grupo aunque no conjeturo sobre la relación entre solución del problema y la tangente a la curva, si logró visualizar que una función puede caracterizar el problema dado.

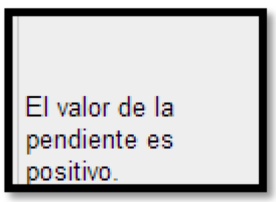


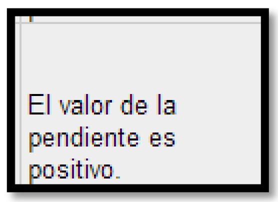
4.3. ACTIVIDAD DE GENERALIZACIÓN

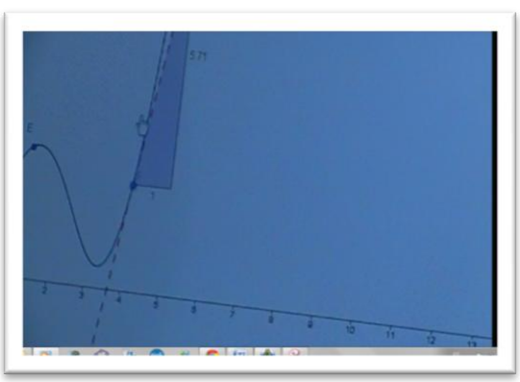
Pregunta 1. ¿Cómo es el valor de la pendiente cuando la función es creciente?

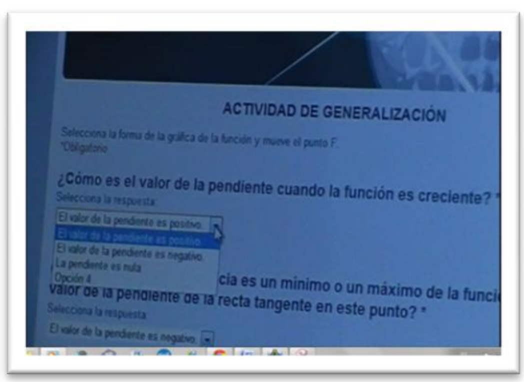
Propósito: el propósito de esta pregunta es dirigir la atención de los estudiantes hacia la relación entre la pendiente de la recta tangente a la curva y su forma.

Respuestas:







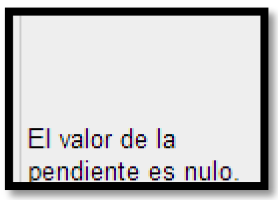


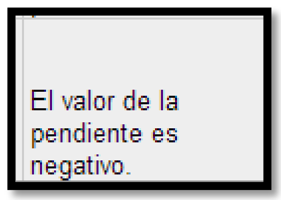
Los estudiantes concluyeron con alguna facilidad que la pendiente de la recta tangente cuando la función es creciente tiene valor positivo, porque al desarrollar la actividad inmediatamente colocaron el punto de tangencia en intervalos en donde la función es creciente lo cual indica que tienen una buena noción de función creciente a partir del análisis de la grafica.

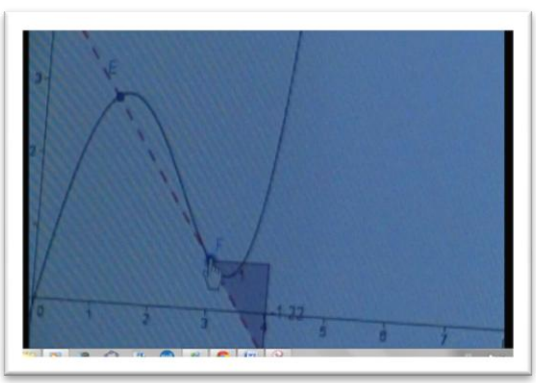
Pregunta 2. Cuando el punto de tangencia es un mínimo o un máximo de la función ¿cómo es el valor de la pendiente de la recta tangente en ese punto?

Propósito: Que los estudiantes, a partir de la experimentación que consiste en ubicar el punto de tangencia en un punto máximo y mínimo de la curva que él ha elegido y que puede cambiar, concluya que la pendiente de la recta tangente en estos puntos siempre es cero.

Respuestas:







En el transcurso de solución a esta pregunta los estudiantes en general manifestaron verbalmente que cuando la función "va hacia arriba" entonces el valor de la pendiente de la recta es positivo mientras que cuando "va hacia abajo" entonces es negativo.

Luego de esto la mayoría de los grupos concluyeron que en los puntos máximos o mínimos de la curva el valor de la pendiente de la recta tangente es nulo, y el grupo que contesto que es negativo llego a esta conclusión porque no logró colocar el punto exactamente en los puntos máximos o mínimos de la curva. Con este grupo se trabajó posteriormente invitándolo a que observara los valores que tomaba la pendiente de la recta en cercanías al punto mínimo o máximo y lograron determinar que el valor de la pendiente de la recta es cero. En esta parte del ejercicio se logró observar que los estudiantes se detienen en el momento en el que encuentran un valor numérico y no continúan con la experimentación.

Pregunta 3. Al estar la gráfica asociada con un problema de optimización, ¿Qué relación tienen la pendiente de la recta tangente a la función en un punto dado con la solución del problema de optimización?

Propósito: Que los estudiantes relacionen esta actividad con las dos actividades anteriores y que al encontrar esta relación lleguen a determinar que el punto máximo o mínimo de la función determina la solución del problema de optimización y que en este punto la pendiente de la recta tangente a la curva es cero.

Respuestas:

> Yo pienso que en los problemas de optimización como lo son los los problemas de áreas, la relación que existe con la recta pendiente es que cuando esta se encuentra en un punto máximo o en un punto mínimo nos da el valor mas grande o mas pequeño de dichas áreas.

> Que en la solucion del problema de optimizacion dan los mismo valores de la pendiente en los puntos maximos y minimos de la funcion pero siendo uno positivo y el otro negativo

Para terminar, los estudiantes concluyeron que la solución de los problemas de optimización se encuentra en los puntos máximos o mínimos de las curvas mientras que otro de los grupos intenta relacionar la pendiente de la recta con la solución de los problemas de optimización pero no logra ya que tan solo se acerca al punto máximo o mínimo en el software y no llega a ellos.

CONCLUSIONES

Durante el desarrollo de las actividades se pudo notar varias acciones de los estudiantes, relacionadas con su interacción con el software de geometría dinámica y con los conceptos relacionados como lo son la recta tangente a la curva, los problemas de optimización y los puntos máximos y mínimos. A continuación se presentan las conclusiones de mayor relevancia:

- El software modifica claramente el ambiente de aprendizaje ya que permite que los estudiantes manipulen las variables implícitas en las actividades e interactúen con los conceptos de una manera directa ya que a partir de la observación pueden visualizar la relación entre las variables y conjeturar posibles situaciones a partir de su comportamiento.

- El dinamismo del software permite que el estudiante visualice el cambio y facilita su comprensión, en especial en los problemas de optimización que son una situación de variables cambiantes, el software de geometría dinámica permite su modelación y facilita la comprensión de los de las situaciones.

- Hay una gran dificultad en la comprensión de los enunciados de los problemas ya que los estudiantes no logran abstraer la información consignada en ellos.

- Al manipular el modelo en Geogebra, los estudiantes lograron identificar relaciones entre los puntos máximos de las curvas y la solución del problema de optimización al igual que la relación entre los extremos y la pendiente de la recta tangente a la curva indicando esto que el modelo dinámico en Geogebra ha estimulado la visualización de estas regularidades.

- A pesar que evidentemente el software estimula la visualización de regularidades en los estudiantes estos tienen la tendencia, en especial en la resolución de los problemas de optimización, de detener análisis de la actividad cuando encuentran la respuesta, es decir que se empeñan mucho más en la determinación de numérica de la solución del problema que en la observación de regularidades.

- Es posible que la aplicación de las actividades con intervención directa del docente en la explicación de los enunciados y de las instrucciones a seguir, determine mejores resultados y potencialice aún más esta propuesta metodológica.

Ahora, con base en los objetivos específicos planteados se pueden determinar las siguientes conclusiones:

Objetivo específico 1: Diseñar una herramienta didáctica que mediante la visualización de la variación de magnitudes y su relación con la gráfica de una función, dirija al estudiante a relacionar la situación de cambio de la magnitud con la pendiente de la recta tangente a la curva de la función dada.

Como se expresó anteriormente, el desarrollo de las actividades logró que los estudiantes visualizaran la relación entre la solución del problema de optimización y el punto extremo de una curva y de este con la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto. Ellos afirmaron que la solución del problema de los problemas planteados se encuentra cuando el punto está en un extremo de la curva mostrada y además que la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto es nula. Dado lo anterior se concluye que el objetivo específico 1 se cumplió por que el diseño de las actividades consiguió que los estudiantes visualizaran las relaciones pretendidas.

Objetivo específico 2: Provocar que el estudiante mediante la visualización del cambio de magnitudes interrelacione el punto mínimo o máximo de una función con la solución de un problema de optimización y además que en dicho punto la pendiente de la recta tangente es cero.

Los estudiantes concluyeron en la mayoría de las preguntas relacionadas con el objetivo, que la solución del problema de optimización se encontraba cuando el punto se encontraba en un extremo de la curva y además que en este extremo la pendiente de la recta tangente a la curva es de pendiente cero.

BIBLIOGRAFÍA

Apostol, T. *Calculus* (Segunda ed., Vol. 1). (Ed, Ed.) Bogotá D.C., Colombia : Reverté.

Ávila Gómez, E., & Rojas Tovar, A. (diciembre de 2005). PROPUESTA DE TRATAMIENTO DIDÁCTICO PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN A TRAVÉS DE LA GEOMETRÍA DINÁMICA. Bogotá D.C., Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Córdoba, F., & Ardila, P. (2011). LA VISUALIZACIÓN EN MATEMÁTICAS CON AYUDA DE LA GEOMETRÍA DINÁMICA Y SUS APORTES A LA MODELACIÓN. *Encuentro de Geometría - UPN* .

De la Torre Gómez, A., Suescún Arteaga, C. M., & Alarcón Vasco, S. A. (2005). El Método de Máximos y Mínimos de Fermat. *Revista Lasallista de Investigación* , 31 a 37.

Hitt, F. (2003). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana , X* ("), 213- 223.

La recta tangente: notas históricas y actividades para el aula. (2009). *Suma* , 7-15.

Moreno Armella, L., & Waldegg, G. (Enero de 2002). Fundamentación Cognitiva del Currículo de Matemáticas. (M. d. Nacioimal, Ed.) *Memorias del Seminario Nacional Formación de Docentes sobre el Uso de Nuevas tecnologías en el Aula de Matemáticas* , 40 - 66.

Narro Ramirez, P. d., & Kanagúsico Muñoz, M. I. (2011). Aprendizaje de la Integral Definida en Estudiantes de Ingeniería. *ReCalc* .